arXiv:2603.04776v1 [math.LO] 5 Mar 2026

单侧子移位上的共轭关系不可树化

RUIWEN LI

Abstract. 本文从描述集合论的角度研究单侧子移位上的共轭关系。我们证明，字母表为 $\{0,1\}$ 的单侧子移位上的共轭关系不可树化且非顺从。

1. Introduction

Becker、Kechris、Hjorth 等人发展了标准博雷尔空间上等价关系的描述集合论复杂度理论（参见 [2],[13]）。该理论为我们比较不同等价关系的复杂度提供了一个框架，这些等价关系既可以来自描述集合论，也可以来自数学的其他领域。设 E 和 F 分别是定义在标准博雷尔空间 X和 Y上的等价关系。那么，如果存在一个 Borel可测映射 f 从 X 到 Y，使得对任意 x，$y \in X$，都有

$$xEy \iff f(x)Ff(y).$$

如果 $E \leq_B F$，则在此框架下，我们将 F 视为比 E更复杂的等价关系。当 $E \leq_B F$且 $F \leq_B E$时，我们称 E与 F**Borel双可归约**，记为 $E \sim_B F$。如果 $E \sim_B F$，则我们认为 E 与 F 具有相同的复杂度。

本文讨论动力系统上的共轭关系。（拓扑）动力系统是一个对 (X,T)，其中 X是紧可度量化空间，T是从 X到 X的连续映射。若存在从 X到 Y的同胚映射f使得 $fT = Sf$，则称动力系统 (X,T) 与另一动力系统 (Y,S) 共轭，其中 f 称为共轭映射。若 T是从 X到 X的同胚，则称动力系统 (X,T) 可逆。对于动力系统 (X,T) 与 $x \in X$，x的轨道是集合 $\{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$，记为 $\mathcal{O}(x)$。若存在一点$x \in X$，其轨道在 X中稠密，则称动力系统 (X,T) 为传递的。若对每一点 $x \in X$，$\mathcal{O}(x)$ 在 X中稠密，则称动力系统 (X,T) 为极小的。

按同构或共轭对动力系统进行分类，是描述集合论中一个受到广泛研究的课题。Hjorth [14] 证明了保测变换上的同构关系不是博雷尔的。对于遍历保测变换，Foreman与Weiss [9]表明了遍历上的同构关系

Date: 2026年3月6日。作者感谢 Su Gao、Bo Peng 和 Marcin Sabok 提供的宝贵建议。作者感谢国家自然科学基金委员会（国家自然科学基金）项目 124B2001 对其研究的部分资助。本文是在作者访问麦吉尔大学期间完成的，作者感谢麦吉尔大学提供的支持。

保测变换不能由可数结构分类，随后Foreman、Rudolph与Weiss [8] 表明该关系不是博雷尔的。本文我们关注拓扑动力系统。Li与Peng [18] 证明了可逆极小系统上的共轭关系不能由可数结构分类。我们常常研究具有特定紧致度量空间的动力系统。对于康托尔系统，Carmelo与Gao [4] 证明了可逆康托尔系统上的共轭关系与可数图的同构关系Borel双可归约。Kaya [16] 证明了 $=^+$ Borel可归约于可逆康托尔极小系统上的共轭关系。而Deka、Garc´ıa-Ramos、Kasprzak、Kunde与Kwietniak [6] 的一项近期结果表明，可逆康托尔极小系统上的共轭关系不是博雷尔的。对于区间动力系统，Bruin与Vejnar [3] 表明可逆区间系统上的共轭关系与可数图的同构关系Borel双可归约。最后，对于2-环面，Peng表明可逆极小2-环面系统上的共轭关系 [21] 与2-环面微分同胚上的共轭关系 [20] 都不能由可数结构分类。所有这些等价关系在某种意义上都是描述集合论中非常复杂的关系。

子移位及其子类上的共轭关系的复杂性，是描述动力学中一个活跃的子领域，不同于我们之前提到的那些类别。**可数等价关系**是指每个等价类都是可数集的等价关系。根据 Curtis、Hedlund 和 Lyndon 的著名定理， [12], 子移位上的共轭关系是一个可数博雷尔等价关系。如果每个可数博雷尔等价关系都 Borel 可归约到某个可数博雷尔等价关系，那么这个关系称为**普适的**。我们有一个普适的可数等价关系，记作 E_∞ （见 [10, 第 7.3]节）。等价关系 E_∞ 的复杂性远低于上一段提到的关系。Clemens [5] 证明，子移位上的共轭关系与 E_∞Borel 双可归约。根据 [1], ，可数博雷尔等价关系上的博雷尔归约仍然非常复杂。我们可以利用一些性质来判断可数博雷尔等价关系的复杂性。如果一个等价关系 Borel 可归约到 $\mathbb{R}$上的恒等关系，我们就称它为**光滑的**。等价关系 E_0 不是光滑的，而 Borel 可归约到它的可数等价关系称为**超有限**关系。每个超有限等价关系都是**可平滑的**且**可树化的**。Thomas [22] 证明，Toeplitz 子移位上的共轭关系不是光滑的。Gao、Li、Peng 和 Sun [11] 证明，拓扑秩 2 Toeplitz 子移位上的共轭关系是超有限的。Deka、Kwietniak、Peng 和 Sabok [7] 证明，具有规格性质的子移位上的共轭关系不可树化且非顺从。

然而，作为子移位的自然类比物以及动力系统的一个重要例子，我们对单边子移位上的共轭关系的复杂性所知甚少。事实上，直到现在，我们还不知道整个单边子移位类上的共轭关系的确切复杂性。在 [5],Clemens 的结尾，他提出了这个问题。

问题 1.1. ([5]) $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 上单边移位的同构复杂性如何?

根据 [7, 定理 6.4], 的证明，我们可以得出：在足够大的字母表上，传递单边子移位的共轭关系是不可树化的。但这里与双边情形不同，缩小字母表并非易事，我们

将对 [7]中的构造做一些修改。这样我们便能部分回答这个问题。

定理 1.2。 字母表为 $\{0,1\}$ 的传递单边子移位上的共轭关系是一个不可树化且非顺从的可数博雷尔等价关系。

2. Preliminaries

在本文中，我们始终令 A 为一个满足 $|A| \geq 2$ 的有限字母表。将 A 的所有有限词组成的集合记为 A^*，换言之， $A^* = A^{<\omega}$。将 A 中所有长度为奇数的有限词组成的集合记为 A^*_{odd}。对于 $x \in A^*$ 或 $x \in A^{\mathbb{N}}$ 或 $x \in A^{\mathbb{Z}}$，如果 $a < b$，使得 a 和 $b-1$ 属于 x 的定义域，则我们将 $x[a,b$ 记作唯一的词 $w \in A^*$，使得对于每个 $0 \leq i < b-a$， $|w| = b-a$ 且 $w(i) = x(a+i)$。对于 w， $v \in A^*$，我们将 w 与 v 的连接记为 wv，换言之，

$$wv \in A^*, |wv| = |w| + |v|, wv[0,|w|) = w \text{ and } wv[|w|, |w| + |v|) = v.$$

可逆动力系统的一个典型例子是子移位。**伯努利移位**是一个动力系统（$A^{\mathbb{Z}}$， S），其紧致度量空间为 $A^{\mathbb{Z}}$，其中 A 是有限字母表，并且具有左移位作用 S，使得

$$\forall n \in \mathbb{Z} \forall x \in A^{\mathbb{Z}}\ S(x)(n) = x(n+1).$$

字母表为 A的**子移位**是 $A^{\mathbb{Z}}$ 的闭子集 X，使得 $S(X) = X$。我们将子移位 X 视为可逆动力系统（X， S）。

对于不可逆系统，我们有类似的概念。**单侧全移位**是一个动力系统（$A^{\mathbb{N}}$， S），其紧致度量空间为 $A^{\mathbb{N}}$，其中 A 是有限字母表，并且具有左移位作用 S，使得

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in A^{\mathbb{Z}}\ S(x)(n) = x(n+1).$$

注意，当 $|A| \geq 2$时，单侧全移位上的左移位作用不可逆。字母表为 A 的**单边子移位**是 $A^{\mathbb{N}}$ 的闭子集 X，使得 $S(X) \subset X$。于是，单边子移位 X 可视为动力系统（X， S）。

为了从描述集合论的视角研究子移位和单边子移位上的共轭关系，我们应当为（单边）子移位类赋予一个标准博雷尔结构。对于波兰空间 X， X 的所有紧子集类上的维托里斯拓扑（记作 $K(X)$）是一个波兰拓扑（见 [17,第 4.F 节]）。字母表为有限集 A 的所有子移位构成 G_δ $K(A^{\mathbb{Z}})$ 的一个子集；字母表为有限集 A 的所有单边子移位构成 G_δ $K(A^{\mathbb{N}})$ 的一个子集（见 [18, 事实 2.1]）。由此，（单边）子移位类具有一个波兰拓扑。

关于子移位上的共轭关系，请注意以下定理。

定理 2.1.(Curtis–Hedlund–Lyndon, [12]) 设 A 为一个有限字母表，设X、$Y \subset A^{\mathbb{Z}}$ 为子移位，并设 $\varphi: X \to Y$ 为从 (X, S) 到(Y, S)的共轭映射。则存在 $n \in \mathbb{N}$ 以及一个函数 $C: A^{2n+1} \to A$，使得对所有$x \in X$ 与 $i \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi(x)(i) = C(x[i-n, i+n+1)).$$

此处 C 称为 f 的**块码**。由于 f 完全由其块码决定，且块码仅有可数多个，因此子移位上的共轭关系是可数等价关系。又由本定理的陈述可知，子移位上的共轭关系是博雷尔的。类似地，单边子移位上的共轭关系是可数博雷尔等价关系。

设 E 是标准博雷尔空间 X 上的可数博雷尔等价关系。若存在 $E=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n$，使得对每个 $n\in\mathbb{N}$，E_n 都是一个等价类均为有限集的博雷尔等价关系，并且 $E_n\subset E_{n+1}$，则称 E 是**超有限**的。若存在定义 3.1] 中所述的标准博雷尔空间 X 上的博雷尔无环图 G，使得对于任意 $x,\ y\in X$，当且仅当 x 与 y 属于同一个连通 G 分支时，xEy，则称等价关系 E 是**可树化** [15, 。若存在一列从 E 到 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 的博雷尔函数 f_n，满足以下条件，则称 E 是**可平滑**[10, 第 7 节.4]：

(a) 对任意 $x\in X$ 和 $n\in\mathbb{N}$，$\Sigma_{yEx}f_n(x,\ y)=1$;
(b) 对任意 $x,\ x'\in X$，若 xEx'，则有

$$\lim_{n\to\infty}\Sigma_{yEx}|f_n(x,y)-f_n(x',y)|=0.$$

超有限等价关系的一个经典例子是 E_0 定义在 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$上的关系。对于 $x,\ y\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$，若对所有足够大的 $n\in\mathbb{N}$，都有 $x(n)=y(n)$，则令 xE_0y。每个超有限等价关系都可 Borel 归约到 E_0。此外，每个超有限等价关系都是可树化且可平滑的。

3. Proof of the Main Theorem

在本节中，令 A 为由不同符号 a_i、$\tilde{a}_i$和 # 构成的字母表，其中 $1\leq i\leq 6$，换言之，

$$A=\{a_i:1\leq i\leq 6\}\cup\{\tilde{a}_i:1\leq i\leq 6\}\cup\{\#\}.$$

以下记号引自 [7]。

给定 $R\subset(A\backslash\{\#\})^*_{\mathrm{odd}}$，我们将禁词集为 $\{\#w\#:w\in R\}$ 的子移位记作 $X(R)$，换言之，

$$X(R)=\{x\in A^{\mathbb{Z}}:\forall\, w\in R\quad \#w\#\ is\ not\ a\ subword\ of\ X\}.$$

注意，$(A\setminus\{\#\})^{\mathbb{Z}}\subset X(R)$，因此 $X(R)$是一个非空子移位。令

$$\mathcal{S}(A)=\{X(R):R\subset(A\setminus\{\#\})^*_{\mathrm{odd}}\}.$$

将 $(A\setminus\{\#\})^*_{\mathrm{odd}}$ 的一个子集及其示性函数等同起来，则将 $R\in\{0,1\}^{(A\setminus\{\#\})^*_{奇}}$映射到 $X(R)$ 的映射，是从 $\{0,1\}^{(A\setminus\{\#\})^*_{奇}}$到 $\mathcal{S}(A)$ 的连续映射，其中采用维托里斯拓扑。因此，$\mathcal{S}(A)$ 是一个紧致度量空间。

令 $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ 表示从 $(A^{\mathbb{Z}},S)$ 到 $(A^{\mathbb{Z}},S)$ 的共轭映射所构成的群。对于$w\in A^*$，我们将柱集 $\{x\in A^{\mathbb{Z}}:\ x[0,|w|)=w\}$ 记为 $[w]$。

定义 3.1 ([7])。我们称 $f\in\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ 是 **#保持的**，如果存在一个双射 $f^*:(A\setminus\{\#\})^*\to(A\setminus\{\#\})^*$，它保持词长，并且对于每个 $w\in(A\setminus\{\#\})^*$，都有

$$f([\#w\#])=[\#f^*(w)\#].$$

我们称相应的保长双射 f^* **表示** f 在 $(A\setminus\{\#\})^*$ 上。我们用 $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}},\#)$ 表示所有保持 # 的自同构$f\in\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ 的集合。

根据定义，Aut($A^{\mathbb{Z}}$,#) 是 Aut($A^{\mathbb{Z}}$) 的一个子群。群 Aut($A^{\mathbb{Z}}$, #) 自然地作用于 $\mathcal{S}(A)$，[7, 命题 5.3] 指出，对于 $f \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}},\#)$ 和$R \subset (A \setminus \{\#\})^*_{\mathrm{odd}}$，取表示 f 的双射 f^*，则有 $f(X(R)) = X(f^*(R))$。取

$$f \cdot X(R) = f(X(R)) = X(f^*(R)),$$

我们得到 Aut($A^{\mathbb{Z}}$,#) 在 $\mathcal{S}(A)$ 上的连续群作用。

在证明中，我们将使用以下定义和引理。

定义 3.2 ([7])。我们称 $f \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}},\#)$ 是**几乎平凡的**，如果对于除有限多个 $w \in (A \setminus \{\#\})^*$ 以外的所有情形，$f^*(w) = w$，其中 f^* 表示 f。

定理 3.3 ([7])。(1) $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}},\#)$ 的诱导作用保持共轭关系。(2) 如果 Γ 是 $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}},\#)$ 的一个可数子群，且不包含几乎平凡的非恒等元，那么其在 $\mathcal{S}(A)$ 上的诱导作用保持一个概率测度，并且几乎处处自由。

现在我们构造 Aut($A^{\mathbb{Z}}$,#) 的一个可数子群 Γ。对于 $1 \le i \le 3$，令 g_i 为从 A^2 到 A 的函数，使得

$$g_i(bc) = \begin{cases} a_i, & b = \tilde{a}_i; c = a_j \ where\ 1 \le j \ne i \le 3,\ or\ c = \#. \\ \tilde{a}_i, & b = a_i; c = a_j \ where\ 1 \le j \ne i \le 3,\ or\ c = \#. \\ b, & otherwise. \end{cases} \tag{3.1}$$

对于 $4 \le i \le 6$，令 g_i 为从 A^2 到 A 的函数，使得

$$g_i(bc) = \begin{cases} a_i, & b = \tilde{a}_i; c = a_j \ where\ 4 \le j \ne i \le 6,\ or\ c = \#. \\ \tilde{a}_i, & b = a_i; c = a_j \ where\ 4 \le j \ne i \le 6,\ or\ c = \#. \\ b, & otherwise. \end{cases}$$

对于 $1 \le i \le 6$，令 f_i 为从 $A^{\mathbb{Z}}$ 到 $A^{\mathbb{Z}}$ 的映射，使得

$$f_i(x)(k) = g_i(x(k)x(k+1)). \tag{3.2}$$

引理 3.4。对于每个 $1 \le i \le 6$、$f_i \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}}, \#)$ 以及 $f_i^2 = \mathrm{id}$。

证明。根据 f_i 的定义，函数 f_i 是连续的，并且与移位作用 S 交换。不妨设 $1 \le i \le 3$。对于 $x \in A^{\mathbb{Z}}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，若 $x(k) \ne a_i,\ \tilde{a}_i$，根据 g_i 的定义，我们有 $f_i^2(x)(k) = f_i(x)(k) = x(k)$。若 $x(k) = a_i$，则有两种情况：

情况 1。$x(k+1) = a_j$，其中 $1 \le j \ne i \le 3$，或者 $x(k+1) = \#$。

由于 $x(k+1) \ne a_i,\ \tilde{a}_i$，我们有 $f_i(x)(k+1) = x(k+1)$。根据定义，$f_i(x)(k) = \tilde{a}_i$。因此根据 g_i 的定义，$f_i^2(x)(k) = a_i = x(k)$

情况 2。否则。

根据 f_i 和 g_i 的定义，$f_i(x)(k) = a_i$。如果 $x(k+1) \ne a_i$，那么 $\tilde{a}_i$，于是 $f_i(x)(k+1) = x(k+1)$，并且我们有 $f_i^2(x)(k) = x(k)$。如果 $x(k+1) = a_i$ 或 $x(k+1) = \tilde{a}_i$，那么根据 g_i 的定义，$f_i(x)(k+1) = a_i$ 或 $f_i(x)(k+1) = \tilde{a}_i$。因此，根据 g_i 的定义，我们得到 $f_i^2(x)(k) = a_i = x(k)$。情况 2 到此结束。

同样地，当 $x(k) = \tilde{a}_i$ 时，我们有 $f_i^2(x)(k) = x(k)$。由于 x 和 k 的任意性，$f_i^2 = \mathrm{id}$。这也表明，f_i 是从 $A^{\mathbb{Z}}$ 到其自身的双射，因此 $f_i \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$。

令 f_i^*为从$(A\setminus\#)^*$到$(A\setminus\#)^*$的映射，使得 $f_i^*(\emptyset) = \emptyset$且 $f_i^*(a_0 \cdots a_n) = g_i(a_0a_1)g_i(a_1a_2)g_i(a_2a_3) \cdots g_i(a_n\#)$。根据 f_i的定义，映射 f_i^*表示 f_i，因此 $f_i \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}},\ \#)$。□

记由 $\{f_i$ 生成的 Aut($A^{\mathbb{Z}}$, #) 的子群为 $1 \le i \le 6\}$。

定理3.5。 群 Γ 与 $(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2)^2$, 同构，并且 Γ中不存在几乎平凡的非单位元。

证明。 首先我们证明，对于 $1 \le i \le 3$ 和 $4 \le j \le 6$，有 $f_i f_j = f_j f_i$。记 $\{\#\} \cup \{a_{i'} : 1 \le i' \ne i \le 3\}$ 为 B_i，记 $\{\#\} \cup \{a_{j'} : 4 \le j' \ne j \le 6\}$ 为B_j，注意到 B_i 和 B_j 是在 f_i 和 f_j 下的不变集。令 $x \in A^{\mathbb{Z}}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，我们有 3 种情况:

情况 1。 $x(k) \ne a_i, \tilde{a}_i, a_j, \tilde{a}_j$。

在这种情况下，我们总有 $f_i f_j(x)(k) = f_j f_i(x)(k) = x(k)$。

情况 2。 $x(k) = a_i$ 或 $x(k) = \tilde{a}_i$。

不失一般性，假设 $x(k) = a_i$。若 $x(k+1) \in B_i$，则$f_i(x)(k) = \tilde{a}_i$，且 $f_j f_i(x)(k) = \tilde{a}_i$ 对 $j \ne i$成立；由 B_i 在 f_j 下的不变性，我们还有 $f_j(x)(k) = a_i$以及 $f_j(x)(k+1) \in B_i$，于是 $f_i f_j(x)(k) = \tilde{a}_i = f_j f_i(x)(k)$。若 $x(k+1) \notin B_i$，则 $f_i(x)(k) = a_i$，且 $f_j f_i(x)(k) = a_i$ 对 $j \ne i$成立；由 B_i 在f_j下的不变性，我们还有 $f_j(x)(k) = a_i$ 以及 $f_j(x)(k+1) \notin B_i$，于是 $f_i f_j(x)(k) = a_i = f_j f_i(x)(k)$。

情形 3。 $x(k) = a_j$ 或 $x(k) = \tilde{a}_j$。

与情况 2 类似， $f_i f_j(x)(k) = f_j f_i(x)(k)$。

由于 x 和 k 的任意性，我们有 $f_i f_j = f_j f_i$。

接下来，要证明 Γ 与 $(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2)^2$, 同构，只需证明对于每个满足 $m + n \ge 1$ 的有限序列 $i_1 \cdots i_n \in \{1,2,3\}^*$ 和 $j_1 \cdots j_m \in \{4,5,6\}^*$，以及每个 $1 \le k < n$、 $i_k \ne i_{k+1}$，对于每个 $1 \le k < m$、 $j_k \ne j_{k+1}$，都有 $f_{i_1} \cdots f_{i_n} f_{j_1} \cdots f_{j_m} \ne \mathrm{id}$。将 $f_{i_1} \cdots f_{i_n} f_{j_1} \cdots f_{j_m}$ 记为 f。

主张 1。对于无穷多个字 v, $f_{i_1}^* \cdots f_{i_n}^* f_{j_1}^* \cdots f_{j_m}^*(v) \ne v$。

证明。 不失一般性，假设 $n \ne 0$。由于对 $1 \le i \le 3$ 和$4 \le j \le 6$，我们有 $f_i f_j = f_j f_i$，因此我们也有 $f_i^* f_j^* = f_j^* f_i^*$。对每个字 $w \in \{a_1, a_2, a_3\}^*$，用归纳法容易得到：对每个 $1 \le k \le n$，$f_{i_k}^* \cdots f_{i_n}^*(w\tilde{a}_{i_1} \cdots \tilde{a}_{i_n})$的第$(|w| + n - k)$个位置是$a_{i_{n-k+1}}$，从而 $f_{i_1}^* \cdots f_{i_n}^*(w\tilde{a}_{i_1} \cdots \tilde{a}_{i_n})$的第 $|w|$个位置是 a_{i_1}。字 $w\tilde{a}_{i_1} \cdots \tilde{a}_{i_n}$在$f_4^*$，$f_5^*$，$f_6^*$下不变，因此 $f_{i_1}^* \cdots f_{i_n}^* f_{j_1}^* \cdots f_{j_m}^*(w\tilde{a}_{i_1} \cdots \tilde{a}_{i_n})$的第 $|w|$个位置是 a_{i_1}，这意味着 $f_{i_1}^* \cdots f_{i_n}^* f_{j_1}^* \cdots f_{j_m}^*(w\tilde{a}_{i_1} \cdots \tilde{a}_{i_n}) \ne w\tilde{a}_{i_1} \cdots \tilde{a}_{i_n}$。至此该断言的证明结束。□

根据定义 3.1，不难验证 $f_{i_1}^* \cdots f_{i_n}^* f_{j_1}^* \cdots f_{j_m}^*$ 表示 f；由断言 1 可知 $f_{i_1}^* \cdots f_{i_n}^* f_{j_1}^* \cdots f_{j_m}^* \ne \mathrm{id}$，因此得到 $f_{i_1} \cdots f_{i_n} f_{j_1} \cdots f_{j_m} \ne \mathrm{id}$。此外，由该断言可知， f 不是几乎平凡元。证毕。

□

令 E 为 Γ 在 $\mathcal{S}(A)$ 上的作用所诱导的等价关系。

定理 3.6. 等价关系 E 不可树化且非顺从。

证明。 根据定理 3.3， Γ 在 $\mathcal{S}(A)$上的作用保持一个概率测度，并且几乎处处自由。根据Pemantle–Peres [19], 的结果，由 $F_2 \times F_2$ 的保测自由作用所诱导的等价关系不可树化。由于 Γ同构于$(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2)^2$,，而后者包含作为子群的一个副本 $F_2 \times F_2$，

于是我们得到某个不可树化的博雷尔等价关系 $F \subset E$。由 [15,定理 3.3(iii)], E 不可树化。

群 Γ 不是可 amenable 群，因此由 [10, 定理 7.4.8]可知， E 是非顺从的。

□

定理 3.7。 字母表为 $\{0,1\}$ 的传递单边子移位上的共轭关系是不可树化且非顺从的。

证明。 由 [15, 定理 3.3(iii)]和 [15, 定理 2.15(iii)], , 我们只需构造一个 $\mathcal{S}(A)$ 到字母表为 $\{0,1\}$ 的传递单边子移位类的博雷尔单射 φ，使得对每个 $X_1, X_2 \in \mathcal{S}(A)$, 若 $X_1 E X_2$，则 $\varphi(X_1)$ 与 $\varphi(X_2)$ 共轭。

对于 $1 \le i \le 6$, 令

$$\rho(a_i) = 110100(00)^{7-i}11(00)^i$$

and

$$\rho(\tilde{a}_i) = 11010011(00)^{6-i}11(00)^i,$$

我们也定义

$$\rho(\#) = (11)^5 01 (11)^5.$$

那么，对于 $X \in \mathcal{S}(A)$，取

$$\varphi(X) = \bigcup_{0 \le n < 22} S^n \{\rho(x(0))\rho(x(1))\rho(x(2)) \cdots : x \in X\}.$$

对于 $x \in A^{\mathbb{Z}}$，我们用 $\rho^+(x)$表示 $\rho(x(0))\rho(x(1))\rho(x(2)) \cdots$。

注意，对于每个符号 $a \in A$，都有 $|\rho(a)| = 22$，因此有$S(\varphi(X)) \subset \varphi(X)$。根据定义，映射 ρ^+ 是从 $A^{\mathbb{Z}}$ 到 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$的连续映射。于是，对于每个 $X \in \mathcal{S}(A)$, $\{\rho^+(x) : x \in X\}$ 是闭集， $\varphi(X)$是 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$的22个闭子集的并，因此 $\varphi(X)$是闭集。由此可知， $\varphi(X)$是一个单边子移位。通过分析子词110100和11011的出现情况，不难验证 $\{\rho(a) : a \in A\}$ 是唯一可读的，换言之，

$$\forall a, a', a'' \in A \; \forall 1 \le n < 22 \quad \rho(a) \ne (\rho(a')\rho(a''))[n, n+22). \tag{3.3}$$

根据 (3.3)，对于每个 $X \in \mathcal{S}(A)$，词 $v = b_0 \cdots b_k \in A^*$ 是 X 的禁词，当且仅当 $\rho(b_0) \cdots \rho(b_n)$ 是 $\varphi(X)$ 的禁词，因此我们有 φ 是一个单射。对于每个 $X \in \mathcal{S}(A)$, 存在 $x \in X$ 使得 $\{S^n x : n \in \mathbb{N}\}$ 在 X 中稠密，那么 $\{S^n(\rho^+(x)) : n \in \mathbb{N}\}$ 在 $\varphi(X)$ 中稠密，因此 $\varphi(X)$ 是一个传递的单边子移位。显然，映射 φ 是博雷尔的。

那么我们只需证明，对于每个 X_1, $X_2 \in \mathcal{S}(A)$, $X_1 E X_2$ 蕴含 $\varphi(X_1)$ 和 $\varphi(X_2)$ 共轭。回忆一下， f_i 在 (3.2) 中定义。根据引理 3.4，不失一般性，假设 $f_1(X_1) = X_2$ 且 $f_1(X_2) = X_1$。

断言 2。 对于 $i = 1, 2$, $(\{S^n(\rho^+(x)) : x \in X_i\})_{0 \le n < 22}$ 是 $\varphi(X_i)$ 的既开又闭分割。

证明。 对于每个 $0 \le n \ne n' < 22$, $i = 1,2$，取 $x \in X_i$，根据ρ^+的定义，存在 $a \in A$ 使得 $S^n(\rho^+(x))[22-n, 44-n) = \rho(a)$。若 $S^n(\rho^+(x)) \in \{S^{n'}(\rho^+(y)) : y \in X_i\}$, 根据 $n' \ne n$，存在 $b, c \in A$ 和 $1 \le m < 22$ 使得

$$\rho(a) = S^n(\rho^+(x))[22-n, 44-n) = \rho(b)\rho(c)[m, m+22),$$

这与 (3.3) 矛盾。因此，对于每个 $0 \leq n \neq n' < 22$, $i = 1,2$ 和 $x \in X_i$，我们有 $S^n(\rho^+(x)) \notin \{S^{n'}(\rho^+(x)) : x \in X_i\}$。于是我们得到，当 $0 \leq n \neq n' < 22$ 时，$\{S^n(\rho^+(x)) : x \in X_i\}$ 与 $\{S^{n'}(\rho^+(x)) : x \in X_i\}$ 不相交，因此 $(\{S^n(\rho^+(x)) : x \in X_i\})_{0 \leq n < 22}$ 是 $\varphi(X_i)$ 的一个分割。我们已经证明，对于每个 $1 \leq n < 22$，$\{S^n(\rho^+(x)) : x \in X_i\}$ 是闭集，所以 $(\{S^n(\rho^+(x)) : x \in X_i\})_{0 \leq n < 22}$ 是 $\varphi(X_i)$的一个既开又闭分割。□

回顾（3.1）中 g_1 的定义。对于 $k \in \mathbb{N}_+$, $0 \leq n < 22$ 和 $y \in \{S^n（\rho^+（x）） : x \in X_i\}$，令

(1) $h（y）[22k - n, 22（k + 1） - n） = \rho（a）$，若 $y[22k - n, 22（k + 1） - n） = \rho（b）$，$y[22（k + 1） - n,\ 22（k + 2） - n） = \rho（c）$ 且 $a = g_1（bc）$，其中 $a, b, c \in A$;

(2) $h（y）[0, 22-n） = \rho（a）[n, 22）$，若 $y[0, 22-n）$ 是 $\rho（b）$ 的后缀，$y[22-n, 44-n）=\rho（c）$ 且 $a = g_1（bc）$，其中 $a, b, c \in A$。

使用相同的项目 (1) 和 (2)，我们定义一个从 $\varphi(X_2)$ 到 h' 的映射。

我们验证 h 是从 $\varphi(X_1)$ 到 $\varphi(X_2)$ 的共轭映射。根据 ρ 的定义，对于 $8 \leq n < 22$ 和 $1 \leq i \leq 6$，我们总有 $\rho(a_i)[n, 22) = \rho(\tilde{a}_i)[22 - n, 22)$，因此对于每个 $y \in \varphi(X_1)$，$h(y)[0, 22 - n) = y[0, 22 - n)$。另一方面，对于 $0 \leq n < 8$ 和 $y \in \{S^n(\rho^+(x)) : x \in X_1\}$，存在唯一的符号 $b \in A$，使得 $y[0, 22 - n) = \rho(b)[n, 22)$。因此，$h$（以及 h'）定义良好。根据定义可知，h 和 h' 是连续的，并且 $hS = Sh$、$h'S = Sh'$。根据 h 的定义，对于每个 $x \in X_1$，$h(\rho^+(x)) = \rho^+(f_1(x))$。我们知道 $f_1(X_1) = X_2$，所以对于每个 $x \in X_1$，$h(\rho^+(x)) \in \varphi(X_2)$，于是 h 是从 $\varphi(X_1)$ 到 $\varphi(X_2)$ 的映射，因为 $hS = Sh$。类似地，h' 是从 $\varphi(X_2)$ 到 $\varphi(X_1)$ 的映射。根据 h 和 h' 的定义，$h'h = \mathrm{id}_{\varphi(X_1)}$ 和 $hh' = \mathrm{id}_{\varphi(X_2)}$，因此我们得到 h 是从 $\varphi(X_1)$ 到 $\varphi(X_2)$ 的双射。于是我们知道，h 是从 $\varphi(X_1)$ 到 $\varphi(X_2)$ 的共轭映射。证明完毕。

□

References

[1] Scot Adams 和 Alexander S. Kechris。线性代数群与可数博雷尔等价关系。 *Journal of the American mathematical society*, 13(4):909-943, 2000。[2] Howard Becker 和 Alexander S. Kechris。 *The Descriptive Set Theory of Polish Group Actions* 1996 。剑桥大学出版社，.[3] Henk Bruin 和 Benjamin Vejnar。以可数结构分类一维动力系统。 *The Journal of Symbolic Logic*, 88(2):562-578, 2023。[4] Riccardo Camerlo 和 Su Gao。可数布尔代数同构关系的完备性。 *Transactions of the American Mathematical Society*, 353(2):491-518, 2001。[5] John D. Clemens。子移位的同构是普适可数博雷尔等价关系。 *Israel Journal of Mathematics*, 170(1):113-123, 2009。[6] Konrad Deka、Felipe Garc´ıa-Ramos、Kosma Kasprzak、Philipp Kunde 和 Dominik Kwiet- niak。康托极小系统的共轭与翻转共轭问题。 *In preparation*, 2024。[7] Konrad Deka、Dominik Kwietniak、Bo Peng 和 Marcin Sabok。Bowen问题32与具有规范性的系统的共轭问题。 *ArXiv:2501.02723*, 2025。[8] Matthew Foreman、Daniel J. Rudolph 和 Benjamin Weiss。遍历理论中的共轭问题。 *Annals of mathematics*, 1529-1586, 2011。[9] Matthew Foreman 和 Benjamin Weiss。遍历保测变换的反分类定理。 *Journal of the European Mathematical Society* 6 3 277 292, , ( ): -2004 .[10] Su Gao。 *Invariant Descriptive Set Theory*。CRC 出版社，2008。[11] Su Gao 、 RUIWEN LI、Bo Peng 和 Yiming Sun。有限秩 Toeplitz子移位。*ArXiv:2504.05582*, 2025。

[12] Gustav A Hedlund。移位动力系统的端同态与自同构。 *Mathematical systems theory* 3 4 320 375, 1969 , ( ): -

。[13] Greg Hjorth。 *Classification and orbit equivalence relations*。美国数学会，2000。[14] Greg Hjorth。保测变换的不变量。 *Fundamenta Mathematicae* 169 1 51 84, 2001 , ( ): -

。[15] Steve Jackson 、 Alexander S. Kechris 和 Alain Louveau。可数博雷尔等价关系。 *Journal of Mathematical Logic*, 2(01):1-80, 2002。[16] Burak Kaya。带基点的康托尔极小系统拓扑共轭的复杂性。*Archive for Mathematical Logic*, 56(3):215-235, 2017。[17] Alexander S. Kechris。 *Classical descriptive set theory*。施普林格科学与商业媒体，2012。[18] Ruiwen Li 和 Bo Peng。带基点的极小系统的同构无法通过可数结构分类。 *ArXiv:2401.11310*, 2024。[19] Robin Pemantle 和 Yuval Peres。非可 amenable 积不可树化。 *Israel Journal of Mathematics* 118 1 147 , ( ): -

155, 2000。[20] Bo Peng。流形上微分同胚共轭的反分类结果。*ArXiv:2505.09491*, 2025。[21] Bo Peng。环面上极小同胚的反分类定理。*ArXiv:2512.24031*, 2025。[22] Simon Thomas。极小子移位的拓扑全群与恰无限群。 *Proceedings of the 12th Asian Logic Conference* 2012 , 。

School of Mathematical Sciences and LPMC, Nankai University, Tianjin 300071, P.R.China*Email address*: rwli@mail.nankai.edu.cn