arXiv:2603.04802v1 [math.DG] 5 Mar 2026

黎曼曲面退化时微分形式的阿基米德高度配对

曹俊宇

Abstract. 我们定义黎曼曲面单参数退化中纤维上上同调平凡的微分形式的阿基米德高度配对，并研究其渐近行为。证明依赖于 Dai–Yoshikawa 关于小特征值渐近性的最新研究。作为应用，我们将此配对与 Filip–Tosatti 的流值配对联系起来，并将他们的构造推广到更广泛的几何情形。

Contents

引言 1
1. 技术准备 4 2. 代数曲线退化的谱几何 13 3. 优选势的估计 21 4. 阿基米德高度配对的渐近性 29 5. 抛物自同构 K3 曲面的应用 33 附录 A. 纤维积分的渐近性 39 参考文献 43

Introduction

设 $\pi\colon X \to S \simeq \mathbb{D}$ 是从复曲面 X 到与单位圆盘同构的黎曼曲面的适当满射全纯映射。我们假设 π 具有连通纤维，且 $X_0 := \pi^{-1}(0)$ 是唯一的奇异纤维。假设 X 配备了一个 K¨ahler 度量。

对于 X 上的两个光滑实 $(1,1)$-形式 α，β，若它们在光滑纤维 $X_s := \pi^{-1}(s)(s \neq 0)$ 上上同调平凡，即 $\int_{X_s}\alpha = \int_{X_s}\beta = 0$，我们定义它们之间的阿基米德高度配对 。

定义 0.1 (阿基米德高度配对，定理 4.1)。对于任意 $s \neq 0$，令 $-\varphi_s \in C^\infty(X_s)$ 为 α 在 X_s上的势，即 $\mathrm{dd}^c\varphi_s + \alpha\,|_{X_s} = 0$。那么，阿基米德高度配对 $\langle\alpha,\ \beta\rangle$ 在 α，β 上是光滑轨迹 $S^\circ := S \setminus \{0\}$:

$$\langle\alpha,\beta\rangle(s) := \int_{X_s}\varphi_s\beta, \quad s \neq 0.$$

由于 π 是 S° 上的淹没映射，$\langle\alpha,\ \beta\rangle \in C^\infty(S^\circ)$ 。

我们研究其在退化的奇异纤维附近的渐近性。

日期：2026年3月6日。

定理 0.2 (定理 4.5，推论 4.6)。存在一个常数 $c_{\alpha,\beta}\in\mathbb{R}$ 使得$\langle\alpha,\beta\rangle - c_{\alpha,\beta}$对数 $|s|^2$ 可连续延拓至 S。特别地，$\langle\alpha,\beta\rangle\in L^\infty(S^\circ)$ 当且仅当 $\langle\alpha,\beta\rangle\in C^0(S)$。

当 X_0 是一个约化除子，且 C_1、$\cdots$、C_N 是其不可约分支时，常数 $c_{\alpha,\beta}$ 按如下方式确定：设 M 为 X_0的不可约分支的交数矩阵，给定为 $(M_{ij})_{1\le i,\,j\le N}=(C_i\cdot C_j)_{1\le i,\,j\le N}$，并设 M^+ 为 M的摩尔-彭若斯伪逆。则 $c_{\alpha,\beta}=\mathbf{v}_\alpha^T(M^+)^T\mathbf{v}_\beta$，其中

$$\mathbf{v}_\alpha=\left(\int_{C_1}\alpha,\dots,\int_{C_N}\alpha\right)^T,\quad \mathbf{v}_\beta=\left(\int_{C_1}\beta,\dots,\int_{C_N}\beta\right)^T.$$

注 0.3. “阿基米德高度配对”这一名称源自阿拉克洛夫理论，例如 Bost 的相关工作 [Bos90]。但他们的配对是针对代数循环/除子定义的。

具体而言，设 D，E是单参数退化 π上的两个除子：$X\to S$代数曲线的单参数退化。假设 D，E 的相对次数为 0，且它们的支集互不相交。对于除子 D，我们按照 g_{D_s} 在一般纤维上 X_s的定义，定义其格林流 [HdJ15、公式 (2.1)]。该 g_{D_s} 是一个定义在 X_s 上的分布，满足方程

$$\partial\overline{\partial}g_{D_s}+\pi i\delta_{D_s}=0,$$

其中，D_s 是 D 在 X_s上的限制。我们注意到，g_{D_s} 在 X_s 上除 D_s的支集外均光滑。因此，D 与 E 之间的阿基米德高度配对是在 S°上定义良好的函数：

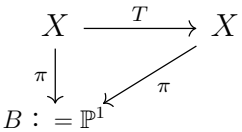
$$s\mapsto\langle D_s,E_s\rangle_\infty:=g_{D_s}([E_s])=\sum_i a_i g_{D_s}(q_i),$$

其中 $E_s=\sum_i a_i q_i$。

在 Holmes–de Jong 的论文中 [HdJ15，定理 2。1], 他们推导出了代数曲线退化时阿基米德高度配对 $\langle D_s$的 $E_s\rangle_\infty$ 类似渐近结果。

注 0.4。Yoshikawa [Yos06] 和 Eriksson–Freixas–Mourougane [EFiMM18] 在研究奇异纤维附近的 Quillen 度量时，也得到了类似的渐近结果。Silverman [Sil92、Sil94a、Sil94b] 以及近期的 DeMarco–Mavraki [DM20]证明了椭圆曲线的典范高度在奇异纤维附近也有类似的行为。

对形式的阿基米德高度配对的研究，受到以下动力学情形的启发。设 X 是一个射影椭圆 K3 曲面，具有一个保持该纤维化的抛物型自同构 T：



在 Filip–Tosatti 的论文 [FT23定理 3.2 中，14], 他们引入了“流值配对” $\eta_B(T,\ [\alpha])$，它是定义在 B上的一个流，其中 α 是 光滑闭实 *(1,* 1)-形式，且在光滑纤维上上同调平凡。

该流值配对可用于刻画自同构的大迭代的极限性质 T。例如，他们在 [FT23，推论 3.2 中证明了这一点。20]

that

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_*^n\omega}{n^2}=\frac{1}{2}\pi^*\eta_B(T,[T_*\omega-\omega]), \tag{0.1}$$

其中 ω 是 X上的 K¨ahler 形式。

当 π 的奇异纤维为约化且不可约时，Filip–Tosatti 在 η_B 中证明了 [FT23，命题 3.211] 中的位势具有连续性。本文去除了对奇异纤维的假设，并证明一般情况下也具有连续性。

命题 0.5 (命题 5.4)。 设 $\mathrm{Aut}_\pi(X)$ 为保持纤维化的 X的自同构群。存在 G 中$\mathrm{Aut}_\pi(X)$ 的一个有限指数子群 η_B，使得限制在 G 上的流值配对具有连续位势。

该命题由以下观察得证，此观察将阿基米德高度配对与流值配对的位势联系起来。

我们用 u 表示流值配对 $\eta_B(T,\ [\alpha])$ 的一个位势，则（见公式（5.4））

$$u(s)=\int_{X_s} f\omega+\langle\alpha,(T^*-I)\omega\rangle,$$

其中 $f\in C^\infty(X)$ 和 ω 是¨上的一个归一化 Kähler 形式 X。第一项 $s\mapsto\int_{X_s}f\omega$ 已由 Barlet 进行了深入研究（定理 1.3），且具有 Hölder¨连续性。因此，命题 0.5 可由阿基米德高度配对的连续性推出，该配对是位势 u的第二项。

利用 公式 (0.1) ([FT23，推论 3.2。20])，我们得到椭圆 K3 曲面上抛物动力系统的如下结果。

推论 0.6 (推论 5.5). 设 G 是 $\mathrm{Aut}_\pi(X)$ 中由 命题 *0.5*定义的有限指数子群。那么，对于任意 *K¨ahler* 形式 ω 在 X 上，以及任意 $T\in G$，极限流 $\eta:=\lim_{n\to\infty}\frac{T_*^n\omega}{n^2}$ 具有连续位势。

此外，我们证明流 $(T^n)_{n^2}{}^*\omega\to\frac{1}{2}\pi^*\eta_B(T,\ [T_*\omega-\omega])$的收敛不可能在 $C^0_{\mathrm{loc}}(X\setminus X_0)$中。因此，序列 $\left\{\frac{T_*^n\omega}{n^2}\right\}_{n\geq1}$ 为 *Tosatti* 的问题 [Tos25，问题 15] 提供了一个反例，其中令 ω 为 *Ricci*平坦度量。

注 0.7. Cantat–Dujardin 最近的论文也讨论了极限流的正则性 [CD23b，定理 D]。

若自同构是双曲型的，其对应的极限流通常具有 Hölder 连续的势。然而，抛物型自同构所给出的极限流的势是否 Hölder 连续，尚不清楚。

注 0.8.关于具有一般奇异纤维的椭圆曲面上的抛物动力学，其他相关研究包括 Duistermaat 的专著 [Dui10]以及 Cantat– Dujardin 最近的论文 [CD23a，第 3]。

这里我们概述定理 0.2的证明。通过标准的约化，我们可以假设 X_0 是约化的，且 α,β 在X_0的每个不可约分支上的积分均为零。于是只需证明定理 4.4中配对的连续性。我们引入针对(定理 3.3)的优选势 α,β。随后，根据 Dai–Yoshikawa 的工作 [DY25],，我们能够得到关于优选势的一些估计（定理 3.4,

定理 3.5）。结合关于奇异纤维附近纤维积分连续性的一些结果（命题 1.13, 推论 1.14），我们得到定理 4.4中配对（即纤维积分）的连续性。

本文组织如下。在第 1 节中，我们汇总并证明一些技术性结果。在第 2 节中，我们研究退化的光滑纤维上具有小特征值的特征函数的性质。本节大量使用了 Dai-Yoshikawa 的工作 [DY25]。在第 3 节中，我们引入优选势函数的概念，并基于第 2 节建立其渐近估计。在第 4 节中，我们引入阿基米德高度配对，并证明其在奇异纤维附近的渐近性。在第 5 节中，我们应用前面的结果研究 K3 曲面的抛物动力学。在附录 A中，我们证明一个关于纤维积分渐近性的技术引理。

记号与约定

在复流形 X 上，我们定义 $\mathrm{d}^c = \frac{i}{4\pi}(\partial - \bar{\partial})$，从而 $\mathrm{dd}^c = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}$。

对于紧致微分流形上的闭光滑微分形式 α，我们用 $[\alpha]$ 表示其德拉姆上同调类。

我们用 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}$ 表示复平面中的单位圆盘，用 $\mathbb{D}^\circ := \mathbb{D} \setminus \{0\}$ 表示穿孔单位圆盘。对于正数 $r > 0$，我们还定义 $\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C}: |z| < r\}$ 和 $\mathbb{D}_r^\circ := \mathbb{D}_r \setminus \{0\}$。

致谢。作者感谢导师 Valentino Tosatti 引入这一课题、给予有益的讨论以及始终如一的支持。作者还感谢 Simion Filip、Mikhael Gromov 和徐福林提供的有益讨论，以及戴先哲、Romain Dujardin、Robin de Jong 和 Ken-Ichi Yoshikawa 进行的有益交流，并感谢他们认真阅读早期稿件并提出反馈意见。

1. Technical Preparation

我们汇集并证明一些将在后文中用到的技术性结果。

1.A. 奇异簇上的拉普拉斯算子

设 X 是一个代数簇，赋予其诱导的 Fubini-Study 度量，并令 X_{reg} 为 X 的正则部分。

沿袭 Li-Tian 的工作 [LT95，第 4 节]，我们定义普通拉普拉斯算子 Δ 作用于 X_{reg} 上的紧支撑光滑函数，并令 Δ 为其 Friedrichs 扩张。于是我们有

定理 1.1 ([LT95，第 4 节])。定义在函数上的 *Friedrichs* 扩张 Δ 在紧簇 X（无边界）上是自伴的，其奇异集 奇点集 X 的实余维至少为2。

当 $f \in W^{1,2}(X_{\mathrm{reg}})$ 是调和的，即 $\Delta f = 0$ 几乎处处时，我们有 $\mathrm{d}f = 0$ 且 f 是局部常数。

注记 1.2. 当 X 是 Kähler 空间时，此定理成立，参见 [GPSS23，引理 11。2]。

1.B. Barlet 意义下纤维积分的连续性 `

在 [Bar82], Barlet 推导了复流形在奇异纤维附近退化时纤维积分的渐近展开。

定理 *1.3*（[*Bar82*, *Th´eor`eme* 1]）。设 $D = \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < 1\}$，并设 X 是一个维数为 $n+1$ 的约化不可约复解析空间。设 $\pi: X \to D$ 是满射全纯映射，并将循环记为 X_s $\pi^{-1}(s)$。设 K 是 X 的紧子集。存在有理数 $r_1 \leq \cdots \leq r_k \in [0,2) \cap \mathbb{Q}$，使得对于 C^∞ 上支集包含于 K 的任意 (n,n) 型微分形式 φ，函数$F_\varphi :=\int_{X_s} \varphi$ 在 $s \to 0$ 下具有如下形式的渐近展开：

$$F_\varphi(s) \sim \sum_{\substack{r=r_1,\ldots,r_k \\ j=0,\ldots,n \\ (m,m')\in\mathbb{N}^2}} T^{r,j}_{m,m'}(\varphi) s^m \overline{s}^{m'} |s|^r (\log|s|)^j$$

其中 $T^{r,j}_{m,m'}$ 是 X 上的一个 $(1,1)$-流。

由于 $F_\varphi(s)$ 在 $s \to 0$ 时不会发散，因此对于 $j \geq 1$，有 $T^{0,j}_{0,0}(\varphi) = 0$。设 $0 < r$ 为 $[0,2) \cap \mathbb{Q}$ 中非零 $r_1 \leq \cdots \leq r_k$ 的最小值，则对于 $0 < a < \min(r, 1)$，有

$$|F_\varphi(s) - F_\varphi(0)| \leq C(\varphi)\,|s|^a .$$

因此， $F_\varphi(s)$ 在 0 附近是 H¨older 连续的。

注 1.4. 当纤维化的基底 π 维数较高时，Takayama 在其近期论文 [Tak20] 中推广了 Barlet 的结果。

1.C. 奇异纤维上的收敛

设 π: $X \to \mathbb{D}$ 是从复维数为 $p = q+1$ 的复流形 X 到单位圆盘的适当满射全纯映射。假设 π 具有连通纤维，且 $X_0 := \pi^{-1}(0)$ 是唯一的奇异纤维。定义 $\mathrm{Sing}(X_0) := \{x \in X_0 \mid d\pi_x = 0\}$，以及 $X_{0,\mathrm{reg}} := X_0 \setminus \mathrm{Sing}(X_0)$。令 $X_s := \pi^{-1}(s)$。

我们引入以下在奇异纤维上经常使用的收敛概念。

定义 1.5（奇异纤维上的收敛）。在上述设定下，设 $(s_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}^\circ$ 是一个序列，满足 $s_n \to 0$，当 $n \to \infty$ 时。设 $(f_{s_n})_{n\geq 1}$ 是定义在 X_{s_n} 上的一族 C^k函数，且 f 是定义在 $X_{0,\mathrm{reg}}$ 上的一个 C^k 函数。由 *Ehresmann* 定理，对于任意 $p \in X_{0,\mathrm{reg}}$ 的邻域，映射 π 是局部平凡纤维化，因此存在 p 的一个开邻域U，使得有以下图表：

$$\begin{array}{ccc} i: \ U & \xrightarrow{\simeq} & V \times \mathbb{D}_\epsilon \\ & \searrow^{\pi} & \downarrow \\ & & \mathbb{D}_\epsilon \end{array}$$

于是我们得到一个微分同胚族 i_s: $U \cap X_s \to V \times \{s\}$。对于 $s \in \mathbb{D}_\epsilon$，我们定义 $f_s := (i_s)_*(f_s)$ 为 C^k 上的一个函数，并定义 $f := (i_0)_*(f)$。

我们称 f_{s_n} 收敛到 f 于 C^k_{loc} 在$X_{0,\text{reg}}$，如果在任意 $p \in X_{0,\text{reg}}$附近，我们都有一个$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$坐标图 $U \simeq V \times \mathbb{D}_\epsilon$，且 $f_{s_n} \to f$ 在 $C^k_{\text{loc}}(V)$ 拓扑下成立。这个收敛概念不依赖于坐标图的选取。

注 1.6。设 $f\colon X \setminus X_0 \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数。当且仅当对于任意序列 $s_n \to 0$，f可以延拓为定义在 $X \setminus$奇点集 X_0上的连续函数，此时 f_{s_n} 在 C^0_{loc} 上收敛到连续函数 $f_0 \in C^0(X_{0,\text{reg}})$。

下面我们将说明，奇异纤维上的收敛如何能够推出纤维积分的收敛。

引理 1.7。设 $f_{s_n} \to f$ 在 $X_{0,\text{reg}}$ 上属于 C^0_{loc}，且 f 是定义在$X_{0,\text{reg}}$上的连续函数。设 ω 是 X上的厄米形式。则

$$\int_{X_{0,\text{reg}}} |f|^l \omega^q \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{X_{s_n}} |f_{s_n}|^l \omega^q$$

对于 $1 \leq l < \infty$。

一般而言，若 $f_{s_n} \to f$ 在 $X_{0,\text{reg}}$上的 C^k_{loc} 中，则

$$\int_{X_{0,\text{reg}}} |\nabla^r f|^l \omega^q \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{X_{s_n}} |\nabla^r f_{s_n}|^l \omega^q$$

对于 $0 \leq r \leq k, 1 \leq l < \infty$。

在证明之前，我们需要一个适用于当前情形的单位分解：

引理 1.8。设 X 是一个光滑流形，$K \subset X$ 是一个紧子集。假设$\{U_i\}_{i=1}^N$ 是 K的有限开覆盖。那么存在一组光滑函数$\{\rho_i\}_{i=1}^N$，满足 $\rho_i\colon X \to \mathbb{R}$ 使得：

(1) $\text{supp}(\rho_i) \subset U_i$，对于每个 $i = 1, \ldots, N$。
(2) $0 \leq \rho_i(x) \leq 1$，对于所有 $x \in X$。
(3) $\sum_{i=1}^N \rho_i(x) = 1$，对于所有 $x \in K$。
(4) $\sum_{i=1}^N \rho_i(x) \leq 1$，对于所有 $x \in X$。

证明。（引理 1.8的）由于 K 是紧的，且 $\{U_i\}_{i=1}^N$ 是 K的一个开覆盖，因此开集族 $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \cdots, U_N, X \setminus K\}$ 是 X的一个开覆盖。令$\{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_N, \rho_{N+1}\}$为从属于 $\mathcal{U}$的单位分解。由此得到所需的 $\{\rho_i\}_{i=1}^N$。 □

证明。（引理 1.7）设 $U \simeq V \times \mathbb{D}$ 是 X_0 中某点附近的一个坐标图，$_{\text{reg}}$，使纤维化 $\pi\colon X \to \mathbb{D}$ 平凡化。设 h 是 X 上的一个连续函数，且在 U 上紧支撑。那么，若 $f_{s_n} \to f$ 在 C^k_{loc} 上关于 X_0 收敛$_{,\text{reg}}$，则我们有 $h_{s_n} |\nabla^r f_{s_n}| \to h_0 |\nabla^r f|$ 在 $C^0(V)$-拓扑下收敛。特别地，我们有 $\int_{X_{0,\text{reg}}} h |\nabla^r f|^l \omega^q = \lim_{n\to\infty} \int_{X_{s_n}} h |\nabla^r f_{s_n}|^l \omega^q$。

对于 $X_{0,\text{reg}}$ 中任意紧子集 K，设 $\{U_i\}_{i=1}^N$ 是由 $X \setminus$ 中开集构成的、覆盖 K 的一个开覆盖，且假设每个 $U_i \simeq V_i \times \mathbb{D}$ 都是使纤维化 π 平凡化的坐标图。

然后我们取如下单位分解 $\{h_i\}_{i=1}^N$ 从属于 $\{U_i\}_{i=1}^N$ 如 引理 1.8所示，则对每个 i，我们有

$$\int_{X_{s_n}} h_i |\nabla^r f_{s_n}|^l \omega^q \to \int_{X_{0,\text{reg}}} h_i |\nabla^r f|^l \omega^q.$$

因此，我们有

$$\int_K |\nabla^r f|^l \omega^q \le \sum_{i=1}^N \int_{X_{0,\mathrm{reg}}} h_i |\nabla^r f|^l \omega^q = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^N \int_{X_{s_n}} h_i |\nabla^r f_{s_n}|^l \omega^q$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} \int_{X_{s_n}} |\nabla^r f_{s_n}|^l \omega^q.$$

由于 K 可以取为$X_{0,\mathrm{reg}}$的任意紧子集，我们得出

$$\int_{X_{0,\mathrm{reg}}} |\nabla^r f|^l \omega^q \le \limsup_{n\to\infty} \int_{X_{s_n}} |\nabla^r f_{s_n}|^l \omega^q.$$

□

如果 f_{s_n} 在前一个引理（引理 1.7）中在奇点集 Sing X_0的一个管状邻域内为零，那么纤维积分的极限满足等式。

引理 1.9。假设 f_{s_n} 在 C^0_{loc} 上收敛于 f，且位于$X_{0,\mathrm{reg}}$ 并且存在 $\epsilon > 0$，使得 f_{s_n}, f 在管状邻域 $B(\mathrm{Sing}\ X_0, \epsilon)$ 内为零：$= \{p \in X : \mathrm{dist}(p, \mathrm{Sing}\ X_0) < \epsilon\}$ 的 B邻域，该邻域属于Sing X_0。那么对于任意光滑(q, q) 形式 α，有

$$\int_{X_{s_n}} f_{s_n}\alpha \to \int_{X_0} f\alpha, \quad as\ n \to \infty.$$

证明。设 $U_\epsilon = B(\mathrm{Sing}\ X_0, \epsilon)$为奇异轨迹的一个开管状邻域。由于 $X_0 \setminus U_\epsilon$ 是紧的且包含于 X_0的正则轨迹中，我们可以用 $X \setminus \mathrm{Sing}\ X_0$ 中的有限个开集 $\{U_i\}_{i=1}^N$ 覆盖它，并假设每个 $U_i \simeq V_i \times \mathbb{D}$都是一个使纤维化 π平凡化的坐标图。于是，我们得到 X_0的一个开覆盖$U_\epsilon \cup \{U_i\}_{i=1}^N$。

由于 π 是适当映射，我们可以找到 $\epsilon_0 > 0$ 使得 $\pi^{-1}(\overline{\mathbb{D}_{\epsilon_0}}) \subset U_\epsilon \cup \cup_{i=1}^N U_i$。我们将引理 1.8应用于紧集 $\pi^{-1}(\mathbb{D}_{\epsilon_0})$及其开覆盖 $\overline{U_\epsilon} \cup \{U_i\}_{i=1}^N$，于是得到一组光滑函数 $\{\rho_i : U_i \to \mathbb{R}\}_{i=0}^N$ (我们用 U_ϵ 表示 U_0)，使得

- $\mathrm{supp}(\rho_i) \subset U_i$ 对每个 $i = 0, 1, \ldots, N$,
- $0 \le \rho_i(x) \le 1$ 对所有 $x \in X$,
- $\sum_{i=0}^N \rho_i(x) = 1$ 对所有 $x \in \pi^{-1}(\overline{\mathbb{D}_{\epsilon_0}})$.

那么对于满足 $|s_n| < \epsilon_0$的 $n \gg 1$，有

$$\int_{X_{s_n}} f_{s_n}\alpha = \sum_{i=0}^N \int_{X_{s_n}} \rho_i f_{s_n}\alpha = \sum_{i=0}^N \int_{X_{s_n}\cap U_i} \rho_i f_{s_n}\alpha$$

And

$$\int_{X_0} f\alpha = \sum_{i=0}^N \int_{X_0} \rho_i f\alpha = \sum_{i=0}^N \int_{X_0\cap U_i} \rho_i f\alpha$$

由于在 $U_0 = U_\epsilon$ 中， f_{s_n}, f 为零，因此我们有

$$\int_{X_0\cap U_i} \rho_0 f\alpha = 0 = \int_{X_{s_n}\cap U_0} \rho_0 f_{s_n}\alpha$$

对于 $1 \leq i \leq N$， $U_i \simeq V_i \times \mathbb{D}$ 上的纤维化 π 是平凡的，并且 $(\rho_i f_{s_i} \alpha) \mid_{V_i} \to (\rho_i f \alpha) \mid_{V_i}$ 在 C^0_{loc} 中。因此

$$\int_{X_{s_n} \cap U_i} \rho_i f_{s_n} \alpha = \int_{V_i} (\rho_i f_{s_i} \alpha) \mid_{V_i} \to \int_{V_i} (\rho_i f \alpha) \mid_{V_i} = \int_{X_0 \cap U_i} \rho_i f \alpha.$$

总之，我们有

$$\int_{X_{s_n}} f_{s_n} \alpha \to \int_{X_0} f \alpha, \quad \text{as } n \to \infty.$$

□

如果奇点周围的纤维积分贡献足够小，我们便可以推广上述引理，得到以下引理。

引理 1.10. 假设 f_{s_n} 在 C^0_{loc} 上收敛到 f $X_{0,\text{ reg}}$ 且 X_0 是约化的。设 ω是 X上的一个 ***Kähler*** 度量。

对于任意 $\epsilon > 0$，我们定义

$$I(\epsilon) = \limsup_{n \to \infty} \int_{B(\text{Sing } X_0, \epsilon) \cap X_s} |f_{s_n}| \, \omega^q,$$

其中 B(奇点集 X_0, ϵ)$: = \{p \in X :$ dist$(p,$奇点集 $X_0) < \epsilon\}$ 是 X_0奇点集 的一个管状邻域。

若 $I(\epsilon) \to 0$ 如 $\epsilon \to 0$ 且 f 在 X_0上可积于 L^1，则对任意光滑的(q, q) 形式α，有

$$\int_{X_{s_n}} f_{s_n} \alpha \to \int_{X_0} f \alpha, \quad as \ n \to \infty.$$

证明。 对任意固定的 $\epsilon > 0$，存在一个截断函数 $\eta_\epsilon \in C^\infty(X)$，使得

- $0 \leq \eta_\epsilon \leq 1$,
- $\eta_\epsilon = 1$ 在 B(奇点集 $X_0, \epsilon/2$) 上,
- $\eta_\epsilon = 0$ 在 $X \setminus B$(奇点集 X_0, ϵ) 上。

于是根据引理 1.9，有

$$\int_{X_{s_n}} f_{s_n} (1 - \eta_\epsilon) \alpha \to \int_{X_0} f (1 - \eta_\epsilon) \alpha, \quad \text{as } n \to \infty.$$

因此，我们有

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \int_{X_{s_n}} f_{s_n} \alpha - \int_{X_0} f \alpha \right| \leq \limsup_{n \to \infty} \left| \int_{X_{s_n}} f_{s_n} \eta_\epsilon \alpha \right| + \left| \int_{X_0} f \eta_\epsilon \alpha \right|.$$

对于第一项，我们有

$$\left| \int_{X_{s_n}} f_{s_n} \eta_\epsilon \alpha \right| \leq \left\| \frac{\alpha}{\omega^q} \right\|_{L^\infty} \int_{B(\text{Sing } X_0, \epsilon)} |f_{s_n}| \, \omega^q.$$

So

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \int_{X_{s_n}} f_{s_n} \eta_\epsilon \alpha \right| \leq \left\| \frac{\alpha}{\omega^q} \right\|_{L^\infty} I(\varepsilon).$$

于是有

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \int_{X_{s_n}} f_{s_n} \alpha - \int_{X_0} f \alpha \right| \leq \left\| \frac{\alpha}{\omega^q} \right\|_{L^\infty} I(\varepsilon) + \left| \int_{X_0} f \eta_\epsilon \alpha \right|. \tag{1.1}$$

注意到

$$\left|\int_{X_0} f\eta_\epsilon\alpha\right| \le \left\|\frac{\alpha}{\omega^q}\right\|_{L^\infty}\int_{B(\mathrm{Sing}\,X_0,\epsilon)\cap X_0}|f|\,\omega^q\omega^q$$

以及 vol(B(奇点集 X_0, $\epsilon)\cap X_0)\to 0$ 根据 $\epsilon\to 0$ 由引理 1.12可知。因此 $\left|\int_{X_0} f\eta_\epsilon\alpha\right|\to 0$ 根据 $\epsilon\to 0$由 L^1-可积性可知 $f\alpha$。

将 $\epsilon\to 0$ 代入方程 (1.1)，我们得到

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{X_{s_n}} f_{s_n}\alpha-\int_{X_0} f\alpha\right|=0.$$

于是得证。 □

我们将看到，在某些一致可积性条件下， $I(\epsilon)\to 0$ 是自然的。

引理 1.11。 设 f_{s_n} 在$X_{0,\ \mathrm{reg}}$ 上收敛到 f ， 且 X_0 是约化的。设 ω是 X上的一个 ***Kähler*** 度量。若存在 $1<r\le\infty$ 和一个一致常数 $L<\infty$ ， 使得$\|f_{s_n}\|_{L^r(X_{s_n},\ \omega_{s_n})}<L$，则对任意光滑的$(q,q)$ 形式 α，有

$$\int_{X_{s_n}} f_{s_n}\alpha\to\int_{X_0} f\alpha,\quad as\ n\to\infty.$$

证明。 根据 引理 1.10，只需验证以下两个条件

- 奇点附近的纤维积分贡献

$$I(\epsilon)=\limsup_{n\to\infty}\int_{B(\mathrm{Sing}\,X_0,\epsilon)\cap X_s}|f_{s_n}|\,\omega^q$$

当 $\epsilon\to 0$ 时趋于零。

- 该 f 在 X_0上是 L^1-可积的。

第一条件由 H¨older 不等式以及 引理 1.12

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_{B(\mathrm{Sing}\,X_0,\epsilon)\cap X_s}|f_{s_n}|\,\omega^q &\le \limsup_{n\to\infty}\left(\int_{X_{s_n}}|f_{s_n}|^r\,\omega^q\right)^{1/r}\left(\int_{B(\mathrm{Sing}\,X_0,\epsilon)\cap X_{s_n}}\omega^q\right)^{1/p}\\ &\le L\limsup_{n\to\infty}\mathrm{vol}(B(\mathrm{Sing}\,X_0,\epsilon)\cap X_{s_n})\\ &\le LC\epsilon^2\quad(\text{by Lemma 1.12}).\end{aligned}$$

第二条件由 引理 1.7推出，我们有

$$\|f\|_{L^r(X_0)}\le\limsup_{n\to\infty}\|f_{s_n}\|_{L^r}<L$$

对于 $1<r\le\infty$。因此 $f\in L^1(X_0)$。 □

我们证明奇异集管状邻域体积的一致上界，该上界在前面的两个引理中用到，且属于标准结果:

引理 1.12 （奇异管状邻域的体积界）。 设 $\pi\colon\ X\to\mathbb{D}$ 是从复维数为 $p=q+1$ 的复流形 X 到单位圆盘的适当满射全纯映射。假设 π 具有连通纤维，且 $X_0:=\pi^{-1}(0)$ 是唯一的奇异纤维。假设 X_0 是约化的。则奇点集 X_0 在 X_0 中具有复余维 ≥ 1 。

设 ω 是 X上的 ***Kähler*** 度量，并记 B（奇点集 X_0，ϵ）为关于 ω所诱导的距离，在 X 中奇点集Sing X_0 的 ϵ管状邻域。则存在常数 $C>0$ 和 $\epsilon_0>0$，使得对于所有接近0 的 $s\in\mathbb{D}$（包括 $s=0$）以及所有 $0<\epsilon<\epsilon_0$，都有

$$\int_{B(S,\epsilon)\cap X_s}\omega^q\le C\epsilon^2.$$

证明。由于奇点集 X_0 是 X_0 的紧复解析子簇，其复维数小于 $q-1$，故其2($q-1$)维豪斯多夫测度有限。因此，存在常数 $C_1>0$，使得对任意充分小的 $\epsilon>0$，紧集奇点集 X_0 可被有限个半径为 ϵ、中心位于点 $x_i\in$ 奇点集 X_0的球 N(ϵ)覆盖，其中

$$N(\epsilon)\le C_1\epsilon^{-2(q-1)}.$$

ϵ-管状邻域 B(奇点集 X_0,ϵ)严格包含于同心球 B(x_i, 2ϵ)的并集之中。

接下来，我们给出这些局部球内 X_s 的体积上界。对任意 s（包括 s =0），X_s 是一个纯 q维复解析循环。由于 ω 是 X上的Kähler度量，标准的Bishop-Lelong 定理（或单调性公式）保证体积比单调递增。因此，我们取 $R_0>2\epsilon_0$，使得对所有 $x\in S$ 以及所有 $2\epsilon<2\epsilon_0<R_0$，有

$$\frac{1}{(2\epsilon)^{2q}}\int_{B(x,2\epsilon)\cap X_s}\omega^q\le\frac{1}{R_0^{2q}}\int_{B(x,R_0)\cap X_s}\omega^q.$$

此外，由于 $d\omega=0$ 与纤维 X_s 在 X中同调，纤维 $V=\int_{X_s}\omega^q$ 的总体积是一个与 s 无关的拓扑常数。存在一致常数 C_2，使得以下不等式成立

$$\int_{B(x,2\epsilon)\cap X_s}\omega^q\le\left(\frac{V}{R_0^{2q}}\right)(2\epsilon)^{2q}:=C_2\epsilon^{2q}.$$

最后，结合覆盖估计和局部体积界，由体积的次可加性可得，

$$\int_{B(\mathrm{Sing}\,X_0,\epsilon)\cap X_s}\omega^q\le\sum_{i=1}^{N(\epsilon)}\int_{B(x_i,2\epsilon)\cap X_s}\omega^q\le N(\epsilon)\cdot C_2\epsilon^{2q}\le C_1C_2\epsilon^2.$$

令 $C=C_1C_2$，则对于所有接近 0 的 s，该界一致成立，证明完毕。 □

最后，我们给出奇异纤维上存在收敛极限的一个充分条件：

命题 1.13. 在上述设定下，并假设 X_0 是约化的。设 φ 是定义在 $X\setminus X_0$上的一个实函数。假设对于 $s\neq0$，$\varphi|_{X_s}$ 在所有正则纤维X_s 上均光滑，并在每个 X_s上为 $s\neq0$ 定义一族光滑的 (1,1) 形式 $\beta_s:=\mathrm{dd}^c(\varphi|_{X_s})$。

设 ω 是 X 上的 ***Kähler*** 形式。若满足以下条件：

- 在$X_{0,\mathrm{reg}}$的任意一点附近，都存在一个开邻域 U，使得 L^∞-范数$\|\mathrm{tr}^{\omega_s}\beta_s\|_{L^\infty(X_s\cap U)}$ 对 $|s|\ll1$一致有界。

- 函数族 $f_s := \mathrm{tr}_{\omega_s}\beta_s$ 在 C^0_{loc} 收敛到定义在 f_0 上的连续函数$X_{0,\mathrm{reg}}$。

- L^2-范数$\|\varphi_s\|_{L^2(X_s,\omega_s)}$ 和 $\|\mathrm{d}\varphi_s\|_{L^2(X_s,\omega_s)}$ 对 $|s| \ll 1$一致有界。

那么，对于任意序列$(s_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}^\circ$，若满足 $s_n \to 0$，且任意 $0 < a < 1$，则存在 s_n 的一个子序列（为简化记号，仍将该子序列记为 s_n 本身），使得

- φ_{s_n} 在 $C^{1,a}_{\mathrm{loc}}$ 中收敛到一个 $C^{1,a}$ 函数 φ_0，定义在$X_{0,\mathrm{reg}}$上，
- $\varphi_0 \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(X_{0,\mathrm{reg}})$ 对任意 $1 < p < \infty$成立，并且 φ_0 几乎处处在$X_{0,\mathrm{reg}}$上满足 $-\Delta_{\omega_0}\varphi_0 = f_0$，
- $\varphi_0 \in W^{1,2}(X_{0,\mathrm{reg}})$。
- 若 α 是光滑的(q,q)-形式，则

$$\int_{X_{s_n}} \varphi_{s_n}\alpha \to \int_{X_0} \varphi_0\alpha$$

此外，对于两个不同的极限 φ_0、φ_0'，它们的差 $\varphi_0 - \varphi_0'$ 在 $X_{0,\mathrm{reg}}$ 上是局部常数。

证明。在 $X_{0,\mathrm{reg}}$ 的任意一点附近，存在开邻域 U，使得 L^∞-范数 $\|\mathrm{tr}_{\omega_s}\beta_s\|_{L^\infty(X_s\cap U)}$ 一致有界。通过缩小 U，我们假定 $U \simeq V \times \mathbb{D}_\epsilon$平凡化该纤维化 π。

在 V 的任意一点附近，我们取一个相对紧的坐标球 W。则 φ_s满足

$$-\Delta_{\omega_s}\varphi_s = \mathrm{tr}_{\omega_s}\mathrm{dd}^c_z\varphi_s = \mathrm{tr}_{\omega_s}\beta_s \quad \text{on } W.$$

注意，Δ_{ω_s} 是一族关于 $|s| \ll 1$ 的一致椭圆算子。由标准的局部L^∞ 椭圆偏微分方程估计（参见 Gilbarg–Trudinger [GT01，定理 8.24]），我们可以$\widetilde{\ }$将 W 缩小到一个稍小的区域 $W \Subset W$，从而得到

$$\begin{aligned}\|\varphi_s\|_{L^\infty(\widetilde{W})} &\leq C\left(\|\varphi_s\|_{L^2(W)} + \|\mathrm{tr}_{\omega_s}\beta_s\|_{L^\infty(W)}\right)\\ &\leq C\left(\|\varphi_s\|_{L^2(X_s)} + \|\mathrm{tr}_{\omega_s}\beta_s\|_{L^\infty(X_s\cap U)}\right),\end{aligned}$$

其中 C 是一个与 s 无关的一致常数。根据我们的假设，右端关于 s 一致有界。

接下来，根据椭圆方程的内部 L^p 估计（参见 [GT01，定理 9.11]），对于$\widetilde{\ }$任意 $1 < p < \infty$，我们可以进一步将 W 缩小 W' 以得到

$$\begin{aligned}\|\varphi_s\|_{W^{2,p}(W')} &\leq C_p\left(\|\varphi_s\|_{L^\infty(\widetilde{W})} + \|\mathrm{tr}_{\omega_s}\beta_s\|_{L^p(\widetilde{W})}\right)\\ &\leq C_p'\left(\|\varphi_s\|_{L^\infty(\widetilde{W})} + \|\mathrm{tr}_{\omega_s}\beta_s\|_{L^\infty(X_s\cap U)}\right).\end{aligned}$$

因此，对于任意 $p > 1$，$\|\varphi_s\|_{W^{2,p}(W')}$ 一致有界。

根据索об列夫嵌入定理（莫雷不等式），对于 $p > 2q$（其中 $q = \dim_{\mathbb{C}} X_s$），$W^{2,p}(W')$ 紧嵌入到 $C^{1,b}(W')$ 中，对于 $0 < b < 1 - 2q/p$。由于 p 可以任意取大，因此，对于任意 $0 < b < 1$，$\|\varphi_s\|_{C^{1,b}(W')}$ 一致有界。

为了将这些局部估计拼接起来，注意到 $X_{0,\mathrm{reg}}$ 是第二可数的，因此我们可以选取由紧子集 $K_1 \Subset K_2 \Subset \cdots \Subset X_{0,\mathrm{reg}}$组成的可数穷竭，使得$\cup_m K_m = X_{0,\mathrm{reg}}$。对于每个 K_m，我们都可以用有限多个这样的坐标图 W' 覆盖它。根据

Ascoli-Arzel`a 定理和对角线论证，我们可以抽取一个子序列 (s_n)，使得 φ_{s_n} 在 $C^{1,a}_{\mathrm{loc}}$ 中收敛到极限函数 $\varphi_0 \in C^{1,a}(X_{0,\mathrm{reg}})$，其中 $a \in$ 为任意给定的 $(0,1)$。此外，$W^{2,p}_{\mathrm{loc}}$ 中的一致有界性保证了 $\varphi_0 \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(X_{0,\mathrm{reg}})$，并且 $\varphi_{s_n} \to \varphi_0$ 在 $W^{2,p}_{\mathrm{loc}}$ 中弱收敛。

由于 $f_{s_n} := \mathrm{tr}_{\omega_{s_n}}\beta_{s_n}$ 在 C^0_{loc} 中收敛到连续极限 f_0，在偏微分方程中取极限可知，φ_0 在$X_{0,\mathrm{reg}}$上几乎处处满足 $-\Delta_{\omega_0}\varphi_0 = f_0$。

由第三个条件以及引理 1.7，我们有 $\varphi_0 \in W^{1,2}(X_{0,\mathrm{reg}})$。

由于$\|\varphi_s\|_{L^2(X_s,\omega_s)}$ 一致有界，由引理 1.11 我们有

$$\int_{X_{s_n}} \varphi_{s_n}\alpha \to \int_{X_0} \varphi_0\alpha$$

对 X上任意光滑的(q,q)-形式 α。

假设 φ_0 与 φ_0' 是由 φ_{s_n}的不同子序列产生的两个极限。二者在$X_{0,\mathrm{reg}}$上几乎处处满足同一方程 $-\Delta_{\omega_0}\varphi = f_0$。因此它们的差$h := \varphi_0 - \varphi_0' \in W^{2,p}\,\mathrm{loc}\,(X_{0,\mathrm{reg}})$是$X_{0,\mathrm{reg}}$上关于$\omega_0$的弱调和函数。由于 $h \in W^{1,2}(X_{0,\mathrm{reg}})$在整体上成立，且 X_0 的奇异轨迹的实余维至少为2，由定理 1.1，h 是局部常数。□

作为推论，我们有如下关于纤维积分连续性的结果

推论 1.14. 我们在命题 *1.13*的假设与记号下进行讨论。假设命题 *1.13*中的所有条件均被满足。

若 α 是一个光滑(q,q)-形式，使得对X_0的每个不可约分支 C 均有 $\int_C \alpha = 0$，则纤维积分 $I(s) = \int_{X_s}\varphi_s\alpha$ 在 $s = 0$处连续。

证明. 我们用反证法证明。否则，将有两个序列 $\{s_n\}$与 $\{s_n'\}$，满足 $s_n, s_n' \to 0$，使得

$$\lim_{n\to\infty} I(s_n) \neq \lim_{n\to\infty} I(s_n').$$

由命题 1.13，我们假设 $\varphi_{s_n} \to \varphi_0$、$\varphi_{s_n'} \to \varphi_0'$ 在 $C^{1,a}$ 局部于$X_{0,\mathrm{reg}}$上，则

$$\lim_{n\to\infty} I(s_n) = \int_{X_0}\varphi_0\alpha, \quad \lim_{n\to\infty} I(s_n') = \int_{X_0}\varphi_0'\alpha.$$

由于 $\varphi_0 - \varphi_0'$ 在$X_{0,\mathrm{reg}}$ 上是局部常数，且 X_0 的每个不可约分支 C 均为连通，故 $\varphi_0 - \varphi_0'$ 在 X_0的不可约分支上是分段常数。因此，

$$\int_{X_0}(\varphi_0 - \varphi_0')\alpha = \sum_C \mathrm{constant}\int_C \alpha = 0,$$

其中 C 遍历 X_0的所有不可约分支。

因此，$\lim_{n\to\infty} I(s_n) - \lim_{n\to\infty} I(s_n') = 0$，这与矛盾相悖。 □

1.D. 谱投影的光滑性

设 $\pi\colon \mathfrak{X} \to S$ 是光滑流形之间的一个真光滑淹没映射。在 Demailly 的综述文章 [Dem02],中，他证明了以下结论：

引理 1.15 ([Dem02，引理 10。3])。设 g 是 $\mathfrak{X}$上的黎曼度量，并设g_s是其在每个 $X_s = \pi^{-1}(s)$上的限制。那么 $-\Delta_s\colon C^\infty(X_s, \mathbb{R}) \to C^\infty(X_s, \mathbb{R})$ 是一个

光滑的椭圆算子族。此外， $-\Delta_s$ 的特征值

$$0 < \lambda_0(s) \leq \lambda_1(s) \leq \cdots$$

在 s 中是连续的。

此外，如果 λ 不在 $-\Delta_{s_0}$ 的谱 $\{\lambda_k(s_0)\}_{k\geq 0}$ 中，那么由 $-\Delta_s$ 的特征值为 $\leq \lambda$ 的特征子空间的直和 $W_{s,\lambda} \subset C^\infty(X_t)$ 定义了一个 C^∞ 向量丛（即随之光滑变化），在 s_0 的某个邻域内。

作为一个直接推论，我们有

推论 1.16。设 u 是 $\mathfrak{X}$ 上的一个光滑函数，且 $P^s_{\leq\lambda}: C^\infty(X_s) \to C^\infty(X_s)$ 是到 $W_{s,\lambda}$ 上的正交投影。

假设 λ 不在 $-\Delta_{s_0}$ 的谱 $\{\lambda_k(s_0)\}_{k\geq 0}$ 中，则 $P^s_{\leq\lambda}(u)$ 和 $(1-P^s_{\leq\lambda})(u) =: P^s_{>\lambda}(u)$ 在 $\pi^{-1}(U)$ 上是光滑的，其中 $U \subset S$ 是 s_0 的一个开邻域。

2. Spectral geometry of degeneration of algebraic curves

本节我们研究代数曲线退化的谱几何，紧随 Dai–Yoshikawa 最近的工作 [DY25]。在前两个小节（第 2.A 节、第 2.B 节）中，我们回顾 [DY25]所发展的工具。在最后一个小节第 2.C 节中，我们研究具有小特征值的特征函数的性质。

我们引入本节的设定。

设定 1. 令 $\pi: X \to S \simeq \mathbb{D}$ 为从复曲面 X 到一个同构于单位圆盘的黎曼曲面的适当满射全纯映射。我们假设 π 具有连通纤维，且 $X_0 = \pi^{-1}(0)$ 是唯一的奇异纤维。我们定义 $\mathrm{Sing}(X_0) := \{x \in X_0 \mid d\pi_x = 0\}$, $X_{0,\mathrm{reg}} := X_0 \setminus \mathrm{Sing}(X_0)$ 和 $X^\circ := X \setminus X_0$。令 $X_s := \pi^{-1}(s)$。

设 X 带有一个 Kähler 形式 ω，相应的度量记为 g^X。令 $g_s = g^X|_{X_s}$，则 (X_s, g_s) $(s \neq 0)$ 是一个带有 Kähler 度量的紧黎曼曲面。我们假设 $\mathrm{vol}(X_s, g_s) = \int_{X_s} \omega_s = 1$。

假设 X_0 是 X的约化可约除子。特别地， π 在 X_0上只有孤立的临界点。

2.A. 小特征值的性质

对于 $s \neq 0$，令 $0 < \lambda_1(s) \leq \lambda_2(s) \leq \cdots$为拉普拉斯算子的特征值（相对于 g_s） $\Box_s = \partial^*\partial$，按重数计。对于 $s = 0$，我们将 $\Box_0$ 视为、$_{\mathrm{reg}} = X_0\backslash$奇点集 X_0上具有紧支撑的拉普拉斯算子的 Friedrichs 扩张。于是根据 Yoshikawa 的论文 [Yos97]， $\lambda_i(s)$ 是 $s \in S$ 上的连续函数，对每个$i \geq 1$均成立。

设 $N = \sharp\{X_0\} = \dim\ker(\Box_0)$ 的不可约分支，我们可以精确地控制 0 附近的小特征值：

定理 2.1（[DY25，定理 0。2]）。存在常数 C_0， $C_1 > 0$ 使得对于所有 $s \in \mathbb{D}^\circ$，

$$\frac{C_0}{\log(|s|^{-1})} \leq \lambda_1(s) \leq \cdots \leq \lambda_{N-1}(s) \leq \frac{C_1}{\log(|s|^{-1})}$$

与前面的 $N-1$ 个小特征值不同，其余特征值在 s趋近于 0 时具有下界。

定理 2.2 ([DY25，定理 3。8])。对于所有 $k \geq 1$，函数 $\lambda_k(s)$ 在 S° 上可延拓为 S 上的连续函数。此外，对于所有 $k \geq N$， $\lambda_k(s) \geq \lambda$ 其中 $\lambda > 0$为一个正数。

我们称 $\lambda_1(s) \cdots$， $\lambda_{N-1}(s)$ 小特征值。利用 推论 1.16 以及定理 2.2 中特征值 $\lambda_N(s)$ 的谱隙，定义到小特征值对应的特征子空间直和上的谱投影。

引理 2.3。我们取一个仅依赖于退化的几何的常数 $0 < \delta_0 < 1$，并在 $\mathbb{D}^\circ_{\delta_0}$上进行讨论。

对于 $s \in \mathbb{D}^\circ_{\delta_0}$，令$W_{s,\ \mathrm{low}} \subset C^\infty(X_s)$ 为由小特征值 $\lambda_1(s) \cdots, \lambda_{N-1}(s)$对应的特征函数张成的空间。令 $P^s_{\mathrm{low}}\colon C^\infty(X_s) \to W_{s,\mathrm{low}}$ 为到 $W_{s,\ \mathrm{low}}$上的正交投影。

那么，对于 $X \setminus X_0$ 上的任意光滑函数 u，其低频部分 $P^s_{\mathrm{low}}(u)$ 在 $\pi^{-1}(\mathbb{D}^\circ_{\delta_0})$ 上是光滑的。类似地，其高频部分 $(1-P^s_{\mathrm{low}})(u)$ 在 $\pi^{-1}(\mathbb{D}^\circ_{\delta_0})$ 上也是光滑的。

证明。(见 引理 2.3) 使用定理 2.1和定理 2.2中的记号，我们定义δ_0 为

$$\mathbb{D}^\circ_{\delta_0} = \{s \in S^\circ\colon \frac{C_1}{\log(|s|^{-1})} \leq \frac{1}{2}\lambda\}$$

在穿孔圆盘 $\mathbb{D}^\circ_{\delta_0}$ 上，我们有

$$\lambda_{N-1}(s) \leq \frac{C_1}{\log(|s|^{-1})} \leq \frac{1}{2}\lambda < \lambda_N(s).$$

对于 $s \in \mathbb{D}^\circ_{\delta_0}$，我们有 $P^s{}_{\text{低频}\_} = P^s_{\leq \frac{3}{4}\lambda}$。根据 推论 1.16，可知 $P^s_{\leq \frac{3}{4}\lambda}(u)$ 在 $\pi^{-1}(\mathbb{D}^\circ_{\delta_0})$ 上是光滑的。 □

在本文中，我们用 u_{low} 表示 $P^s{}_{\text{低频}}(u)$，用 u_{high} 表示 $(1-P^s_{\mathrm{low}})(u)$。

2.B. 邻近纤维的厚薄分解

从几何视角来看，每个邻近的光滑纤维 X_s $(s \neq 0)$ 都有一个厚薄分解。随着族发生退化， X_s 的厚部收敛到奇异纤维的正则轨迹 $X_0 \setminus \mathrm{Sing}(X_0)$，而薄部则收缩到奇点 $\mathrm{Sing}(X_0)$。由于 $X_0 \setminus \mathrm{Sing}(X_0)$ 由 N 个连通分支组成， X_s 的厚部相应地分解为 N 个互不相交的区域。

遵循 [DY25，第 6], 节，对于每个 $1 \leq i \leq N$，我们构造一个 模型函数 $\Upsilon^{(i)}_s \in C^\infty(X_s)$，见 命题 2.8，它是第 i 个厚分量上示性函数的光滑逼近。

我们按以下三个步骤构造这些模型函数：

步骤 1：我们构造一个微分同胚族，将奇异纤维的光滑部分映到附近的光滑纤维。其想法是选取一个定义在 $X \setminus \mathrm{Crit}(f)$ 上且满足 $f_* v = \partial/\partial s$ 的 C^∞ 复向量场v，并利用该向量场将奇异纤维上的点流动到附近的光滑纤维。

我们在 [DY25第 6] 节中汇集了有用的结果，并省略其构造。于是我们有如下定理

定理 2.4. 对于 $s \in \mathbb{D}$ 和 $|s| \ll 1$。设 $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 为一个取决于退化的正整数。设 $\epsilon(s) = 2|s|^{\frac{1}{8\nu}}$，则存在一个微分同胚族

$$F_s \colon X_0 \setminus \cup_{p\in \operatorname{Sing} X_0} B(p,\epsilon(s)) \to F_s(X_0 \setminus \cup_{p\in \operatorname{Sing} X_0} B(p,\epsilon(s)))(\subset X_s)$$
$$z \mapsto F_s(z) \in X_s$$

该微分同胚族具有以下性质：

(1) [DY25，公式 (6.2)] 当 $s = 0$时，$F_0\colon X_0 \to X_0$ 是恒等映射。*(2)* [DY25，公式 (6.2)] 该族 F_s 关于 s是光滑的。*(3)* [DY25，公式 (6.3)] 对于 $z \in X_0$ 在 F_s 的定义域内，我们有

$$\operatorname{dist}(F_s(z), z) \leq K|s|^{\frac{3}{4}}$$

(4) [DY25，引理 6。4] 设 ω 为我们设定中的 *Kähler* 形式，则

$$\|(F_s)^*\omega_s - \omega_0\|_{L^\infty(X_0\setminus\cup_{p\in\operatorname{Sing} X_0} B(p,\epsilon(s)))} \leq K_2|s|^{\frac{1}{2}}.$$

(5) [DY25，引理 6。5] 对于任意两个函数 χ，$\chi' \in C_0^\infty(X_0 \setminus \cup_{p\in\operatorname{Sing} X_0} B(p,\ \epsilon(s)))$，我们有

$$\left|((F_s)_*\chi, (F_s)_*\chi')_{L^2(X_s)} - (\chi,\chi')_{L^2(X_0)}\right| \leq K_3|s|^{\frac{1}{2}}\|\chi\|_{L^2(X_0)}\|\chi'\|_{L^2(X_0)},$$
$$\left|\left\|\mathrm{d}\big((F_s)_*\chi\big)\right\|_{L^2(X_s)} - \|\mathrm{d}\chi\|_{L^2(X_0)}\right| \leq K_3|s|^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{d}\chi\|_{L^2(X_0)}.$$

注 2.5. 定理 定理 2.4.(4) 中的结果可以推广到 X 上具有 C^1 正则性的任意微分形式。对于定义在 X 上的任意光滑形式 α，其具有 C^1 系数时，我们有

$$\|(F_s)^*\alpha_s - \alpha_0\|_{L^\infty(X_0\setminus\cup_{p\in\operatorname{Sing} X_0} B(p,\epsilon(s)))} \leq K_2|s|^{\frac{1}{2}}.$$

证明与 [DY25 中引理 6 的证明完全相同。4]。

我们估计 X_s 中不属于 F_s 像集的子集的体积。

推论 2.6. 设 O_s 是 F_s 在 X_s 中的像。那么 O_s 是 X_s 中的开集，因为 F_s 是一个微分同胚。并且对于 $|s| \ll 1$，存在一个一致常数 $K_4 > 0$ 使得

$$\int_{X_s\setminus O_s} \omega_s \leq K_4|s|^{\frac{1}{4\nu}}.$$

证明。 设 $\chi_s \in C_0^\infty(X_0 \setminus \cup_{p\in\operatorname{Sing} X_0} B(p,\ \epsilon(s)))$ 是一个测试函数，使得

- 我们有 $0 \leq \chi_s \leq 1$。
- 在 $X_0 \setminus \cup_{p\in\text{奇点集}\, X_0} B(p,\ 2\epsilon(s))$，$\chi_s \equiv 1$。

于是我们有

$$0 \leq \operatorname{vol}(X_0) - (\chi_s,\chi_s)_{L^2(X_0)} \leq \sum_{p\in\operatorname{Sing} X_0} K_4'(\epsilon(s))^2 = K_4'|s|^{\frac{1}{4\nu}},$$

其中 K_4' 是一个取决于奇异纤维几何的常数。

由于 X_0 是约化的，且 ω 是 Kähler，因此 $\operatorname{vol}(X_0) = \operatorname{vol}(X_s)$。结合定理 2.4.(5)，可得

$$0 \leq \operatorname{vol}(X_s) - ((F_s)_*\chi_s, (F_s)_*\chi_s)_{L^2(X_s)} \leq K_3|s|^{\frac{1}{2}} + K_4'|s|^{\frac{1}{4\nu}}.$$

注意到 $0 \le (F_s)_*\chi \le 1$ 和 $(F_s)_*\chi \in C_0^\infty(O_s)$，我们有

$$\int_{X_s \setminus O_s} \omega_s \le \mathrm{vol}(X_s) - ((F_s)_*\chi, (F_s)_*\chi)_{L^2(X_s)} \le K_4 |s|^{\frac{1}{4\nu}}.$$

□

步骤 2： 我们在奇异纤维上构造良好的测试函数，并利用定理 2.4 中的微分同胚将其流到附近的纤维上，以便在**步骤 3** 中构造模型函数。

令 $X_0 = C_1 + \cdots + C_N$ 为奇异纤维 X_0 的不可约分解。对于每个奇异点 $p \in$ 奇点集 $X_0 \cap C_i$，我们固定一个局部坐标系 (U_p, ζ) $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2$ 以及 $\zeta(p) = 0$。我们定义 $r_p(z) := \|\zeta(z)\| = \sqrt{|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2}$。

然后我们在 X_0 上构造一个函数族。

引理 2.7 （[DY25，引理 6。6]）。对于每个 $0 < \epsilon \ll 1$，都存在一个光滑函数族 $\chi_\epsilon^{(i)}$ $(1 \le i \le N)$，使得

(1) 对于 $1 \le i \le N$，我们有 $\chi_\epsilon^{(i)} \in C_0^\infty(C_i \setminus$ 奇点集$(X_0))$。*(2)* 我们有 $0 \le \chi_\epsilon^{(i)} \le 1$。在 $C_i \setminus \bigcup_{p \in \text{奇点集}\, X_0 \cap C_i} U_p$ 上，我们有 $\chi_\epsilon^{(i)} = 1$。*(3)* 对于任意 $p \in$ 奇点集 $X_0 \cap C_i$，我们有 $\chi_\epsilon^{(i)}(z) = 0$，如果 $r_p(z) \le \frac{1}{2}\epsilon$，以及 $\chi_\epsilon^{(i)}(z) = 1$，如果 $r_p(z) \ge 2\sqrt{\epsilon}$。*(4)* 我们有 $\left\|d\chi_\epsilon^{(i)}\right\|_{L^2}^2 \le K_4/(\log \epsilon^{-1})$，其中 $K_4 > 0$ 是一个只依赖于 π 的常数：$X \to S$ 在 $0 \in S$ 附近。*(5)* 对于每个 i，$\chi_\epsilon^{(i)}$ 连续地依赖于 ϵ。

步骤 3： 我们利用**步骤 1** 中流生成的微分同胚族以及 X_0 上的**步骤 2** 中的良好测试函数集，构造模型函数 于 X_s 上。

命题 2.8 ([DY25，第 6 节。2])。对于 $0 < |s| \ll 1$，存在一族光滑函数 $\Upsilon_s^{(i)} \in C^\infty(X_s)$ $(1 \le i \le N)$，使得

(1) 对任意 $1 \le i \le N$ 和任意 s，存在一个仅依赖于退化的几何的常数 $C > 0$，使得 $0 \le \Upsilon_s^{(i)} \le C$。*(2)* 对于 $1 \le i \le N$，函数 $\Upsilon^{(i)}(s, z) := \Upsilon_s^{(i)}(z)$ 对于 $0 < |s| \ll 1, z \in X_s$ 在 $X \setminus X_0$ 上连续，也就是说，该族在远离奇异纤维的 s 中连续变化。*(3)* 对于 $1 \le i, j \le N, i \ne j$，有 支集 $\Upsilon_s^{(i)} \cap$ 支集 $\Upsilon_s^{(j)} = \emptyset$。*(4)* 对于 $1 \le i \le N$，我们有如下估计

$$\left\|\Upsilon_s^{(i)}\right\|_{L^2(X_s)}^2 = 1 + O(|s|^{\frac{1}{8\nu}}), \quad \left\|\mathrm{d}\Upsilon_s^{(i)}\right\|_{L^2(X_s)}^2 \le \frac{K}{\log(|s|^{-1})}.$$

常数 $K > 0$ 仅取决于 $(\pi: X \to \mathbb{D}, \omega)$。

(5) 函数 $\Upsilon_s^{(i)}(z)$ 在 $z \in X_s$ 中为常数，其中 $F_s(X_0 \setminus \bigcup_{p \in \text{奇点集}\ X_0} B(p, 4\epsilon(s)^{\frac{1}{2}}))$，且 $\epsilon(s) = 2|s|^{\frac{1}{8\nu}}$。

证明。我们定义

$$\Upsilon^{(i)}(s) = (F_s)_*(\chi^{(i)}_{4\epsilon(s)})/\sqrt{\mathrm{Area}(C_i)} \in C^\infty(X_s), \tag{2.1}$$

其中 $\epsilon(s) = 2|s|^{\frac{1}{8r}}$。

由于 $0 \le \chi^{(i)}_{\epsilon}{}_s() \le 1$，命题 2.8.(1) 得证。

由于 $\chi^{(i)}_{\epsilon}{}_s()$ 由 s 根据 引理 2.7.(5) 连续依赖，且 F_s 在 s中连续，$\Upsilon^{(i)}(s)$ 在 s 中连续变化。于是 命题 2.8.(2) 得证。

其余部分请参见 [DY25第 6 节。2]。 □

推论 2.9。对于任意 $p \in X_0 \setminus$ 奇点集 X_0，存在 p 的一个开邻域 U，使得 $\Upsilon^{(i)}(s,z) := \Upsilon^{(i)}_s(z)$ 对于 $1 \le i \le N$ 是常数。

此外，我们可以将 $\Upsilon^{(i)}(s,z)$ 延拓为 $X \setminus$ 奇点集 X_0上的连续函数。并且$\Upsilon^{(i)}(s,z)$ 在 $X_0 \setminus$ 奇点集 X_0附近是局部常数。

证明。根据定理 2.4 中 F_s 的定义，对 $X_0 \setminus$ 奇点集 X_0中的任意 p，我们可以在 X 中取 p 的一个开邻域 U，使得 $U \cap X_s$ 包含于 $F_s(X_0 \setminus \bigcup_{p\in\text{奇点集 } X_0} B(p, 4\epsilon(s)^{\frac{1}{2}}))$。由公式 (2.1) 中 $\Upsilon^{(i)}$的定义，$\Upsilon^{(i)}$在 U上等于 $1/\sqrt{\text{面积}(C_i)}$。因此 $\Upsilon^{(i)}$ 在 $X \setminus$ 奇点集 X_0中任意一点附近是局部常数。

结合 命题 2.8.(2)，我们知道 $\Upsilon^{(i)}$ 在 $X \setminus$ 奇点集 X_0 上连续。此外，它等于 $1/\sqrt{\text{面积}(C_i)}$，在 $X \setminus$ 奇点集 X_0 中任意一点附近。 □

我们称 $\Upsilon^{(i)}_s$模型函数。

2.C. 小特征函数的性质

与小特征值对应的特征函数称为小特征函数。我们用模型函数来近似它们，这些模型函数定义于命题 2.8中。结果总结如下。

定理 2.10. 设 $\{\Phi_i(s,z)\}_{i=1}^{N-1}$ 是 Δ_{ω_s} 的特征函数，其特征值为 $0 < \lambda_1(s) \le \lambda_2(s) \le \cdots \le \lambda_{N-1}(s)$，即 $-\Delta_{\omega_s}\Phi_i = \lambda_i(s)\Phi_i$，定义在 X_s上。那么对每个$1 \le j \le N-1$，我们都有关于 Φ_j的分解，

$$\Phi_j(s,z) = \sum_{l=1}^{N} C_{l(j+1)}(s)\Upsilon^{(l)}(s,z) + R_j(s,z) \tag{2.2}$$

对于 $0 < |s| \ll 1$，其中 $C_{ij}(s) = \int_{X_s} \Upsilon^{(i)}_s \Phi_{j-1}\omega_s = (\Upsilon^{(i)}_s, \Phi_{j-1})_{L^2(X_s,\omega_s)}$。并且我们有以下估计

(1) 存在一个一致常数 C，使得 $|C_{lj}(s)| < C$ 对所有 $1 \le l \le N$ 和所有 s均成立。

(2) 存在一个一致常数 C，使得

$$\|\mathrm{d}R_j\|^2_{L^2(X_s)} \le \frac{C^2}{\log(|s|^{-1})}, \quad \|R_j\|^2_{L^2(X_s)} \le C^2\frac{1}{\log(|s|^{-1})}.$$

对所有 $1 \le j \le N$ 和所有 s均成立。

注记 2.11. 我们指出，小特征函数的选取并非唯一。尽管如此，选取的非唯一性是可以控制的：设 $\{\Phi_i(s,z)\}_{i=1}^{N-1}$ 与$\{\Phi'_i(s,z)\}_{i=1}^{N-1}$ 为两族规范化小特征函数。它们张成同一个

向量空间 V，并且在 L^2-内积下构成标准正交基。因此，它们由一个正交矩阵相关联，即存在矩阵 $O \in O(N-1)$，使得

$$(\Phi_1'(s,z), \Phi_2'(s,z), \cdots, \Phi_{N-1}'(s,z)) = (\Phi_1(s,z), \Phi_2(s,z), \cdots, \Phi_{N-1}(s,z))O.$$

由方程方程 (2.2)，我们得到

$$\begin{aligned}(\Phi_1', \Phi_2', \cdots, \Phi_{N-1}') &= (\Upsilon^{(1)}, \cdots, \Upsilon^{(N)})(C_{l(j+1)})_{\substack{1\le l\le N\\ 1\le j\le N-1}} O + (R_1, \cdots, R_{N-1})O \\ &= (\Upsilon^{(1)}, \cdots, \Upsilon^{(N)})(C'_{l(j+1)})_{\substack{1\le l\le N\\ 1\le j\le N-1}} + (R_1', \cdots, R_{N-1}').\end{aligned}$$

因此，对于另一组特征函数，余项之间相差一个正交矩阵，并且关于 R_1'，$\cdots$，R_{N-1}' 的估计相同。

证明。 我们先将每个模型函数 $\Upsilon_s^{(i)}(1 \le i \le N)$ 在 X_s 上相对于低频特征函数 $\{\Phi_j(s,\ z)\}_{j=1}^{N-1}$ 作傅里叶展开，

$$\Upsilon_s^{(i)} = \underbrace{\int_{X_s} \Upsilon_s^{(i)}\omega_s + \sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}(s)\Phi_j}_{=:\Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(i)}} + h_s^{(i)}, \tag{2.3}$$

其中 $c_{ij}(s) = \int_{X_s} \Upsilon_s^{(i)}\Phi_j\omega_s$，而 $h_s^{(i)}$ 是高频余项。

我们在以下引理中估计 $h_s^{(i)}$:

引理2.12。 存在一个一致常数 $K > 0$，它仅取决于退化，使得

$$\left\|h_s^{(i)}\right\|^2_{L^2(X_s,\omega_s)} \le \frac{K}{\log(|s|^{-1})}$$

证明。 (引理2.12的证明）将 $-\Delta_{\omega_s}$ 代入公式（2.3），我们得到关于 X_s的下列公式

$$-\Delta_{\omega_s}\Upsilon_s^{(i)} = \sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}(s)\lambda_j(s)\Phi_j - \Delta_{\omega_s}h_s^{(i)}.$$

由于 $h_s^{(i)}$没有低频模态，由定理 2.2中的谱隙可知，存在一个一致的 $\lambda > 0$ 使得

$$\begin{aligned}\lambda\left\|h_s^{(i)}\right\|^2_{L^2(X_s,\omega_s)} &\le (-\Delta_{\omega_s}h_s^{(i)}, h_s^{(i)})_{L^2(X_s)} \\ &= -\left(\Delta_{\omega_s}\Upsilon_s^{(i)} + \sum_{j=1}^{N-1} c_{ij}(s)\lambda_j(s)\Phi_j, h_s^{(i)}\right)_{L^2(X_s)} \\ &= \left(-\Delta_{\omega_s}\Upsilon_s^{(i)}, h_s^{(i)}\right)_{L^2(X_s)} \\ &= \left(-\Delta_{\omega_s}\Upsilon_s^{(i)}, \Upsilon_s^{(i)}\right)_{L^2(X_s)} + \left(\Delta_{\omega_s}\Upsilon_s^{(i)}, \Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(i)}\right)_{L^2(X_s)}\end{aligned} \tag{2.4}$$

第三行的等式成立，是因为傅里叶展开（ $h_s^{(i)}$公式（2.3）） 中的高频项 $L^2(X_s, \omega_s$与低频模态 $\Phi_j\ (1 \le j \le N-1)$ 正交。

在紧流形 X_s 上分部积分，并利用模型函数 $\Upsilon_s^{(i)}$(的命题 2.8(4) 中的估计），得到

$$\left(-\Delta_{\omega_s}\Upsilon_s^{(i)},\Upsilon_s^{(i)}\right)_{L^2(X_s)}=\left\|\mathrm{d}\Upsilon_s^{(i)}\right\|_{L^2(X_s)}^2\leq\frac{K}{\log(|s|^{-1})},$$

其中 K 是一致常数。

由于 Δ_{ω_s} 在傅里叶展开中保持正交性公式（2.3），我们有

$$\begin{aligned}\left(\Delta_{\omega_s}\Upsilon_s^{(i)},\Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(i)}\right)_{L^2(X_s)}&=\left(\Delta_{\omega_s}\Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(i)},\Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(i)}\right)_{L^2(X_s)}\\&=-\left\|\mathrm{d}\Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(i)}\right\|_{L^2(X_s)}^2\leq 0.\end{aligned}$$

将各项代回公式（2.4），得到

$$\lambda\left\|h_s^{(i)}\right\|_{L^2(X_s,\omega_s)}^2\leq\frac{K}{\log(|s|^{-1})}.$$

因此，我们可以找到一个一致的 $K_1>0$，使得对于所有 $1\leq i\leq N$，都有

$$\left\|h_s^{(i)}\right\|_{L^2(X_s,\omega_s)}^2\leq\frac{K'}{\log(|s|^{-1})}.$$

□

现在回到我们的定理。

(1) 我们使用记号 $\Phi_0:=1$，并考虑以下相关矩阵 $C(s)=(C_{ij}(s))_{1\leq i,\ j\leq N}$，

$$C_{ij}(s)=\int_{X_s}\Upsilon_s^{(i)}\Phi_{j-1}\omega_s=(\Upsilon_s^{(i)},\Phi_{j-1})_{L^2(X_s,\omega_s)}.$$

Then $|C_{ij}(s)|\leq\left\|\Upsilon_s^{(i)}\right\|_{L^2}\|\Phi_{j-1}\|_{L^2}=O(1)$.

(2) 接着我们证明，相关矩阵 $C(s)$ 接近一个误差项受控的正交矩阵：

$$\begin{aligned}(CC^T)_{ij}&=\sum_{l=1}^{N}C_{il}C_{jl}\\&=\sum_{l=1}^{N-1}(\Upsilon_s^{(i)},\Phi_{l-1})_{L^2(X_s)}(\Upsilon_s^{(j)},\Phi_{l-1})_{L^2(X_s)}\\&=(\Upsilon_s^{(i)},\sum_{l=1}^{N}\Phi_{l-1}(\Upsilon_s^{(j)},\Phi_{l-1}))\\&=(\Upsilon_s^{(i)},\Upsilon_s^{(j)}-h_s^{(j)})\\&=\left\|\Upsilon_s^{(i)}\right\|_{L^2(X_s)}^2\delta_{ij}-(\Upsilon_s^{(i)},h_s^{(j)})\end{aligned}$$

最后一个等式由命题 2.8(3) 得出。

由于 $\left\|\Upsilon_s^{(i)}\right\|_{L^2(X_s)}^2 = 1 + O(|s|^{\frac{1}{s\nu}})$（根据 命题 2.8(4)）且 $\left|(\Upsilon_s^{(i)}, h_s^{(j)})\right| \leq \left\|h_s^{(j)}\right\|_{L^2}\left\|\Upsilon_s^{(i)}\right\|_{L^2} = O(\frac{1}{\log(s^{-1})})^{\frac{1}{2}}$（根据 引理2.12），我们得到

$$CC^T = I + E,$$

其中 E 为误差项，由 $\|E\| \leq K_1(\frac{1}{\log(s^{-1})})^{\frac{1}{2}}$ 控制。因此 $C^{-1} = C^T(I+E)^{-1}$。

由于 $\|E\| \ll 1$ for $|s| \ll 1$，我们有

$$(I+E)^{-1} = I - E + E^2 - E^3 + \cdots =: I + E',$$

其中 $E' = \sum_{i\geq 1}(-1)^i E^i$。我们估计

$$\|E'\| \leq \|E\|\,(1 + \sum_{i\geq 1}\|E\|^i) \leq K_2(\frac{1}{\log(s^{-1})})^{\frac{1}{2}}$$

对于某个一致常数 K_2。于是

$$C^{-1} = C^T(I + E').$$

注意到

$$\begin{pmatrix} \Upsilon_s^{(1)} - h_s^{(1)} \\ \Upsilon_s^{(2)} - h_s^{(2)} \\ \vdots \\ \Upsilon_s^{(N)} - h_s^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(1)} \\ \Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(2)} \\ \vdots \\ \Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(N)} \end{pmatrix} = C(s)\begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_{N-1} \end{pmatrix} = C(s)\begin{pmatrix} 1 \\ \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_{N-1} \end{pmatrix}$$

我们有

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_{N-1} \end{pmatrix} = C^{-1}(s)\begin{pmatrix} \Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(1)} \\ \Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(2)} \\ \vdots \\ \Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(N)} \end{pmatrix} = C^T(s)(I+E')\begin{pmatrix} \Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(1)} \\ \Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(2)} \\ \vdots \\ \Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(N)} \end{pmatrix}$$

因此，对于每个 $1 \leq j \leq N-1$，我们有

$$\Phi_j(s) = \sum^{N} C_{l(j+1)}(s)\Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(l)} + R_j. \tag{2.5}$$

并且余项 $R_j = \left(C^T \cdot E' \cdot (\Upsilon_s^{(1)}{}^{l=1}_{\text{低}}, \cdots, \Upsilon_s^{(N)}{}_{\text{低}})^T\right)_{j+1}$ 由以下项控制

$$|R_j| \leq \left\|C^T\right\|_{L^\infty}\|E'\|_{L^\infty}\left\|(\Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(1)}, \cdots, \Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(N)})^T\right\|_{L^\infty} = O(\frac{1}{\log(s^{-1})})^{\frac{1}{2}}.$$

因此，对于某个常数 $C \geq 0$，有 $\|R_j\|_{L^2(X_s)} \leq C^{2\ \ 1}_{\log(|s|^{-1})}$。

为了估计余项的导数，我们对方程(2.5)在 X_s 上求导，

$$\mathrm{d}\Phi_j(s) - C_{l(j+1)}(s)\sum_{l=1}^{N}\mathrm{d}\Upsilon_{s,\mathrm{low}}^{(l)} = \mathrm{d}R_j.$$

Then

$$\|\mathrm{d}R_j\|_{L^2} \leq \sum_{l=1}^{N} \left\|C_{l(j+1)}\right\|_{L^\infty} \left\|\mathrm{d}\Upsilon^{(l)}_{s,\mathrm{low}}\right\|_{L^2} + \|\mathrm{d}\Phi_j(s)\|_{L^2}\,.$$

由于 $\|\mathrm{d}\Phi_j(s)\|_{L^2} = \lambda_j^{\frac{1}{2}}(s)$且 $\left\|\mathrm{d}\Upsilon^{(l)}_{s}\text{，低}\right\|^2_{L^2} = O\left(\frac{1}{\log(|s|^{-1})}\right)$由命题 2.8(4)，我们有

$$\|\mathrm{d}R_j\|^2_{L^2} \leq C^2 \frac{1}{\log(|s|^{-1})}$$

对于某个常数 $C > 0$。

□

3. Estimates of preferred potentials

本节的设定与第 2 节（见设定 1）相同。

给定 X 上的一个光滑实 (1,1) 形式 α，我们引入以下两个可积性条件：

条件 3.1。我们称 α 满足一般纤维上的可积条件，如果$\int_{X_s} \alpha = 0$ 对所有 $s \neq 0$。

条件 3.2. 我们称 α 满足奇异纤维上的可积条件，如果α 满足一般纤维上的可积条件（条件 *3.1*）并且

$$\int_{C_i} \alpha = 0,$$

其中 C_i $(1 \leq i \leq N)$ 是约化奇异纤维 X_0 的不可约分支。

本节的目标是研究满足条件 3.1 的光滑(1,1)形式上的 X 优选势。优选势这一概念源自[FT23，定理 3.2。4]。

定义 3.3 (**优选势**)。设 α 是光滑实（1,1）形式，定义在（X，ω）上，并满足一般纤维上的可积条件（条件 3.1）。则存在唯一的 $\varphi \in C^\infty(X \setminus X_0)$ 使得

$$\int_{X_s} \varphi\omega_s = 0, \quad (\alpha + \mathrm{d}\mathrm{d}^c\varphi)\,|_{X_s} = 0.$$

我们称 φ 为微分形式 α的优选势。

由于 (X_s, ω_s) 是紧致的，且 $\varphi\,|_{X_s} =: \varphi_s$ 在其上光滑，因此我们可以将其展开为关于 Δ_{ω_s} 的特征函数的傅里叶级数：

$$\varphi_s = \sum_{i=1}^{N-1} c_i(s)\Phi_i(s,z) + \sum_{i \geq N} c_i(s)\Phi_i(s,z).$$

系数由以下关系确定

$$\begin{aligned} c_i(s) &= \int_{X_s} \varphi_s \Phi_i(s,z)\omega_s \\ &= \int_{X_s} \varphi_s \frac{-\mathrm{d}\mathrm{d}_z^c \Phi_i(s,z)}{\lambda_i(s)} \\ &= \int_{X_s} \mathrm{d}\mathrm{d}_z^c(\varphi_s)\frac{-\Phi_i(s,z)}{\lambda_i(s)} \\ &= \frac{1}{\lambda_i(s)}\int_{X_s} \Phi_i(s,z)\alpha. \end{aligned}$$

我们用 $b_i(s) := \int_{X_s} \Phi_i(s,\ z)\alpha$ 表示积分项，而关于 $\lambda_i(s)$ 的性质在 $1 \le i \le N-1$ 中见 定理 2.1。

然后按照傅里叶展开，将 φ 分成两部分：低频部分和高频部分：

$$\varphi_{\mathrm{low}} = \sum_{i=1}^{N-1} c_i(s)\Phi_i(s,z), \quad \varphi_{\mathrm{high}} = \sum_{i\ge N} c_i(s)\Phi_i(s,z). \tag{3.1}$$

根据 $X \setminus X_0$ 的 引理 2.3，这两部分在其上光滑。

接下来我们介绍本节的主要定理。

定理 3.4。 我们在 设定 *1* 下工作。设 α 是 $(1,\ 1)$-形式，在$(X,\ \omega)$ 上满足 条件 *3.1*。令 φ 为 α的优选势函数。

(1) 我们有一个关于 L^∞ 的 φ_{high}界，

$$\|\varphi_{\mathrm{high}}\|_{L^\infty(X_s)} \le C\,\|\mathrm{tr}_{\omega_s}\alpha\|_{L^\infty(X_s)}$$

f对所有 $s \neq 0$均成立。常数 C 仅取决于退化的几何 .

(2) 我们可以控制$\|\varphi_{\mathrm{low}}\|_{L^\infty(X_s)}$的增长阶，

$$\|\varphi_{\mathrm{low}}\|_{L^\infty(X_s)} \le C\,\|\mathrm{tr}_{\omega_0}\alpha\|_{L^1(X_0)}\log(|s|^{-1}).$$

对所有 $s \neq 0$均成立。常数 C 仅取决于退化的几何。

当 α 满足奇异纤维上的可积条件（条件 3.2）时，可以更好地控制$\|\varphi_{\mathrm{low}}\|_{L^\infty(X_s)}$的增长阶。

定理 3.5。我们采用与定理 *3.4*相同的假设和记号。假设光滑实$(1,\ 1)$-形式 α 满足条件 *3.2*。那么优选势函数的低频部分 φ_{low} 满足

$$\frac{\|\varphi_{\mathrm{low}}\|_{L^\infty(X_s)}}{\log^{1/2}(|s|^{-1})} \to 0, \quad as\ s \to 0.$$

3.A. 高频部分的估计

我们证明定理 3.4 中关于优选势函数高频部分的第一部分。证明基于 Cheng-Li 方法 [CL81] （亦见 Siu 的讲义 [Siu87，附录（A.2）]）。

首先，我们在每个（X_s， ω_s）上引入如下高频截断热核和格林函数：

$$H_s^N(z_1,z_2,t)=\sum_{i=N}^{\infty}e^{-\lambda_i(s)t}\Phi_i(s,z_1)\Phi_i(s,z_2)\quad\text{(truncated heat kernel)}$$

$$G_s^N(z_1,z_2)=\sum_{i=N}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n(s)}\Phi_i(s,z_1)\Phi_i(s,z_2)\quad\text{(truncated Green's function)}$$

那么高频部分 φ_{high} 在 方程（3.1） 中可表示为 y

$$\varphi_{\text{high}}(z,s)=\int_{z_2\in X_s}(\mathrm{tr}_{\omega_s}\alpha)(z_2)G_s^N(z,z_2)\omega_s(z_2)\tag{3.2}$$

为了获得关于 φ_{high} 在 定理 3.4中的所需界，我们使用 Cheng-Li 方法估计 G_s^N（z_1, z_2）：

命题 3.6。 存在一个与 $s\in\mathbb{D}^\circ$ 无关的一致常数 $C>0$，使得

$$G_s^N(z_1,z_2)\geq -C,\quad z_1,z_2\in X_s,$$

对所有 $s\in\mathbb{D}^\circ$。

证明。 令 $H_s(z_1,\ z_2,\ t)$ 为 $(X_s,\ \omega_s)$ 的热核，则有

$$\frac{1}{V(s)}+\sum_{i=1}^{N-1}e^{-\lambda_i(s)t}\Phi_i(s,z_1)\Phi_i(s,z_2)+H_s^N(z_1,z_2,t)=H_s(z_1,z_2,t)\geq 0,\tag{3.3}$$

其中 $V(s)=\int_{X_s}\omega_s$是 X_s的体积。由于 ω 是闭的， $V(s)\equiv V$是常数。

由定理 2.2中高阶特征值的下界可知，存在 $\lambda>0$ 使得 $\lambda_k(s)\geq\lambda$ 对所有 $k\geq N$均成立。于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_s^N(z,z,t)=\sum_{i=N}^{\infty}-\lambda_i(s)e^{-\lambda_i(s)t}\left|\Phi_i(s,z)\right|^2\leq-\lambda H_s^N(z,z,t).$$

根据 Gr¨onwall 不等式，我们有

$$H_s^N(z,z,t)\leq H_s^N(z,z,1)e^{-\lambda(t-1)}\quad\text{for } t\geq 1$$

根据柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\left|H_s^N(z_1,z_2,t)\right|&\leq\sqrt{H_s^N(z_1,z_1,t)\cdot H_s^N(z_2,z_2,t)}\\&\leq\sqrt{H_s^N(z_1,z_1,1)\cdot H_s^N(z_2,z_2,1)}e^{-\lambda(t-1)}\quad\text{for } t\geq 1.\end{aligned}\tag{3.4}$$

为了估计截断格林函数，我们注意到

$$\int_0^\infty H_s^N(z_1,z_2,t)\mathrm{d}t=G_s^N(z_1,z_2)=\sum_{i=N}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i(s)}\Phi_i(s,z_1)\Phi_i(s,z_2).$$

Then

$$\begin{aligned}G_s^N(z_1,z_2)&=\int_0^1H_s^N(z_1,z_2,t)\mathrm{d}t+\int_1^\infty H_s^N(z_1,z_2,t)\mathrm{d}t\\&\geq\int_0^1H_s^N(z_1,z_2,t)\mathrm{d}t-\sqrt{H_s^N(z_1,z_1,1)\cdot H_s^N(z_2,z_2,1)}\int_1^\infty e^{-\lambda(t-1)}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \big(H_s(z_1,z_2,t) - \frac{1}{V} - \sum_{i=1}^{N-1} e^{-\lambda_i(s)t}\Phi_i(s,z_1)\Phi_i(s,z_2)\big)\mathrm{d}t - I_2$$

(Using *Equation* (3.3), and $I_2 \coloneqq \sqrt{H_s^N(z_1,z_1,1)\cdot H_s^N(z_2,z_2,1)}\int_1^\infty e^{-\lambda(t-1)}\mathrm{d}t$)

$$\geq \int_0^1 \big(-\frac{1}{V} - \sum_{i=1}^{N-1} e^{-\lambda_i(s)t}\Phi_i(s,z_1)\Phi_i(s,z_2)\big)\mathrm{d}t - I_2$$

（利用热核 $H_s(z_1,z_2,t) \geq 0$ 这一事实）

$$\geq -\frac{1}{V} - \sum_{i=1}^{N-1} \|\Phi_i(s,z)\|^2_{L^\infty(X_s)} - I_2$$

$$\geq -(\frac{1}{V} + I_1 + I_2)$$

Here

$$I_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \|\Phi_i(s,z)\|^2_{L^\infty(X_s)} \geq 0$$

$$I_2 = \sqrt{H_s^N(z_1,z_1,1)\cdot H_s^N(z_2,z_2,0.4)}\int_1^\infty e^{-\lambda(t-1)}\mathrm{d}t \geq 0.$$

剩下的任务是用一些与 s 无关的一致常数来控制 I_1， I_2 。

我们先介绍一些基本结果，它们将索博列夫常数与热核及特征函数界联系起来。

定理 3.7 (定理 2.1, [Yos97])。 对于一个实维数为 $(M,\ g)$ *2* 的流形 2，以下两个不等式等价:

(1) 对于 $0 < t \leq 1$ 和 $(x, y) \in M \times M$,

$$H(x,y,t) \leq C_1 t^{-2}$$

(2) 对每个 $f \in C^\infty(M)$,

$$\|f\|_{L^4} \leq C_2(\|\mathrm{d}f\|_{L^2} + \|f\|_{L^2})$$

这里 C_1 和 C_2 彼此连续依赖。

根据经典的莫泽迭代，我们有

定理 3.8 ([Pet16，定理 9.2。7])。 设 $(M,\ g)$ 为一个紧黎曼流形，并满足以下索博列夫不等式

$$\|u\|_{2\nu} \leq S\,\|\nabla u\|_2 + \|u\|_2$$

其中 $\nu > 1$。那么对于 $\Delta u = -\lambda u$，我们有

$$\|u\|_\infty \leq \exp(\frac{S\sqrt{\nu\lambda}}{\sqrt{\nu}-1})\,\|u\|_2\,.$$

具体而言，若 $\nu = 2$ 在上述索博列夫不等式中，且 $\|u\|_2 = 1$，那么对于 $\Delta u = -\lambda u$，我们有

$$\|u\|_\infty \leq \exp(\frac{S\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{2}-1})$$

最后，我们介绍 K¨ahler 族的一致 Sobole夫不等式。

定理 3.9 ([Tos10，引理 3.2])。设 $\pi : (X, \omega) \to \mathbb{D}$ 是一个 *K¨ahler* 族，即 π 是从一个 *K¨ahler* 流形 (X, ω) 到单位圆盘的真满全纯映射$\mathbb{D}$。假设 $X_0 := \pi^{-1}(0)$ 是唯一的奇异纤维。

假设 维数$_{\mathbb{C}}$ $X_s = 1$。那么对于 $0 < |s| < 0.5$，我们有一个统一的 *Sobole*夫常数 C，适用于(X_s, ω_s)，其中 $\omega_s = \omega|_{X_s}$:

$$\|f\|_{L^4(X_s)} \leq C(\|\mathrm{d}f\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}) \quad \forall f \in C^\infty(X_s)$$

因此 I_1 一致有界定理 3.9和 定理 3.8。并且 I_2 一致有界定理 3.9 和 定理 3.7。证明完毕。□

作为推论，我们可以证明 定理 3.4的第一部分。

推论 3.10. 在定理 *3.4*的设定和记号下，我们有

$$\|\varphi_{\mathrm{high}}\|_{L^\infty(X_s)} \leq C \|\mathrm{tr}_{\omega_s}\alpha\|_{L^\infty(X_s)}$$

对所有 $s \neq 0$ 均成立。常数 C 仅取决于退化的几何。

证明。 由方程 (3.2)，我们有

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{high}}(z,s) &= \int_{z_2 \in X_s} (\mathrm{tr}_{\omega_s}\alpha)(z_2) G_s^N(z,z_2)\omega_s(z_2) \\ &= \int_{z_2 \in X_s} (\mathrm{tr}_{\omega_s}\alpha)(z_2)(G_s^N(z,z_2) + C')\omega_s(z_2),\end{aligned}$$

其中我们取常数 C' 如命题 3.6 所示，使得 $G_s^N(z,z_2) + C' \geq 0$。因此

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{high}}(z,s) &\leq \int_{z_2 \in X_s} |(\mathrm{tr}_{\omega_s}\alpha)(z_2)| \, (G_s^N(z,z_2) + C')\omega_s(z_2) \\ &\leq \int_{z_2 \in X_s} \|\mathrm{tr}_{\omega_s}\alpha\|_{L^\infty(X_s)} \, (G_s^N(z,z_2) + C')\omega_s(z_2) \\ &= C'V \, \|\mathrm{tr}_{\omega_s}\alpha\|_{L^\infty(X_s)} \, .\end{aligned}$$

类似地，我们有 $\varphi_{\mathrm{high}}(z,s) \geq -C'V \, \|\mathrm{tr}_{\omega_s}\alpha\|_{L^\infty(X_s)}$，其中 V 是 (X_s, ω_s) 的体积。综上，我们有$\|\varphi_{\mathrm{high}}\|_{L^\infty(X_s)} \leq C \, \|\mathrm{tr}_{\omega_s}\alpha\|_{L^\infty(X_s)}$。□

3.B. **低频估计（I）**

我们证明定理 3.4的第二部分。

首先，我们注意到

$$\varphi_{\mathrm{low}} = \sum_{i=1}^{N-1} c_i(s)\Phi_i(s,z)$$

以及 $\Phi_i(s, z)$ 由 定理 3.9 和 定理 3.8一致有界。因此只需估计 $c_i(s)$。回顾一下，$c_i = \dfrac{b_i}{\lambda_i}$ 并且小特征值 $\lambda_i(s$已由 Dai-Yoshikawa 在 定理 2.1中进行了充分研究。接下来需要确定其渐近行为

性质

$$b_i(s) = \int_{X_s} \Phi_i(s,z)\alpha$$

对所有 $1 \le i \le N$，在 0 附近。

我们采用 Φ_i 在定理 2.10中的分解。我们在此回顾相关结果：对每个 $1 \le i \le N-1$，有

$$\Phi_i(s,z) = \sum_{l=1}^{N} C_{li}(s)\Upsilon^{(l)}(s,z) + R_i(s,z).$$

And

- 存在一个一致常数 C，使得 $|C_{li}(s)| < C$ 对所有 $1 \le l \le N$ 和所有 s均成立。
- 模型函数 $\Upsilon^{(l)}$ (s, z) 在命题 2.8中讨论。
- 余项 R_i 在定理 2.10中讨论。

于是每个 b_i 被分解为

$$b_i(s) = \sum_{l=1}^{N} C_{li}(s) \int_{X_s} \Upsilon_s^{(l)}\alpha + \int_{X_s} R_i(s,z)\alpha. \tag{3.5}$$

我们有如下引理

Lem引理 3.11。 在前述记号下。对于任意光滑$(1,1)$形式 α （在 X上），

$$\int_{X_s} \Upsilon_s^{(l)}\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Area}(C_l)}}\Big(\int_{C_l}\alpha + \|\alpha\|_\infty O(|s|^{\frac{1}{4\nu}})\Big).$$

证明。 （引理 3.11）根据 $\Upsilon_s^{(l)}$在命题 2.8中的构造可知，

$$\int_{X_s} \Upsilon_s^{(l)}\alpha = \int_{X_0} \frac{\chi_{\epsilon(s)}^{(l)} F_s^*\alpha}{\sqrt{\mathrm{Area}(C_l)}},$$

其中 $\epsilon(s) = 2|s|^{\frac{1}{8\nu}}$。

由于 α 是 X上的光滑形式，由定理 2.4(4)和注 2.5，我们有

$$\|F_s^*\alpha - \alpha_0\|_{L^\infty(X_0 \setminus \cup_{p\in \mathrm{Sing}\, X_0} B(p,\epsilon(s)))} \le K_2 |s|^{\frac{1}{2}}$$

对于某个一致常数 $K_2 > 0$。因此

$$\left| \int_{X_s} \Upsilon_s^{(l)}\alpha - \int_{X_0} \frac{\chi_{\epsilon(s)}^{(l)}\alpha}{\sqrt{\mathrm{Area}(C_l)}} \right| \le K_2 \sqrt{\mathrm{Area}(C_l)}\, |s|^{\frac{1}{2}}. \tag{3.6}$$

由于 $\chi_{\epsilon(s)}^{(l)}()$ 在 C_l上紧支撑 $\left|\chi_{\epsilon(s)}^{(l)}() - 1\right|$ 有界于 2，且在 C_l 上除一个测度为 $O(|s|^{\frac{1}{4\nu}})$ 的集合外均为零（依据 引理 2.7），我们有

$$\left| \int_{X_0} \frac{\chi_{\epsilon(s)}^{(l)}\alpha}{\sqrt{\mathrm{Area}(C_l)}} - \int_{C_l} \frac{\alpha}{\sqrt{\mathrm{Area}(C_l)}} \right| = \|\alpha\|_\infty O(|s|^{\frac{1}{4\nu}}). \tag{3.7}$$

结合方程 (3.6) 和方程 (3.7)，我们得到

$$\left| \int_{X_s} \Upsilon_s^{(l)}\alpha - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Area}(C_l)}} \int_{C_l} \alpha \right| = \|\alpha\|_\infty O(|s|^{\frac{1}{4\nu}}).$$

□

另一方面，由定理 2.10(2)，我们有

$$\left|\int_{X_s} R_i(s,z)\alpha\right| = \|\mathrm{tr}_\omega\alpha\|_{L^2(X_s)}\, O(\log^{-\frac{1}{2}}(|s|^{-1})).$$

将所有这些渐近结果代入公式 (3.5)，得到

$$\begin{aligned} b_i(s) &= \sum_{l=1}^{N} \frac{C_{li}(s)}{\sqrt{\mathrm{Area}(C_l)}} \int_{C_l} \alpha + \sum_{l=1}^{N} \frac{C_{li}(s)}{\sqrt{\mathrm{Area}(C_l)}} O(|s|^{\frac{1}{4\nu}}) \\ &\quad + \|\mathrm{tr}_\omega\alpha\|_{L^2(X_s)}\, O(\log^{-\frac{1}{2}}(|s|^{-1})) \\ &= \sum_{l=1}^{N} \frac{C_{li}(s)}{\sqrt{\mathrm{Area}(C_l)}} \int_{C_l} \alpha + O(\log^{-\frac{1}{2}}(|s|^{-1})) \\ &= O(1)\,\|\mathrm{tr}_{\omega_0}\alpha\|_{L^1(X_0)} + O(\log^{-\frac{1}{2}}(|s|^{-1}))\,\|\mathrm{tr}_\omega\alpha\|_{L^2(X_s)}\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

接下来证明定理 3.4的第二部分。

证明。（关于定理 3.4.(2)）对于 α 其在一般纤维上的积分为零，根据公式 (3.8)，我们有 $b_i(s) = O(\log^{-\frac{1}{2}}(|s|^{-1}))\ \|\mathrm{tr}^\omega\alpha\|_{L^2(\bar{X}_s)}$ ·

由于 $\varphi_{\mathrm{low}} = \sum_{i=1}^{N-1} c_i(s)\Phi_i(s,\ z)$ 和 $c_i = b_i/\lambda_i$，我们有

$$c_i(s) = O(\log(|s|^{-1}))\,\|\mathrm{tr}_{\omega_0}\alpha\|_{L^1(X_0)} + O(\log^{\frac{1}{2}}(|s|^{-1}))\,\|\mathrm{tr}_\omega\alpha\|_{L^2(X_s)}\,.$$

由于当 $1 \le i \le N-1$ 时，$\Phi_i(s,\ z)$ 一致有界，我们有

$$\|\varphi_{\mathrm{low}}\|_{L^\infty(X_s)} \le C\,\|\mathrm{tr}_{\omega_0}\alpha\|_{L^1(X_0)}\log(|s|^{-1}).$$

□

3.C. 低频估计（II）

若 α 还满足条件 3.2（即在奇异纤维上，α 在奇异纤维的每个不可约分支上的积分都为零），我们便能对其优选势函数给出更好的估计（定理 3.5）。下面证明该定理。

按照第 3.B 节中的相同思路，只需估计公式 (3.5)中 b_i（s）展开式的各项：

$$b_i(s) = \sum_{l=1}^{N} C_{li}(s)\int_{X_s} \Upsilon_s^{(l)}\alpha + \int_{X_s} R_i(s,z)\alpha.$$

如 α 在奇异纤维的每个不可约分支上的积分为零，则第一部分已足够好，这已由引理 3.11证明；于是有

$$\sum_{l=1}^{N} C_{li}(s)\int_{X_s} \Upsilon_s^{(l)}\alpha = O(|s|^{\frac{1}{4\nu}}).$$

下面要在条件 $\int_{X_s} R_i$（s, z）α 下估计条件 3.2，具体如下命题所述。

命题 3.12. 对于 $s \neq 0$，我们定义 $\widetilde{R}_i := \log^{\frac{1}{2}}(|s|^{-1})R_i$。若 α 是定义在 $(1,1)$- 形式上的光滑 X，且满足条件 3.2，则有

$$\log^{\frac{1}{2}}(|s|^{-1})\left|\int_{X_s} R_i(s,z)\alpha\right| = \left|\int_{X_s} \widetilde{R}_i(s,z)\alpha\right| \to 0 \quad as\ s \to 0.$$

证明。我们用反证法证明。假设存在一个序列 $s_n \to 0$ 使得 $\left|\int_{X_{s_n}} \widetilde{R}_i(s_n, z)\alpha\right| \geq \epsilon_0$，其中某个 $\epsilon_0 > 0$。

首先，我们检查函数族 $R_{i,s}(z) = R_i(s,z) \in C^\infty(X_s)$ 是否满足命题 1.13中的条件。我们将 $\mathrm{dd}^c_z R_{i,s}(z)$ 记为 β_s。

- 对于命题 1.13中的第一条件，我们使用方程 (2.2)中的特征函数分解公式：

$$\Phi_i(s,z) = \sum_{l=1}^{N} C_{l(i+1)}(s)\Upsilon^{(l)}(s,z) + R_i(s,z).$$

在任意 $x \in X_{0,\mathrm{reg}}$ 周围，我们可以取一个开邻域 U，它是 x 的开邻域，且 $\Upsilon^{(l)}(s,z)$ 在 U 上为常数，依据 推论 2.9。于是，在 $U \cap X_s$ 上，我们有

$$\mathrm{dd}^c_z \widetilde{R}_{i,s}(z) = \beta_s = \mathrm{dd}^c_z \Phi_i(s,z) = -\lambda_i(s)\Phi_i(s,z)\omega_s.$$

因此 $\|\mathrm{tr}_{\omega_s}\beta_s\|_{L^\infty(U\cap X_s)} = \|\lambda_i(s)\Phi_i(s,z)\|_{L^\infty(U\cap X_s)}$ 在 s 中一致有界。

- 对于命题 1.13中的第二条件，我们注意到

$$\|\mathrm{tr}_{\omega_s}\beta_s\|_{C^0(U\cap X_s)} = \lambda_i(s)\,\|\Phi_i\|_{C^0(U\cap X_s)} \to 0.$$

因此，在 $X_{0,\mathrm{reg}}$ 上，C^0_{loc} 中的 $\mathrm{tr}_{\omega_s}\beta_s \to 0 = f_0$。

- 对于命题 1.13中的第三条件，定理 2.10(3) 中证明了存在一个一致常数 $C > 0$ 使得

$$\|\mathrm{d}R_j\|^2_{L^2(X_s)} \leq \frac{C^2}{\log(|s|^{-1})}, \quad \|R_j\|^2_{L^2(X_s)} \leq C^2\frac{1}{\log(|s|^{-1})}.$$

对于所有 $1 \leq j \leq N$ 和所有 s。因此

$$\left\|\widetilde{R}_{i,s}(z)\right\|_{L^2(X_s,\omega_s)}, \left\|\mathrm{d}\widetilde{R}_{i,s}(z)\right\|_{L^2(X_s,\omega_s)} \leq C^2.$$

接下来，我们将命题 1.13 应用于函数族 $R_{i,s}(z)$ 和序列 $s_n \to 0$，于是得到一个子序列 s_{k_n}，使得

- $\widetilde{R}_{i,s_{k_n}}(z)$ 收敛于 $\widetilde{R}_0(z)$ 在 $C^{1,a}_{\text{局部}}$ 上 $X_{0,\text{正则}}$ 对任意 $0 < a < 1$,
- $\widetilde{R}_0(z) \in W^{2,p}_{\text{局部}}$ 对所有 $1 < p < \infty$ 并且它求解 $-\Delta_{\omega_0}\widetilde{R}_0(z) = f_0 = 0$ 几乎处处在 $X_{0,\text{正则}}$,
- $R_0(z) \in W^{1,2}(X_{0,\text{正则}})$,
- $\int_{X_{s_{k_n}}} R_{i,s_{k_n}}(z)\alpha \to \int_{X_0} R_0(z)\alpha$.

由于 $R_0(z) \in W^{1,2}(X_0)$，且它在 $X_{0,\mathrm{reg}}$ 上是调和的，因此它是局部常数，并且在 X_0 的每个不可约分支上都是常数。所以我们有 $\int_{X_0} R_0(z)\alpha = 0$。因此，初始假设 $\left|\int_{X_{s_n}} \widetilde{R}_i(s_n, z)\alpha\right| \geq \epsilon_0$ 对所有 n 和某个 $\epsilon_0 > 0$ 均成立，与之矛盾

$$\int_{X_{s_{k_n}}} \widetilde{R}_{i,s_{k_n}}(z)\alpha \to \int_{X_0} \widetilde{R}_0(z)\alpha = 0.$$

证明至此完成。 □

因此，我们可以直接证明定理 3.5

证明。（定理 3.5）根据前面的讨论，我们有

$$b_i(s) = O(|s|^{\frac{1}{4\nu}}) + o(\log^{-\frac{1}{2}}(|s|^{-1})).$$

因此 $c_i(s) = b_i(s)\,\lambda_i(s) = o(\log^{\frac{1}{2}}(|s|^{-1}))$ 对于 $1 \le i \le N-1$。这意味着

$$\frac{\|\varphi_{\mathrm{low}}\|_{L^\infty(X_s)}}{\log^{1/2}(|s|^{-1})} \to 0, \quad \text{as } s \to 0.$$

□

4. Asymptotics of Archimedean height pairing

作为前述估计的一个应用，我们引入光滑实$(1,1)$-形式上的阿基米德高度配对 X。我们继续采用设定 1中的设定，除了推论 4.6中允许退化具有一般的奇异纤维。

定义 4.1 (阿基米德高度配对)。 设 α， β 是 $(1,1)$-形式上的光滑实 X，且 $\int_{X_s}\alpha = \int_{X_s}\beta = 0$ 对 $s \neq 0$ *(条件 3.1)* 成立。设 φ 是 α的优选势函数。我们将 阿基米德高度配对 $\langle \alpha, \beta\rangle$ 定义为 $\mathbb{D}^\circ$上的一个函数

$$\langle \alpha, \beta\rangle(s) := \int_{X_s} \varphi\beta, \quad s \in \mathbb{D}^\circ.$$

它在 $\mathbb{D}^\circ$ 上光滑，因为 $\pi\colon \quad X^\circ(:= X \setminus X_0) \to \mathbb{D}^\circ$ 是一个淹没映射，且 φ 光滑。

注 4.2。 我们可以使用 X_s 上 α 的任意势来定义阿基米德高度配对。实际上，对于 X_s 上 α 的任意势 $-\varphi'$ （即，在 X_s 上 $\mathrm{dd}^c\varphi' + \alpha = 0$ ），差值 $\varphi' - \varphi$ 在 X_s 上是常数，其中 φ 是 α 的优选势函数。因此，$\int_{X_s}(\varphi' - \varphi)\beta =$ 为常数，且 $\int_{X_s}\varphi'\beta = \int_{X_s}\varphi\beta = \langle \alpha, \beta\rangle(s)$。

现在我们陈述上文定义的阿基米德高度配对的一些基本性质。

命题 4.3. 设 α, β 是 定理 *4.1*中的两个微分形式。则有

(1) 阿基米德高度配对是对称且双线性的。*(2)* 阿基米德高度配对是正定的，即， $\langle \alpha, \alpha\rangle$ 在 $\mathbb{D}^\circ$上是非负函数，并且 $\langle \alpha, \alpha\rangle = 0$ 当且仅当$\alpha\,|_{X_s} = 0$ 对 $s \neq 0$成立。

证明。

(1) 由于优选势函数依赖于微分形式且呈线性关系，因此阿基米德高度配对是双线性的。它是对称的，因为 $\langle \alpha, \beta\rangle(s) = \int_{X_s}\varphi(-\mathrm{dd}^c\varphi') = \int_{X_s}\varphi'(-\mathrm{dd}^c\varphi) = \langle \beta, \alpha\rangle(s)$, 其中 φ, φ' 分别是 α, β 的优选势函数。

(2) 我们有 $\langle \alpha, \alpha\rangle(s) = \int_{X_s}\varphi(-\mathrm{dd}^c\varphi) = \|\mathrm{d}^\varphi\|^2_{L^2(X_s)} \ge 0$。如果 $\langle \alpha, \alpha\rangle = 0$，那么 α 的优选势函数 φ 在纤维上为常数，因此对于 $s \neq 0$有 $\alpha|_{X_s} = 0$ 。

□

定理 4.4 (配对的连续性)。 设 α, β 是定义在 X 上、满足条件 *3.1* 的两个光滑实 $(1,1)$-形式

$$\int_{C_i}\alpha=\int_{C_i}\beta=0,$$

其中 C_i 是约化奇异纤维 X_0 *(条件 3.2)* 的不可约分支。

那么，配对函数 $\langle\alpha,\beta\rangle\in C^0(\mathbb{D}^\circ)$ *(在 定理 4.1 中)* 可连续延拓至 $\mathbb{D}$。

证明。 (定理 4.4的证明) 令 $\varphi,\rho\in C^\infty(X\setminus X_0)$ 分别为 α 和 β的优选势函数。

由 引理 2.3 并缩小基底后，我们将 φ 分解为其低频部分$\varphi_{\text{low}}\in C^\infty(X\setminus X_0)$ 和高频部分 $\varphi_{\text{high}}\in C^\infty(X\setminus X_0)$。于是

$$\begin{aligned}\langle\alpha,\beta\rangle(s)&=-\int_{X_s}(\varphi_{\text{low}}+\varphi_{\text{high}})\mathrm{dd}^c\rho\\&=-\int_{X_s}\rho\mathrm{dd}^c\varphi_{\text{low}}-\int_{X_s}\varphi_{\text{high}}\beta\end{aligned}$$

利用 定理 3.5中的渐近结果，我们得到 $\rho=o(\log^{\frac12}(|s|^{-1}))$ 和$\varphi_{\text{low}}=o(\log^{\frac12}(|s|^{-1}))$。由于 φ_{low}属于由低频特征函数张成的空间，因此我们有

$$\|\mathrm{tr}_{\omega_s}\mathrm{dd}^c\varphi_{\text{low}}\|_{L^\infty(X_s)}=\|\Delta_{\omega_s}\varphi_{\text{low}}\|_{L^\infty(X_s)}=o(\log^{-\frac12}(|s|^{-1})).$$

因此 $\int_{X_s}\rho\mathrm{dd}^c\varphi_{\text{low}}=o(1)$，并且它在 0 处连续。

为了证明 $\int_{X_s}\varphi_{\text{high}}\beta$ 可以连续延拓到 $\mathbb{D}$，我们使用 推论 1.14。只需验证 $\varphi_{\text{high},s}\in C^\infty(X_s)$ 满足 命题 1.13中的条件。注意到

$$\mathrm{dd}^c_z\varphi_{\text{high},s}(z)=-\alpha-\mathrm{dd}^c_z\varphi_{\text{low},s}(z)$$

- 对于第一条件，我们有

$$\begin{aligned}\|\mathrm{tr}_{\omega_s}\mathrm{dd}^c_z\varphi_{\text{high},s}(z)\|_{L^\infty(X_s)}&\le\|\mathrm{tr}_{\omega_s}\alpha\|_{L^\infty(X_s)}+\|\mathrm{tr}_{\omega_s}\mathrm{dd}^c_z\varphi_{\text{low},s}\|_{L^\infty(X_s)}\\&\le\|\mathrm{tr}_{\omega_s}\alpha\|_{L^\infty(X_s)}+C\log^{-1}(|s|^{-1})\,\|\varphi_{\text{low},s}\|_{L^\infty(X_s)}\\&\le\|\mathrm{tr}_{\omega_s}\alpha\|_{L^\infty(X_s)}+o(\log^{-\frac12}(|s|^{-1}))\end{aligned}$$

因此 $\|\mathrm{tr}_{\omega_s}\mathrm{dd}^c_z\varphi_{\text{high},s}(z)\|_{L^\infty(X_s)}$ 在 s 中一致有界。

- 由于 $\mathrm{tr}_{\omega_s}\alpha$ 在 $X\setminus$ 奇点集 X_0 上连续，并且

$$\|\mathrm{tr}_{\omega_s}\mathrm{dd}^c_z\varphi_{\text{high},s}(z)-\mathrm{tr}_{\omega_s}\alpha\|_{L^\infty(X_s)}=\|\Delta_{\omega_s}\varphi_{\text{low},s}\|_{L^\infty(X_s)}=o(\log^{-\frac12}(|s|^{-1})).$$

我们有 $\mathrm{tr}_{\omega_s}\mathrm{dd}^c_z\varphi_{\text{high},s}\to\mathrm{tr}_{\omega_0}\alpha$ 属于 C^0_{loc}，在 $X_{0,\text{reg}}$ 上，这是第二条件 .

- 由于$\|\varphi_{\text{high}}\|_{L^\infty(X_s)}$ （由定理 3.4）以及 $\|\mathrm{tr}_{\omega_s}\mathrm{dd}^c_z\varphi_{\text{high},s}(z)\|_{L^\infty(X_s)}$ 一致有界，故$\|\varphi_{\text{high}}\|_{L^2(X_s)}$ 与 $\|\mathrm{d}\varphi_{\text{high}}\|_{L^2(X_s)}$ 也一致有界。因此第三个条件得到验证。

因此，我们可以将推论 1.14 应用于 $\varphi_{\text{high},s}$，于是 $\int_{X_s}\varphi_{\text{high}}\beta$ 在 0 处连续。总之，$\langle\alpha,\beta\rangle(s)$ 可以连续延拓至 $\mathbb{D}$。

□

对于满足 α 和 β 的任意光滑类，条件 3.1，我们可以推广定理 4.4。

定理 4.5（配对的渐近性）。设 α 和 β 是两个光滑实 $(1,1)$-形式，其在一般纤维上的积分均为 0。那么存在一个常数$c_{\alpha,\beta}$使得

$$\langle \alpha, \beta \rangle - c_{\alpha,\beta} \log |s|^2$$

连续延拓至 $\mathbb{D}$。

常数 $c_{\alpha,\beta}$ 由以下方式确定：设 M 为奇异纤维 X_0的不可约分支的交数矩阵，其由 $M_{ij} = C_i \cdot C_j$给出。设M^+为 M的摩尔-彭若斯伪逆。那么 $c_{\alpha,\beta} = \mathbf{v}_\alpha^T (M^+)^T \mathbf{v}_\beta$，其中

$$\mathbf{v}_\alpha = \left(\int_{C_1} \alpha, \ldots, \int_{C_N} \alpha \right)^T, \quad \mathbf{v}_\beta = \left(\int_{C_1} \beta, \ldots, \int_{C_N} \beta \right)^T.$$

特别地，若 α 或 β 满足奇异纤维上的可积条件（条件 3.2），则 $c_{\alpha,\beta} = 0$ 因为$\mathbf{v}_\alpha$ 或$\mathbf{v}_\beta$ 为零。

证明。由于奇异纤维是约化的，我们有 $X_0 = \sum_{i=1}^N C_i$，其中 C_i 为不可约分支。

我们考虑 $N \times N$交数矩阵 M，其元素为 $M_{ij} = C_i \cdot C_j$。根据扎里斯基引理（参见 [BHPVdV04，III.8.2，第111]页），我们有

- 矩阵 M 是负半定的。
- M的核恰为一维，由 $\mathbf{1} = (1, 1, \cdots, 1)$张成

令 $V_0 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N x_i = 0 \right\}$ 为零次子空间。则 $M|_{V_0}$严格负定且可逆。为计算 $M|_{V_0}$的逆，我们引入 M^+ M的摩尔-彭若斯伪逆。于是，M^+在 V_0上作为 M的逆，并消去span(1)。

对于每个 C_i，即 X_0的不可约分支，我们考虑线丛 $L_i = \mathcal{O}(C_i)$，并赋予其厄米度量 h_i。于是我们有一个闭的光滑$(1,1)$-形式 $\gamma_i = -\mathrm{dd}^c \log \|e\|_{h_i}^2$，它代表类 $[C_i]$，其中 e 是全纯线丛 L_i的局部标架。令 σ_i 为 L_i 的典范截面，它恰好在 C_i上消失。那么，在每个光滑纤维 X_s 上，γ_i 的优选势函数为$\log \|\sigma_i\|_{h_i}^2$，相差一个常数。

我们定义如下映射，它映射到由 $\{[C_i]\}$ 张成的上同调类所表示的微分形式：

$$\mathrm{Form}: \quad \mathbb{R}^N \to \{\text{光滑闭 } (1,1) \text{ 形式，在奇异纤维上的积分为零}\}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_N) \mapsto \sum_{i=1}^N x_i \gamma_i =: \mathrm{Form}(\mathbf{x})$$

此外，Form(x) 在 X_s 上的优选势函数将是 $\sum_{i=1}^N x_i \log \|\sigma_i\|_{h_i}^2$，相差一个依赖于 $s \neq 0$ 的常数。

对于光滑的$(1,1)$-形式 α, β在 X上，使得$\int_{X_s} \alpha = \int_{X_s} \beta = 0$对于 $s \neq 0$，分量积分的向量

$$\mathbf{v}_\alpha = \left(\int_{C_1} \alpha, \ldots, \int_{C_N} \alpha \right)^T, \quad \mathbf{v}_\beta = \left(\int_{C_1} \beta, \ldots, \int_{C_N} \beta \right)^T.$$

在 V_0中。然后我们可以将 α, β 分解为

$$\alpha = \mathrm{Form}(M^+\mathbf{v}_\alpha) + \underbrace{(\alpha - \mathrm{Form}(M^+\mathbf{v}_\alpha))}_{=:\alpha_0}$$
$$\beta = \mathrm{Form}(M^+\mathbf{v}_\beta) + \underbrace{(\beta - \mathrm{Form}(M^+\mathbf{v}_\beta))}_{=:\beta_0}$$

注意，对每个 C_i,

$$\begin{aligned}\int_{C_i} \alpha_0 &= \text{i-th coordinate of } (\mathbf{v}_\alpha - MM^+\mathbf{v}_\alpha)\\ &= 0 \quad (\mathbf{v}_\alpha \in V_0, \text{ so } MM^+\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha).\end{aligned}$$

类似地，对每个 C_i，我们有

由于配对 $\langle \alpha, \beta\rangle$ 是双线性且对称的，我们有

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \beta\rangle = &\langle \alpha_0, \beta_0\rangle + \langle \alpha_0, \mathrm{Form}(M^+\mathbf{v}_\beta)\rangle + \langle \mathrm{Form}(M^+\mathbf{v}_\alpha), \beta_0\rangle\\ &+ \langle \mathrm{Form}(M^+\mathbf{v}_\alpha), \mathrm{Form}(M^+\mathbf{v}_\beta)\rangle\end{aligned}$$

根据前一个定理（定理 4.4），$\langle \alpha_0, \beta_0\rangle$ 可以连续延拓到 S。由于 Form($M^+\mathbf{v}_\alpha$) 的优选势函数为 $\sum_{i=1}^N (M^+\mathbf{v}_\alpha)_i$对数 $\|\sigma_i\|_{h_i}^2$，相差一个常数，位于 X_s，我们有

$$\langle \mathrm{Form}(M^+\mathbf{v}_\alpha), \beta_0\rangle = \sum_{i=1}^N \int_{X_s} (M^+\mathbf{v}_\alpha)_i \log \|\sigma_i\|_{h_i}^2 \beta_0$$

利用对数范数积分的渐近行为（引理 A.1），每个 $\int_{X_s}$ 对数 $\|\sigma_i\|_{h_i}^2 \beta_0$都连续延拓到 S。因此，$\langle \mathrm{Form}(M^+\mathbf{v}_\alpha)\ \beta_0\rangle$ 连续地延拓为 H¨older 连续到S。

类似地，$\langle \alpha_0$，Form($M^+\mathbf{v}_\beta$)$\rangle$ 可连续扩张为 H¨older。
对于最后一项，我们有

$$\langle \mathrm{Form}(M^+\mathbf{v}_\alpha), \mathrm{Form}(M^+\mathbf{v}_\beta)\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (M^+\mathbf{v}_\alpha)_i (M^+\mathbf{v}_\beta)_j \int_{X_s} \log \|\sigma_i\|_{h_i}^2 \gamma_j.$$

根据 引理 A.1，$\int_{X_s} \log \|\sigma_i\|_{h_i}^2 \gamma_j - \int_{C_i} \gamma_j \log |s|^2$ 可连续扩张为 H¨older，并经过原点，因此

$$\langle \mathrm{Form}(M^+\mathbf{v}_\alpha), \mathrm{Form}(M^+\mathbf{v}_\beta)\rangle - \underbrace{\left(\sum_{1\le i,j\le N} (M^+\mathbf{v}_\alpha)_i (M^+\mathbf{v}_\beta)_j \int_{C_i} \gamma_j\right)}_{=:c_{\alpha,\beta}} \log |s|^2$$

可在 S 上连续扩张为 H¨older。这里 $c_{\alpha,\ \beta}$ 可简化为

$$\begin{aligned}c_{\alpha,\beta} = \sum_{1\le i,j\le N} (M^+\mathbf{v}_\alpha)_i (M^+\mathbf{v}_\beta)_j M_{ij} &= (M^+\mathbf{v}_\alpha)^T MM^+\mathbf{v}_\beta\\ &= (M^+\mathbf{v}_\alpha)^T \upsilon_\beta\end{aligned}$$

总之，$\langle \alpha,\ \beta\rangle - c_{\alpha,\ \beta} \log\ |s|^2$ 连续延拓至 $\mathbb{D}$。 □

我们注意到，高度配对 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 在半稳定约化下表现良好。因此，我们可以将定理 4.5 中的渐近结果推广到具有非约化奇异纤维的代数曲线的退化情形。

推论 4.6。设 $\pi\colon X \to \mathbb{D}$ 是代数曲线的退化。假设 X 是光滑的，并允许奇异纤维 X_0 是非约化且非不可约的。设 $p\colon Y \to \mathbb{D}$ 是 (X, X_0) 的半稳定约化，且具有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\mu} & X \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathbb{D}_t & \xrightarrow{f_d} & \mathbb{D}_s \end{array}$$

于是 $f_d(t) = t^d$，且 Y_0 是具有简单正规交叉的约化除子。此外，Y 是一个 *Kähler* 流形。

设 α，β 是 $(1,1)$-形式，在 X 上满足 条件 *3.1*。那么 $\mu^*\alpha$ 和 $\mu^*\beta$ 是在 Y 上满足条件 *3.1* 的两个光滑 $(1,1)$-形式。因此我们可以定义 $\langle \alpha, \beta \rangle \in C^\infty(\mathbb{D}_s^\circ)$ 和 $\langle \mu^*\alpha, \mu^*\beta \rangle \in C^\infty(\mathbb{D}_t^\circ)$。这两个配对之间的关系为

$$\langle \alpha, \beta \rangle \circ f_d = \langle \mu^*\alpha, \mu^*\beta \rangle. \tag{4.1}$$

特别地，存在一个常数 $c_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$ 使得 $\langle \alpha, \beta \rangle - c_{\alpha,\beta}$ 对数 $|s|^2$ 可连续延拓至 $\mathbb{D}$。因此，当且仅当 $\langle \alpha, \beta \rangle \in L^\infty(\mathbb{D}^\circ)$ 时，$\langle \alpha, \beta \rangle \in C^0(\mathbb{D})$。

证明。只需证明 等式 (4.1)。

对于 $0 \neq t_0 \in \mathbb{D}_t$，我们有一个同构 $\mu_{t_0}\colon Y_{t_0} \to X_{f_d(t_0)}$。设 $-\varphi$ 是 α 在 $X_{f_d(t_0)}$ 上的一个势，即在 $X_{f_d(t_0)}$ 上 $\mathrm{dd}^c\varphi + \alpha = 0$。那么 $-\mu^*\varphi$ 是 $\mu^*\alpha$ 在 Y_{t_0} 上的一个势。因此

$$\langle \mu^*\alpha, \mu^*\beta \rangle(t_0) = \int_{Y_{t_0}} (\mu^*\varphi)\mu^*\beta = \int_{X_{f_d(t_0)}} \varphi\beta = \langle \alpha, \beta \rangle(f_d(t_0)).$$

因此 $\langle \alpha, \beta \rangle \circ f_d = \langle \mu^*\alpha, \mu^*\beta \rangle$ 在 $\mathbb{D}_t^\circ$ 上。

根据定理 4.5，$\langle \mu^*\alpha, \mu^*\beta \rangle - c_{\mu^*\alpha,\mu^*\beta} \log |t|^2$ 在 $\mathbb{D}_t$ 上连续。因此，我们可以找到 $c_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$，它们依赖于 $c_{\mu^*\alpha,\mu^*\beta}$ 和 d，使得 $\langle \alpha, \beta \rangle - c_{\alpha,\beta} \log |s|^2$ 在 $\mathbb{D}_s$ 上连续。□

本节末尾，我们提出一个关于配对的 H¨older 连续性的问题。

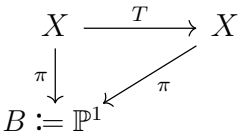
问题 4.7。我们考虑一个具有约化奇异纤维的代数曲线退化，如 设定 *1* 所述。设 α，β 是定义在 $(1,1)$-形式 X 上的两个光滑实 $\int_{C_i} \alpha = \int_{C_i} \beta = 0$，其中 C_i 是约化奇异纤维 X_0 的不可约分支。配对 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 是一个 *H¨older* 连续函数吗？

如果该问题得到肯定回答，我们可以加强 定理 *4.5*、推论 *4.6*、命题 *5.4* 和 推论 *5.5* 中的结果，方法是将“连续地”替换为“H¨older连续地”。

5. Application to K3 surfaces with parabolic automorphisms

作为前述结果的应用，我们遵循 [FT23 第 3]节，研究椭圆 K3 曲面的抛物动力学。

设 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1 =: B$ 是一个射影椭圆 K3 曲面。 X 的抛物型自同构T 是指保持纤维化 π 且阶为无穷的 X 自同构。这给出以下交换图:



在一些文献中（例如 [Fil22，6.2.2]），抛物型自同构也称为扭转自同构。

与 [FT23], 相比，我们允许 π 的奇异纤维可能是非不可约且非约化的： $X \to B$ 在本节的设定中。

我们用 B° 表示纤维化 π 的光滑轨迹，用 s 表示 B 上的局部坐标。我们用 $X_s := \pi^{-1}(s)$。

5.A. 预备知识

在进一步深入之前，我们先在本节介绍一些基本概念和引理。

设 $[E] \in \mathrm{NS}(X)$ 是 π 在 Néron–Severi 群中的一般纤维的类。我们考虑由保持椭圆纤维化的 X 的自同构构成的群 $\mathrm{Aut}_\pi(X)$。$\mathrm{NS}(X)$ 的下列滤过在 $\mathrm{Aut}_\pi(X)$ 下保持不变:

$$0 \subsetneq [E] \subsetneq [E]^\perp \subsetneq \mathrm{NS}(X),$$

其中， $[E]^\perp$ 是 X 中关于交叉形式的 $[E]$ 的正交补。根据 Hodge 指数定理，商格 $L := [E]^\perp/[E]$ 上的交叉形式是严格负定的。

设 $\mathrm{Isom}(L)$ 是保持诱导交叉形式的格 L 的自同构群。由于诱导交叉形式是严格负定的，$\mathrm{Isom}(L)$ 是紧正交群 $O(\mathrm{rank}\,(L))$ 的离散子群。因此，$\mathrm{Isom}(L)$ 是有限群。

由于 $\mathrm{Aut}_\pi(X)$ 保持配备交叉形式的格 L ，我们得到诱导的群同态:

$$\rho\colon \mathrm{Aut}_\pi(X) \to \mathrm{Isom}(L).$$

我们定义 $\ker(\rho) =: \mathbf{Aut}^\circ_\pi(X)$，它是 $\mathrm{Aut}_\pi(X)$ 的子群，其在 $[E]^\perp/[E]$ 上诱导的作用是平凡的。由于 $\mathrm{Isom}(L)$ 是有限群，$\mathrm{Aut}^\circ_\pi(X)$ 是 $\mathrm{Aut}_\pi(X)$ 的有限指数子群。

如果我们在 $\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 内进行讨论，则可以类似地构造 $\mathrm{Aut}^\circ_\pi(X)$。

引理 5.1。 令 $[E]^\perp{}_{\mathrm{H}^{1,1}}$ 表示 $[E]$ 在 $\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 中的正交补。则以下滤过由 $\mathrm{Aut}_\pi(X)$ 保持:

$$0 \subsetneq [E]_{\mathbb{R}} \subsetneq [E]^\perp_{\mathrm{H}^{1,1}} \subsetneq \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R}).$$

我们将$\mathbf{Aut}^{\circ\,(1,1)}_\pi(X)$，（$X$）定义为$\mathrm{Aut}_\pi$（$X$）的子群，该子群在商空间$[E]^\perp{}_{\mathrm{H}^{1,1}}/[E]_{\mathbb{R}}$上作用平凡。因此，$\mathrm{Aut}^{\circ\,(1,1)}_\pi(X)$，（$X$）是$\mathrm{Aut}_\pi$（$X$）的有限指数子群。

证明。 由于交叉形式非退化，我们有如下正交分解

$$\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R}) = \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}} \oplus T^{1,1}(X)_{\mathbb{R}},$$

其中 $T^{1,\ 1}(X)_{\mathbb{R}}$是实超越类 $T(X)_{\mathbb{R}}$的 1，1 次部分，且$T(X)$ 是 X 的超越格（参见 [Huy16，第 3 章，引理 3.1]）。

注意， $[E] \in \mathrm{NS}(X)$，因此它与超越类 $T^{1,\ 1}(X)_{\mathbb{R}}$正交。因此，$[E]^{\perp}{}_{\mathrm{H}^{1,1}}$ 具有类似的分解

$$[E]^{\perp}_{\mathrm{H}^{1,1}} = [E]^{\perp}_{\mathbb{R}} \oplus T^{1,1}(X)_{\mathbb{R}},$$

它下降到商空间后为:

$$[E]^{\perp}_{\mathrm{H}^{1,1}}/[E]_{\mathbb{R}} = ([E]^{\perp}/[E])_{\mathbb{R}} \oplus T^{1,1}(X)_{\mathbb{R}}.$$

由于 $\mathrm{Aut}_{\pi}(X)$ 保持具有霍奇结构的超越格 $T(X)$，由此诱导的群同态的像为:

$$\rho_T \colon \mathrm{Aut}_{\pi}(X) \to \mathrm{Isom}(T(X)_{\mathbb{R}})$$

根据 [Huy16，第 3 章，推论 3。4]，它是有限群。因此，$\ker(\rho_T)$ 是 $\mathrm{Aut}_{\pi}(X)$ 的有限指数子群。

由于 $T^{1,1}(X)_{\mathbb{R}} \subset T(X)_{\mathbb{R}}$，我们有

$$\ker(\rho_T) \cap \mathrm{Aut}^{\circ}_{\pi}(X) \subset \mathrm{Aut}^{\circ,(1,1)}_{\pi}(X).$$

由于 $\ker(\rho_T)$ 和 $\mathrm{Aut}^{\circ}_{\pi}(X)$ 都是有限指数子群，因此 $\mathrm{Aut}^{\circ\ (1,1)}_{\pi\ ,}(X)$ 也是 $\mathrm{Aut}_{\pi}(X)$ 的有限指数子群。□

注 5.2. 引理 5.1 对一般的射影椭圆曲面也成立。为此，只需证明诱导同态 ρ_T: $\mathrm{Aut}_{\pi}(X) \to \mathrm{Isom}(T(X)_{\mathbb{R}})$ 的像是有限群。这是因为 $\mathrm{Aut}_{\pi}(X)$ 保持整格 $T(X)$ 及其霍奇结构，而 $(1,1)$ 部分 $T^{1,1}(X)_{\mathbb{R}}$ 上的交叉形式是严格负定的。（另见 [Huy16，第 3 章，推论 3.4]。）

令 r 为 $\mathrm{Aut}^{\circ\ (1,1)}_{\pi\ ,}(X)$ 在 $\mathrm{Aut}_{\pi}(X)$ 中的指数。根据初等群论，对于任意 $T \in \mathrm{Aut}_{\pi}(X)$，我们有 $T^{r!} \in \mathrm{Aut}^{\circ\ (1,1)}_{\pi\ ,}(X)$。

最后，我们给出一个关于上同调类的有用公式，它可直接由$\mathrm{Aut}^{\circ\ (1,1)}_{\pi\ ,}(X)$的定义推出。

引理 5.3。 设 v 是上同调群$(1,1)$类$\mathrm{H}^{1,1}(X)$中的一个实类。假设$v \cdot [E] = 0$。那么，对于任意 $T \in \mathrm{Aut}^{\circ\ (1,1)}_{\pi\ ,}(X)$，有

$$T_* v - v = c(v,T)[E],$$

其中 $c(v,T) \in \mathbb{R}$ 关于 v呈线性。

5.B. 流值配对

我们回顾流值配对 的构造，该构造来自 [FT23，定理 3.2。14]。我们将其与定理 *4.1* 中光滑形式的阿基米德高度配对联系起来。

设 α 是 X 上的闭光滑实 $(1,1)$-形式，满足 $\int_{X_s} \alpha = 0$ （对 $s \neq 0$）。令 $\varphi \in C^{\infty}(X^{\circ})$ 为 α 的优选势函数 。

上同调地，我们有 $[\alpha]\cdot[E]=0$。利用 引理 5.3，可得

$$T_*[\alpha]-[\alpha]=c[E],$$

对于 $T\in \mathrm{Aut}_\pi^{\circ\,(1,1),}(X)$。

注意，$[E]$ 可以表示为光滑形式 $\pi^*\beta$，其中 β 是基底 $B=\mathbb{P}^1$ 上一个适当的光滑形式。我们可以取一个 $f\in C^\infty(X)$，使得

$$T_*\alpha-\alpha=\pi^*\beta+\mathrm{dd}^c f. \tag{5.1}$$

那么，对于 $s\in B^\circ$，$f+T_*\varphi-\varphi$ 在每个 X_s 上都是常数。因此，存在一个函数u定义在 B° 上，使得

$$\pi^*u=f+T_*\varphi-\varphi. \tag{5.2}$$

设 ω 是 X 上的一个 K¨ahler 度量，并满足归一化条件 $[\omega]\cdot[E]=1$。那么 $u(s)$可由下式确定：

$$\int_{X_s}(\pi^*u)\omega_s=u(s)=\int_{X_s}(f+T_*\varphi-\varphi)\omega_s \tag{5.3}$$

我们称 u 为极限势。我们利用方程 (5.3) 和定理 *4.1* 中的阿基米德高度配对改写为：

$$u(s)=\int_{X_s}(f+T_*\varphi-\varphi)\omega_s=\int_{X_s}f\omega_s+\langle\alpha,(T^*-I)\omega\rangle \tag{5.4}$$

该流值配对 定义为 $\eta_B(T,\ [\alpha]):=\beta+\mathrm{dd}^c u$，它是 B上的一个流。由于 $u\in C^\infty(B^\circ)$，它在 B° 上是光滑的。

现在，我们通过允许椭圆纤维化 $\pi\colon X\to B$具有任意奇异纤维，将 Filip–Tosatti 的流值配对加以推广。

命题 *5.4.* 设 $T\in \mathrm{Aut}_\pi^{\circ\,(1,1)},(X)$，其中 $\mathrm{Aut}_\pi^{\circ\,(1,1)},(X)$ 是引理 *5.1* 中定义的 $\mathrm{Aut}_\pi(X)$ 的一个有限指数子群。那么，对于 X 上满足 $\int_{X_s}\alpha=0$（对 $s\neq 0$）的任意闭光滑实 *(1, 1)* 形式 α，流值配对 $\eta_B(T,[\alpha])$ 都具有连续位势。

证明。 我们首先证明 $u\in L^\infty(B^\circ)$，沿用 Tate 的论证，见 [Tat83] (另见[FT23，备注 3.2。14])。

由 方程 (5.2)可知，对任意整数 $i\geq 0$，我们有

$$T_*^i\pi^*u=\pi^*u=T_*^i(f+T_*\varphi-\varphi)=T_*^i f+(T_*^{i+1}-T_*)\varphi.$$

那么，对于 $k\geq 1$伯克霍夫和 $S_k(T,f)=\sum_{i=0}^{k-1}T_*^i f$满足

$$S_k(T,f)=k\pi^*u+\varphi-T_*^k\varphi.$$

因此，对于 $s\in B^\circ$ 以及任意 $k\geq 1$，我们有

$$|u(s)|\leq\frac{1}{k}\sup_{X_s}|S_k(T,f)|+\frac{1}{k}\sup_{X_s}\left|\varphi-T_*^k\varphi\right|\leq\|f\|_{L^\infty(X)}+\frac{2}{k}\|\varphi\|_{L^\infty(X_s)}.$$

固定 $s\in B^\circ$ 并令 $k\to\infty$，我们有 $|u(s)|\leq\|f\|_{L^\infty(X)}$。因此，$u\in L^\infty(B^\circ)$。

另一方面，根据势 u与阿基米德高度配对 在公式（5.4）中的关系，阿基米德高度配对

$$\langle\alpha,(T^*-I)\omega\rangle(s)=u(s)-\int_{X_s}f\omega_s\in L^\infty(B^\circ)$$

有界。

根据推论 4.6，$\langle\alpha,$ （T^*-I）$\omega\rangle$ 可以在 B 上连续延拓，因为它有界且没有奇点。利用定理 1.3中的 Barlet 的结果，函数$s\mapsto\int_{X_s}f\omega_s$ 在¨上是 H B连续的。

总之，$u(s)=\langle\alpha,(T^*-I)\omega\rangle(s)+\int_{X_s}f\omega_s$在 B上连续。因此，$\eta_B(T,[\alpha])$具有连续位势。□

作为推论，我们得到

推论 5.5。设 ω 是 X上的 *K¨ähler* 度量。对于任意 $T\in$自同构群$_\pi^{\circ(1,1)}$，（X），极限流

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(T^n)_*\omega}{n^2}=\frac{1}{2}\pi^*\eta_B(T,[T_*\omega-\omega]).$$

具有连续位势。

我们注意到，流 T^n、$_{n^2}{}^{*\omega}\to\frac{1}{2}\pi^*\eta_B$（$T,\cancel{[T_*\omega-\omega]}$）的收敛不能发生在$C^0_{\mathrm{loc}}$（$X\setminus X_0$）中。

特别地，设 ω 是 *K3* 曲面 X 上的 *Ricci* 平坦 *K¨ähler* 度量，即，

$$\omega^2=\mathrm{vol}(\omega)\Omega\wedge\overline{\Omega},$$

其中 Ω 是 $(2,0)$-形式 X上的归一化全纯 $T^n_*\omega$ 也同样是 *Ricci* 平坦的。因此，$\{[\frac{T^n_*\omega}{n^2}]\}$ 为 *Tosatti* 的问题 [Tos25，问题 1.5(b)]提供了一个反例。

证明。 根据 [FT23，推论 3.2，20], 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(T^n)_*\omega}{n^2}=\frac{1}{2}\pi^*\eta_B(T,[T_*\omega-\omega]).$$

因此 $\lim_{n\to\infty}\cancel{(T^n)}_{n^2}{}^{*\omega}$ 由 命题 5.4可知具有连续位势。

我们现在证明，流的收敛$(T^n)_{n^2}{}^{*\omega}\to\frac{1}{2}\pi^*\eta_B(T,\cancel{[T_*\omega-\omega]})$并非 $C^0_{\mathrm{loc}}(X\setminus X_0)$收敛。我们通过矛盾进行，假设$(T^n)_{n^2}{}^{*\omega}\to\frac{1}{2}\pi^*\eta_B(T,[T_*\omega-\omega])$在 $C^0_{\mathrm{loc}}(X\setminus X_0)$中。

我们令 $\xi=T_*\omega-\omega$。然后由初等计算（另见 [FT23，命题3.2.15]），我们有

$$T^n_*\omega=\omega+n\xi+\mathrm{dd}^c(n\varphi-S_n(T,\varphi))+\frac{n(n-1)}{2}\pi^*\eta_B(T,[\xi]),$$

where φ是 ξ的优选势函数，且 $S_n(T,\varphi)=\sum_{k=0}^{n-1}T^k_*\varphi$是一个伯克霍夫和 .

注意，$\frac{1}{n^2}(\omega+n\xi+\frac{n(n-1)}{2}\pi^*\eta_B(T,[\xi]))$在 $C^0_{\mathrm{loc}}(X\setminus X_0)$中收敛到 $\frac{1}{2}\pi^*\eta_B(T,[\xi])$。在我们关于矛盾的假设下，我们有

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{dd}^c(n\varphi-S_n(T,\varphi))\to_{n\to\infty}0\quad\text{in } C^0_{\mathrm{loc}}(X\setminus X_0).\tag{5.5}$$

只需证明公式（5.5）是不可能的。我们将 φ（即优选势函数）$\xi=T_*\omega-\omega$解释如下：由于 π 是椭圆纤维化，每个光滑纤维

X_s 同构于环面 $\mathbb{C}/\Lambda_s$，且 T 通过平移作用于 X_s 。令$\omega_{\text{flat, s}}$ 为 X_s上的归一化平坦度量。存在 $\rho_s \in C^\infty(X_s)$使得

$$\omega_{\text{flat,s}} - \omega_s = \mathrm{d}\mathrm{d}^c\rho_s.$$

将 T_*应用于此方程，我们得到 $\omega_{\text{flat, s}} - T_*\omega_s = \mathrm{d}\mathrm{d}^c T_*\rho_s$，因为 $\omega_{\text{flat, s}}$在平移 T下保持不变。于是

$$\xi\,|_{X_s} = T_*\omega_s - \omega_s = -\mathrm{d}\mathrm{d}^c(T_*\rho_s - \rho_s).$$

因此， ξ 的优选势函数 φ 在 X_s上与 $T_*\rho_s - \rho_s$ 相差一个常数。由 Ehresmann 定理，并在纤维化局部平凡的区域上求解方程，存在 $\rho \in C^\infty(X \setminus X_0)$，使得 $\rho\,|_{X_s} = \rho_s$ 在光滑纤维X_s上成立。此外， $\varphi = T_*\rho - \rho + c(s)$，其中 $c(s)$ 是定义在 B°上的光滑函数。

将 φ 替换为 $T_*\rho - \rho + c\,(s)$ 代入公式（5.5），我们得到

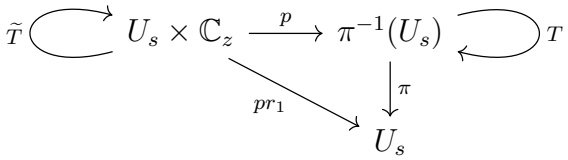
$$\frac{1}{n^2}\mathrm{d}\mathrm{d}^c(n(T_*\rho - \rho) - (T_*^n\rho - \rho)) \to_{n\to\infty} 0 \quad \text{in } C^0_{\text{loc}}(X \setminus X_0).$$

由于 ρ 在 $X \setminus X_0$上光滑，上述收敛等价于

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{d}\mathrm{d}^c(T_*^n\rho) \to_{n\to\infty} 0 \quad \text{in } C^0_{\text{loc}}(X \setminus X_0). \tag{5.6}$$

我们将证明方程（5.6）不可能成立。

在一个不含任何奇点的小开集 $U \subset B^\circ$ 上，我们可以将纤维化 π 平凡化为 $U \times \mathbb{C}/\Lambda \to U$。此外，我们可以将 $U \times \mathbb{C}/\Lambda$ 提升到其万有覆盖 $U \times \mathbb{C}$，而保纤维自同构 T 也可以提升，从而得到如下交换图:



~ ~于是，我们可以将 T在覆盖空间 $U_s \times \mathbb{C}_z$上的作用表示为 $T(s,z) = (s, z + T(s))$，其中 $T\colon U_s \to \mathbb{C}$是一个全纯函数。按照[Can01，命题 2 中的论证2] (另见 [Fil22，命题 6.2。7], [CD23a，引理 3。7]) ，函数 T 不是常数。

将方程（5.6）中的收敛性提升到覆盖空间上，我们发现这等价于

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{d}\mathrm{d}^c(\widetilde{T}_*^n\widetilde{\rho}) \to_{n\to\infty} 0 \quad \text{in } C^0_{\text{loc}}(U_s \times \mathbb{C}_z), \tag{5.7}$$

对于 B° 中各点及其对应覆盖空间的所有小开邻域，其中 $\widetilde{\rho}$ 是 ρ 在覆盖空间上的提升。

注意，$T_*^n\widetilde{\rho} = \widetilde{\rho}(s, z - nT(s))$。根据全纯链式法则，我们有

$$\begin{aligned}\partial_s\overline{\partial}_s(\widetilde{T}_*^n\widetilde{\rho})(s,z) &= \partial_s\overline{\partial}_s(\widetilde{\rho}(s, z - nT(s))) \\ &= \partial_s((\overline{\partial}_s\widetilde{\rho})(s, z - nT(s)) - n\overline{\partial_s T}(\overline{\partial}_z\widetilde{\rho})(s, z - nT(s))) \quad (\overline{\partial}_s T(s) = 0) \\ &= (\partial_s\overline{\partial}_s\widetilde{\rho})(s, z - nT(s)) - n(\partial_s T(s))(\partial_z\overline{\partial}_s\widetilde{\rho})(s, z - nT(s)) \\ &\quad - n\overline{\partial_s T}(\partial_s\overline{\partial}_z\widetilde{\rho})(s, z - nT(s)) + n^2\left|\partial_s T\right|^2(\partial_z\overline{\partial}_z\widetilde{\rho})(s, z - nT(s))\end{aligned}$$

于是方程 (5.7) 蕴含

$$\left|\partial_s T\right|^2(\partial_z\overline{\partial}_z\widetilde{\rho})(s, z - nT(s)) \to_{n\to\infty} 0 \quad \text{in } C^0_{\mathrm{loc}}(U_s \times \mathbb{C}_z)$$

对于 B° 中所有足够小的开集。

由于 T 非常数且全纯，除至多有限个 $s \in U_s$ 外，我们有 $|\partial_s T|^2 > 0$。因此，存在有限集 $\Sigma \subset U_s$，使得

$$(\partial_z\overline{\partial}_z\widetilde{\rho})(s, z - nT(s)) \to_{n\to\infty} 0 \quad \text{in } C^0_{\mathrm{loc}}((U_s \setminus \Sigma) \times \mathbb{C}_z).$$

由于 $\widetilde{\rho}$ 在 z 中是周期的，这意味着对于 $s \in U_s \setminus \Sigma$，$\partial_z\partial_z\widetilde{\rho}(s, z) = 0$。由 $\widetilde{\rho}$ 的光滑性，对于 $s \in S^\circ$，我们有 $\partial_z\partial_z\widetilde{\rho}(s, z) \equiv 0$。因此，对于 $s \in S^\circ$，$\mathrm{dd}^c\rho_s = 0$ 在 X_s 上。

根据 ρ 的定义，我们有

$$\omega_{\mathrm{flat,s}} - \omega_s = \mathrm{dd}^c\rho_s = 0.$$

因此，$\omega_{\mathrm{flat,\ s}} = \omega_s$ 对于 $s \in S^\circ$。

为了导出矛盾，我们计算光滑纤维 X_s 上 $\omega_{\mathrm{flat,\ s}}$ 和 ω 的高斯曲率，并研究当 X_s 接近奇异纤维时它们的变化。

根据定义，高斯曲率 $K_{\omega_{\mathrm{flat,\ s}}} \equiv 0$。另一方面，根据 [DY25，引理 10.1]，，K_{ω_s} 的最小值趋于 $-\infty$当 $s \to 0$时。这就导致矛盾，从而证明该收敛不在 $C^0_{\mathrm{loc}}(X \setminus X_0)$ 中。

□

Appendix A. Asymptotics of a fiber integral

我们证明一个关于除子典范截面对数范数的纤维积分渐近性的引理。这一结果也见于其他文献（例如，[Yos06，第 4]节）；不过，为了方便和完整起见，我们在此处的情形下给出证明。

引理 A.1。设 $\pi\colon X \to \mathbb{D}$ 是代数曲线的退化。假设 X 光滑，并且此处允许一般的奇异纤维 X_0。设 C 是 X_0 的一个不可约分支，且 $L = \mathcal{O}(C)$ 是相应的带有厄米度量 h 的线丛。

令 σ 为 L 的典范截面，其恰好在 C上消失。那么，对于 X上的任意光滑 (1,1)-形式 α，存在一个常数 $c \in \mathbb{Q}_{>0}$ 使得

$$\int_{X_s} \log\|\sigma\|_h^2\,\alpha - \left(\int_C \alpha\right)\log|s|^2$$

连续延拓 $H\ddot{o}lder$，使其通过原点。

证明。 我们考虑族 π 的半稳定约化：$(X,\ X_0) \to (\mathbb{D},\ \{0\})$，如下方交换图所示：

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{\mu} & X \times_{\mathbb{D}} \mathbb{D}_t & \xrightarrow{pr_1} & X \\ & \searrow^{p} & \downarrow{\scriptstyle pr_2} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ & & \mathbb{D}_t & \xrightarrow{f_d} & \mathbb{D}_s \end{array}$$

这里，$f_d(t) = t^d = s$ 是次数为 d的基变换，而 μ 是一个奇点消解，使得 Y 是光滑复曲面。奇异纤维 $Y_0 = p^{-1}(X_0)$是一个具有简单正规交叉的约化除子。设 $\widetilde{\mu} = pr_1 \circ \mu$。

设 m 为 C 在 X_0中的重数。由于 $\widetilde{\mu}^* X_0 = dY_0$ 和 Y_0 是约化的，C 的~严格变换 C 在 Y_0 中以重数1出现。因此，C 作为卡蒂埃除子的拉回为

$$\widetilde{\mu}^* C = \frac{d}{m}\widetilde{C} + \sum_k \nu_k E_k$$

其中 E_k 是例外除子。
这导出了 Y上对数范数的分解：

$$\log \|\widetilde{\mu}^*\sigma\|^2_{\widetilde{\mu}^* h} = \frac{d}{m} \log \left\|\sigma_{\widetilde{C}}\right\|^2_{h_{\widetilde{C}}} + \sum_k \nu_k \log \|\sigma_{E_k}\|^2_{h_{E_k}} + u \tag{A.1}$$

其中，σ_D 表示分量 $D \subset Y_0$的典范截面，而 u 是 Y上的光滑函数。

对于 $t \neq 0$，映射 $\widetilde{\mu}_t$: $Y_t \xrightarrow{\sim} X_s$ 是一个同构。将积分拉回到半稳定模型 Y_t 上，我们得到：

$$\int_{X_s} \log \|\sigma\|^2_h \, \alpha = \int_{Y_t} \log \|\widetilde{\mu}^*\sigma\|^2_{\widetilde{\mu}^* h} \, \widetilde{\mu}^* \alpha$$

代入我们的分解 方程（A.1），可将其拆分为：

$$\frac{d}{m} \int_{Y_t} \log \left\|\sigma_{\widetilde{C}}\right\|^2_{h_{\widetilde{C}}} \widetilde{\mu}^*\alpha + \sum_k \nu_k \int_{Y_t} \log \|\sigma_{E_k}\|^2_{h_{E_k}} \widetilde{\mu}^*\alpha + \int_{Y_t} u \widetilde{\mu}^*\alpha = \int_{X_s} \log \|\sigma\|^2_h \, \alpha \tag{A.2}$$

由于 Y_0 具有严格简单正规交叉，我们对引理 A.2 应用于方程（A.2）的前两项，得到：

$$\begin{aligned} \int_{Y_t} \log \left\|\sigma_{\widetilde{C}}\right\|^2_{h_{\widetilde{C}}} \widetilde{\mu}^*\alpha &= \left(\int_{\widetilde{C}} \widetilde{\mu}^*\alpha\right) \log |t|^2 + R_1(t) \\ &= m \left(\int_C \alpha\right) \log |t|^2 + R_1(t) \\ \int_{Y_t} \log \|\sigma_{E_k}\|^2_{h_{E_k}} \widetilde{\mu}^*\alpha &= \left(\int_{E_k} \widetilde{\mu}^*\alpha\right) \log |t|^2 + R_{2,k}(t), \\ &= \left(\int_{\widetilde{\mu}_*[E_k]} \alpha\right) \log |t|^2 + R_{2,k}(t) \\ &= R_{2,k}(t), \end{aligned}$$

其中 $R_1(t) R_{2,\ k}(t)$ 在 0 附近是 H¨older 连续的。

由于 u 是光滑的，根据 Barlet 的结果（定理 1.3），第三项（见方程（A.2））$\int_{Y_t} u\widetilde{\mu}^*\alpha =: R_3(t)$，在 0 附近是 H¨older 连续的。将前面的计算结果代入方程（A.2），得到

$$\int_{X_s} \log\|\sigma\|_h^2\,\alpha = d\left(\int_C \alpha\right)\log|t|^2 + \underbrace{\frac{d}{m}R_1(t) + \sum_k R_{2,k}(t) + R_3(t)}_{\text{Hölder continuous}},$$

最后，我们转换回原始基底参数 s。由于 $s = t^d$，我们有 $\log|t|^2 = \frac{1}{d}\log|s|^2$。因此，

$$\int_{X_s} \log\|\sigma\|_h^2\,\alpha = \left(\int_C \alpha\right)\log|s|^2 + R(s),$$

and $R(s)$ 是 H¨older 连续的。

我们得出结论：

$$\int_{X_s} \log\|\sigma\|_h^2\,\alpha - \left(\int_C \alpha\right)\log|s|^2$$

在原点处连续延拓为 H¨older 连续。 □

引理 A.2. 设 $\pi\colon \mathcal{Y} \to \mathbb{D}$ 是一个从光滑复曲面到单位圆盘的适当全纯映射。假设奇异纤维 $Y_0 = \pi^{-1}(0)$ 是一个具有严格简单正规交叉的约化除子。设 D 是 Y_0 的一个不可约分支，σ_D 是它的典范截面，且 h 是 $\mathcal{O}(D)$ 上的光滑厄米度量。对于 $\mathcal{Y}$ 上任意光滑(1,1)-形式 ω，函数

$$t \mapsto \int_{Y_t} \log\|\sigma_D\|_h^2\,\omega - \left(\int_D \omega\right)\log|t|^2$$

连续延拓到 $t = 0$，且具有 *H¨older* 正则性。

证明。取 Y_0 在 $\mathcal{Y}$ 中的一个有限开覆盖 $\{U_j\}$，由坐标多圆盘 $U_j \cong \mathbb{D}^2$ 组成，使得在每个 U_j 上，π 或由 $t = z_1$（Y_0的光滑点）给出，或由 $t = z_1z_2$（Y_0的节点）给出。令 $\{\rho_j\}$ 为从属于 $\{U_j\}$ 的光滑单位分解。

在每个 U_j上，我们将度量分解为 $\log\|\sigma_D\|_h^2 = \log|f_D|^2 + u_j$，其中 $f_D \in \mathcal{O}(U_j)$ 定义了 $D \cap U_j$，而 u_j 是一个光滑函数。根据 Barlet 关于纤维积分的定理（定理 1.3），$t \mapsto \int_{Y_t\cap U_j} \rho_j u_j\omega$ 连续延拓到 H¨older $t = 0$。我们逐一分析奇异积分 $I_j(t) = \int_{Y_t\cap U_j} \rho_j \log|f_D|^2\,\omega$ 情形：

情形 1： $U_j \cap D = \emptyset$。这里，f_D 是 U_j 上不消失的全纯函数。因此，$\log|f_D|^2$ 是光滑的，并且 $I_j(t)$ 在 $t = 0$ 附近是光滑的。在这种情况下，

$$I_j(t) = \left(\int_{D\cap U_j} \rho_j\omega\right)\log|t|^2 + I_j(t).$$

情形 2： U_j **在.....处相交** D 节点之外。</style}这里，$\pi = z_1$ 和 $f_D = z_1$。因此$I_j(t) = \log|t|^2 \int_{Y_t\cap U_j} \rho_j\omega$。由于 π 在 U_j 上是淹没映射，根据 Ehresmann 定理和泰勒展开，我们有 $\int_{Y_t\cap U_j} \rho_j\omega = \int_{\{z_1=t\}\cap U_j} \rho_j\omega = \int_{\{z_1=0\}\cap U_j} \rho_j\omega + O(|t|) =$

$\int_{D\cap U_j}\rho_j\omega + O(|t|)$。乘以 $\log|t|^2$，我们得到

$$I_j(t) = \left(\int_{D\cap U_j}\rho_j\omega\right)\log|t|^2 + R_j(t),$$

其中 $R_j(t) = O(|t|\log|t|)$ 在 $t=0$ 附近是 Hölder 连续的。

情形3： U_j **包含一个节点** $D\cap D'$。这里，映射由 $\pi = z_1z_2$ 给出，其中 D由 $z_1=0$ 定义，D' 由 $z_2=0$定义。因此 $f_D = z_1$。纤维 $Y_t\cap U_j$ 是受限环带 $\{(z_1,z_2)\in U_j \mid z_1z_2 = t\}$。

设 $\eta = \rho_j\omega$。由于 η 是 $U_j\cong\mathbb{D}^2$ 中具有紧支撑的光滑形式，我们可以在坐标图上将其全局写为 $\eta = \frac{i}{2}\sum_{k,l=1}^{2}\eta_{kl}dz_k\wedge d\bar{z}_l$。我们希望求出以下表达式的渐近行为

$$I_j(t) = \int_{Y_t\cap U_j}\log|z_1|^2\,\eta$$

我们将环带 $Y_t\cap U_j$ 上的积分区域划分为两个部分：$V_1(t) = \{|t|^{1/2}\le|z_1|<1\}$ 和 $V_2(t) = \{|t|^{1/2}<|z_2|<1\}$。

在 $V_1(t)$ 上，我们使用 z_1 作为坐标。代入 $z_2 = t/z_1$ 和 $dz_2 = -(t/z_1^2)dz_1$ 后，η 的限制为：

$$\eta|_{Y_t} = \left(\eta_{1\bar{1}} - \eta_{1\bar{2}}\frac{\bar{t}}{\bar{z}_1^2} - \eta_{2\bar{1}}\frac{t}{z_1^2} + \eta_{2\bar{2}}\frac{|t|^2}{|z_1|^4}\right)\frac{i}{2}dz_1\wedge d\bar{z}_1$$

其中，光滑系数 η_{kl} 在 $(z_1,t/z_1)$ 处取值。由 η 的光滑性，我们可以将主导系数泰勒展开为 $\eta_{11}(z_1,t/z_1) = \eta_{11}(z_1,0) + O(|t|/|z_1|)$。

在 $V_1(t)$ 上对交叉项和高阶误差乘以 $\log|z_1|^2$ 积分，得到有界余项。例如，换成极坐标 $r=|z_1|$：

$$\int_{|t|^{1/2}}^{1}|\log r|\cdot O\left(\frac{|t|}{r^2}\right)r\,dr = O\left(|t|\int_{|t|^{1/2}}^{1}\frac{|\log r|}{r}dr\right) = O(|t|\log^2|t|)$$

$O(|t|^2/r^4)$ 项和 $O(|t|/r)$ 项也有类似的界。因此，$V_1(t)$ 上的积分由主导项紧密控制：

$$\int_{V_1(t)}\log|z_1|^2\,\eta|_{Y_t} = \int_{|t|^{1/2}\le|z_1|<1}\log|z_1|^2\,\eta_{1\bar{1}}(z_1,0)\frac{i}{2}dz_1\wedge d\bar{z}_1 + O(|t|\log^2|t|)$$

将该积分的定义域扩展到整个局部分支 $D'\cap U_j$（其中 $z_2=0$）会引入一个误差，其上界为缺失内圆盘 $\{|z_1|<|t|^{1/2}\}$ 上的积分。这个孔洞的体积分为 $\int_0^{|t|^{1/2}}|\log r|\,r\,dr = O(|t|\log|t|)$。因此：

$$I_{j,1}(t) = \underbrace{\int_{D'\cap U_j}\log|z_1|^2\,\eta|_{D'}}_{\text{constant}} + O(|t|\log^2|t|).$$

在 $V_2(t)$ 上，我们切换到坐标 z_2。此处，对数范数恰好分解为 $\log|z_1|^2 = \log|t|^2 - \log|z_2|^2$。

类似地， η 在 z_2 坐标下的限制为：

$$\eta|_{Y_t} = \left(\eta_{2\bar{2}} - \eta_{1\bar{2}} \frac{t}{z_2^2} - \eta_{2\bar{1}} \frac{\bar{t}}{\bar{z}_2^2} + \eta_{1\bar{1}} \frac{|t|^2}{|z_2|^4} \right) \frac{i}{2} dz_2 \wedge d\bar{z}_2$$

其系数在 $(t/z_2, z_2)$ 处取值。

含有 $-\log |z_2|^2$ 的项与 $V_1(t)$ 积分的行为完全相同，相对于 t 给出一个常数减去一个余项：

$$-\int_{V_2(t)} \log |z_2|^2 \, \eta|_{Y_t} = \underbrace{-\int_{D \cap U_j} \log |z_2|^2 \, \eta|_D}_{\text{constant}} + O(|t| \log^2 |t|)$$

对于 $\log |t|^2$ 项，我们必须在 $V_2(t)$ 上对体积型形式 $\eta|_{Y_t}$ 积分。应用完全相同的泰勒展开和误差界，主项为 $\eta_{22}(0, z_2)$。我们有：

$$\int_{V_2(t)} \eta|_{Y_t} = \int_{|t|^{1/2} \le |z_2| < 1} \eta_{2\bar{2}}(0, z_2) \frac{i}{2} dz_2 \wedge d\bar{z}_2 + \int_{|t|^{1/2}}^1 O\left(\frac{|t|}{r^2} \right) r \, dr$$

误差积分的值为 $O(|t| \log |t|)$。主积分与在 $D \cap U_j$ 上的全积分之差是缺失圆盘 $\{|z_2| < |t|^{1/2}\}$，它增加一个简单的$O(|t|)$ 误差。因此：

$$\int_{V_2(t)} \eta|_{Y_t} = \int_{D \cap U_j} \eta|_D + O(|t| \log |t|)$$

将此体积结果乘以 $\log |t|^2$，得到 $\left(\int_{D \cap U_j} \rho_j \omega \right) \log |t|^2 + O(|t| \log^2 |t|)$。

将坐标图 U_j 的两个区域合并起来，我们得到

$$I_j(t) = \left(\int_{D \cap U_j} \rho_j \omega \right) \log |t|^2 + \widetilde{R}_j(t),$$

其中 $\widetilde{R}_j(t) =$ 常数$+O(|t| \log^2 |t|)$ 是 H¨older 连续的，且指数 $0 < \alpha < 1$ 接近 $t = 0$ 时均成立。□

References

[Bar82] Daniel Barlet，沿纤维积分´得到的函数的渐近展开´，《Inventiones Mathematicae》**68**（1982年2月），第1期，129–174页。[BHPVdV04] Wolf P. Barth、Klaus Hulek、Chris A. M. Peters 和 Antonius Van de Ven，紧复曲面，第2版，《数学及其交叉领域成果》第三辑，第4卷，Springer-Verlag，柏林，2004年。[Bos90]Jean-Beno ̂ıt Bost，复环面上的格林流与高度配对，《Duke Mathematical Journal》**61**（1990年12月），第3期。[Can01]S. Cantat，关于 *K3* 曲面自同构群的动力学，《Transformation Groups》**6**（2001年9月），第3期，201–214页。[CD23a]Serge Cantat 和 Romain Dujardin，射影曲面大自同构群的不变测度，《Transformation Groups》**30**（2023年1月），第1期，75–145页。[CD23b] ,实射影曲面与复射影曲面上的随机动力学，《Journal f¨urdiereine und angewandte Mathematik》（Crelles Journal）**802**（2023年8月），1–76页。

[CL81] Shiu-Yuen Cheng 和 李彼得，热核估计与特征值下界，《瑞士数学评论》56（1981年12月），第1期，327–338页。[Dem02]让-皮埃尔·德马伊， L^2 霍奇理论与消失定理，《霍奇理论导论》，2002年，第1–95页。https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~demailly/manuscripts/hodge-ams.pdf。[DM20]劳拉·德马尔科和尼基·米尔托·马夫拉基，典范高度的变化与等分布，《美国数学杂志》142（2020年），第2期，443–473页。[Dui10]约翰内斯·耶瑟·杜斯特马特，《离散可积系统：QRT映射与椭圆曲面》，施普林格数学专著，施普林格，纽约州纽约，2010年。[DY25] 戴先哲和 Ken-Ichi Yoshikawa，黎曼曲面的退化与拉普拉斯算子的小特征值，2025年。预印本。arXiv:2509.06151v2。[EFiMM18] 丹尼斯·埃里克松、赫拉德·弗雷夏斯·蒙普莱和克里斯托夫·穆鲁甘，霍奇丛度量的奇点及其拓扑不变量，《代数几何》5（2018年），第6期，742–775页。[Fil22] Simion Filip，K3 曲面及其动力系统导论，《Teichm¨üller 理论与动力系统》，2022年，第1–43页。《全景与综述》。https://math.uchicago.edu/~sfilip/public_files/lectures_k3_dynamics.pdf。[FT23] Simion Filip 和 Valentino Tosatti，K3 曲面的典范流与高度，《剑桥数学杂志》11（2023年），第3期，699–794页。[GPSS23] 郭斌、冯阳、宋健和雅各布·斯特姆，K¨ähler 空间上的索博列夫不等式，2023年。预印本。arXiv:2311.00221v1。[GT01] 戴维·吉尔巴格和尼尔·S·特鲁丁格，《二阶椭圆偏微分方程》，施普林格·柏林·海德堡，2001年。[HdJ15]戴维·霍姆斯和 Robin de Jong，N´éron 高度配对的渐近性，《数学研究快报》22（2015年），第5期，1337–1371页。[Huy16] 丹尼尔·许布雷希茨，《K3曲面讲义》，剑桥大学出版社，2016年。[LT95] 李彼得和田刚，代数簇上伯格曼度量的热核，《美国数学会杂志》8（1995年），第4期，857–877页。[Pet16] 彼得·彼得森，《黎曼几何》，施普林格国际出版，2016年。[Sil92] 约瑟夫·H·西尔弗曼，椭圆曲面上典范高度的变化。I. 三个例子，《纯粹与应用数学杂志》426（1992年），151–178页。MR1153245[Sil94a] ,椭圆曲面上典范高度的变化。II. 局部解析性质，《数论杂志》48（1994年），第3期，291–329页。MR1293863[Sil94b] ,椭圆曲面上典范高度的变化。III. 全局有界性性质，《数论杂志》48（1994年），第3期，330–352页。MR1293864[Siu87] 萧荫堂，稳定丛的厄米-爱因斯坦度量与 K¨ähler-爱因斯坦度量讲义，Birkh¨äuser Basel，1987年。[Tak20] 高山茂晴，高维底空间上的纤维积分渐近展开，《Journal f¨ur die reine und angewandte Mathematik》（Crelles Journal）2021（2020年9月），第773卷，67–128页。[Tat83]J·泰特，依赖于参数的点的典范高度变化，《美国数学杂志》105（1983年2月），第1期，287页。[Tos10] Valentino Tosatti，Ricci平坦 K¨ähler 度量的绝热极限，《微分几何杂志》84（2010年2月），第2期。[Tos25] ， 卡拉比-丘流形上的 Ricci平坦度量，2025年。预印本。arXiv:2509.25607v2。[Yos06] Ken-Ichi Yoshikawa，Quillen 度量的奇点，《数学年刊》337（2006年7月），第1期，61–89页。[Yos97] ,代数流形的退化与拉普拉斯算子的谱，《名古屋数学杂志》146（1997年6月），83–129页。

Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 251 MercerSt, New York, NY 10012电子邮箱，junyu.cao@nyu.edu个人主页，https://junyucao1024.github.io。