arXiv:2603.04765v1 [math.CO] 5 Mar 2026

平坦环面的轴对齐矩形铺砌的最小长度

Hau-Yi Lin[a,*], Wu-Hsiung Lin[a], Gerard Jennhwa Chang[b]

[a]应用数学系，国立阳明交通大学，新竹 *30010*，台湾[b]数学系，国立台湾大学，台北 *10617*，台湾

摘要

平坦环面是欧几里得平面模去由一组基生成的格所得的商空间，而平坦环面的轴对齐矩形铺砌是由有限个边与坐标轴平行的矩形组成的划分。我们给出了轴对齐矩形铺砌中矩形周长总和的最小值，并证明该值可以通过恰好一个矩形或恰好两个矩形达到。

关键词：矩形铺砌、平坦环面、正交图、超大规模集成电路*2020*年

MSC：05B45, 52C20

1. 引言

平坦环面 $\mathbb{R}^2/\Lambda$ 是通过将欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 对由基 $\{u, v\}$生成的格 Λ 取商而得到的环面的表示。曲面的铺砌是由一族内部两两不相交、并集为整个曲面的闭集构成的；若这些闭集均为矩形，则称为矩形铺砌。对于平坦环面的矩形铺砌，我们要求这些矩形轴对齐，也就是说，矩形的所有边都与欧几里得平面的坐标轴平行。

矩形剖分（或矩形细分）是离散几何与几何图论中的经典课题，与超大规模集成电路布局规划

*通讯作者电子邮箱： zaq1bgt5cde3mju7@gmail.com（Hau-Yi Lin）、wuhsiunglin@nctu.edu.tw（Wu-Hsiung Lin）、gjchang@math.ntu.edu.tw（Gerard Jennhwa Chang）

以及平面图的矩形对偶 [1, 3, 13], 、正交图绘制 [18], ，以及在指定面积或长宽比等几何约束下的可行性／可实现性问题 [8] 有关。近期的综述与结构性结果彰显了矩形剖分作为组合性质的丰富内涵 [2, 16]。另一项研究是正交剖分的优化，尤其是使正交多边形的矩形（或直线型）剖分的边总长度最小化；参见 [6, 7, 9, 10, 11, 14, 15]。环面上的可见性表示及相关矩形结构，已从拓扑／图论视角得到研究 [4, 17]，也有将其扩展到圆柱面等其他曲面的工作 [12]。

本文研究如下优化问题：对于一个平坦环面（对应于 $\mathbb{R}^2$ 的给定基），将其划分为轴对齐矩形后，矩形周长之和的最小值是多少？等价地，由于矩形的每条边都被计算两次，我们要寻找的是将环面划分为轴对齐矩形所需线段的最小总长度，即矩形周长之和的一半。请注意，该长度取决于基的选择。我们给出平坦环面的轴对齐矩形铺砌的最小长度的闭式公式，并构造出恰好由一个或两个矩形组成、达到该最小值的铺砌。

2. 预备知识

对于 $\mathbb{R}^2$ 的一个基 $\{u, v\}$，令 $\Lambda = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$ 为由 $\{u, v\}$ 生成的格，称其为 Λ 的 $\mathbb{Z}$-基。Λ 的余体积 记作 $d(\Lambda)$，它是由 $\{u, v\}$ 张成的平行四边形的面积；对于生成 Λ 的任意基，该面积均保持不变。

对于平坦环面 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Lambda$，令 $\pi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ 为商映射。T的轴对齐矩形铺砌由矩形 R_1，R_2，……，$R_k \subseteq \mathbb{R}^2$构成，其中 $R_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ 对 $i = 1$，2，……，k成立，并满足以下条件。

(i) 对于 $i = 1$，2，……，k，π 在 R_i 的内部（a_i，b_i）×（c_i，d_i）上是单射。(ii) 各个 R_i的内部的像两两不相交。(iii) $\mathbb{T}^2 = \bigcup_{i=1}^{k} \pi(R_i)$。

这种铺砌的骨架 T 是图 $G(T)$，其顶点集由所有矩形角点的像组成，而所有矩形边的像则由顶点细分为边。T 的长度 $m(T)$为

$G(T)$所有边的长度之和。由于每个矩形 R_i 对长度的贡献为$2[(b_i - a_i) + (d_i - c_i)]$，并且 $G(T)$的每条边要么恰好与两个矩形相接，要么属于同一矩形的一对相对边，因此 $m(T)$等于所有 R_i的周长之和的一半，也就是说，

$$m(T) = \sum_{i=1}^{k} [(b_i - a_i) + (d_i - c_i)].$$

本文的目标是求出最小长度 $m(T)$，其中 T 遍历与由 $\mathbb{R}^2$ 的给定基生成的格 Λ 相对应的平坦环面 $\mathbb{R}^2/\Lambda$ 的所有轴对齐矩形铺砌。为方便起见，令 $m(\Lambda) = \min\{m(T)$: T 是平坦环面 $\mathbb{R}^2/\Lambda\}$ 的轴对齐矩形铺砌。

对于 $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, u 的 ℓ^1-范数记为 $\|u\|_1 = |x| + |y|$。Le t

$$Q_1 = \{(x, y) : xy \geq 0\} \quad \text{and} \quad Q_2 = \{(x, y) : xy < 0\}$$

作为乘积符号的闭/开“象限”。

定理 2.1（闵可夫斯基凸体定理 [5]）。设 Λ 是一个格。若 C 是 $\mathbb{R}^2$ 中体积大于$4d(\Lambda)$的中心对称凸区域，则 C 包含一个非零格点。

引理 2.2. 对于由 $\mathbb{R}^2$ 的一个基生成的格 Λ，若 u 在 $(\Lambda \cap Q_1) \setminus \{0\}$ 中具有最小ℓ^1-范数，且 v 在 $\Lambda \cap Q_2$ 中具有最小 ℓ^1-范数，则$\{u, v\}$ 是 Λ 的一个 $\mathbb{Z}$-基。

证明。设 $u = (p, q) \in Q_1$ 以及 $v = (r, s) \in Q_2$。如有必要，将 u 替换为 $-u$、将 v替换为 $-v$，不妨设 $p, q \geq 0$ 但不同时为零，且 $u \neq 0$，以及 $r < 0 < s$。令 $\Lambda' = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v \subseteq \Lambda$ 为由 $\{u, v\}$生成的格。若$\Lambda' \neq \Lambda$，则 $(ps - qr) = d(\Lambda') \geq 2d(\Lambda)$，因为 $d(\Lambda) \mid d(\Lambda')$。

考虑关于原点对称的凸集：

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| < \|u\|_1, |x - y| < \|v\|_1\}.$$

K的面积等于 $2\|u\|_1\|v\|_1 = 2(p + q)(-r + s) > 2(ps - qr) \geq 4d(\Lambda)$，因为 $qs - pr > 0$。根据定理 2.1，集合 K 包含一个非零格点 $w \in \Lambda \setminus \{0\}$，满足 $w \in Q_1$，从而 $\|w\|_1 < \|u\|_1$；或者满足 $w \in Q_2$，从而 $\|w\|_1 < \|v\|_1$，这与 u 或 v的极小性矛盾。因此，$\Lambda = \Lambda'$，所以 $\{u, v\}$ 生成 Λ。 □

引理 2.2 中选取的 $\mathbb{Z}$-基 $\{u, v\}$ 称为 Λ 的 象限基 。

3. 平坦环面上的轴对齐矩形铺砌

3.1. 恰有一个矩形

对于平坦环面，我们给出一个充分条件，使得存在恰好包含一个矩形的轴对齐矩形铺砌。

引理 3.1. 设 Λ 是余体积为 $d(\Lambda)$的格。若对某个$a \neq 0$有$(a,0) \in \Lambda$，则对所有$(x,y) \in \Lambda$，均有 $d_{(\Lambda)}{}_a \mid y$。

证明。不妨设 $y \neq 0$，并令 Λ'为由 $(a,0)$ 和 (x,y) 生成的格。由于 $d(\Lambda) \mid d(\Lambda')$ 且 $d(\Lambda') = |ay|$，因此有 $d_{(\Lambda)}{}_a \mid y$。 □

我们定义

$$m_x(\Lambda) := d_x + \frac{d(\Lambda)}{d_x}$$

若存在 $(a,0) \in \Lambda$ 满足 $a \neq 0$，其中 d_x 是使得 $(d_x,0) \in \Lambda$成立的最小正数，且 $m_x(\Lambda) := \infty$ 否则。类似地，我们定义

$$m_y(\Lambda) := d_y + \frac{d(\Lambda)}{d_y}$$

若存在 $(0,b) \in \Lambda$ 满足 $b \neq 0$，其中 d_y 是满足 $(0,d_y) \in \Lambda$的最小正数，并且 $m_y(\Lambda) := \infty$ 否则。

命题 3.2. 对于平坦环面 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Lambda$，若 $m_x(\Lambda) < \infty$，则存在一个由恰好一个矩形构成的 $\mathbb{T}^2$ 的铺砌 T

$$R = [0, d_x] \times [0, \frac{d(\Lambda)}{d_x}],$$

且长度为 $m(T) = m_x(\Lambda)$。对于 $m_y(\Lambda)$，类似的结论也成立。

证明。令 $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ 为商映射。首先证明 π在 R 的内部上是单射。若对某些 $x, x' \in (0, d_x) \times (0, d_{(\Lambda)}{}_{d_x})$，有 $\pi(x) = \pi(x')$，则 $x - x' \in \Lambda$，记作 $\overline{x - x' = (a,b)}$。由于 $b \in (-\frac{d(\Lambda)}{d_x}, d_{(\Lambda)}{}_{d_x}) \cap d_{(\Lambda)}{}_{d_x}\mathbb{Z}$，我们有 $\overline{b = 0}$，因此 $a \in (-d_x, d_x) \cap d_x\mathbb{Z}$，由此得到 $a = 0$，并迫使$x = x'$。

由于 $\pi(R)$的面积等于值为 $d_x \times \frac{d(\Lambda)}{d_x} = d(\Lambda)$的 R 的面积，因此$\mathbb{T}^2$的面积为 $\pi(R) = \mathbb{T}^2$。

因此，T是 $\mathbb{T}^2$的轴对齐矩形铺砌，其中恰有一个矩形 R，长度为 $m(T) = (d_x - 0) + (\frac{d(\Lambda)}{d_x} - 0) = m_x(\Lambda)$。 □

3.2. 恰有两个矩形

这里我们给出一个充分条件，在此条件下，平坦环面存在恰有两个矩形的轴对齐矩形铺砌

命题 3.3. 若 Λ 是由基 $\{u, v\}$ 生成的格，其中 $\mathbb{R}^2$ 具有$u = (p, q)$和 $v = (r, s)$，且满足 $pq > 0$和 $rs < 0$，则平坦环面$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Lambda$ 存在一个恰由两个矩形组成的矩形铺砌 T

$$R_1 = [-|r|, |p| - |r|] \times [0, |s|] \text{ and } R_2 = [|p| - |r|, |p|] \times [0, |q|],$$

且长度为 $m(T) = \|u\|_1 + \|v\|_1$。

证明。如有必要，将 u 替换为 $-u$，并将 v 替换为 $-v$，于是可以假设p, $q > 0$和 $r < 0 < s$。

如图 1 所示，考虑由 $\{u, v\}$在 $\mathbb{R}^2$中张成的平行四边形 $P = OACB$，其中 $\overrightarrow{OA} = u = (p, q)$和 $\overrightarrow{OB} = v = (r, s)$。令 D, E, F分别为 A, B, C在 x 轴上的投影点；令 G, H分别为 A, B在线段 CF上的投影点。取 $R_1 = BEFH = [r, p+r] \times [0, s]$和 $R_2 = ADFG = [p+r, p] \times [0, q]$。

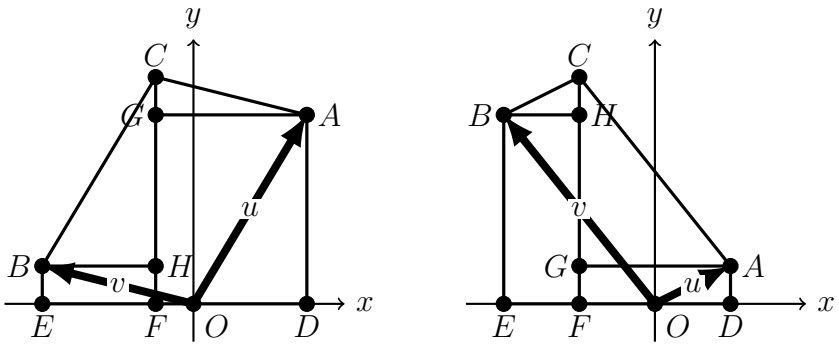


图 1：恰好由两个矩形组成的矩形铺砌的两种可能情况。

于是五边形 $ACBED = P \cup OAD \cup OBE = R_1 \cup R_2 \cup BCH \cup ACG$。由于 $OAD + v = BCH$与 $OBE + u = ACD$，可知 T是 $\mathbb{T}^2$ 的一个矩形铺砌，所用矩形为 R_1 和 R_2，长度为 $m(T) = (p + s) + (-r + q) = (p + q) + (-r + s) = \|u\|_1 + \|v\|_1$。

□

4. 轴对齐矩形铺砌长度的下界

本节我们证明平坦环面的轴对齐矩形铺砌长度的一个下界。设 $G(T)$ 与 $m(T)$分别为对应于给定格 Λ的平坦环面的轴对齐矩形铺砌 T 的骨架与长度。

4.1. 包含水平/垂直环的骨架**命题 4.1.** 若 $G(T)$ 包含一个水平环，则 $m(T) \geq m_x(\Lambda)$。若 $G(T)$ 包含一个垂直环，则 $m(T) \geq m_y(\Lambda)$。

证明. 由对称性，我们只证明水平情形。

设 γ 为 $G(T)$的一个水平环。我们有 Λ 包含一个格点$(|\gamma|,0)$，其中 $|\gamma|$ 是 γ中边的总长度，因此由定义得 $|\gamma| = d_x$。

接下来，我们按下列步骤构造一个闭游走 W 。

(S1) 从任一顶点出发，并在重复顶点处停止。(S2) 沿一条垂直边向上走到下一个顶点，直到不存在这样的边。(S3) 沿一条水平边向右走到下一个顶点，并转到步骤(S2)。

由于 $G(T)$ 的顶点数有限，因此在第一对重复顶点之间存在一条闭游走 W。根据构造，即使该游走进入一个水平环，它也会在遇到重复顶点之前向上行进。因此，W 至少包含一条垂直边，且 W 中没有重复的边。根据引理 3.1， W 中垂直边的总长度是 $d_{(\Lambda)_{d_x}}$ 的倍数。结合 γ，可得 $m(T) \geq |\gamma| + d_{(\Lambda)_{d_x}} = d_x + d_{(\Lambda)_{d_x}} = m_x(\Lambda)$。 □

4.2. 不包含水平环/垂直环的骨架

这里，我们关注长度同时小于 $m_x(\Lambda)$ 和 $m_y(\Lambda)$ 的铺砌。 $G(T)$ 中的一条路径，如果仅由水平边组成，且不是其他水平路径的子路径，则称为极大水平路径。极大垂直路径的定义类似。

引理 4.2。 若存在一个轴对齐矩形铺砌 T ，它对应于格 Λ 的平坦环面 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Lambda$ ，且其长度为 $m(T) <$最小值$\{m_x(\Lambda),m_y(\Lambda)\}$，则存在另一个轴对齐矩形铺砌 T' ，其所在环面为 $\mathbb{T}^2$ 、长度为 $m(T') \leq m(T)$ ，且其骨架 $G(T')$ 恰好有一条极大水平路径和一条极大垂直路径。

证明。显然，$G(T)$ 不含水平环或垂直环；否则，$m(T) \geq$最小值$\{m_x(\Lambda)$ $m_y(\Lambda)\}$。因此，$G(T)$ 含有水平路径和垂直路径。设 H 是 $G(T)$ 中的一条极大水平路径。我们将 T 中有一条边包含于 H 的矩形分为三类。

- S_1：顶边和底边均被映射到 H上的矩形。
- S_2：仅顶边被映射到 H上的矩形。
- S_3：仅底边被映射到 H上的矩形。

由对称性，我们可以假设 $|S_2| \geq |S_3|$，并考虑两种情形。

情形 1. $|S_2| = 0$。在此情形下，$|S_3| = 0$。若存在一个不属于 S_1的矩形，则 $G(T)$包含一个垂直环，其边由同时属于 S_1 中某一矩形与不属于 S_1的某一矩形的那些边构成。由命题 4.1，我们有 $m(T) > m_y(\Lambda)$，从而得出矛盾。因此，S_1 由 T 中的所有矩形组成，从而 H 是唯一的极大水平路径。

情形 2. $|S_2| > 0$。假设 T 由矩形 $R_i = [a_i, b_i]\times[c_i, d_i]$组成，其中 $i = 1, 2, \ldots, k$，并令 $h = \min\{d_i - c_i : \pi(R_i) \in S_2\}$，其中 π 为商映射。于是我们可以构造一个新铺砌 T'，其矩形为：

$$R_i' = \begin{cases} [a_i, b_i] \times [c_i - h, d_i - h], & \text{if } \pi(R_i) \in S_1; \\ [a_i, b_i] \times [c_i, d_i - h], & \text{if } \pi(R_i) \in S_2; \\ [a_i, b_i] \times [c_i - h, d_i], & \text{if } \pi(R_i) \in S_3; \\ R_i & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由于至少消除了一个满足 $\pi(R_j) \in S_2$ 且 $d_j - c_j = h$ 的矩形 R_j'，R_j 的底边不会映射到 H 上，因此 $m(T') \leq m(T) - (b_j - a_j) - h(|S_2| - |S_3|)$ $< m(T)$。与此同时，$G(T')$ 的极大水平路径少于 $G(T)$，且极大垂直路径至多与 $G(T)$ 一样多。

由于 $G(T)$ 只有有限条水平/垂直路径，对垂直路径作类似论证，最终我们可以得到一个长度为 $m(T') \leq m(T) < \min\{m_x(\Lambda)\ m_y(\Lambda)\}$ 的铺砌 T'，并且 $G(T')$ 恰好有一条极大水平路径和一条极大垂直路径。 □

命题 4.3。 如果 $G(T)$ 不包含水平环或垂直环，并且恰好有一条极大水平路径和一条极大垂直路径，那么 $m(T) \geq \|u\|_1 + \|v\|_1$，其中 $\{u, v\}$ 是 Λ 的象限基。

证明。令 $H = \pi(\overline{AB})$ 为极大水平路径，其中 AB 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条水平线段，A 为左端点，B 为右端点；

令 $V = \pi(CD)$ 为极大垂直路径，其中 CD 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条竖直线段，C 为底端点，D 为顶端点。在 $G(T)$ 中，$\pi(A)$ 和 $\pi(B)$ 都是 V 的内部顶点；对称地，$\pi(C)$ 和 $\pi(D)$ 都是 H 的内部顶点。令 $A', B' \in CD$ 为满足 $\pi(A') = \pi(A)$ 且 $\pi(B') = \pi(B)$ 的点；类似地，令 $C', D' \in AB$ 为满足 $\pi(C') = \pi(C)$ 且 $\pi(D') = \pi(D)$ 的点。

考虑以下四个向量：

$$w_1 = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'}, \quad w_2 = \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CB'}, \quad w_3 = \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{DB'}, \quad w_4 = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{DA'}.$$

对于 $i = 1$，我们有 $w_i \in \Lambda$，2, 3, 4。此外，$w_1, w_3 \in Q_1$ 以及 $w_2, w_4 \in Q_2$，由此得到 $\|w_1\|_1 + \|w_2\|_1 + \|w_3\|_1 + \|w_4\|_1 \geq 2\|u\|_1 + 2\|v\|_1$。

根据假设，$m(T)$是 H 和 V中边长之和。因此

$$\begin{aligned} m(T) &= |\overline{AB}| + |\overline{CD}| \\ &= \frac{1}{2}\Big[(|\overrightarrow{AC'}| + |\overrightarrow{BC'}|) + (|\overrightarrow{AD'}| + |\overrightarrow{BD'}|) \\ &\quad +(|\overrightarrow{CA'}| + |\overrightarrow{DA'}|) + (|\overrightarrow{CB'}| + |\overrightarrow{DB'}|)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[(|\overrightarrow{AC'}| + |\overrightarrow{CA'}|) + (|\overrightarrow{BC'}| + |\overrightarrow{CB'}|) \\ &\quad +(|\overrightarrow{BD'}| + |\overrightarrow{DB'}|) + (|\overrightarrow{AD'}| + |\overrightarrow{DA'}|)\Big] \\ &= \frac{1}{2}(\|w_1\|_1 + \|w_2\|_1 + \|w_3\|_1 + \|w_4\|_1) \\ &\geq \frac{1}{2}(2\|u\|_1 + 2\|v\|_1) = \|u\|_1 + \|v\|_1. \end{aligned}$$

证明完毕。 □

5. 轴对齐矩形铺砌的最小长度

现在我们给出一个下界，并证明该下界可以达到。

定理 5.1. 设 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Lambda$ 是与由 $\mathbb{R}^2$ 的一个基生成的格 Λ 相对应的平坦环面。$\mathbb{T}^2$ 的轴对齐矩形铺砌的最小长度为

$$m(\Lambda) = \min\left\{\|u\|_1 + \|v\|_1, m_x(\Lambda), m_y(\Lambda)\right\},$$

其中 $\{u, v\}$ 是 Λ的象限基。

证明。对于铺砌 T，若 $m(T) < \min\{m_x(\Lambda)\ m_y(\Lambda)\}$，则由引理 4.2，存在一个铺砌 T'，满足 $m(T') \le m(T)$，且 $G(T')$ 不包含水平/垂直环，并且恰好各有一条极大水平路径和一条极大垂直路径。因此，由命题 4.3 可得 $m(T') \ge \|u\|_1 + \|v\|_1$。于是 $m(T) \ge \min\{\|u\|_1 + \|v\|_1, m_x(\Lambda)\ m_y(\Lambda)\}$。

若 $m_x(\Lambda)$（相应地，$m_y(\Lambda)$）有限，则命题 3.2 给出一个铺砌 T，其中含有一个矩形，长度为 $m(T) = m_x(\Lambda)$（相应地，$m_y(\Lambda)$）。当 $\|u\|_1 + \|v\|_1 < \min\{m_x(\Lambda)\ m_y(\Lambda)\}$时，设 $u = (p, q)$与 $v = (r, s)$，且 $pq \ge 0$ 与 $rs < 0$。若 $p = 0$（相应地，$q = 0$），则 $|q| = d_y$（相应地，$|p| = d_x$），且 $|r| = d(\Lambda)/d_y$（相应地，$|s| = d(\Lambda)/d_x$），故 $\|u\|_1 + \|v\|_1 = |p| + |q| + |r| + |s| > m_y(\Lambda)$（相应地，$m_x(\Lambda)$）。于是我们有$pq > 0$, 而命题 3.3 给出一个铺砌 T，其中含有两个矩形，长度为$m(T) = \|u\|_1 + \|v\|_1$。

Hence $m(\Lambda) = \min\{\|u\|_1 + \|v\|_1, m_x(\Lambda), m_y(\Lambda)\}$. □

6. 计算说明

令 $\{u, v\}$ 为 Λ 的任意 $\mathbb{Z}$基，其中 $u = (p,\ q)$ 且 $v = (r,\ s)$。

注 6.1（计算 $m_x(\Lambda)$ 和 $m_y(\Lambda)$）。存在 $(a,\ 0) \in \Lambda$ 使得$a \neq 0$（等价地，$m_x(\Lambda) < \infty$），当且仅当 $\frac{q}{s}$ 或 $\frac{s}{q}$ 为有理数。在这种情况下，$d(\Lambda)/d_x = \gcd(q,\ s)$ 可通过欧几里得算法得到，并且

$$m_x(\Lambda) = d_x + \frac{d(\Lambda)}{d_x} = \frac{|ps - qr|}{\gcd(q, s)} + \gcd(q, s).$$

类似地，可得到 $m_y(\Lambda) = \frac{|ps-qr|}{\gcd(p,\ r)} + \gcd(p,\ r)$。

注 6.2（寻找 Λ的象限基）。对于任意格 $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$，$(\Lambda \cap Q_1) \setminus \{0\}$ 和 $\Lambda \cap Q_2$ 均非空。为便于计算，写作 $\Lambda = B\mathbb{Z}^2$，其中 $B = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$。对于任意 $z \in \mathbb{Z}^2$，令 $x = Bz \in \Lambda$。然后

$$\|z\|_1 = \|B^{-1}x\|_1 \le \|B^{-1}\|_1 \|x\|_1, \qquad \|B^{-1}\|_1 = \frac{\max\{|s| + |q|,\ |r| + |p|\}}{|ps - qr|}.$$

因此，对于任意半径 $r > 0$，每个满足 $\|x\|_1 \le r$ 的格点 $x \in \Lambda$ 都由满足 $\|z\|_1 \le \|B^{-1}\|_1 r$的整数向量 z 产生，所以只需检查有限个候选项。因此，可以按 $\|z\|_1$ 递增的顺序枚举$z \in \mathbb{Z}^2$，并在每个 Q_1 或 Q_2中保留最佳候选项，从而找到一个象限基。

参考文献

[1] E. Ackerman、G. Barequet 和 R. Y. Pinter，《permutations 与平面布局之间的双射及其应用》，离散应用数学154(12) (2006)，第 1674–1684 页。[2] A. Asinowski、J. Cardinal、S. Felsner 和 É. Fusy，《矩形剖分组合学：新旧双射》，组合理论5(1) (2025)，第 1–57 页。[3] J. Bhasker 和 S. Sahni，《求平面三角剖分图矩形对偶的线性算法》，*Algorithmica* 3 (1988)，第247–278页。[4] T. Biedl，《环面图与克莱因瓶图的可见性表示》，载于图绘制与网络可视化（*GD 2022*），P. Angelini 和 R. von Hanxleden（编），计算机科学讲义，第 13764 卷，Springer (2023)，第404–417页。[5] J. W. S. Cassels，《数的几何导论》，Springer (1959)。[6] X. Cheng、D.-Z. Du、J.-M. Kim 和 L. Ruan，《最优矩形划分》，载于组合优化手册，D.-Z. Du 和 P. M. Pardalos（编），Springer (2004)，第 313–327 页。[7] D.-Z. Du 和 Y.-J. Zhang，《关于最小长度直线剖分的启发式方法》，*Algorithmica* 5 (1990)，第111–128页。[8] D. Eppstein、E. Mumford、B. Speckmann 和 K. A. B. Verbeek，《面积通用与受约束矩形布局》，*SIAM* 计算杂志41(3) (2012)，第 537–564 页。[9] T. F. Gonzalez 和 S.-Q. Zheng，《用近似算法划分含内部点的矩形》，*Algorithmica* 5 (1990)，第 11–42 页。[10]T. F. Gonzalez 和 S.-Q. Zheng，《矩形划分与闸刀式划分的改进界》，符号计算杂志7 (1989)，第 591–610 页。[11] T. F. Gonzalez 和 S.-Q. Zheng，《最小边长矩形划分》，载于 T. F. Gonzalez（编）的近似算法与元启发式手册，Chapman & Hall/CRC (2007)，第 54 章。[12] M. Hasheminezhad、S. M. Hashemi、B. D. McKay 和 M. Tahmasbi，

立方平面图的矩形径向绘图，计算几何 43(9)（2010），第767–780页。[13] K. Koźmiński和E. Kinnen，平面图的矩形对偶，网络 15(2)（1985），第145–157页。[14] C. Levcopoulos，多边形最小长度矩形剖分的快速启发式方法，载于第*2*届*ACM*计算几何研讨会（*SoCG'86*）论文集，ACM（1986），第100–108页。[15] A. Lingas、R. Y. Pinter、R. L. Rivest和A. Shamir，直角多边形的最小边长剖分，载于第*20*届*Allerton*通信、控制与计算年会论文集（1982），第53–63页。[16] A. Merino和T. Mütze，通过排列语言进行组合生成。III. 矩形剖分，离散与计算几何 70(1)（2023），第51–122页。[17] B. Mohar和P. Rosenstiehl，环面上地图的镶嵌与可见性表示，离散与计算几何 19（1998），第249–263页。[18] R. Tamassia，将图嵌入网格并使弯曲次数最小，*SIAM*计算杂志 16(3)（1987），第421–444页。