网络信号协调的量子算法

Prof. Vinayak Dixit 和 Richard Pech

摘要

开发高效量子算法来解决经典难题，正受到越来越多的关注。网络信号协调（NSC）问题便是其中之一，且已知是 NP 完全问题。我们实现了 Grover 搜索算法来解决 NSC 问题，从而实现二次加速。我们进一步将该算法扩展至鲁棒 NSC 形式化，并分析其在常数和多项式精度鲁棒性参数下的复杂度。鲁棒 NSC 问题旨在确定是否存在占解空间一定比例（α）的解，使系统延误低于最大阈值（K）。本研究的主要贡献包括：(1) 开发用于 NSC 问题的量子算法；(2) 提出用于鲁棒 NSC 问题的量子算法，其迭代次数为 O(1/√α)，与搜索空间规模无关；(3) 将算法扩展至多项式精度鲁棒性，其中 α = α0/p(N) 随网络规模呈多项式衰减，同时保留二次量子加速。我们通过模拟和在实际量子计算机上的运行，展示了该算法的实现。

1. 引言

过去三十年间，量子计算与量子算法领域的研究从理论上证明了通过“量子加速”获得潜在收益的可能性（Montanaro，2016年）。从根本上说，量子计算机与经典计算机的不同之处在于，它们能够利用叠加态、纠缠和干涉等量子力学性质来加速计算。

大量开创性的理论工作表明，依赖量子逻辑门的量子算法能够为经典计算机带来显著加速（Deutsch 和 Jozsa，1992年；Simon，1994年；Shor，1994年；Dürr 和 Høyer，1996年；Bernstein 和 Vazirani，1997年；Grover，1997年）。其中最著名的算法之一是 Shor（1994年）提出的算法，该算法证明量子计算机能够以指数级快于经典计算机的速度解决素因数分解问题，并对密码学产生重大影响。尽管这一结论仍存在一些争议，但近期“量子霸权”已在一项问题上得到展示：53量子比特的 Sycamore 处理器仅用200秒就完成了该问题，而经典超级计算机需要10,000年才能完成（Arute 等，2019年）。尽管量子计算机的性能可能比经典计算机高出数量级，Aaronson（2008年）仍将 NP 完全问题确定为量子计算机的局限之一。

城市交通信号控制是交通工程中一个复杂而关键的问题。优化交叉路口网络中交通信号灯的配时，可以显著减少交通拥堵、出行延误和排放。然而，该问题已知在计算上是困难的。Gartner 等人（1975）针对“网络协调问题”提出了一种混合整数方法。Dauscha 等人（1985）证明了一个类似的循环调度问题是 NP完全的。Serafini 和 Ukovich（1989）、Hassin（1996）以及 Wunsch（2008年）证明 NSC 问题是 NP完全的。Hassin（1996）通过将其归约为最小簇问题证明了所提出的问题是 NP完全的，而最小簇问题等价于最大割问题（Garey 和 Johnson，1978）。

2. 网络信号协调

网络信号协调问题被表示为一个图问题。考虑图$G = (V, A)$，其数学规划可表示为：

$$\min \sum_{(i,j)\in A} h_{ij}(\mu_i - \mu_j), \qquad [1]$$

其中延误函数 $h^{\mu_j} \pm C$ $_{ij}$ · $\mu_i\ \mu_j\ \forall i\ j \in N$ $i\ j\ \in A$ $_{ij}\ \mu_i - \mu_j\ =\ _{ij}\ \mu_i -$

( ) 以 C 为周期呈周期性，使得对所有偏移量 ， ，以及 (,)，均有 h ( ) h ( )。在复杂度理论中，优化问题被归约为等价的判定问题。对于网络信号协调优化问题，该判定问题涉及确定是否存在一组偏移量 μ，满足以下条件：

$$\exists \mu \in N^V \ \ | \ \sum_{(i,j)\in A} h_{ij}(\mu_i - \mu_j) \le \mathbf{K}, \qquad \mathbf{K} \in N^+ \qquad [2]$$

公式 1 中给出的优化问题以及公式 2 中的判定问题均以节点偏移量变量来表述。本文针对该判定问题构建了一个量子预言机。

然而，也存在基于弧偏移量变量的等价表述（例如参见 Gartner and Little 1975、Gartner et al. 1975、Importa and Sforza, 1982 以及 Wunsch, 2008年）。需要加入一项附加约束，以确保图中任一环路上的偏移量之和为信号周期（周期）长度 C 的整数倍。鉴于图中的每一个环路都可以由图的环路基（Ξ）的某个子集生成，而该环路基的规模为 $|A| - |V| + 1$ 个环路。我们只需 $|A| - |V| + 1$ 个约束即可满足环路约束。Paton（1969）提出了一种高效的经典算法，其所需时间与空间关于图中节点数（$|V|$）呈多项式关系，用以确定完整的环路基集合（Ξ），该集合包含 $|A| - |V| + 1$ 个元素。因此，给定一组偏移量 ϕ，可行性可在 $O(|A| \cdot (|A| - |V| + 1))$ 内检验。然而，寻找最优解仍然是一个 NP 完全问题，需要检查整个解空间。

为了开发高效的量子算法，我们需要为网络信号协调问题构造总延迟的量子预言机（$\sum h^{ij}(\mu_i - \mu_j)$ $_{(i,\ j)\ \in A}$ ）。方程 1–2 所示的基于节点的表述更适合用于构造预言机，因为它不像方程 4 那样受到额外周期性约束。一般性不失，我们在本文其余部分采用基于节点的表述。

2.1 可行性函数

网络协调问题的定义要求满足方程 2 中的判定条件。因此，对于给定的一组偏移量 $\mu \in N^V$ ，我们针对方程 2 构造可行性函数 κ ，使得：

$$\kappa(\mu) = \begin{cases} 1 & if \sum_{a\in A} h_a(\mu_i - \mu_j) \le \mathrm{K} \ \ \forall \mu_i \in \mu \text{ and } (\mathrm{i,j}) \in \mathrm{A} \\ 0 & else \end{cases} \qquad [3]$$

这将在量子例程中实现，用于解决 NSC 问题。

2.2 网络信号协调量子算法

网络协调问题的量子例程依赖格罗弗算法（Grover，1997；另见尼尔森和庄，2019年），以搜索是否存在能够使总延迟低于给定阈值的解。整体方法包括实现预言机，然后通过可行性函数实现 Grover 搜索。该算法概述如下，见图1。

1) **初始化**：每个节点的偏移量都由一个量子寄存器表示，并通过对每个节点寄存器应用哈达玛门，将其初始化为均匀叠加态。我们还有三个额外的寄存器：边延迟（d）、存储总和 (s) 的寄存器，以及可行性寄存器（f）。

$$\frac{1}{\sqrt{C^{|V|}}}\sum_{x=0}^{C^{|V|}-1}|\mu_0,\mu_1\dots\mu_{|V|-1}\rangle\ |0\rangle|0\rangle|0\rangle \qquad [4]$$

2) 对每条边（i,j）应用延迟预言机 $\in A$，由 $\mathrm{h}ij(\mu_i-\mu_j)$ 给出。此操作逐条边单独执行，所有延迟输出均存储在各自的寄存器中。

$$\frac{1}{\sqrt{C^{|V|}}}\sum_{x=0}^{C^{|V|}-1}|\mu_0,\mu_1\dots\mu_{|V|-1}\rangle|h_{|A|-1}\rangle|0\rangle|0\rangle \qquad [5]$$

3) **总延迟**：此过程将与边相关的延迟相加，并按顺序执行。

a. 应用算术加法器组件，将相关边延迟寄存器中的值相加，并将结果存储在求和寄存器中。由于使用了量子加法门，只需将该操作表示为二进制运算即可简化处理。每个延迟输出结果都会暂时存储为一种格式，以便在临时格式化的延迟输出与求和寄存器之间进行 n 位加法。也就是说，在延迟输出前面附加辅助 0 量子比特，使量子比特总数与求和寄存器相匹配。为了完整实现加法，还应加入一个进位量子比特。此外，可以通过注意图问题中的边数，预先确定求和寄存器的大小。对于第一条边，与 0 相加会得到第一条边的延迟

$$\frac{1}{\sqrt{C^{|V|}}}\sum_{x=0}^{C^{|V|}-1}|\mu_0,\mu_1\dots\mu_{|V|-1}\rangle|h_{|A|-1}\rangle|h_0\rangle|0\rangle \qquad [6]$$

b. 要将所有边的延误相加，请对所有边（$i\in A$）重复步骤 2.1 和 2.2。

$$\frac{1}{\sqrt{C^{|V|}}}\sum_{x=0}^{C^{|V|}-1}|x_0,x_1\dots x_{|A|-1}\rangle|h_{|A|-1}\rangle\left|\sum_{i\in A}h_i\right\rangle|0\rangle \qquad [7]$$

对于一个量子比特的情况，可以通过先对延误输出应用受控非门，再对格式化后的延误输出和求和应用加法器，最后对受控非门取反来执行各个加法操作，从而仅改变求和寄存器。求和寄存器的大小（以及用于格式化延误输出的辅助量子比特数量）为 $\varepsilon=\mathrm{floor}(log_2(|A|))+1$。下方给出了一个示例电路来演示这一过程。用于执行该算法的代码中使用了半加器，因为这样可以避免加法所需的额外量子比特。

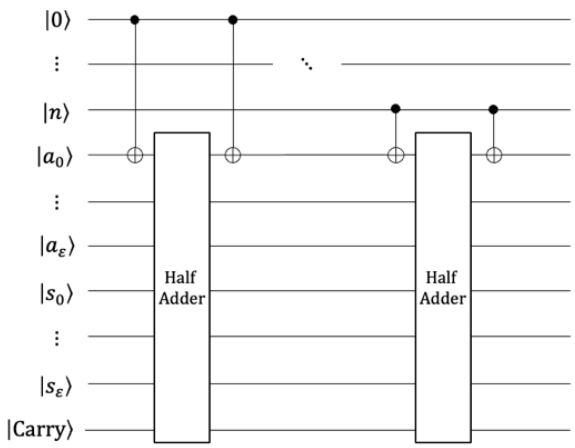


图1：顺序加法的量子电路

4) **可行性函数**：为确定延误总和小于阈值 K 时的可行偏移量，我们应用一个整数比较器门，将求和运算符与给定的某个整数值进行比较。如果满足阈值条件，该门就会将寄存器翻转为 1。

$$\frac{1}{\sqrt{C^{|V|}}}\sum_{x=0}^{C^{|V|}-1}\left|x_0, x_1 \dots x_{|A|-1}\right\rangle\left|h_{|A|-1}\right\rangle\left|\sum_{a\in A} h_a\right\rangle|\kappa\rangle \qquad [8]$$

5) **Grover 搜索：**然后，我们应用格罗弗算法来寻找满足阈值条件的输入配置。这需要在可行性寄存器上执行相位翻转，以“标记”良好状态，再对之前的所有操作取逆，使除节点寄存器之外的一切都恢复为 0。随后应用 Grover扩散算子来放大被标记的良好状态，以此作为一种高效的解搜索方法。需要注意的是，在每次 Grover 迭代中，必须先应用预言机，并在应用扩散算子之前将其完全反计算（逆运算）。具体而言，在对可行性寄存器进行相位翻转之后，所有中间计算——延迟预言机评估、顺序加法以及比较器——都必须反向运行，以将辅助寄存器恢复到初始状态。这一反计算步骤是必要的，因为格罗弗算法要求预言机仅作为作用于节点寄存器的相位预言机，且不与辅助量子比特保留任何纠缠。因此，每次 Grover 迭代的有效电路深度约为预言机深度的两倍，并且在计算过程中必须保留（而非测量）所有中间寄存器。

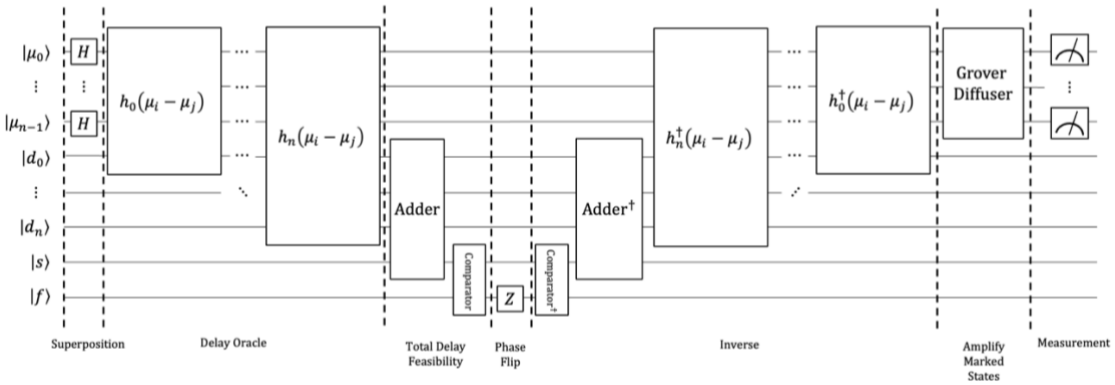


图2：鲁棒网络信号协调问题的量子电路

2.3 复杂度

命题1（NSC 的二次加速）。 对于周期长度为 C 的图 G = (V, A) 上的 NSC 判定问题，基于 Grover 算法的量子算法使用 $O(C^{\frac{|V|}{2}})$ 次预言机查询即可找到可行偏移量分配（若存在），而经典穷举搜索需要 $O(C^{|V|})$ 次。每次预言机查询的门复杂度为 O(|A| log |A|)。

步骤 2 中的顺序加法器复杂度为 $O(|A|^2)$，因为每条边都需要执行一次加法器。具体而言，|A| 次加法分别作用于大小为 ε ∃⌊log2 |A|⌋ + 1 的求和寄存器；使用半加器链时，每次加法需要 O(ε) 个门，因此总复杂度为 O(|A| × ε) = O(|A|2)。如果图中每个顶点的偏移量用 n 个量子比特表示，那么仅节点寄存器就需要 $n|V|$ 个量子比特。除了这些节点寄存器量子比特外，整个电路还需要 |A| 个量子比特用于延迟寄存器（每条边一个），求和寄存器和辅助寄存器各需要 $\lfloor log_2|A| \rfloor + 1$ 个量子比特，另需一个进位量子比特、一个可行性寄存器量子比特，以及 $\lfloor log_2|A| \rfloor$ 个比较器辅助量子比特。因此，量子比特总数约为 n|V|+ |A| + 3⌊log2 |A|⌋ + 4。不过，该算法中开销最大的部分是 Grover 搜索，它可提供二次加速 $2^{n|V|/2}$，其中 $2^{n|V|}$ 是总搜索空间的大小。请注意，这表示 Grover 迭代的次数；每次迭代都需要执行完整的预言机电路，因此总门复杂度为 $O(\sqrt{N} \times C_{oracle})$，其中 C_{oracle} 是单次预言机求值的开销。

3. 背景与鲁棒网络信号协调形式化

由于交通流具有动态和随机的特性，并且存在需求波动、交通事故和天气等各种不确定性，NSC 问题变得更具挑战性。鲁棒交通信号控制问题旨在优化交通信号系统的性能（例如，最大限度地减少延误、排放或队列长度），同时确保系统在一系列不确定条件下的可靠性和有效性。传统信号系统通常依赖简化模型或固定配时，无法很好地适应现实世界的变化（Wei 等，2021）。近期的进展包括采用能够考虑不确定性的鲁棒优化技术。鲁棒 NSC 优化问题可形式化如下：

1. **极小极大形式**表示为 $\min_{x \in X} \max_{u \in U} f(x,u)$，其中，$x$ 为信号控制变量（例如，绿灯时间、相位顺序），u：不确定交通参数（例如，到达率、转向比例），$f(x,u)$为目标函数（例如，网络总延误）。此形式会找出信号方案 x，使其在不确定集 U上实现最差情况下的目标值最小化。（Farokhi 与 Langbort，2013；Osorio 与 Chong，2015）

2. **两阶段鲁棒优化**是一种常用方法，包括第一阶段：根据已知的历史数据或名义数据制定初始计划；以及第二阶段：根据实时不确定性调整或完善计划。这类问题通常被表述为双层混合整数线性规划（混合整数线性规划）（Han等人，2015；Zheng等人，2023；Qi等人，2023），以求得针对各种变化的鲁棒最优解。

3. **机会约束优化**表示为 $\min_{x \in X} f(x)$, Pr{h(x) $\leq \boldsymbol{T}\} \geq \boldsymbol{\eta}$, 适用于随机或噪声条件下的鲁棒最优性。它用于优化交通信号

以尽可能减少延误等目标，同时确保关键约束（例如最大队列长度）以较高概率（例如 95%）得到满足，从而在不确定交通状况下，将约束违反的风险控制在较小范围内。与针对最坏情况进行准备、往往过于保守的严格鲁棒优化不同，机会约束在性能与可靠性之间取得平衡，因此更适用于城市交通管理。相关技术通常采用基于样本的方法来近似约束满足情况。Kouvelas 等人（2014年）将机会约束模型预测控制（模型预测控制）用于实时信号控制；Zhao 和 Zhang（2018年）将其用于自适应交通信号控制；Kovács 等人（2016年）则将其 2014年 的研究扩展为适用于大型城市网络的分布式模型预测控制。

4. **元启发式算法**（如遗传算法（GA）、粒子群优化（PSO）和蚁群优化（ACO））因其灵活性而得到广泛应用。一项以温哥华为基础的案例研究将遗传算法应用于三个拥堵交叉口，使车辆延误减少了25%，排放减少了12%（Deshpande，2024）。Jovanović和Teodorović（2017年）将蜂群优化应用于孤立交叉口，并取得了有效成果。

5. **强化学习（RL）**，尤其是深度强化学习，因其能够通过与交通环境交互进行学习而日益受到重视。Wei等人（2021年）对近期强化学习模型和评估方法进行了综述，展示了基于强化学习的系统所具备的可扩展性和适应性。图神经网络使网络中强化学习智能体之间的协调成为可能。CoLight模型利用图注意力网络，在多智能体强化学习环境中优化信号协调（Ge等人，2022年）。鲁棒强化学习技术在训练期间让智能体接触扰动，从而提升其应对现实世界的变化的韧性（ORoojlooy等人，2020年）。混合方法结合了多种方法的优势。Dixit等人（2020年）和Yang等人（2024）将最大压力控制与深度强化学习相结合，以动态管理信号相位及其持续时间。

在量子计算领域，量子近似优化算法（QAOA）和变分量子本征求解器（VQE）等变分量子算法已应用于最大割和车辆路径规划等组合优化问题。量子退火方法（例如在 D-Wave 硬件上）也已用于探索交通信号优化。然而，这些方法针对的是不同的问题形式，并未提供基于Grover算法的方法所具有的可证明的最坏情况加速保证。据我们所知，本研究首次将格罗弗算法专门应用于 NP 完全的网络信号协调问题，并对其进行形式化复杂度分析。

鲁棒 NSC 被表述为一个机会约束优化问题，其中选择最优值，以确保设计域中具有足够的冗余。即：

$$\max_{S\subset C^{|V|}} |S| \quad | \sum_{(i,j)\in A} h_{ij}(\mu_i - \mu_j) \le K \quad \forall \mu \in S \qquad [9]$$

其中，$\mu = \{\mu_i\}_{\forall i \in V}$ 是解向量。等价的判定问题为：

$$\exists\ S \ \mid \ S = \left\{ \mu: \sum_{(i,j)\in A} h_{ij}(\mu_i - \mu_j) \le K,\ \mu \in C^{|V|} \right\} \text{ and } |S| \ge \delta \qquad [10]$$

本质上，方程 10 表明，可行偏移量集合 S 中总延迟小于 K 的元素数量应大于 δ。对于特殊情况，即 $\delta = 1$，该问题

可简化为标准的网络信号协调问题，该问题已知为 NP完全问题，可使用第2节所述的方法求解。然而，对于 $\delta = \alpha 2^n$ 的情况，其中 $0 < \alpha < 1$ 提供了一个鲁棒性指标，用于衡量可行集中的百分之多少应低于阈值。

3.1 复杂度

命题2（常数-α 鲁棒 NSC）。对于 $\delta = \alpha C^{|V|}$ 的鲁棒NSC判定问题，其中 $\alpha \in (0,1)$ 为固定的设计参数，量子算法需要进行 $O(1/\sqrt{\alpha})$ 次 Grover迭代才能找到可行解。每次迭代的成本为 C_{oracle}，因此总查询复杂度为 $O(C_{oracle}/\sqrt{\alpha})$，且与搜索空间规模无关。

为了以较高概率找到解，预言机和 Grover扩散算子（步骤2至5）需要运行 $\lceil \pi\sqrt{N}/4 \rceil$ 次（Grover，1997）。然而，如果我们需要确定是否至少存在 δ 个解，就需要运行 Grover 算子 $\lceil \pi\sqrt{N/\delta}/4 \rceil$，这等价于 $\lceil \pi\sqrt{1/\alpha}/4 \rceil$。由于 α 是鲁棒优化问题的一个常数设计参数，Grover迭代的次数为 $O(1/\sqrt{\alpha})$。也就是说，所需的 Grover迭代次数与搜索空间规模 N 无关，仅取决于设计参数α。这是一个值得注意的结果，因为这意味着迭代次数不会随网络规模增长。然而，每次迭代仍需要执行完整的预言机电路，而其门复杂度会随图规模呈多项式增长。第3.2节将把这一分析扩展到更现实的情形，即α 并非常数，而是随网络规模呈多项式衰减。

需要注意的是，鲁棒NSC判定问题（方程

10 | | ≥ ）询问的是 S ，

δ

这是一个计数问题，而非搜索问题。Grover算法可以找到解，但不能直接对解进行计数：找到一个可行偏移只能证明 |S| ≥ 1，不能证明 |S| ≥ δ。要正确回答这一判定问题，应采用量子计数（Brassard 等，2002），将格罗弗算子与量子相位估计结合起来，估算标记态的数量 M。量子计数可将 M 的加性误差控制在 ε 以内，并使用 O(√N / ε) 次查询；对于 ε = δ/2 = αN/2，这相当于 O(√(2/α)) = O(1/√α) 次查询。与搜索复杂度一样，当 α 为常数时，这一界与搜索空间大小 N 无关。

此外，评估鲁棒 NSC 的量子优势时，应将其与经典基准进行比较。如果所有偏移配置中有 α 的比例是可行的，那么经典随机采样每次试验成功的概率为 α，因此需要进行 O(1/α) 次随机采样，才能以高概率找到可行解。量子算法则将其降至 O(1/√α) 次 Grover 迭代，在采样步骤中实现二次加速。然而，当 α 被视为常数（固定设计参数）时，无论经典算法 O(1/α) 还是量子算法 O(1/√α)，相对于搜索空间大小 N 都只需常数次采样。因此，量子优势体现在预言机调用次数从 O(1/α) 降至 O(1/√α) 的二次改进；当每次预言机求值的成本较高或 α 较小时，这一优势尤为显著。

3.2 多项式精度鲁棒性

上述分析将 α 视为固定的设计参数，与网络规模无关。然而，在现实的交通网络中，随着交叉口数量 |V| 和连接线数量 |A| 的增加，满足延迟阈值 K 的偏移配置比例通常会下降——必须同时满足更多约束，可行域也会随之缩小。这促使我们进行更一般的分析，在其中 α 取决于问题规模。

令 $N = C^{|V|}$ 表示搜索空间大小。我们将可行性的多项式衰减建模为 α(N)= α0/p(N)，其中 α0 ∈ (0,1) 是基础鲁棒性参数，p(N) 是 N 的多项式函数（等价地，也可以是 |V|、 |A| 或 C 的多项式函数）。因此，可行解的数量为 δ=αN=α0N/p(N)。

定理 1（多项式精度鲁棒性的量子加速）。对于搜索空间大小为 N = C^|V| 、可行性比例为 α(N) = α0/p(N) 的鲁棒 NSC 问题，其中 p(N) 是 N 的多项式，量子算法需要 Θ(√(p(N)/α0)) 次 Grover 迭代，每次的成本为 C_{oracle}，因此总查询复杂度为 Θ(√(p(N)/α0)×C_{oracle})。与需要进行 Θ(p(N)/α0) 次预言机评估的经典随机采样基准相比，这实现了二次加速。

证明。将 α(N) = α0/p(N) 代入 Grover 迭代次数后，标记项的数量（即不同的可行偏移配置）为 M = αN = α0N/p(N)。最优 Grover 迭代次数为 T = ⌊(π/4)√(N/M)⌋ = ⌊(π/4)√(p(N)/α0)⌋ = Θ(√(p(N)/α0))，其中 Θ 记号吸收了常数 π/4 以及向下取整/向上取整。经典情况下，通过随机采样找到可行解的预期试验次数为 1/α = p(N)/α0。因此，加速因子为 √(p(N)/α0)，相较于经典方法所需的次数始终实现二次加速。

对于该问题的判定变体（确定 |S| ≥ δ 是否成立），量子计数（Brassard 等，2002）以加性精度 ε 估计标记态的数量 M，所需查询次数为 O(√(N/ε))。要区分 |S| ≥ δ 与 |S| < δ，我们需要精度 ε ≤ δ/2 =α0N/(2p(N))，因此查询复杂度为 O(√(2p(N)/α0)) = O(√(p(N)/α0))，与搜索复杂度相匹配。因此，二次加速也适用于判定问题。

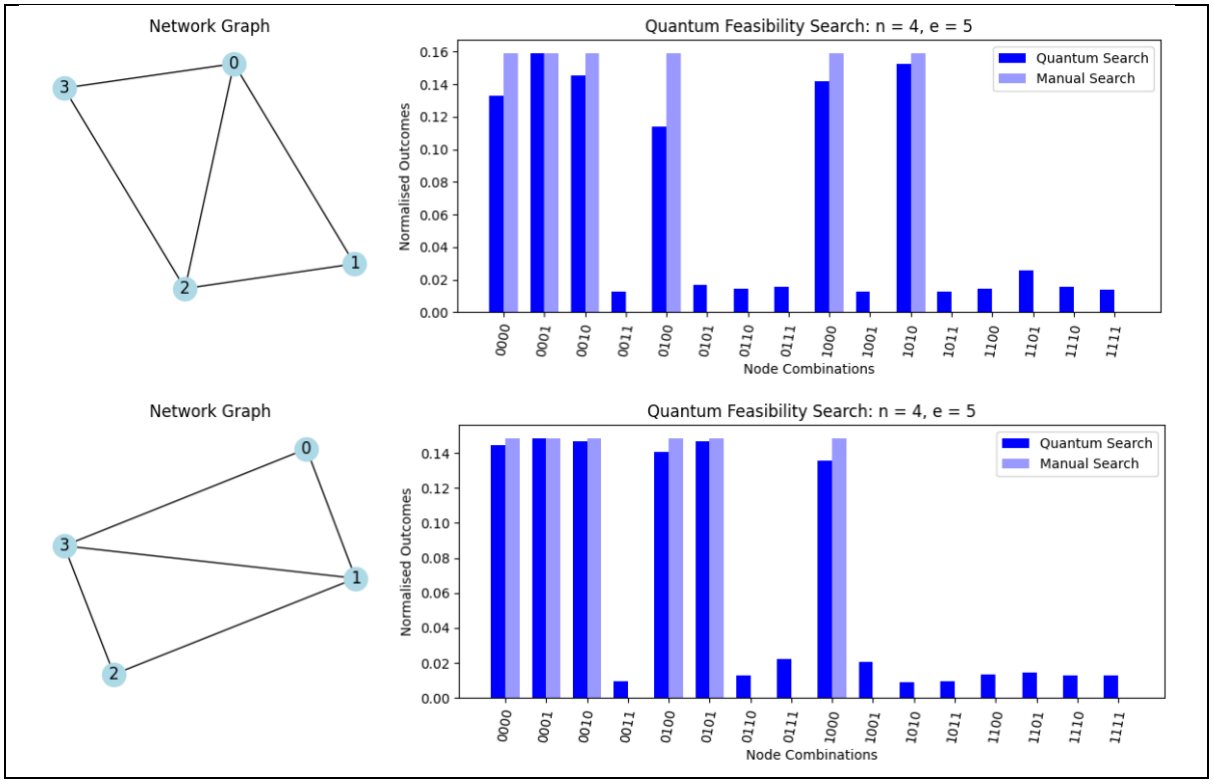
为说明其实际意义，考虑 β > 0 的参数化 p(N)= N^{β} 。量子迭代次数变为 $O(N^{\frac{\beta}{2}})$，而经典基准需要 $O(N^{\beta})$ 个样本，加速因子为 $N^{\frac{\beta}{2}}$。以下几种情形颇具启发性。当 p(N) = |V|（交叉口数量线性衰减）时，量子算法需要 O(√|V|) 次迭代，而经典方法需要 O(|V|) 个样本——优势虽有限，但意义显著。当 p(N) = |V|2（二次衰减）时，量子成本为 O(|V|) 次迭代，而经典方法为 O(|V|2)。当 p(N)=$N^{\frac{1}{2}}$=$C^{\frac{|V|}{2}}$ 时，量子算法需要 $O(C^{\frac{|V|}{4}})$ 次迭代，而经典方法需要 $O(C^{\frac{|V|}{2}})$ 次，搜索空间由此获得四次方根级的改进。在极限情形 p(N) = N 下，可行性比例按 α = α0/N 衰减，使得 δ = α0 保持为常数，从而回到标准的网络信号协调（NSC）搜索问题，并获得众所周知的 Grover 二次加速：O(√N) 对比 O(N)。

当 β ≥ 1 时，会出现一个关键边界。在此区域，即使是量子算法也需要超多项式迭代：对于 β = 1，T = O(√N) = O(C^(|V|/2))，其复杂度随网络规模呈指数增长。对于经典算法和量子算法而言，问题都变得真正困难，不过量子方法在指数上仍保有二次优势。对于具有 |V| ≈ 10–100 个交叉口的实际交通网络，多项式衰减区域（β ≈ 0.3– 0.7）最具现实意义；在这一范围内，量子优势能够带来显著节省：例如，当 p(N) = |V|2 且 |V| = 50 时，量子算法需要 O(50) ≈ 50 次迭代，而经典算法需要 O(2500) 个样本，预言机评估次数减少了 50 倍。

4 数值与硬件实验

为模拟各种网络配置，为每条链路分配了一个随机化预言机，根据链路两端节点的偏移量判断其是否拥堵。具体而言，该预言机由一个托福利（CCX）门实现，作用于每条边上的两个节点寄存器量子比特和一个延迟寄存器量子比特，并根据偏移状态生成单比特输出（1 表示拥堵，0 表示畅通）。这模拟了给定特定偏移分配时每条链路的二元拥堵结果。通过 NetworkX 生成的不同随机图（含 n 个节点和 n+1 条边）构成不同的网络拓扑，因此每次实验实际上都会在不同的网络实例上评估该算法。每次实验使用 1024 次测量。将这些实验扩展到多比特周期性延迟函数 h_ij(mu_i - mu_j)，以刻画不同等级的延误而非二元拥堵，仍是未来研究的重要方向。设置随机种子以确保精确复现，并进行多次重复实验、报告误差棒，也将进一步增强实验方法的可靠性。

上述算法主要通过 Qiskit 进行本地计算机模拟测试。测试中使用了随机延迟预言机，它们作用于单个量子比特并给出单量子比特输出。借助悉尼新南威尔士大学 Research Technology Services 提供的 Katana 计算集群，当节点数量达到 14 时，计算任务便终止，因为继续运行的成本过高。较大的网络具有更多可能的解，因此下文将展示较小的网络规模。以下所有情况中，预言机和扩散算子也都只运行一次。



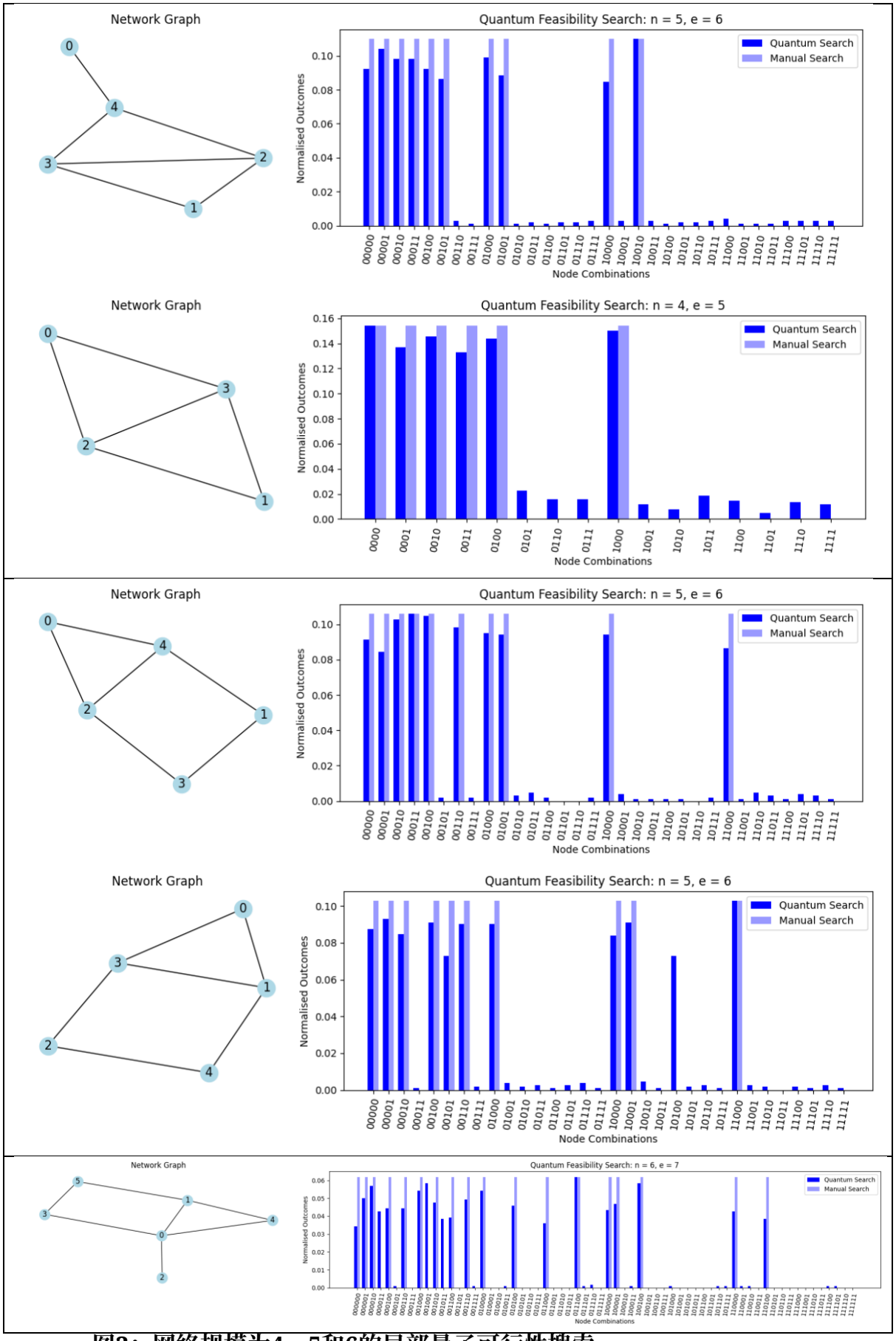


图3：网络规模为4、5和6的局部量子可行性搜索。

该算法通常能够很好地放大解态。偶尔会出现错误放大，这在图3中的第三个5节点图和6节点网络中可以看到。这些偶发的放大偏差被归因于 Grover 迭代次数对于这些特定实例并非最优，因为算法的有效性对解的数量与总状态数之比较为敏感。

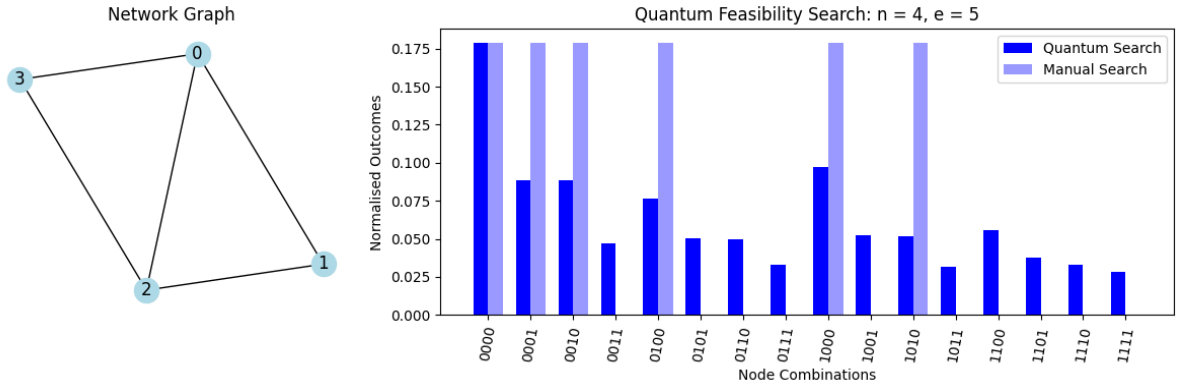


图4：网络规模4的硬件量子可行性搜索。

该算法也在 IBM 的量子运行时硬件上运行。结果显示，它似乎也能放大正确状态，但放大程度要小得多。这归因于量子硬件受到更严重的噪声影响。尽管如此，结果表明，该算法成功实现了其目标，即展示网络信号协调问题的解。具体而言，硬件实验是在 IBM 的 ibm_fez 处理器上进行的，该处理器拥有 156 个量子比特，量子体积为 256。通过比较成功概率，可以量化硬件上的放大效果减弱：对于 K = 1 和 k = 1 的4节点网络，模拟器达到的成功概率约为基线的 3–5 倍，而硬件结果约为基线的 1.2–1.5 倍。这种性能下降与电路深度累积的门错误相符；由于预言机构造是顺序进行的，电路深度随边数 |A| 线性增长。对于经过测试的4节点网络，电路需要约 20–30 个 CNOT门；在当前硬件上，每个门的典型错误率为 0.5–1%，由此造成的累积保真度损失解释了观察到的放大质量下降。

4.1 解读格罗弗搜索结果

使用某种指标来量化算法的有效性是很有帮助的。格罗弗搜索旨在放大其判定为正确的状态，而该指标应考量它对正确状态的放大效果。格罗弗搜索生成的图表结果可解释为概率分布，其中每个值表示格罗弗搜索认为解正确的概率。我们可以将正确解态的概率相加（通过人工检查确定），以此衡量算法正确放大目标状态的概率。在最理想的情况下，只有正确的解态会被放大，其他所有概率都为 0，因此该指标的值为 1。令 S 为解态集合。那么，我们可以将成功概率定义为 $\sum_{i \in S} p_i$。

我们还需要考虑基线概率，这是一种零假设。如果算法完全不起作用，那么所有状态（正确和错误的状态）都会被同等放大。如果算法的成功概率高于这一概率，那么该算法就

优于空情形。计算方法是将问题给定实例的解的数量 M 除以状态总数 N，即 M/N。

该算法分别在模拟器和硬件（ibm_fez）上运行，输入图规模从 $n = 4$ 到 $n = 10$；对于每种情况，阈值分别取 $K = 1$ 和 $K = 2$，Grover 迭代次数分别取 $k = 1$ 和 $k = 2$。

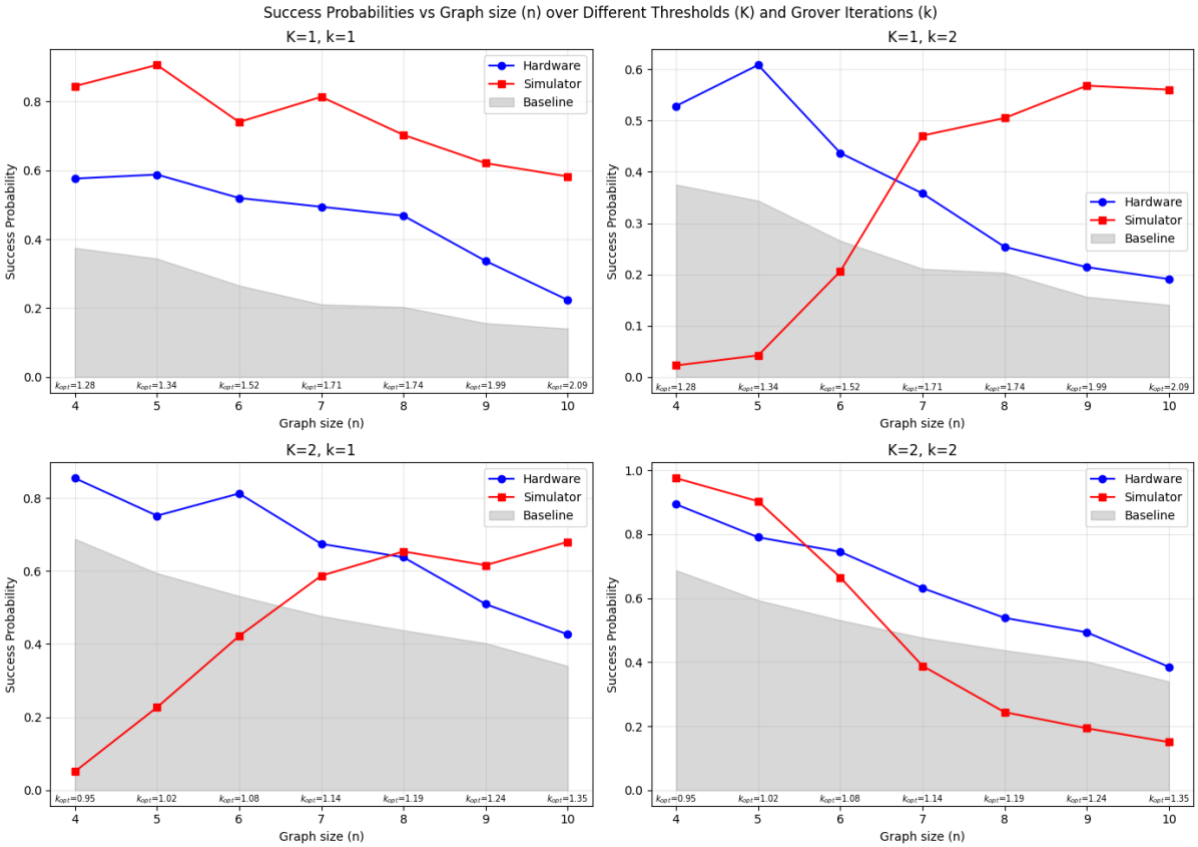


图 5：不同阈值 (K) 和 Grover 迭代次数 (k) 下成功概率与输入规模 (n) 的关系

每个成功概率旁还显示了最优格罗弗迭代次数 $k_{\text{opt}} = \left\lfloor \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{N}{M}} \right\rfloor$（尼尔森和庄，2019年），且未应用下取整函数。当 K =1 时，预言机问题的解的数量最少，因为与后一种情况相比，较低的阈值只会使可行性函数取值为 0 或 1。对于 $k = 1$ 的情况，通常预期格罗弗搜索会放大解态而不会超过目标；而在 $k = 2$ 时则未必如此。不过，这会受到最优格罗弗迭代次数的影响，该次数给出了理想情况下格罗弗算子的最大重复次数。还值得注意的是，阈值较高时 K，格罗弗搜索算法的效果会降低，因为该算法在解的数量较少时效果最佳（Boyer等人，1998年）。

图 5 表明，该算法遵循格罗弗搜索算法的预期行为。$(K, k) = (1,1)$ 的情况显示，成功概率会随图规模增大而降低；这是预期之中的，因为更大的图会引入更多可能的解，因此需要更多次 Grover 迭代。$(K, k) = (1,2)$ 的情况也体现了这一点，而最优格罗弗

迭代次数 k_{opt} 增加时，成功概率也会随之提高。有趣的是，硬件上的成功概率并未呈现相同趋势，而是基本保持不变，且略逊于 (1,1) 的情况。(2,1) 和 (2,2) 的情况也呈现了相同趋势，其中硬件上的成功概率均呈下降趋势。总体而言，硬件上的成功概率似乎优于基线概率。这可能是因为量子噪声起到了一种归一化作用：如果发生了 Grover 迭代过程，它会自行平衡，以放大解态。模拟器似乎更贴近 Grover 算法的预期理论行为：当 k 偏离 k_{opt} 值时，成功概率就会下降。对于 $K = 2$ 情况，这种关系并不十分精确，尤其是 $(K, k) = (2,2)$ 的成功概率峰值达到 $k_{\text{opt}} = 0.95$，这表明不进行 Grover 迭代最为有效。这同样可以归因于较大的阈值带来了更多解，从而降低了算法的有效性。

这一解读表明，算法的效果取决于其所处的具体情形。一般而言，对于产生较少解的预言机，执行一次 Grover 迭代时效果最佳。该方法也可能适用于更多情形，例如更大的网络或不同的阈值，但在设计时应更加谨慎。

一个重要的实际考量是电路深度与 Grover 迭代次数之间的关系。每增加一次 Grover 迭代，都需要完整执行一次预言机和扩散算子电路，电路深度大约会因此翻倍。在当前的含噪硬件上，更深的电路会遭受更严重的退相干，并累积更多门错误。这造成了一种矛盾：理论上的最优方案可能需要多次迭代（尤其是对于解所占比例较小的大型网络），但硬件噪声限制了实际可行的迭代次数。自适应策略，例如从一次迭代开始，在监测输出质量的同时逐步增加 k，或采用利用经典优化来调节浅层量子电路的变分混合方法，或可为近期实现提供切实可行的途径。此外，采用量子误差缓解技术——包括测量误差校正、动态去耦和概率误差抵消——有望增加有效电路深度，并提高硬件结果的可靠性。

4.2 电路资源分析

要了解该算法的可扩展性，分析电路资源需求如何随网络参数变化会很有帮助。对于具有 |V| 个节点和 |A| 条边的网络，若每个节点以 n = ⌈log2C⌉ 个量子比特表示周期长度 C，则量子比特总数约为 n|V| + |A| + 3⌊log2 |A|⌋ + 4。主导项 n|V| 来自节点偏移寄存器，它们以叠加态编码所有可能的偏移分配。其余各项则对应延迟寄存器（二进制预言机情况下每条边使用一个量子比特）、求和寄存器、加法器所需的辅助量子比特，以及可行性标志量子比特。

对于本文使用简化二进制预言机（每个节点 n = 1 量子比特）开展的实验，所测试网络规模的资源需求如下。一个具有 5 条边的 4节点网络大约需要 4 + 5 + 3(2) + 4 = 19 量子比特，而一个具有 7 条边的 6 节点网络大约需要 6 + 7 + 3(2) + 4 = 23 量子比特，一个具有 11 条边的 10 节点网络大约需要 10 + 11 + 3(3) + 4 = 34 量子比特。每次预言机求值的电路深度主要由顺序加法器决定，该加法器应用 |A| 条半加器链，每条深度为 O(log |A|)，从而使预言机总深度为 O(|A| log |A|)。每次 Grover 迭代增加一次预言机求值加上一个扩散算子（深度为 O(n|V|)），因此 k 次迭代的总深度为 O(k × (|A| log |A| +

n|V|))。对于本文报告的单次迭代实验，该深度仍然较小（最小网络约为 50–100 个门），但对于更大的实例会迅速增长。

这些资源估算凸显了该算法的可行性及其扩展所面临的挑战。当前拥有 100+ 个量子比特的量子处理器（例如 IBM 的 Eagle 和 Heron 架构）借助二进制预言机，能够满足最多约 30–40 个节点的网络规模所需的量子比特数量。然而，电路深度仍是主要瓶颈，因为当前硬件的相干时间仅支持数百到数千个双量子比特门，之后退相干便会占据主导。因此，将算法转译为硬件原生门集（量子比特连通性有限可能会带来额外开销），并开发深度更浅的预言机构造，是将这一方法扩展至具有实际意义的网络规模所面临的关键工程挑战。

5 结论

本文的主要贡献是提出了一种用于网络信号协调问题的量子计算算法，与经典穷举搜索相比，该算法在预言机查询次数上实现了二次加速。我们还证明，对于鲁棒 NSC 问题（其中 α 比例的解必须满足延迟阈值），所需的 Grover 迭代次数为 O(1/√α)，且与搜索空间大小无关。我们通过模拟展示了这些结果，并在 IBM 量子硬件上进行了验证。具体而言，量子预言机通过计算每种偏移分配叠加态对应的网络总延误，并标记延误低于阈值 K 的配置，从而对 NSC 判定问题进行编码。结合 Grover 振幅放大，这使预言机查询次数从经典方法的 O(C^|V|) 降至量子方法的 O(C^(|V|/2))，实现了可证明的二次减少；其中 C 为信号周期长度，|V| 为交叉口数量。

实验结果证实了理论分析。针对网络规模从 4 到 10 个节点的模拟实验表明，基于Grover的算法始终能将可行偏移配置的概率放大至高于基线概率。成功概率指标定义为经过验证的解态对应测量概率之和，可用于定量衡量放大效果。对于小型网络和较低阈值（K = 1），一次 Grover 迭代便足以实现显著放大；这与理论预测一致：当解的比例 M/N 相对较大时，最优迭代次数 k_opt = ⌊(π/4)√(N/M)⌋ 较小。随着网络规模增大，解的比例会降低，因此需要更多 Grover 迭代，这一点也得到了实验数据的证实。

在IBM量子处理器上开展的硬件实验既揭示了在真实设备上执行这些算法的前景，也暴露了当前的局限。尽管硬件结果表明解态相对于均匀基线得到了可测量的放大，但与无噪声模拟器相比，放大幅度显著降低。这种性能下降主要归因于当前超导量子比特架构中的门错误、退相干和串扰。随着量子硬件在门保真度、相干时间和量子比特连通性方面持续改进，模拟性能与硬件性能之间的差距预计将缩小。误差缓解技术，例如测量误差校正（Funcke等，2022）。当前实现受限于相对较小的网络规模，原因在于量子态空间的指数增长以及所需的电路深度。量子硬件、电路编译和算法优化（例如预言机分解策略）方面的进展将是必要的

才能扩展到现实的城市网络。就解占比 α 而言，无需进行多次独立搜索运行。

更广泛而言，这项工作为将量子计算应用于交通工程中的组合优化问题奠定了基础。NSC 问题的代数结构——循环群上的周期性延迟函数——表明，除 Grover 搜索之外，更丰富的量子算法技术（例如利用偏移空间阿贝尔群结构的量子傅里叶变换）或许能为该问题的结构化变体带来更大的加速。探究能否利用 NSC 问题的周期性和群论性质，实现类似于 Shor 算法用于因数分解时所展现的指数级量子优势，是量子算法与交通优化交叉领域中一个极具吸引力的未来研究方向。

6 参考文献

Paton, K. 图的基本圈集求解算法。《ACM 通讯》12, 9（1969 年 9 月），514-518。

Nathan H. Gartner、John D. C. Little 和 Henry Gabbay。Mitrop：一个用于同时优化偏移量、分割和周期时间的计算机程序。《交通工程与控制》17：355–359，1975。

Wolfgang Dauscha、Heinz D. Modrow 和 Alexander Neumann。《构造循环调度的循环序列类型》。《运筹学杂志》，29：1–30，1985年。

Michael R. Garey 和 David S. Johnson。《计算机与难解性：NP 完全性理论指南》。W. H. Freeman & Co.，美国纽约州纽约市，1979年。

Paolo Serafini 和 Walter Ukovich。《周期调度问题的数学模型》。《SIAM 离散数学杂志》，2(4)：550–581，1989年。

Refael Hassin。《网络同步的流算法》。《运筹学》，44(4)：570–579，1996年。

Gregor Wunsch（2008年）。《网络中的交通信号协调及相关的生成树图论问题》。博士论文。柏林工业大学第二学院数学与自然科学系，旨在获得学术学位。

https://qiskit.org/documentation/stubs/qiskit.circuit.library.OR.html

https://qiskit.org/documentation/stubs/qiskit.circuit.library.AND.html

Ruiz-Perez, L., Garcia-Escartin, J.C. 使用量子傅里叶变换进行量子算术。《量子信息处理》16，152（2017年）。 https://doi.org/10.1007/s11128-017-1603-1

T. G. Draper，《量子计算机上的加法》，2000。arXiv:quant-ph/0008033

Deshpande, Y.（2024）。城市交通信号灯配时优化：案例研究。《国际交通工程杂志》，20(1)，20–25。

Jovanović, A., & Teodorović, D.（2017）。针对欠饱和与过饱和独立交叉口的预定时控制：一种蜂群优化方法。《交通规划与技术》，40(5)，556–576。

Kouvelas, A., Aboudolas, K., Papageorgiou, M., & Diakaki, C. (2014年). 使用带有机会约束的模型预测控制进行实时信号控制。《交通研究C辑：新兴技术》，46，121–136。

Kovács, A., Tettamanti, T., & Varga, I. (2016年). 城市交通网络的实时分布式模型预测控制。《交通研究C辑：新兴技术》，73，66-86。

Zhao and Zhang, (2018年). 面向城市网络的机会约束交通信号控制。IEEE智能交通系统汇刊，19(8)，2603–2614。

Osorio, C., & Chong, L. (2015年). 一种用于大规模城市交通问题的计算高效型基于仿真的优化算法。《交通科学》，49(3)，623–636。

Farokhi, F., & Langbort, C. (2013年). 针对最坏情形需求不确定性的鲁棒最优交通信号控制。载于第52届IEEE决策与控制会议（CDC）论文集（第7733–7738页）。IEEE。

Ge, X., Liu, J., Liu, Y., Wang, X., & Chen, G.（2022年）。基于图注意力网络的交通信号控制多智能体强化学习。IEEE智能交通系统汇刊，23(7)，12415–12427。https://doi.org/10.1109/TITS.2021.3077743

Han, K., Szeto, W. Y., & Friesz, T. L.（2015年）。一种考虑排放因素的动态交通信号控制鲁棒优化方法。《交通研究C辑：新兴技术》，55，142–157。https://doi.org/10.1016/j.trc.2015.01.004

ORoojlooy, A., Khezeli, K., & Snyder, L. V.（2020年）。用于交通信号控制的鲁棒深度强化学习。载于SAI智能系统会议论文集（第263–274页）。施普林格。https://doi.org/10.1007/978-3-030-29516-5_20

Qi, X., Lin, J., & Shi, Q.（2023）。一种用于孤立交叉口的带可逆车道两阶段鲁棒最优交通信号控制。《IET智能交通系统》，18(4)，723–732。https://doi.org/10.1049/itr2.12317

Wei, H., Zheng, G., Yao, H., & Li, Z.（2021年）。交通信号控制中强化学习的最新进展：模型与评估综述。《ACM SIGKDD探索通讯》，22(2)，12–18。https://doi.org/10.1145/3468507.3468511

Yang, T., Lin, J., Zhang, Y., & Han, K.（2024）。一种用于混合交通网络的强化学习最大压力控制策略。《IEEE智能交通系统汇刊》。https://doi.org/10.1109/TITS.2024.3364185

Zheng, L., Huang, Y., Sha, D., & Lu, H.（2023）。针对风险规避型攻击和最坏情况网络攻击的城市交通信号控制鲁棒优化。《信息科学》，640，119067。https://doi.org/10.1016/j.ins.2023.119067

新南威尔士大学，Katana高性能计算集群，2022年。[在线]。获取地址：https://doi.org/10.26190/669x-a286

Funcke, L., Hartung, T., Jansen, K., Kühn, S., Stornati, P. 和 Wang, X.（2022）通过经典比特翻转纠错缓解量子计算机中的测量误差。《物理评论》 *A*，105（6）。美国物理学会（APS）。获取地址：https://doi.org/10.1103/PhysRevA.105.062404Dixit, V., Jian, S. 利用量子傅里叶变换估算驱动周期。《科学报告》 12，654（2022）。https://doi.org/10.1038/s41598-021-04639-0Aaronson, S.（2008）。量子计算机的局限。《科学美国人》，298（3），62–69。Arute, F., Arya, K., Babbush, R. 等（2019）。利用可编程超导处理器实现量子霸权。《自然》，574（7779），505–510。Bernstein, E. 和 Vazirani, U.（1997）。量子复杂性理论。《SIAM计算杂志》，26（5），1411–1473。Boyer, M., Brassard, G., Høyer, P. 和 Tapp, A.（1998）。量子搜索的紧确界。《物理学进展》，46（4–5），493–505。Brassard, G., Høyer, P., Mosca, M. 和 Tapp, A.（2002）。量子振幅放大与估计。载于《量子计算与量子信息：千年卷》，AMS当代数学丛书，305，53–74。Deutsch, D. 和 Jozsa, R.（1992）。通过量子计算快速求解问题。《伦敦皇家学会会刊A辑》，439（1907），553–558。Dürr, C. 和 Høyer, P.（1996）。一种用于寻找最小值的量子算法。arXiv预印本 quant-ph/9607014。Grover, L. K.（1997）。一种用于数据库搜索的快速量子力学算法。载于第28届ACM计算理论年度研讨会（STOC）论文集，212–219。Importa, G. 和 Sforza, A.（1982）。城市道路网络中交通信号的最优偏移量。《交通研究B辑》，16（2），143–161。Montanaro, A.（2016）。量子算法：概述。《npj量子信息》，2，15023。Nielsen, M. A. 和 Chuang, I. L.（2010）。《量子计算与量子信息：十周年纪念版》。剑桥大学出版社。Shor, P. W.（1994）。量子计算算法：离散对数与因数分解。载于第35届计算机科学基础研讨会（FOCS）论文集，124–134。Simon, D. R.（1994）。论量子计算的能力。载于第35届计算机科学基础研讨会（FOCS）论文集，116–123。