arXiv:2603.04842v1 [math.DG] 5 Mar 2026

′伯格曼核与庞加莱级数

LOUIS IOOS、WEN LU、XIAONAN MA 和 GEORGE MARINESCU

摘要。我们证明，对于一个厄米流形~，若其 X 具有有界几何，且由其等距变换组成的离散群 Γ 作用，则该流形的有限体积商空间的伯格曼核与在 X上伯格曼核对 Γ 取平均所得的结果相同。随后，当 X 为厄米对称空间时，我们运用这些结果证明，一大类相对庞加莱′级数不恒为零。这将 Borthwick-Paul-Uribe 和 Barron（原名 Foth）的结果推广到了有限体积的一般局部对称空间情形。

目录

引言 1
1. 设置 4 2. 覆盖流形 6 3. 玻尔-索末菲子流形 10 4. 庞加莱′覆盖流形上的级数 12 5. 庞加莱′厄米对称空间上的级数 14 6. 庞加莱级数的主要例子′ 17 参考文献 21

引言

~ ~ ~设 $(X,\ J,\ g^{TX})$ 是一个复维数为 n 的完备 K¨ahler 流形，配备了~ ~一个全纯厄米线丛 $(L,\ h^L)$，其陈曲率满足

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^{\tilde{L}}(\cdot,\tilde{J}\cdot)=g^{T\tilde{X}}, \tag{0.1}$$

并且还设 Γ 是一个离散群，它通过双全纯等距变换在~ ~ ~(X,J,g^{TX})上正常不连续且有效地作用，并提升为~ ~ ~(L,h^L)上的全纯厄米作用，从而商空间 $X:=X/\Gamma$ 具有K¨ahler轨形(X,J,g^{TX})的自然结构，并配备一个正奥比尔德线丛(L,h^L)，其陈曲~ ~率对 g^{TX} 以同样的方式满足(0.1)。对任意 $p\in\mathbb{N}^*$，我们将 $L^p:=L^{\otimes p}$~ ~ ~记为 L 在 X上的第 p次张量幂，并对每个 x、$y\in X$，考虑相~ ~ ~应的伯格曼核 $P_p(x,y)\in L^p_x\otimes(L^p_y)^*$，它定义为正交投影算子~ ~ ~ ~$P_p$：$L^2(X,L^p)\to H^0_{(2)}(X,L^p)$相~ ~对于$(X,g^{TX})$的黎曼体积形式的施瓦茨核，该算子从平方可积截面空间映到 L^p的平方可积全纯截面所成子空间~ ~ ~$H^0_{(2)}(X,L^p)$。类似地，我们对

日期：2026年3月6日。2000 数学主题分类号。53D50, 53C21, 32Q15。L. I. 部分获得了法兰西岛大区 DIM-R′资助、欧洲研究理事会启动资助 757585 以及法国国家科研署 ANR-23-CE40-0021-01 青年研究员计划项目 QCM 的资助。W. L. 获得了国家自然科学基金委员会资助（项目编号：11401232、11871233）。X. M. 部分获得了南开志德基金会和 ANR-14-CE25-0012-01 的资助，并通过德国卓越计划框架下科隆大学的机构战略项目获得资助。G. M. 部分获得了德国科学基金会资助的 SFB TRR 191 项目支持。

每个 $x, y \in X$ 相应的伯格曼核 $P_p(x,y) \in L^p_x \otimes (L^p_y)^*$，它类似地定义为正交投影算子 P_p：$L^2(X, L^p) \to H^0_{(2)}(X, L^p)$在 L^p的平方可积全纯截面上的施瓦茨核。本文的第一个主要结果如下。

定理 0.1. 假设 (X, g^{TX}) 与 (L, h^L) 在定义 1.1的意义下具有有界几何。则若 $X := X/\Gamma$的体积有限，则存在 $p_0 \in \mathbb{N}^*$ 使得对任意 $p \geq p_0$，我们有

$$\sum_{g\in\Gamma} (g^{-1}, 1).\widetilde{P}_p(g.\widetilde{x}, \widetilde{y}) = P_p(\pi(\widetilde{x}), \pi(\widetilde{y})) \,, \tag{0.2}$$

其中，对 $K \subset X$的任意紧集，该收敛在 $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in$ $K \times X \cup X \times K$上是一致且绝对的，并且$(g^{-1}, 1) \in \Gamma \times \Gamma$ 作用于 $L^p \boxtimes (L^p)^*$，在 $X \times X$ 上对所有 $g \in \Gamma$成立。

定理 0.1 是定理 2.2 的一个特例。定理 2.2 适用范围更广，即当 g^{TX}不一定满足 (0.1)，且当 L^p 与一般的全纯 Hermitian 向量丛 (E,h^E) 对每个 $p \in \mathbb{N}$作张量积时，定理仍成立。在 $X = X/\Gamma$光滑紧致的特殊情形下，定理 0.1 已在 [18, 定理 2]中、在定理 2.2 的更一般假设下以及在一般辛情形中得到证明；Lu 和 Zelditch 也在 [13, 定理 2]中证明了该定理。第 2 节中给出的定理 0.1 的证明，基于伯格曼核在远离对角线处的指数衰减，这一结果已在 [18, 定理 1], 中确立，我们将在定理1.4中回顾；此外，证明还基于伯格曼核与相应 Kodaira 拉普拉斯算子的热核之间的比较，如 $p \to +\infty$。

定理 0.1 的主要意义在于，对于任意固定的 $\widetilde{y} \in X$，公式(0.2)通过对 Γ取平均，给出了一个 Γ-不变的 L^p 全纯截面的显式构造。正如 [12, II. Chap. 7], 所强调的，在当 X 是厄米对称空间这一特殊情形下，其伯格曼核具有完全显式的公式，而公式 (2.11) 与自守形式理论中的经典庞加莱级数一致。在第 6 节中，我们将说明，Dai、Liu 和 Ma 在 [4] 中确立的紧致轨形伯格曼核的基本性质，以及 Ma 和 Marinescu 在 [15]中将其推广至非紧致情形的结果，如何通过定理 0.1 转化为经典庞加莱级数不消失：命题 6.1 中与 $SL_2(\mathbb{R})^n$ 相联系的级数，命题 6.3 中与 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ 相联系的级数，以及命题 6.4 中与 $SU(n, 1)$相联系的级数，只要它们的权 $p \in \mathbb{N}$ 足够大即可。

更一般地，第4 节说明如何在自守形式理论的背景下，将定理5.1应用于相对庞加莱´级数方法。目标是从在子群 L^p 的作用下不变的全纯截面出发，构造在群 Γ 的作用下不变的全纯截面 Γ_0 Γ。这是通过对集合 $\Gamma_0\backslash\Gamma$ 中的陪集 $[g]$ 取平均来实现的：$= \{g_0 g \in \Gamma : g_0 \in \Gamma_0\}$ 对所有 $g \in \Gamma$。

具体而言，利用 [8, 定理5.3], 中建立的各向同性态渐近展开，我们在定理4.1 中证明，公式（0.2）的类似形式对这类平均同样成立，只需将点 $\widetilde{y} \in X$ 替换为一个 Γ_0-不变紧致子流形 $X := X/\Gamma$，并且由此构造的 Γ_0-不变全纯截面只要 $p \in \mathbb{N}$ 足够大就不会消失。该结果成立的前提是满足一项基本几何假设：底层的 Γ_0-不变子流形满足玻尔-索末菲条件。这一概念源于几何量子化理论，并将在第3节进一步阐述。

在与 $SL_2(\mathbb{R})$相关的相对庞加莱级数这一特殊情形中，离散子群 $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{R})$作用于双曲平面 $X = \mathbb{H}$，而 $\Gamma_0 \subset \Gamma$ 是由一个双曲元素 $g_0 \in \Gamma$生成的子群，其底层的 Γ_0-不变子流形与 $X := \mathbb{H}/\Gamma$ 中由 g_0生成的闭测地线重合，而该测地线

自动满足玻尔-索末菲条件。当 $X := \mathbb{H}/\Gamma$ 光滑紧致时，相关相对庞加莱′级数非零是 Borthwich、Paul 和 Uribe 在 [3, 定理4 中11], 得到的结果；而在$X := \mathbb{H}/\Gamma$ 仅假设具有有限体积的一般情形下，结论见 [8, 定理6.7,(6.18)],，我们将在定理 6.2中陈述并重新证明这一结果，作为我们所构建框架的推论。

另一方面，在相对庞加莱级数与 $SU(n, 1)$ 相关联的情形下，~其中离散子群 $\Gamma \subset SU(n, 1)$ 在单位球 $X = B_n$ 中作用于 $\mathbb{C}^n$，而 $\Gamma_0 \subset \Gamma$ 是由双曲型元素 $g_0 \in \Gamma$ 生成的子群，底层的 Γ_0-不变子流形仍与由 g_0 生成的 $X := B_n/\Gamma$ 的闭测地线重合。Barron 在 [2, § 2.2] 中证明，若 $g_0 \in \Gamma$ 的所有特征值均为实数，且由 g_0 生成的测地线的端点 x、$y \in \partial B_n$ 属于 $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$，则该测地线满足玻尔-索末菲条件。于是，作为定理 0.1 的推论，我们得到以下结果；该结果再次表明，只要这些相对庞加莱级数的权 $p \in \mathbb{N}^*$ 足够大，它们便不为零。

定理0.2。设 $\Gamma \subset \mathrm{SU}(n,1)$ 是一个有效作用的离散子群，且满足 $Vol(B_n/\Gamma) < +\infty$，设

$$g_0 = \begin{pmatrix} A & b \\ c^T & d \end{pmatrix} \in \Gamma,$$

其中 $A \in M_n(\mathbb{C})$，b和 $d \in \mathbb{C}$是具有实特征值的双曲型元素，并令$\Gamma_0 \subset \Gamma$ 为由 g_0生成的子群。令 $\widetilde{\gamma}$： $\mathbb{R} \to B_n$ 为由 g_0生成的测地线，并令 x、$y \in \partial B_n$ 为由 $\widetilde{\gamma}$连接的 B_n 边界上的两个点，且假设x、$y \in \mathbb{R}^n$。那么存在 $p_0 \in \mathbb{N}^*$，使得对所有 $p \geq p_0$，收敛级数

$$\sum_{[g] \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} (c.z + d)^{-2(n+1)p} \frac{1}{(\langle g.z, x\rangle \langle g.z, y\rangle)^{(n+1)p}} \tag{0.3}$$

在 $z \in B_n$ 中不恒等于零，其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{C}^n$ 和 $c.z$ 的典范厄米内积：$= \sum_{j=1}^n c_j z_j$。

定理 0.2 是定理 6.5 的推论，且显式公式（0.3）所给出的相对庞加莱′级数已由 Foth 与 Katok 在 [6, §6.3], 中算出，他们还研究了这些级数在自守形式的算术理论中的应用。在特殊情形 $X : = B_n/\Gamma$ 光滑紧致时，定理 0.2 是 Barron 在 [2,定理 3.3]中的结果。

最后，若 $n = 2$ 并且对于 SU(2, 1) 中具有实特征值的双曲型元素 $g_0 \in \Gamma$，Barron 在 [5, § 3, § 4] 中考虑与若干值得注意的拉格朗日环面相关联的相对庞加莱′级数，这些环面位于 $X : = B_2/\Gamma$ 内部并满足玻尔-索末菲条件；我们在定理 6.6 中证明，这些相对庞加莱′级数只要其权 $p \in \mathbb{N}$ 足够大就不消失。在 $X : = B_2/\Gamma$光滑紧致的特殊情形下，这是 Barron 在 [5, §4]中的结果。还需指出，对于一般的 $n \in \mathbb{N}^*$，且在 $X : = B_n/\Gamma$ 光滑紧致的情形下，Alluhaibi 与 Barron 在[1] 中研究了相对庞加莱′级数的情形，这些级数与 B_n 的未必各向同性的子流形相关联。

本文安排如下。在第1节中，我们回顾有界几何流形上伯格曼核的基本框架，例如可参见 [16, § 6。1], 接着回顾[18, 定理 1], 中所确立的伯格曼核远离对角线时的指数衰减，这构成了定理0.1的基础。在第2节中，我们给出定理0.1的证明；在第3节中，我们引入 Bohr-Sommerfeld 子流形的概念，并在定理3.4 中回顾 [8, 定理 5。3], 所确立的相关各向同性态的渐近展开，这构成了我们在后续各节中研究相对 Poincar´e 级数的应用基础。在第4节中，我们在一般覆盖流形上定义相对 Poincar´e 级数，并基于我们的 4.1 定理证明其存在性

主定理0.1。最后，在第5 节中，我们专门讨论厄米对称空间的情形，说明由此可以得到经典的 Poincar´é 级数及其相对版本；在第6节中，我们将前几节的结果应用于证明一大类相对 Poincar´é 级数在其权足够大时均不为零，并由此给出包括定理0.2在内的多个结果的证明。

1. 设定

我们考虑一个复流形（X， J），其复结构为 J，复维数为 n。设 g^{TX} 是 X 上的一个 J-不变黎曼度量，也称为厄米度量，并将相应的黎曼距离记作 $d^X(\cdot,\ \cdot)$。设 Θ 是由下式定义的实 (1，1)-形式

$$\Theta(X,Y)=g^{TX}(JX,Y). \tag{1.1}$$

g^{TX} 的黎曼体积形式为

$$dv_X=\Theta^n/n!\,.$$

设（E， h^E）是 X 上的一个全纯Hermitian向量丛，并将其陈曲率记作 $R^E\in\Omega^2(X,\mathrm{End}(E))$。在带有紧支撑 $\mathscr{C}_0^\infty(X,\ E)$ 的光滑截面空间上，我们引入与 h^E 和 dv_X 相关的如下 L^2-内积，该内积对任意 $s_1,\ s_2\in\mathscr{C}_0^\infty(X,\ E)$ 定义为

$$\langle s_1,s_2\rangle:=\int_X\langle s_1(x),s_2(x)\rangle_E\,dv_X(x)\,, \tag{1.2}$$

其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_E$ 是 E 上由 h^E诱导的Hermitian乘积，并且我们用 $\|\cdot\|_{L^2}$ 表示相应的 L^2-范数。 $\mathscr{C}_0^\infty(X,E)$ 关于(1.2)的完备化记为$L^2(X,E)$，并且我们记

$$H^0_{(2)}(X,E):=\big\{s\in L^2(X,E):s\text{ is holomorphic}\big\}. \tag{1.3}$$

表示 E的全纯 L^2 截面空间。

我们由全纯函数的柯西估计推得，对每个紧集 $K\subset X$，存在 $C_K>0$，使得对所有 $s\in H^0_{(2)}(X,E)$,

$$\sup_{x\in K}|s(x)|\leqslant C_K\|s\|_{L^2}\,. \tag{1.4}$$

这表明 $H^0_{(2)}(X,E)$是 $L^2(X,E)$的闭子空间。此外， $H^0_{(2)}(X,E)$是可分的（参见 [22, 第 60]页）。

现设 $T(1,0)X$为 X上的全纯切丛， $T^{(0,1)}X$为$T(1,0)X$的共轭， $T^{*(0,1)}X$为 $T(0,1)X$的对偶丛。我们用 $\Lambda^q(T^*(0,1)X)$表示 X 上的$(0,q)$-形式丛，并用$\Omega^{0,q}(X,E)$表示丛 $\Lambda^q(T^{*(0,1)}X)\otimes E$在 X上的截面空间。我们用$\Omega^{0,\bullet}_0(X,E)$表示$\Omega^{0,\bullet}(X,E)$中由具紧支撑的元素构成的子空间。作用在全纯向量丛 E的截面上的Dolbeault算子给出Dolbeault复形 $\big(\Omega^{0,\bullet}(X,E),\ \overline{\partial}^E\big)$. 我们用 $\overline{\partial}^{E,*}$表示 $\overline{\partial}^E$ 关于 L^2-内积(1.2)的形式伴随。令

$$D=\sqrt{2}\big(\overline{\partial}^E+\overline{\partial}^{E,*}\big)\,. \tag{1.5}$$

于是，它的平方 $D^2=2\big(\overline{\partial}^E\overline{\partial}^{E,*}+\overline{\partial}^{E,*}\overline{\partial}^E\big)$ 是 (E,h^E) 的两倍 ***Kodaira*** 拉普拉斯算子，该算子保持 $\Omega^{0,\bullet}(X,E)$ 上的 $\mathbb{Z}$-分次，而其在 $\Omega^{0,0}(X,E)$ 上的核恰好是 E的全纯截面。

我们还考虑 X 上的一个全纯厄米线丛 $(L,\ h^L)$。我们作如下假设。

定义 1.1。如果 (X, g^{TX}) 是完备的且内射半径为正，并且 R^E、R^L、J 和 g^{TX} 的任意阶导数在由 g^{TX}、h^E 和 h^L 诱导的范数下，在 X 上均一致有界，则称 (X, J, g^{TX})、(E, h^E) 和 (L, h^L) 具有有界几何。

我们还将作出如下假设，它是对（0.1）的推广：存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\sqrt{-1}R^L(\cdot, J\cdot) > \varepsilon g^{TX} . \tag{1.6}$$

有界几何厄米流形的一个基本例子是紧致 K¨ahler 流形 M的伽罗瓦覆盖，因此 (X, J, g^{TX}) 满足定义 1.1 的假设，其中线丛 (L, h^L) 取为 M上一个正全纯线丛的拉回，从而满足假设（1.6）。

对于任意 $p \in \mathbb{N}$，记 $L^p := L^{\otimes p}$ 为 L的第 p 个张量幂，并在张量积 $L^p \otimes E$ 上赋予由 h^L 和 h^E诱导的厄米度量 $h^{L^p \otimes E}$。

定义 命题 1.2。对于任意 $p \in \mathbb{N}$，*Bergman*投影 是正交投影 on

$$P_p : L^2(X, L^p \otimes E) \to H^0_{(2)}(X, L^p \otimes E) .$$

由（1.4），对固定的 $x \in X$，求值泛函 $s \mapsto s(x)$ 在 $H^0_{(2)}(X, L^p \otimes E)$ 上是连续的。由里斯表示定理，存在 $P_p(x, \cdot) \in L^2(X, (L^p \otimes E)_x \otimes (L^p \otimes E)^*)$ 使得

$$s(x) = \int_X P_p(x, x')s(x')dv_X(x') , \quad \text{for all } s \in H^0_{(2)}(X, L^p \otimes E) . \tag{1.7}$$

定义 1.3。对于任意 $p \in \mathbb{N}$，$L^p \otimes E \boxtimes (L^p \otimes E)^*$ 在 $X \times X$ 上的截面 $P_p(\cdot, \cdot)$ 称为 $H^0_{(2)}(X, L^p \otimes E)$ 的伯格曼核。

对于任意 $p \in \mathbb{N}$，令 $d_p := $维数 $H^0_{(2)}(X, L^p \otimes E) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，并令 $\{s_i\}_{i=1}^{d_p}$ 为 $H^0_{(2)}(X, L^p \otimes E)$ 关于内积（1.2）的任意标准正交基。利用估计式（1.4）可证明

$$P_p(x, x') = \sum_{i=1}^{d_p} s_i(x) \otimes s_i(x')^* \in (L^p \otimes E)_x \otimes (L^p \otimes E)^*_{x'} , \tag{1.8}$$

其中右端在 X 的每个紧子集上连同其所有导数均收敛（例如参见 [22, 第 62]页）。因此 $P_p(\cdot, \cdot) \in \mathscr{C}^\infty(X \times X, L^p \otimes E \boxtimes (L^p \otimes E)^*)$。由（1.8）可得

$$(P_p s)(x) = \int_X P_p(x, x')s(x')dv_X(x') , \quad \text{for all } s \in L^2(X, L^p \otimes E) . \tag{1.9}$$

也就是说，$P_p(\cdot, \cdot)$ 是 Bergman投影P_p的积分核（因而也是施瓦茨核）。

本节最后，我们回顾关于 Bergman核指数衰减的以下基本结果。

~ ~ ~ ~ ~ ~定理*1.4*（[18, 定理 1]）。假设 (X, g^{TX})、(L, h^L) 和 (E, h^E) 在定义 *1.1* 的意义下具有有界几何，且假设 *(1.6)* 成立。则存在 $\boldsymbol{c} > 0$、$\boldsymbol{p}_0 > 0$，它们可由几何数据显式确定，使得对任意 $k \in \mathbb{N}$，存在 $C_k > 0$，使得对任意 $p \geqslant \boldsymbol{p}_0$、$x$、$x' \in X$，我们有

$$|P_p(x, x')|_{\mathscr{C}^k} \leqslant C_k p^{n+\frac{k}{2}} \exp(-\boldsymbol{c}\sqrt{p}\, d(x, x')) . \tag{1.10}$$

2. 覆盖流形

~ ~设 (X, g^{TX}) 为维数为 m 的完备黎曼流形，并设 Γ 是一个~ ~离散群，它通过等距变换在 (X, g^{TX}) 上正常不连续且有效地作用。~对任意 $r > 0$以及任意子集 $F \subset X$，令

$$N_F(r) = \sup_{x\in F,\, y\in \widetilde{X}} \#\left\{g \in \Gamma \,:\, g.x \in B^{\widetilde{X}}(y, r)\right\}, \tag{2.1}$$

~ ~其中 $B^X(y,\ r)$ 是以 $y \in X$ 为中心、半径为 r的测地球。

~ ~**引理 2.1**。假设存在 $K > 0$，使得 $\mathrm{Ric}(X, g^{TX})$ ~ ~的里奇曲率满足 $\mathrm{Ric} \geq -(m-1)K^2 g^{TX}$。那么，对于任意紧子集 $F \subset X$，存在 $C_F > 0$，使得对所有 $r > 0$，以下估计成立，

$$N_F(r) \leq C_F\, e^{(m-1)Kr}. \tag{2.2}$$

~证明。由于 Γ 在 X 上的作用是适当不连续的，对于任意 $x \in X$，其稳定子群 $\Gamma_x \subset \Gamma$ 是有限群，并且存在 $\epsilon_x > 0$，使得对于任意 $g \in \Gamma$，我们有

$$B^{\widetilde{X}}(x, 4\epsilon_x) \cap g.B^{\widetilde{X}}(x, 4\epsilon_x) = \emptyset \quad \text{if and only if} \quad g \notin \Gamma_x. \tag{2.3}$$

~ ~特别地，对任意 $y \in B(x, 2\epsilon_x)$ 与 $g \notin \Gamma_x$，我们有 $B^X(y, 2\epsilon_x) \cap g.B^X(y, 2\epsilon_x) = \emptyset$，这表明 $\Gamma_y \subset \Gamma_x$。由于 F是紧的，存在有限集 $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset F$~ ~，满足 $k \in \mathbb{N}$，使得 $F \subset \cup_{j=1}^k B^X(x_j, \epsilon_{x_j})$；并且对任意 $y \in X$ 与 $1 \leq j \leq k$，令

$$N_{j,y}(r) = \sup_{x\in B^{\widetilde{X}}(x_j,\epsilon_{x_j})} \#\left\{g \in \Gamma \,:\, g.x \in B^{\widetilde{X}}(y, r)\right\}. \tag{2.4}$$

于是由 (2.1)，我们有

$$N_F(r) \leq \sup_{y\in\widetilde{X}} \sup_{1\leq j\leq k} N_{j,y}(r). \tag{2.5}$$

因此，由 (2.4)，只需对 $N_{j,y}(r)$ 证明 (2.2)，且所用常数不依赖于~ $y \in X$。

我们首先考虑如下情形：$j \in \mathbb{N}$ 使得 $\Gamma_{x_j} = \{1\}$。于是，由于 Γ 以等距变换作用，并利用 (2.3)，对任意 $r > 0$我们有

$$N_{j,y}(r)\ \mathrm{Vol}\, B^{\widetilde{X}}(x_j, \epsilon_{x_j}) \leq \mathrm{Vol}\, B^{\widetilde{X}}(y, r + 2\epsilon_{x_j}). \tag{2.6}$$

现在，在我们关于有界几何的假设下，存在 $K > 0$，使得(X, g^{TX})的Ricci ~ ~ ~曲率以 $-(2m-1)K^2 g^{TX}$为下界。由Bishop不等式，~ ~这意味着 $B^X(x, r) \subset X$ 的体积小于或等于半径为 $r > 0$ 、位于常曲率空间 $-K$ 中的测地球的体积（例如参见[21, 引理7.1.3]）。然后，根据常曲率空间 $-K$中大球体积的一个经典估计（例如可见于 [19, 第3], 页），存在一个普适常数$C_{m,K} > 0$，它仅依赖于 K 以及~ ~X的维数 m，使得对任意 $x \in X$ 和 $r > 0$,

$$\mathrm{Vol}\, B^{\widetilde{X}}(x, r) \leq C_{m,K}\, e^{(m-1)Kr}. \tag{2.7}$$

那么，对于任意 $r > 0$，我们得到:

$$N_{j,y}(r) \leq \frac{C_{m,K}\, e^{(m-1)K2\epsilon_{x_j}}}{\mathrm{Vol}\, B^{\widetilde{X}}(x_j, \epsilon_{x_j})}\, e^{(m-1)Kr}, \tag{2.8}$$

~且右侧与 $y \in X$ 无关。

对于一般情形，首先回顾一下，我们像上面那样选取了 F 的测地球覆盖，使得对于任意 $1 \leq j \leq k$，稳定子群 $\Gamma_{x_j} \subset \Gamma$ 的 $x_j \in F$ 满足（2.3）。由于 Γ 通过等距变换作用，我们知道 Γ_{x_j} 保持测地球 $B^X(x_j, \epsilon_{x_j})$，并利用（2.3），可像上面一样推得

$$\frac{N_{j,y}(r)}{\#\Gamma_{x_j}} \operatorname{Vol} B^{\widetilde{X}}(x_j, \epsilon_{x_j}) \leq \operatorname{Vol} B^{\widetilde{X}}(y, r + 2\epsilon_{x_j}) , \tag{2.9}$$

使得

$$N_{j,y}(r) \leq \frac{C_{m,K}\, e^{(m-1)K2\epsilon_{x_j}}\, \#\Gamma_{x_j}}{\operatorname{Vol} B^{\widetilde{X}}(x_j, \epsilon_{x_j})}\, e^{(m-1)Kr} , \tag{2.10}$$

且右端与 $y \in X$ 无关。至此，(2.2) 的证明完成。 □

设 (X, J, g^{TX}) 是复维数为 n 的完备厄米流形，并设 Γ 是一个离散群，通过双全纯等距变换在 (X, J, g^{TX}) 上正常不连续且有效地作用。于是，商空间 $X := X/\Gamma$ 具有自然的厄米轨形结构 (X, J, g^{TX})。此外，(X, g^{TX}) 的任意一条关于轨形黎曼距离 d^X 的柯西序列，都可以提升为 (X, g^{TX}) 的黎曼距离 d^X 下的柯西序列，因此 (X, d^X) 的完备性蕴含 (X, d^X) 的完备性。我们将 $\pi\colon X \to X$ 记为典范投影。

假设 Γ 的作用提升为对全纯 Hermitian 向量丛 dles (L, h^L)和(E, h^E) 的作用，其中(L, h^L)是一致正线丛，使得其 Chern 曲率 R^L 满足 (1.6)。由于 Γ 在 X上有效作用，商丛(L, h^L)和(E, h^E)是 X上的正则轨形丛。对于任意 $p \in \mathbb{N}^*$，记 D_p, D_p 为 $L^p \otimes E$, $L^p \otimes E$ 的 Dirac 算子，如 (1.5) 所示；记 $P_p(\cdot,\cdot)$ 和 $P_p(\cdot,\cdot)$为相应的 Bergman 核，它们是相对于(X, g^{TX})、(X, g^{TX})的黎曼体积形式 $dv_{\widetilde{X}}$, dv_X而言的，如 (1.7) 所示。

定理 2.2. 假设 (X, g^{TX})、(L, h^L)与 (E, h^E)具有有界几何，即在意义下（见定义1.1），并且 (1.6) 成立。于是，若 $X := X/\Gamma$的体积有限，则存在 $p_1 \in \mathbb{N}^*$，使得对任意 $p \geq p_1$，我们有

$$\sum_{g \in \Gamma} (g^{-1}, 1).\widetilde{P}_p(g.\widetilde{x}, \widetilde{y}) = P_p(\pi(\widetilde{x}), \pi(\widetilde{y})) , \tag{2.11}$$

其中，对 $K \subset X$ 的任意紧集，收敛在 $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \sim K \times X \cup X \times K$ 中是一致且绝对的。

证明。首先注意到，如果 Γ 在 X 上自由作用，那么商空间 $E = E/\Gamma$将 $v \in E_{\widetilde{x}}$ 与 $g.v \in E_{g.\widetilde{x}}$ 等同（对任意 $x \in X$ 和 $g \in \Gamma$），因此我们可以在 (2.11) 中省略 $(g^{-1}, 1)$ 在 $(L^p \otimes E)_{g.\widetilde{x}} \otimes (L^p \otimes E)_{\widetilde{y}}$ 上的作用。回想一下，(1.5) 中定义的狄拉克算子 D_p, D_p 作用于

$$E_p := \Lambda^\bullet(T^{*(0,1)}X) \otimes L^p \otimes E \quad \text{and} \quad \widetilde{E}_p := \Lambda^\bullet(T^{*(0,1)}\widetilde{X}) \otimes \widetilde{L}^p \otimes \widetilde{E} . \tag{2.12}$$

一般而言，按照 [17, 定理 6.11], 的证明中所使用的 [18, 引理 1、备注 1]，关于 R^L、R^E、J、g^{TX}有界性的假设意味着

$$\begin{aligned} &\operatorname{Spec}(D_p^2) \subset \{0\} \cup [2p\mu_0 - C_1, +\infty[, \\ &\operatorname{Spec}(\widetilde{D}_p^2) \subset \{0\} \cup [2p\mu_0 - C_1, +\infty[, \end{aligned} \tag{2.13}$$

with

$$\mu_0 = \inf_{w \in T_x^{(1,0)}X,\ x \in X} \frac{R^L(w, \overline{w})}{|w|^2_{g^{TX}}} > \varepsilon \tag{2.14}$$

对于某些 $C_1 > 0$ 和 $\varepsilon > 0$ 如（1.6）中所示，并且对于 $p \in \mathbb{N}^*$ 足够大时，有

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(D_p^2) &= H^0_{(2)}(X, L^p \otimes E)\,, \\ \mathrm{Ker}(\widetilde{D}_p^2) &= H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{L}^p \otimes \widetilde{E})\,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

首先证明，对于任意 $p \in \mathbb{N}$ 和 $u > 0$，如下公式与 [18, (3.18)]中所示一致：

$$\exp(-uD_p^2)(\pi(\widetilde{x}), \pi(\widetilde{y})) = \sum_{g\in\Gamma} (g^{-1}, 1).\exp(-u\widetilde{D}_p^2)(g.\widetilde{x}, \widetilde{y})\,, \tag{2.16}$$

~ ~且当 $\widetilde{x} \in X$ 和 $\widetilde{y}$ 取遍任意紧集 $F \subset X$时，一致收敛。

对任意固定的 $p \in \mathbb{N}$，应用 [18, 关于平凡线丛的定理 4] for $L = \mathbb{C}$，可得 $a > 0$，使得对于任意 $k \in \mathbb{N}$、$u_0 > 0$，存在 $C > 0$，使得对于任意 $0 < u < u_0$ ~和 $\widetilde{x}$，$\widetilde{y} \in X$，我们有

$$\left|\exp\left(-u\widetilde{D}_p^2\right)(\widetilde{x}, \widetilde{y})\right|_{\mathscr{C}^k} \leqslant C u^{-n-\frac{k}{2}} \exp\left(-\frac{a}{u} d^{\widetilde{X}}(\widetilde{x}, \widetilde{y})^2\right)\,. \tag{2.17}$$

~因此，根据引理 2.1，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，$u_0 > 0$ 以及任意紧集 $F \subset X$，存在~ $C > 0$ 使得对于所有 $0 < u < u_0$，$\widetilde{x} \in X$ 以及所有 $\widetilde{y} \in F$，我们有

$$\begin{aligned} \sum_{g\in\Gamma} \left|\exp\left(-u\widetilde{D}_p^2\right)(g.\widetilde{x}, \widetilde{y})\right|_{\mathscr{C}^k} &\leq C \sum_{g\in\Gamma} u^{-n-\frac{k}{2}} \exp\left(-\frac{a}{u} d^{\widetilde{X}}(\widetilde{x}, g^{-1}.F)^2\right) \\ &\leq C \sum_{r=0}^{\infty} u^{-n-\frac{k}{2}}\, N_F(r+1)\, e^{-\frac{a}{u} r^2} < +\infty\,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

~这表明，对任意紧集 $F \subset X$ 以及任意紧区间 $I \subset]0,\ +\infty[$，~(2.16)的右端及其所有导数在 $\widetilde{x} \in X$、$\widetilde{y} \in F$ 和~$u \in I$上一致收敛。将开稠密集 $U \subset X$ 等同于 X中 Γ~上的开基本域 U，这特别意味着，对任意 $s \in \mathscr{C}_0^\infty(X, E_p)$，通过考虑紧~子集 $F := \pi^{-1}$(支集 s) $\cap U$，该和 ————————

$$\sum_{g\in\Gamma} \left(e^{-u\widetilde{D}_p^2} s\right)(g.x) \tag{2.19}$$

在 $x \in X$ 和 $u \in I$ 上一致收敛，其所有导数也同样一致收敛，其中我们记

$$\left(e^{-u\widetilde{D}_p^2} s\right)(g.x) := \int_{\widetilde{U}} (g^{-1}, 1).\exp(-u\widetilde{D}_p^2)(g.\widetilde{x}, \widetilde{y}) s(\widetilde{y}) dv_{\widetilde{X}}(\widetilde{y})\,, \tag{2.20}$$

~其中 $\overline{\widetilde{x}} \in U$ 使得 $\pi(\widetilde{x}) = x$。由于和式（2.19）不依赖于~ ~基本域 $U \subset X$的选取，它定义了 $\mathscr{C}^\infty(X, E_p)$中的一个光滑截面。由热算子的定义性质，对所有 $x \in X$ 以及 $u > 0$，我们得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + D_p^2\right) \sum_{g\in\Gamma} \left(e^{-u\widetilde{D}_p^2} s\right)(g.x) = 0\,. \tag{2.21}$$

因此，根据热算子的唯一性，要证明（2.16），只需证明（2.19）属于 L^2（X，E_p）并且

$$\int_X \Big|\sum_{g\in\Gamma} \left(e^{-u\widetilde{D}_p^2} s\right)(g.x) - s(x)\Big|^2 dv_X(x) \xrightarrow{u\to 0} 0\,, \tag{2.22}$$

对于任意 $s \in \mathscr{C}_0^\infty(X,\ E_p)$。要证明（2.19）属于 $L^2(X,\ E_p)$，注意到对于任意 $\widetilde{x} \in U$，并考虑紧子集 $F\colon = \pi^{-1}$（支集 s）$\cap U$，我们有

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{g\in\Gamma}\big(e^{-u\widetilde{D}_p^2}s\big)(g.x)\Big|\\ &\qquad\leq \sup_{y\in F}\sum_{g\in\Gamma}\Big|\exp\Big(-u\widetilde{D}_p^2\Big)(g.\widetilde{x},\widetilde{y})\Big|\left(\int_F|s(\widetilde{y})|\,dv_{\widetilde{X}}(\widetilde{y})\right).\end{aligned}\tag{2.23}$$

结合（2.18）以及体积（X）$< +\infty$的假设，这表明（2.19）属于 $L^2(X,\ E_p)$。

为了证明（2.22），注意利用单位分解，我们总可以假设要么 $s \in \mathscr{C}_0^\infty(X,\ E_p)$ 的支集包含在 $U \subset X$的内部，要么它包含在一个轨形图中。首先假设它包含在 U的内部，则如上可得

$$\begin{aligned}&\int_X\Big|\sum_{g\in\Gamma}\big(e^{-u\widetilde{D}_p^2}s\big)(g.x)-s(x)\Big|^2\,dv_X(x)\\ &\leq \mathrm{Vol}(X)\Big(\sup_{x\in X}\sum_{g\in\Gamma,\,g\neq 1}\big|\big(e^{-u\widetilde{D}_p^2}s\big)(g.x)\big|+\sup_{x\in X}\big|\big(e^{-u\widetilde{D}_p^2}s\big)(x)-s(x)\big|\Big)^2.\end{aligned}\tag{2.24}$$

由于 $F\colon = \pi^{-1}$（支集 s）$\cap U$ 包含在 U的内部，存在 $b > 0$，使得对任意 $\widetilde{x} \in U$与 $g \in \Gamma\backslash\{1\}$，我们有 $b < d^X(\widetilde{x},\ g^{-1}.F)$。于是（2.18）表明（2.24）右端的第一项有界于

$$C\sum_{r=1}^{\infty}u^{-n}\,N_F((r+1)b)\,e^{-\frac{a}{u}r^2b^2},$$

它趋于0，当 $u \to 0$ 时，由引理2.1；而由紧集上的一致收敛，热方程在 X 上收敛到其初始解，当 $u \to 0$时，第二项也趋于0，当 $u \to 0$ 时，由（2.20）。这就证明了（2.22），在支集$(s) \subset X$ 包含于 U内部的情形下。

现假设 $s \in \mathscr{C}_0^\infty(X, E_p)$ 的支集包含于一个轨形图 $B^X(\widetilde{x}_0,\epsilon) \to B^X(x_0,\epsilon) = B^X(\widetilde{x}_0,\epsilon)/\Gamma_{x_0}$中，其中 $\Gamma_{x_0} \subset \Gamma$是 $\widetilde{x}_0 \in X$的有限稳定子群，且对所有 $g \notin \Gamma_{x_0}$，由 (2.3) 有 $B^X(\widetilde{x}_0,\epsilon) \cap g.B^X(\widetilde{x}_0,\epsilon) = \emptyset$。根据轨形积分的定义 [14, (1.5)]，以及热核在 X 上的 Γ-等变性，记 $\Gamma_{x_0}\backslash\Gamma$ 为陪集的集合

$$[g] := \{g_0 g \in \Gamma : g_0 \in \Gamma_{x_0}\},\tag{2.25}$$

对所有 $g \in \Gamma$，并将$\widetilde{s} \in \mathscr{C}_0^\infty(X, E_p)$记作$s \in \mathscr{C}_0^\infty(X, E_p)$到$B^X(\widetilde{x}_0,\epsilon)$的 Γ_{x_0}-不变提升，则对任意满足 $\pi(\widetilde{x}) = x$的 $x \in B^X(x_0,\epsilon)$与 $\widetilde{x} \in B^X(\widetilde{x}_0,\epsilon)$，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{g\in\Gamma}\big(e^{-u\widetilde{D}_p^2}s\big)(g.x)&=\frac{1}{\#\Gamma_{x_0}}\int_{B^{\widetilde{X}}(\widetilde{x_0},\epsilon)}\sum_{g\in\Gamma}\exp(-u\widetilde{D}_p^2)(g.\widetilde{x},\widetilde{y})s(\widetilde{y})dv_{\widetilde{X}}(\widetilde{y})\\ &=\frac{1}{\#\Gamma_{x_0}}\int_{B^{\widetilde{X}}(\widetilde{x_0},\epsilon)}\sum_{[g]\in\Gamma_{x_0}\backslash\Gamma}\sum_{g_1\in[g]}\exp(-u\widetilde{D}_p^2)(g_1.\widetilde{x},\widetilde{y})\widetilde{s}(\widetilde{y})dv_{\widetilde{X}}(\widetilde{y})\\ &=:\sum_{[g]\in\Gamma_{x_0}\backslash\Gamma}\big(e^{-u\widetilde{D}_p^2}\widetilde{s}\big)(g.\widetilde{x}),\end{aligned}\tag{2.26}$$

于是（2.26）的最后一行可视为 Γ_{x_0}-不变提升，即将（2.26）左端提升到 $B^X(\widetilde{x}_0,\ \epsilon)$。根据轨形积分的定义，并利用支集$(s) \subset B^X(x_0,\ \epsilon)$，

于是得到

$$\int_X \Big|\sum_{g\in\Gamma}\big(e^{-u\widetilde{D}_p^2}s\big)(g.x)-s(x)\Big|^2 dv_X(x) = \int_{X\setminus B^X(x_0,\epsilon)} \Big|\sum_{g\in\Gamma}\big(e^{-u\widetilde{D}_p^2}s\big)(g.x)\Big|^2 dv_X(x) + \frac{1}{\#\Gamma_{x_0}}\int_{B^{\widetilde{X}}(\widetilde{x_0},\epsilon)} \Big|\sum_{[g]\in\Gamma_{x_0}\backslash\Gamma}\big(e^{-u\widetilde{D}_p^2}\widetilde{s}\big)(g.\widetilde{x})-\widetilde{s}(\widetilde{x})\Big|^2 dv_{\widetilde{X}}(\widetilde{x})\,. \tag{2.27}$$

然后，我们可以对（2.24）右端的每一项分别代替（2.27）中的对应项，重复上述估计，从而由（2.17）得到（2.22）。这就完成了（2.16）的证明。

现在再次使用 [18, 定理 4]，我们知道存在 $a>0$，使得对于任意 $u_0>0$、$k\in\mathbb{N}$，存在 $C>0$，使得对于任意 $u\geq u_0$，$p\in\mathbb{N}^*$ 以及 $\widetilde{x}$，$\widetilde{y}\in X$，我们有

$$\left|\exp\left(-\frac{u}{p}\widetilde{D}_p^2\right)(\widetilde{x},\widetilde{y})\right|_{\mathscr{C}^k} \leqslant Cp^{n+\frac{k}{2}}\exp\left(\mu_0 u-\frac{ap}{u}d^{\widetilde{X}}(\widetilde{x},\widetilde{y})^2\right)\,. \tag{2.28}$$

于是，对于任意 $p\in\mathbb{N}^*$，$u>0$，根据 [17, (4.2.22)]，，我们有

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{u}{p}D_p^2\right)-P_p &= \int_u^\infty \frac{1}{p}D_p^2\exp\left(-\frac{u_1}{p}D_p^2\right)du_1,\\ \exp\left(-\frac{u}{p}\widetilde{D}_p^2\right)-\widetilde{P}_p &= \int_u^\infty \frac{1}{p}\widetilde{D}_p^2\exp\left(-\frac{u_1}{p}\widetilde{D}_p^2\right)du_1.\end{aligned} \tag{2.29}$$

现在由定理1.4和引理 2.1，我们知道 $\sum_{g\in\Gamma}(g^{-1},1).P_p(g.\widetilde{x},\widetilde{y})$关于 $\mathscr{C}^k$-范数在任意紧子集 $K\subset\widetilde{X}$上一致绝对收敛，其中 $\widetilde{X}\times K$ 对于 $p>\max\{p_0,(m-1)^2K^2/c^2\}$，因此按照 [18, (3.20)、(3.21)]，由(2.16)、(2.28)和(2.29)可得(2.11)。□

注2.3。由于在 [18, 定理 1]中确立的定理 1.4的一般版本在一般辛情形下成立，因此定理 2.2的证明可逐字推广到一般辛情形，从而将 [18, 定理 2] 推广至有限体积流形的情形。

3. 玻尔–索末菲子流形

设 $(X,\ J,\ g^{TX})$是一个复维数为 n 的完备厄米轨形，配备正的全纯厄米正轨形线丛 $(L,\ h^L)$，满足（1.6），以及全纯厄米正轨形向量丛 $(E,\ h^E)$。记

$$\omega:=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^L\,. \tag{3.1}$$

本节回顾 [8], 的设定和结果，它们将作为后续内容的基本工具。

回顾一下，浸入子流形 $\iota:\ \Lambda\to X$ 称为 各向同性，如果 $\iota^*\omega=0$。令 $|\cdot|_L$和 ∇^L 分别为由厄米度量和陈联络在拉回 ι^*L 上诱导的范数和联络，其中 Λ 是 $(L,\ h^L)$的拉回。注意，由（3.1），条件 $\iota^*\omega=0$ 意味着 ∇^L 在 平坦于 Λ之上。这一观察引出了以下定义。

定义 3.1。若一个正则浸入定向各向同性子流形 $\iota:\ \Lambda\to X$ 满足关于（$L,\ h^L$）的玻尔-索末菲条件，则存在一个处处非零光滑截面 $\zeta\in\mathscr{C}^\infty(\Lambda,\ \iota^*L)$ 满足

$$\nabla^L\zeta=0\,. \tag{3.2}$$

取 ζ使得对于任意 $x \in \Lambda$，都有 $|\zeta(x)|_L = 1$，则（Λ，ι，ζ）的数据称为（X，L）的玻尔-索末菲子流形 。

如 [8, §5.2], 所述，当 X 是一个轨形时，我们考虑 奇异浸入 ι： $\Lambda \to X$ 按照 [8, 定义 56], ，这意味着 ι 是从光滑流形 Λ到 X的连续映射，在 X 的光滑部分上是浸入，且其 $\iota(\Lambda)$在轨形图上的原像是若干干净相交子流形的并，因此任意两个子流形的交也是一个子流形，其切空间与相交子流形的切空间之交重合。于是，玻尔-索末菲流形的概念自然地推广到这一情形。

令 $K_X := \det(T^{*(1,0)}X)$ 为 X 的典范线丛，并令 h^{K_X} 为由 g^{TX} 诱导的厄米度量。用 R^{K_X} 表示 (K_X, h^{K_X}) 上陈联络的曲率。以下基本结果例如可见于 [8,引理 6.1]。

引理 3.2。 假设(K_X, h^{K_X})是正的，维数$_{\mathbb{C}} X = 1$，并且对于某个 $c > 0$, 有 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^{K_X} = c\, g^{TX}(J\cdot, \cdot)$。设 $\gamma: S^1 \to X$ 是 X的一条闭测地环路。那么 γ 满足(K_X, h^{K_X})的玻尔-索末菲条件。

此外，若(L, h^L) 是一个全纯厄米线丛，满足$(L^m, h^{L^m}) \simeq (K_X, h^{K_X})$，其中 $m \in \mathbb{N}^*$，则 $\gamma^m := \gamma \circ m: S^1 \to X$ 满足(L, h^L)的玻尔-索末菲条件，其中 $m: S^1 \to S^1$ 是 S^1 的标准 m 重覆盖。

证明。 首先回顾，在黎曼轨形上，轨形图的有限各向同性群通过等距变换作用，因此测地线环路 $\gamma: S^1 \to X$ 确实定义了 [8, 定义 5.6], 中意义下的奇异浸入，即 orbifold 图中 γ 的原像是若干干净相交的子流形之并。

现在设定 $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^{K_X}$。回顾一下，对于 $\omega = c\, g^{TX}(J\cdot, \cdot)$ 以及由 g^{TX}诱导的、相差一个乘性常数的 h^{K_X}，(K_X, h^{K_X}) 的陈联络 ∇^{K_X}由 TX上的列维-奇维塔联络 ∇^{TX}诱导。对于任意 $\theta \in S^1$，令 $\dot\gamma_\theta \in T_{\gamma(\theta)}X$为曲线 $\gamma: S^1 \to X$ 的切向量，并将 $\zeta \in \mathscr{C}^\infty(S^1, \gamma^* K_X)$ 记作 K_X 在 S^1 上的诱导截面。由于 γ 是测地线，我们知道 $\nabla^{TX}_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$，从而 $\nabla^{K_X}_{\dot\gamma}\zeta = 0$。因此，$\zeta$ 满足 (3.2)，且 γ： $S^1 \to X$满足关于 (K_X, h^{K_X}) 的玻尔-索末菲条件。

现在设 (L, h^L) 满足 $(L^m, h^{L^m}) \simeq (K_X, h^{K_X})$，其中 $m \in \mathbb{N}^*$ 为某个量。γ: $S^1 \to X$ 满足 (K_X, h^{K_X}) 的玻尔-索末菲条件，这等价于由 ∇^{K_X} 在 $\gamma^* K_X$ 上诱导的联络沿着 S^1 是平凡的。特别地，这意味着陈联络 ∇^L 在 (L, h^L) 上的全纯，当拉回到 S^1 的标准 m 覆盖上时是平凡的。这就证明了第二个断言。□

若 ζ 是 $\iota^* L$ 的任意一个截面，则记 ζ^p 为 ζ 的 p 次幂，它是 $\iota^* L^p$ 的一个截面。若进一步 f 是 $\iota^* E$ 的一个截面，则记 $\zeta^p f$ 为 $\iota^*(L^p \otimes E)$ 中诱导的张量积。设 (Λ, ι, ζ) 是 (X, L) 的一个紧致玻尔-索末菲子流形，并考虑一个截面 $f \in \mathscr{C}^\infty(\Lambda, \iota^* E)$。

定义 3.3. 与 (Λ, ι, ζ) 和 f相关联的各向同性态 是截面族$\{s_{\Lambda,p} \in H^0_{(2)}(X, L^p \otimes E)\}_{p \in \mathbb{N}^*}$，对任意 $x \in X$ 均由公式定义

$$s_{\Lambda,p}(x) = \int_\Lambda P_p(x, \iota(y)).\zeta^p f(y) dv_\Lambda(y)\ , \tag{3.3}$$

其中 dv_Λ是 $(\Lambda, \iota^* g^{TX})$ 的黎曼体积形式。

下述命题根据各向同性态的再生性质对其进行刻画。

命题 3.4. 对于任意 $p \in \mathbb{N}^*$，定义 $s_{\Lambda,\,p} \in H^0_{(2)}(X,\ L^p \otimes E)$ 的截面 3.3 是 $H^0_{(2)}(X,\ L^p \otimes E)$ 中唯一满足以下条件的元素：对于任意 $s \in H^0_{(2)}(X,\ L^p \otimes E)$，有

$$\langle s, s_{\Lambda,p} \rangle = \int_\Lambda \left\langle s(\iota(x)), \zeta^p f(x) \right\rangle_{L^p \otimes E} dv_\Lambda(x)\ . \tag{3.4}$$

证明。回忆一下，正交投影 P_p 在 $H^0_{(2)}(X, L^p \otimes E)$ 关于 L^2-Hermitian乘积是自伴的，并且在 $H^0_{(2)}(X, L^p \otimes E)$ 上限制为恒等映射，对任意 $p \in \mathbb{N}^*$均成立。因此，对任意 $s \in H^0_{(2)}(X, L^p \otimes E)$，且由于 Λ 是紧的，由（1.2）、（3.3）以及富比尼定理可得，

$$\begin{aligned} \langle s, s_{\Lambda,p} \rangle &= \int_X \left\langle s(y), \int_\Lambda P_p(y, \iota(x)).\zeta^p f(x) dv_\Lambda(x) \right\rangle_{L^p \otimes E} dv_X(y) \\ &= \int_\Lambda \left\langle \int_X P_p(\iota(x), y) s(y) dv_X(y), \zeta^p f(x) \right\rangle_{L^p \otimes E} dv_\Lambda(x) \\ &= \int_\Lambda \left\langle s(\iota(x)), \zeta^p f(x) \right\rangle_{L^p \otimes E} dv_\Lambda(x)\ . \end{aligned} \tag{3.5}$$

唯一性源于这样一个事实：希尔伯特空间中的一个元素，完全由它与所有其他元素的Hermitian乘积值唯一确定。□

令 $g^{TX}_\omega = \omega(\cdot, J\cdot)$ 和 $g^{T\Lambda}_\omega = \iota^* g^{TX}_\omega$。设 dv_X、$_\omega$ 和 dv_Λ、$_\omega$ 分别为 (X, g^{TX}_ω) 和 $(\Lambda, g^{T\Lambda}_\omega)$ 的黎曼体积形式。记 $\|\cdot\|$ 为由（1.2）诱导的 $L^2(X, L^p \otimes E)$ 上的范数，记 $|\cdot|_{\iota^* E}$ 为由 h^E 诱导的 $\iota^* E$ 在 Λ 上的范数。关于各向同性态范数的以下估计是 [8, 定理 5.3] 的结果。

定理 3.5。存在 $b_r \in \mathbb{R}$，对所有 $r \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $k \in \mathbb{N}$，当 $p \to +\infty$ 时，

$$\|s_{\Lambda,p}\|^2 = p^{n - \frac{\dim \Lambda}{2}} \sum_{r=0}^{k} p^{-r} b_r + O(p^{n - \frac{\dim \Lambda}{2} - (k+1)})\ , \tag{3.6}$$

其中第一项系数由以下公式给出

$$b_0 = 2^{\frac{\dim \Lambda}{2}} \int_\Lambda |f|^2_{\iota^* E} \frac{dv_{X,\omega}}{dv_X} \frac{dv_\Lambda}{dv_{\Lambda,\omega}} dv_\Lambda. \tag{3.7}$$

特别地，如果 f 不恒等于零，则存在 $p_0 \in \mathbb{N}^*$，使得对所有 $p \geq p_0$，截面 $s_{\Lambda,\,p} \in H^0_{(2)}(X, L^p \otimes E)$ 不恒等于零。

当 X 是一个轨形时，公式（3.7）仅在 Λ的像不包含于 X的奇异集中时成立。否则，需要将（3.7）右端乘以 Λ 在 X 中的重数，该重数的定义见 [8, 定义 5。6]。

当 X关于 $c_1(TX)$为偶数且光滑紧致时，对于 $g^{TX}_\omega = \omega$以及 Λ拉格朗日的，定理 3.5是 [3, 定理 3。2]的结果。此外，类似于（3.6）的展开式中，仅含有 p 在 [3, (85)] 中的半整数次幂，而不是像展开式（3.6）中那样的整数次幂。

4. 覆盖流形上的 POINCAR´E 级数

设 (X, J, g^{TX}) 是一个复维数为 n 的完备厄米流形，并且带有一个满足 (1.6) 的正全纯厄米线丛 (L, h^L) 以及一个全纯厄米向量丛 (E, h^E)；假设这些数据具有定义 1.1 意义下的有界几何。设 Γ 是 (X, J, g^{TX}) 的全纯等距变换群中的一个离散子群，并且该子群可提升为作用于 (L, h^L) 和 (E, h^E) 上的全纯厄米作用；进一步假设 $X := X/\Gamma$ 的体积有限。

现在考虑一个子群 $\Gamma_0 \subset \Gamma$。相对庞加莱´级数~ ~方法的目标是通过在陪集集合上取平均，利用 Γ-不变的全纯截面构造 $L^p \otimes E$-不变的全纯截面， Γ_0即对集合 $\Gamma_0\backslash\Gamma$ 中的陪集 $[g] := \{g_0 g \in \Gamma$ 进行平均: $g_0 \in \Gamma_0\}$，对所有$g \in \Gamma$均如此。 $\Gamma_0 = \{1\}$当´时，我们得到经典的庞加莱级数，这是自守形式理论中的基本工具。正如例如在 [12, II. Chap. 7],中所强调的，伯格曼核可用于在此背景下构造一族由 ´级数~参数化的庞加莱级数，参数取遍 $X = X/\Gamma$中的点；我们在此给出一种推广，用 X中的各向同性子流形取代点所扮演的角色。

考虑商空间~ ~ ~

根据定理2.2 和（4.4），存在 $p_0 \in \mathbb{N}^*$ 使得以下公式对任意 $x,\ y \in X$ 和 $p \geqslant p_0$,

$$\begin{aligned} \pi_0^* P_{0,p}(\pi_0(x), \pi_0(y)) &= \sum_{g_0 \in \Gamma_0} (g_0^{-1}, 1).\widetilde{P}_p(g_0.x, y)\ , \\ (\pi^* P_p)(x, y) = \pi^* P_p(\pi(x), \pi(y)) &= \sum_{g \in \Gamma} (g^{-1}, 1).\widetilde{P}_p(g.x, y)\ , \end{aligned} \tag{4.5}$$

在 x 中一致收敛，$y \in K \times X \cup X \times K$ 对任意紧子集 $K \subset X$ 均成立。特别地，对任意 $x \in X_0$ 和 $p \in \mathbb{N}^*$，有

$$\begin{aligned} \pi_0^* s_{0,p}(x) &= \int_\Lambda \sum_{g_0 \in \Gamma_0} (g_0^{-1}, 1).\widetilde{P}_p(g_0.x, \iota_0(y))).\zeta^p f(y)\, dv_\Lambda(y) \\ &= \sum_{g_0 \in \Gamma_0} \int_\Lambda \widetilde{P}_p(x, g_0^{-1}.\iota_0(y)) g_0^{-1}.\zeta^p f(y)\, dv_\Lambda(y) \\ &= \int_{\widetilde{\Lambda}} \widetilde{P}_p(x, \widetilde{\iota}(\widetilde{y})).\widetilde{\zeta}^p \widetilde{f}(\widetilde{y})\, dv_{\widetilde{\Lambda}}(\widetilde{y})\ , \end{aligned} \tag{4.6}$$

其中我们将 $x \in X_0$ 与到 X的一个提升等同起来。因此有 $\pi_0^* s_{0,\ p} = \widetilde{s}_{\widetilde{\Lambda},\ p}$，且积分(4.1) 在 X的任意紧子集上一致收敛。这证明了第一个断言。

另一方面，再次利用 (4.4) 和 (4.5)，对任意 $x \in \widetilde{X}$ 和 $p \in \mathbb{N}^*$，有

$$\begin{aligned} \pi^* s_{\Lambda,p}(x) &= \int_\Lambda \sum_{[g] \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} \sum_{g_0 \in \Gamma_0} (g^{-1} g_0^{-1}, 1).\widetilde{P}_p(g_0 g.x, y).\zeta^p f(y) dv_\Lambda(y) \\ &= \sum_{[g] \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} \int_\Lambda \sum_{g_0 \in \Gamma_0} (g^{-1}, 1).\widetilde{P}_p(g.x, g_0^{-1}.y) g_0^{-1}.\zeta^p f(\widetilde{y}) dv_\Lambda(\widetilde{y}) \\ &= \sum_{[g] \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} \int_{\widetilde{\Lambda}} (g^{-1}, 1).\widetilde{P}_p(g.x, \widetilde{y}).\widetilde{\zeta}^p \widetilde{f}(\widetilde{y}) dv_{\widetilde{\Lambda}}(\widetilde{y})\ , \end{aligned} \tag{4.7}$$

其中我们将 $x \in X_0$ 与到 X的提升等同。因此我们有 $\pi^* s_{\Lambda,\ p} = \widetilde{s}_{\Lambda,\ p}$，并且（4.2）中的级数在紧子集上绝对且一致收敛。特别地，由命题3.4 可知 $s_{\Lambda,\ p}$ 由再生性质（3.4）刻画，而定理 3.5 表明（4.2）在 $p \in \mathbb{N}^*$ 充分大时不消失。□

现设 $K_{\widetilde{X}}$、K_X 为 X、$X = X/\Gamma$ 的典范线丛，并赋予由 g^{TX}、g^{TX} 诱导的埃尔米特度量 $h^{K_{\widetilde{X}}}$、h^{K_X}，至多相差一个公共乘性常数。于是 $K_{\widetilde{X}} = \pi^* K_X$，并且由于 $g^{TX} = \pi^* g^{TX}$，我们得到 $h^{K_{\widetilde{X}}} = \pi^* h^{K_X}$。于是若 $\gamma\colon\ S^1 \to X$ 是 g^{TX} 的一条测地线环路，则存在 $g_0 \in \Gamma$ 以及一条覆盖 γ 的测地线 $\widetilde{\gamma}\colon\ S^1 \to X$，使得对所有 $t \in \mathbb{R}$ 有 $\widetilde{\gamma}(t+1) = g_0.\widetilde{\gamma}(t)$，其中当 g_0 生成自由子群 $\Gamma_0 \subset \Gamma$ 时取 $S^1 = \mathbb{R}$，否则取 $S^1 = S^1$。在第一种情形下，我们称 $g_0 \in \Gamma$ 是斜驶的，并且 $\widetilde{\gamma}$ 由 g_0生成。于是若测地线 $\gamma\colon\ S^1 \to X$ 满足玻尔 - 索末菲条件，则我们恰好处于定理 4.1 的情形，其中 Γ_0 是由 $g_0 \in \Gamma$ 生成的 Γ 的子群，且（L，h^L）如引理 3.2 中所述。在引理 3.2 所考虑的维数 $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$ 的情形下，相应各向同性态的再生公式（3.4）在 [6, § 3.2, (2)] 中被称为沿测地线 γ 的周期公式。

5. 厄米对称空间上的 POINCAR´E 级数

定理 4.1 在以下情形中特别有意思：X 具有较大的自同构群，且其伯格曼核具有显式形式，因此这种方法能够生成种类繁多、可显式计算的相对庞加莱´级数。这通常适用于

厄米对称空间，它们是全纯自守形式理论所研究的空间。

设 X 是一个维数为 n 的复流形， G 是一个李群，其通过双全纯映射在 X 上传递地作用。假设存在一个处处不为零的全纯 n-形式 $\nu \in H^0(X, K_{\widetilde{X}})$，并令

$$g.\nu_z = (dg^{-1})^*.\nu_z =: \lambda(g,z)\nu_{g.z} \tag{5.1}$$

表示 $g \in G$ 在 $K_{\widetilde{X}}$ 上的诱导作用，其中对于任意 $z \in X$， $\lambda(g, z) \in \mathbb{C}$。定义 X 上的体积形式 $d\mu$ 如下：

$$d\mu := \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \nu \wedge \overline{\nu}\ . \tag{5.2}$$

设 $L^2(X, \mathbb{C}, d\mu)$ 是与 $d\mu$ 相关的 L^2-空间， $H^0_{(2)}(X, \mathbb{C}, d\mu)$ 是全纯 L^2-函数构成的子空间。设 $P_{d\mu}(\cdot, \cdot) \in \mathscr{C}^\infty(X \times X, \mathbb{C})$ 为 的正交投影 $P_{d\mu}: L^2(X, \mathbb{C}, d\mu) \to H^0_{(2)}(X, \mathbb{C}, d\mu)$ 相对于 $d\mu$ 的施瓦茨核。它由以下条件唯一确定：

- $P_{d\mu}(z, w)$ 关于 $z \in X$ 全纯，关于 $w \in X$反全纯
- $P_{d\mu}(z, w) = P_{d\mu}(w, z)$ 对所有 $z, w \in X$
- 对于任意 $f \in H^0_{(2)}(X, \mathbb{C}, d\mu)$ 和 $z \in X$，以下公式成立，

$$f(z) = \int_{\widetilde{X}} P_{d\mu}(z,w) f(w) d\mu(w)\ . \tag{5.3}$$

我们对 $(X, d\mu)$ 作如下假设：

$$\begin{aligned} &\text{For any } x \in \widetilde{X}, \text{ there exists } f \in H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \mathbb{C}, d\mu) \text{ with } f(x) \neq 0, \text{ and} \\ &\text{for any } v \in T_x\widetilde{X}, \text{ there exists } f \in H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \mathbb{C}, d\mu) \text{ with } f(x) = 0 \text{ and } df.v \neq 0\ . \end{aligned} \tag{5.4}$$

注意，如果 X 是一个 有界对称域，其 $\mathbb{C}^n$ 并取 $\nu = dz$，那么 $d\mu$ 是勒贝格测度，这些假设对 $(X, d\mu)$成立。一般而言，$\mathbb{C}^n$ 域连同 $\nu = dz$ 总是满足假设（5.4），而此类具有李群 G 的传递双全纯作用的域称为厄米对称域。

如 [11, 定理 5.1], 所述，在假设（5.4）下，我们有 $P_{d\mu}(z, z) > 0$ 对所有 $z \in X$，且公式

$$\omega_z := \sqrt{-1}\partial\overline{\partial} \log P_{d\mu}(z,z) \quad \text{for all } z \in \widetilde{X}\ , \tag{5.5}$$

在 X上定义了一个 G不变的 K¨ahler 形式。由此诱导的度量 g^{TX} 称为*Bergman* 度量，我们用 $dv_{\widetilde{X}}$表示(X, g^{TX})的黎曼体积形式。设 $|\cdot|_{K_{\widetilde{X}}}$ 为典范线丛$K_{\widetilde{X}}$ 上的厄米范数，其定义公式为

$$d\mu =: |\nu|^2_{K_{\widetilde{X}}} dv_{\widetilde{X}}\ . \tag{5.6}$$

由（5.2）可知，相关的厄米度量 $h^{K_{\widetilde{X}}}$在 $K_{\widetilde{X}}$上 G不变，且等于由 g^{TX} 诱导的度量除以 2^n。此外，正如 [20,IV. § 1， 命题 3], 的证明中所解释的，我们有

$$\sqrt{-1}R^{K_{\widetilde{X}}} = \omega\ , \tag{5.7}$$

其中， $R^{K_{\widetilde{X}}}$是$(K_{\widetilde{X}}, h^{K_{\widetilde{X}}})$的陈联络的曲率。

现在考虑由 L^2和 $\mathscr{C}^\infty(X,K_{\widetilde{X}})$ 诱导的 $h^{K_{\bar{x}}}$和 g^{TX}（如(1.2)所定义）的 $L^2(X,K_{\widetilde{X}})$-Hermitian乘积，并令其为相应的希尔伯特空间。由（5.6），存在一个等距映射

$$L^2(\widetilde{X},\mathbb{C},d\mu)\longrightarrow L^2(\widetilde{X},K_{\widetilde{X}}) \qquad f\longmapsto f\nu\ , \tag{5.8}$$

将 $H^0_{(2)}(X,\mathbb{C},d\mu)$ 与 $H^0_{(2)}(X,K_{\widetilde{X}})$ 识别。记 $P^{K_{\bar{x}}}(\cdot,\cdot)$ 为相对于 $dv_{\widetilde{X}}$ 的 $H^0_{(2)}(X,K_{\widetilde{X}})$ 的伯格曼核，则

$$P^{K_{\bar{x}}}(z,w)=P_{d\mu}(z,w)\nu_z\overline{\nu}_w\ , \tag{5.9}$$

经由由 $h^{K_{\bar{x}}}$ 诱导的识别 $K^*_{\widetilde{X}}\overline{\simeq}K_{\widetilde{X}}$。

最后，设 (L,h^L) 是 X 上的全纯厄米线丛，并且 G 在 $\widetilde{X}$ 上的作用可提升到该线丛上。假设存在一个识别 $(\widetilde{L}^q,h^{\widetilde{L}^q})\simeq(K^p_{\widetilde{X}},h^{K^p_{\widetilde{X}}})$，且该识别与 G 的作用相容，其中 $p,q\in\mathbb{N}^*$。令 $P^L(\cdot,\cdot)$ 为相对于 $dv_{\widetilde{X}}$ 的 $H^0_{(2)}(X,L)$ 的伯格曼核。那么，如 [12, Ex. 7.7]，中所述，存在一个常数 $c_{p,q}>0$，使得

$$P^{\widetilde{L}^q}(z,w)=c_{p,q}P_{d\mu}(z,w)^p\nu_z^p\,\overline{\nu}_w^p, \tag{5.10}$$

对所有 $z,\ w\in X$。

由于 G在 X上具有传递性，且由(5.7) 可知，我们看到上述 (X,J,g^{TX}) 和 (L,h^L) 满足定理 2.2 的假设。因此，对于任意有效作用且满足 $\mathrm{Vol}(X/\Gamma)<+\infty$ 的离散子群 $\Gamma\subset G$，我们可以将定理 4.1 应用于此情形，特别地，由定理 2.2、(5.1) 和 (5.10)，可知存在 $p_0\in\mathbb{N}^*$，使得对所有 $p\geq p_0$，庞加莱′级数

$$\pi^*P^{K^p_X}(\pi(z),\pi(w))=c_p\left(\sum_{g\in\Gamma}\lambda(g,z)^{-p}P_{d\mu}(g.z,w)^p\right)\nu_z^p\,\overline{\nu}_w^p, \tag{5.11}$$

在 z上 $w\in K\times X\cup X\times K$一致收敛；$K\subset X$其中 $c_p>0$对于所有 $p\geq p_0$。当 维数$_{\mathbb{C}}X=1$时，若测地线 $\widetilde{\gamma}:\ \mathbb{R}\to X$ 由双曲型元素 $g_0\in\Gamma$生成，则可利用定理 4.1 构造与诱导测地线环路 ′相关的相对庞加莱级数 $\gamma:\ S^1\to X$，它满足周期公式（3.4）；下面将展示若干情形，在这些情形下可以对其进行显式计算。在所有这些情形中，定理 4.1 表明存在 $p_0\in\mathbb{N}^*$，使得当 $p\geqslant p_0$ 充分大时，这些级数不恒为零。

注 5.1。在下一节中，G 在 (X,L) 上的作用将不是有效的，但而是满足以下性质：自然投影 $\pi:\ G\to\mathrm{Aut}(X)$ 的核是有限的。在这种情况下，如果 $\Gamma\subset G$是一个离散子群，则商线丛 $L=L/\Gamma$一般不是一个真轨形线丛，因此定理2.2 甚至无从谈起。相反，L 的真性等价于 $\Gamma\subset G$满足以下条件：

$$g\in\Gamma\text{ acts trivially on }\widetilde{L}\text{ if and only if }g\text{ acts trivially on }\widetilde{X}\ . \tag{5.12}$$

在此假设下，Γ 在 (X,L) 上的作用可通过其像 Γ 的作用因子化，所映射为 $\pi:\ G\to\mathrm{Aut}(X)$。于是我们可以改用 Γ，相应的庞加莱级数′如公式（5.11）所示，只相差一个乘法因子，该因子等于基数 $\mathrm{Ker}[\pi:\Gamma\to\Gamma]$。

注意，条件（5.12）对 $L=K_{\widetilde{X}}$ 总是成立；或者当 Γ 在 L上有效作用时也是如此。下一节中，为简便起见，我们假设 Γ 有效作用，但第6 节的所有结果实际上在更一般的假设（5.12）下也成立。

6. 庞加莱级数的主要例子

本节将介绍第5节中讨论的厄米对称域的主要例子，并在具体情形下明确写出公式（5.11）。特别地，我们给出一些新的相对庞加莱 ′级数的例子，这些级数定义在 $\mathbb{C}^n$ 的域上；定理 4.1 表明它们并非恒等于零。

例 1. 考虑特殊线性群

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1 \right\} \tag{6.1}$$

作用于庞加莱上半平面 $\mathbb{H} = \{ z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C} : \quad y > 0 \}$ 其作用公式为

$$g.z := \frac{az + b}{cz + d} . \tag{6.2}$$

~设定 $n \in \mathbb{N}^*$ 并令 $X = \mathbb{H}^n$。于是群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^n$ 在 $\mathbb{H}^n$ 上的作用，在每个直和项上均由 (6.2) 给出。若 $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^n$ 是一个离散子群，则商空间 $X := \mathbb{H}^n/\Gamma$ 称为希尔伯特模曲面。于是我们处于上文讨论的情形，其中 $\nu = dz := dz_1 \ldots dz_n$是 $\mathbb{H}^n$上的典范截面。 $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^n$ 通过推前在 $K_{\mathbb{H}^n}$ 上的作用（如 (5.1) 所示）在 $z \in \mathbb{H}^n$ 处由下式给出

$$g.dz = \prod_{j=1}^{n} (c_j z_j + d_j)^2 dz =: j(g, z)^2 dz , \tag{6.3}$$

其中， a_j、 b_j、 c_j、 $d_j \in \mathbb{R}$ 是 $g = (g_1$、 …、 $g_n)$ 的第 j 个求和项作为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的矩阵时的各个条目。按照（5.6）在 $K_{\mathbb{H}^n}$ 上定义的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^n$-不变度量 $h^{K_{\mathbb{H}^n}}$ 由下式给出

$$|dz|^2_{K_{\mathbb{H}^n}} = \prod_{j=1}^{n} y_j^2 , \tag{6.4}$$

~其中 $z = (x_1 + \sqrt{-1}y_1$、 …、 $x_n + \sqrt{-1}y_n) \in \mathbb{H}^n$。令 L 为 $\mathbb{H}^n$ 上的平凡全纯丛~，其具有处处不为零的全纯截面 $\sigma \in H^0(\mathbb{H}^n$、 $L)$。我们通过以下公式定义 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^n$ 在 L 上的作用的提升~ ~，以及一个 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^n$-不变度量 h^L

$$g.\sigma_z = j(g, z)\sigma_{g.z} \quad \text{and} \quad |\sigma_z|^2_{\widetilde{L}} = \prod_{j=1}^{n} y_j . \tag{6.5}$$

这给出了一个 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^n$-等变识别 $(\widetilde{L}^2$、 $h^{\widetilde{L}^2}) \simeq (K_{\mathbb{H}^n}$、 $h^{K_{\mathbb{H}^n}})$，通过该识别$\sim\sigma^2 = dz$。当 $p \in \mathbb{N}^*$、 $p > 2$ 时， $H^0_{(2)}(\mathbb{H}^n$、 $L^p)$ 的伯格曼核可以由证明 [7, II. § 1，命题 1.2] 得到，并且为

$$P^{\widetilde{L}^p}(z, w) = \left(\frac{p-1}{4\pi} \right)^n \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{2\sqrt{-1}}{z_j - \overline{w}_j} \right)^p \sigma_z^p \, \overline{\sigma}_w^p , \tag{6.6}$$

~对任意 z， $w \in \mathbb{H}^n$，通过将 σ 与 h^L的度量对偶 σ 相识别。于是我们得到以下结果。

命题 6.1. 设 $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^n$ 是一个有效作用且满足 $Vol(\mathbb{H}^n/\Gamma) < +\infty$的离散子群。那么对于任意紧集 $K \subset \mathbb{H}^n$，存在 $p_0 \in \mathbb{N}^*$，使得对所有$p \geq p_0$ 以及所有 $w \in K$，收敛级数

$$\sum_{g \in \Gamma} j(g, z)^{-p} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{2\sqrt{-1}}{g_j.z_j - \overline{w}_j} \right)^p , \tag{6.7}$$

在 $z \in \mathbb{H}^n$中不恒等于零。

~证明。容易验证，区域 $X = \mathbb{H}^n$ 连同处处不消失的全纯 n-形式$\nu = dz$ 以及由公式 (6.3) 描述的 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^n$ 作用，满足假设 (5.4)。如第5节末尾所述，这意味着上述区域~ ~以及全纯厄米线丛 (L, h^L) 满足定理 2.2 的假设~。然后取 $X = \mathbb{H}^n/\Gamma$、$L = L/\Gamma$和 $\Lambda = \{w\}$，由~ ~(5.11)、(6.3) 和 (6.6)，级数 (6.7) 与 (4.2) 的截面 $\widetilde{s}_\Lambda$，$_p \in H^0_{(2)}(X, L)$ 相同，至多相差一个乘性常数。因此，定理 6.1 是定理 4.1 的推论。□

在定理 6.1的假设下，空间 $H^0_{(2)}(X, L^p)$ 与以下空间相同：权为 p的希尔伯特尖点形式，其对应关系由恒等式给出

(6.8) $$f(g.z)\, dz = f(z)\, g.dz = f(z) j(g, z)^2\, dz\,.$$

对于 Γ上的 $K_{\mathbb{H}^n}$ 之上的 $\mathbb{H}^n$。于是，定理 6.1 改进了经典结果，该结果见 [7, I.命题 5。6], , 证明这些级数对无穷多个 $p \in \mathbb{N}^*$均不为零。

在 $n = 1$ 且 p 为偶数的情形下，因此我们可以将 L 替换为 K_X，与测地线相关的相对庞加莱′级数（如定理 4.1 所述）已由 Katok 在[9]中研究。特别地，她证明了与双曲型 测地线相关的级数，也就是由斜驶元素生成的测地线（定义见第 4节末），生成权为 $2p$的尖点形式空间，对所有 $p \in \mathbb{N}^*$均成立。以下结果则表明，当 $p \in \mathbb{N}^*$ 足够大时，这些级数不为零。

定理 6.2. [8, 定理 6.7,(6.18)] 设 $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 是一个有效作用且满足体积$(\mathbb{H}/\Gamma)$ $< +\infty$的离散子群，设 $g_0 \in \Gamma$是一个双曲型元素，并设$\Gamma_0 \subset \Gamma$ 是由 g_0生成的子群。则存在 $p_0 \in \mathbb{N}^*$，使得对任意 $p \geq p_0$，该收敛级数

(6.9) $$\widetilde{s}_{\gamma,p}(z) = \sum_{[g] \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} j(g, z)^{-2p} \frac{1}{(c(g.z)^2 + (d-a)(g.z) - b)^p} dz^p\,,$$

在 $z \in \mathbb{H}$中并非恒为零。

~ ~证明。考虑第4节的设定，其中取 $X = \mathbb{H}$ 与 $L = K_{\widetilde{X}}$，从而 $X = \mathbb{H}/\Gamma$ 与~$L = K_X$。设 $\widetilde{\gamma}: \mathbb{R} \to X$ 为由 $g_0 \in \Gamma$生成的测地线，并将 $\gamma: S^1 \to X$记为在商空间中诱导的测地线环路，按引理 3.2 将其视为 (X, K_X) 的紧致 Bohr-Sommerfeld 子流形 (S^1, γ, ζ)。则由定理 4.1，我们得到 $p_0 \in \mathbb{N}$，使得由 (4.2) 定义的关联截面 $\widetilde{s}_{\gamma,p} \in H^0(\mathbb{H}, K^p_{\mathbb{H}})$ 对$p \geq p_0$不为零。

另一方面，由 [9, 命题 4]以及 [9,(1.3)], 中给出的显式公式，对所有 $p \in \mathbb{N}^*$，由公式（6.9）诱导的 $H^0_{(2)}(X, K^p_X)$的截面满足(S^1, γ, ζ)的刻画性质（3.4），至多相差一个乘性常数 $C_p > 0$。由命题3.4，我们推出该截面等于$C_p \widetilde{s}_{\gamma,p}$，因而并不恒为零。□

在光滑紧致双曲黎曼曲面(X, g^{TX})的情形下，这就是 [3,定理4.11]的结果。

例2。 设 $n \in \mathbb{N}^*$，并考虑辛群

(6.10)
$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \,:\, A^T C,\, B^T D \text{ symmetric}\,,\; A^T D - C^T B = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \right\}$$

作用于西格尔上半空间

(6.11) $$H_n = \{Z = X + \sqrt{-1}Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \ : \ Z \text{ symmetric}, \ Y \text{ positive definite}\}$$

由公式

(6.12) $$g.Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \ .$$

于是我们处于上文讨论的情形，其中 $\nu = dZ$ 是 K_{H_n}在 H_n上的典范截面，将其视为 $\mathbb{C}^{n(n+1)/2}$中的一个区域。 $g \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ 在 K_{H_n} 上的作用如（5.1）所示，在 $Z \in H_n$ 处由下式给出

(6.13) $$g.dZ = \det(CZ + D)^{n+1} dZ =: J(g, Z)^{n+1} dZ \ ,$$

而 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$-不变度量 $h^{K_{H_n}}$ 在 K_{H_n} 上的定义同（5.6），其公式为

(6.14) $$|dZ|^2_{K_{H_n}} = \det Y^{n+1} \ .$$

令 L 为 H_n上的平凡全纯丛，其具有处处不为零的全纯截面 $\sigma \in H^0(H_n, \ L)$。我们定义作用的提升：将 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ 的作用提升到 L 上，并定义 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$-不变度量 h^L，对所有 $Z \in H_n$ 和 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$，由以下公式给出

(6.15) $$g.\sigma_Z = J(g, Z)\, \sigma_{g.Z} \quad \text{and} \quad |\sigma_Z|^2_L = \det Y \ ,$$

这给出了一个 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$-等变识别 $(\widetilde{L}^{n+1}, \ h^{\widetilde{L}^{n+1}}) \simeq (K_{H_n}, \ h^{K_{H_n}})$，通过该识别$\sigma^{n+1} = dZ$。

$H^0_{(2)}(\mathbb{H}, \ L^p)$ 的伯格曼核在 $p \in \mathbb{N}^*, \ p > 2n$ 下的表达式，例如可在 [10, III. 命题 1] 中计算得出，并且为

(6.16) $$P^{\widetilde{L}^p}(Z, W) = \frac{a_{n,p}}{\det(Z - \overline{W})^p} \sigma_Z^p \, \overline{\sigma}_W^p \ ,$$

对任意 $Z, \ W \in H_n$，通过将 σ 识别为 h^L下 σ 的度量对偶。常数 $a_{n, \ p} > 0$ 可在 [10, 第 78]，页找到，但由于 [10, 第 10] 页中体积形式的归一化方式不同，结果相差乘法因子 $2^{n(n-1)/2}$。于是我们得到以下结果。

命题 6.3。 设 $\Gamma \subset Sp_{2n}(\mathbb{R})$ 是一个有效作用且满足 $Vol(H_n/\Gamma) < +\infty$的离散子群。那么对任意紧集 $K \subset H_n$，存在 $p_0 \in \mathbb{N}^*$，使得对任意$p \geq p_0$ 及任意 $W \in K$，收敛级数

(6.17) $$\sum_{g \in \Gamma} J(g, Z)^{-p} \frac{1}{\det(g.Z - \overline{W})^p} \ ,$$

在 $Z \in H_n$ 中并非恒为零。

证明。 由（5.11）、（6.13）和（6.16），这是定理 4.1 在取 $X = H_n$、$\Lambda = \{W\}$ 和 L 如上所述时的推论，其论证方式与定理 6.1 的证明相同。 □

例 3。 设 $n \in \mathbb{N}^*$，并考虑 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上由下式给出的厄米形式 $Q(\cdot, \ \cdot)$

(6.18) $$Q(z, w) = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k - z_0 \overline{w}_0 \ ,$$

对任意 $(z_0, \ \ldots\ldots, \ z_n)$，$(w_0, \ \ldots\ldots, \ w_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$。设 $\mathrm{SU}(n, \ 1) \subset \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ 为 $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ 中保持 Q 的子群。

考虑开集 $\{z_0 \neq 0\} \subset \mathbb{CP}^n$ 上的标准仿射坐标卡，它在齐次坐标下将 $z = (z_1, \ \ldots\ldots, \ z_n) \in \mathbb{C}^n$ 等同于 $[1 : \ z_1 : \ \cdots : \ z_n] \in \mathbb{CP}^n$。于是 $SU(n, \ 1)$ 在 $\mathbb{CP}^n$ 上的诱导作用通过这些坐标保持开单位球 $B_n \subset \mathbb{C}^n$，并且在 B_n 上是传递的。

令 L 为从 $\mathbb{CP}^n$ 到 B_n的重言线丛的拉回。回顾一下，全-次多项式 $P(z) = z_0$ 可视为其对偶 L^*的一个截面，因此

z_0 的对偶 σ 是 L 上的一个处处不为零的全纯截面。$SU(n,1)\subset \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ 对 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的作用在 L上诱导出一个作用，很容易看出，对于任意$g\in \mathrm{SU}(n,1)$ 和 $z\in B_n$，该作用由下式给出：

$$g.\sigma=(c.z+d)\sigma=:\mathfrak{J}(g,z)\sigma\ , \tag{6.19}$$

其中我们记

$$g=\begin{pmatrix} A & b\\ c^T & d\end{pmatrix},$$

其中 $A\in M_n(\mathbb{C})$，b，$c\in\mathbb{C}^n$ 和 $d\in\mathbb{C}$，并且 $c.z:=\sum_{j=1}^n c_jz_j$，其中 $z=(z_1,\ldots,z_n)\in B_n$。

设 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $\mathbb{C}^n$ 上的标准Hermitian乘积，并令 $|\cdot|$ 为相应的范数。我们用以下公式定义 $z\in B_n$ 处 L 上的 $\mathrm{SU}(n,1)$-不变度量 h^L：

$$|\sigma_z|^2_L=(1-|z|^2). \tag{6.20}$$

于是存在一个典范的 $\mathrm{SU}(n,1)$-等变识别，将全纯Hermitian向量丛 $(\widetilde{L}^{n+1},\ h^{\widetilde{L}^{n+1}})\simeq(K_{B_n},\ h^{K_{B_n}})$ 联系起来，在此识别下，dz 对应于 σ^{n+1}，其中$h^{K_{B_n}}$ 是 K_{B_n} 上的度量，按（5.6）中的定义取 $\nu=dz$。由于 B_n 是一个有界对称域，我们实际上处于第5节所述的情形。

$H^0_{(2)}(B_n,\ L^p)$ 的伯格曼核例如可见于 [12, (8.10.2), (8.10.5)]，对任意 $p\in\mathbb{N}^*$ 和 $z,\ w\in B_n$ 其表达式为

$$P^{\widetilde{L}^p}(z,w)=\frac{n!}{\pi^n}\binom{n+p}{n}\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^p}\sigma_z^p\,\overline{\sigma}_w^p\ , \tag{6.21}$$

通过将 σ 与 σ 关于 h^L的度量对偶相识别。于是得到以下结果。

命题 6.4。设 $\Gamma\subset \mathrm{SU}(n,1)$ 是一个有效作用且满足 $Vol(B_n/\Gamma)<+\infty$的离散子群。那么对任意紧集 $K\subset B_n$，存在 $p_0\in\mathbb{N}^*$，使得对任意$p\geq p_0$ 和 $w\in K$，收敛级数

$$\sum_{g\in\Gamma}\mathfrak{J}(g,z)^{-p}\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^p}\ , \tag{6.22}$$

在 $z\in B_n$中不恒等于零。

证明。由 (5.11)、(6.19) 和 (6.21)，这可由定理 4.1 得到，其中 $X=B_n$，$\Lambda=\{w\}$ 以及 L 如上所述，证明方式与定理 6.1的证明相同。□

如上所述，空间 $H^0_{(2)}(X,L^p)$ 与权为 p 的尖点形式空间相对应。当 $2(n+1)$ 整除 p 时，我们将 L 替换为 K_X^2，Foth 和 Katok 在 [6] 中研究了与引理 3.2 中所述测地线相关的相对 Poincar´e 级数。特别地，他们证明，与斜驶的测地线相关的级数生成了所有 $k\in\mathbb{N}^*$ 下权为 $2(n+1)k$ 的尖点形式空间。此外，若双曲型元素 $g_0\in\Gamma$ 的所有特征值均为实数，且由 g_0 生成的测地线 $\widetilde{\gamma}\subset B_n$ 的端点 x、$y\in\partial B_n$ 属于 $\mathbb{R}^n\subset\mathbb{C}^n$，那么 Barron 在 [2, § 2.2] 中证明，测地线 $\widetilde{\gamma}\subset B_n$ 满足定义 3.1 意义下的玻尔-索末菲条件。以下结果再次表明，当 $p\in\mathbb{N}^*$ 足够大时，这些级数不会消失。对于光滑紧流形 (X,g^{TX})，该结果由 Barron 在 [2，定理 3.3] 中证明。

定理 6.5. 设 $\Gamma\subset \mathrm{SU}(n,1)$ 是一个有效作用且满足体积$(B_n/\Gamma)<+\infty$ 的离散子群，设 $g_0\in\Gamma$ 是具有实特征值的双曲型元素，并设 $\Gamma_0\subset\Gamma$ 是由 g_0 生成的子群。设 $\widetilde{\gamma}:\ \mathbb{R}\to B_n$ 是由 g_0 生成的测地线，并设x、$y\in\partial B_n$ 是 B_n 的边界上由 $\widetilde{\gamma}$ 连接的两个点，并假设 x、$y\in\mathbb{R}^n$。

则存在 $p_0 \in \mathbb{N}^*$，使得对所有 $p \geq p_0$，该收敛级数

$$s_{\gamma,p}(z) = \sum_{[g]\in\Gamma_0\backslash\Gamma} \mathfrak{J}(g,z)^{-2(n+1)p} \frac{1}{(\langle g.z,x\rangle\langle g.z,y\rangle)^{(n+1)p}}\, \sigma_z^p\,, \tag{6.23}$$

在 $z \in B_n$中并非恒为零。

~~证明。考虑第4节的设定，其中 $X = B_n$ 与 $L = K_{B_n}^2$，从而 $X = B_n/\Gamma$~~与$L = K_X^2$。记 $\gamma:\ S^1 \to X$ 为由 $\widetilde{\gamma}:\ \mathbb{R} \to X$ 在商空间中诱导的测地线环路，从而根据Barron在 [2, § 2.2]中的结果，(S^1,γ,ζ)是(X,K_X^2)的紧致 Bohr-Sommerfeld 子流形。然后，如第4节最后一段所说明的，我们可以应用定理 4.1 得到 $p_0 \in \mathbb{N}$，使得由(4.2)定义的关联截面$\widetilde{s}_{\gamma,p} \in H^0(B_n, K_{B_n}^{2p})$对 $p \geq p_0$不消失。

另一方面，根据 [6, 定理 14] 以及 [6, § 6.3],中给出的显式公式，对所有 $p \in \mathbb{N}^*$，由公式（6.23）诱导的 $H^0_{(2)}(X,K_X^{2p})$的截面满足(S^1,γ,ζ)的刻画性质（3.4），至多相差一个显式乘性常数 C_p >0。由命题3.4，我们推出该截面等于$C_p\,\widetilde{s}_{\Lambda,p}$，因而并不恒为零。□

此外，若 $n = 2$，并且对于SU(2,1)中一个具有实特征值的双曲型元素 $g_0 \in \Gamma$，Barron在 [5, § 3、§ 4] 中考虑了与某些值得注意的拉格朗日环面相关联的相对Poincar´e级数，并显式地计算了它们。下述结果表明，当 $p \in \mathbb{N}^*$ 充分大时，这些级数不为零。

定理 6.6。设 $\Gamma \subset \mathrm{SU}(2,1)$ 是一个有效作用并满足体积 $Vol(B_2/\Gamma) < +\infty$的离散子群，设 $g_0 \in \Gamma$是一个具有实特征值的双曲型元素，并设 $\Gamma_0 \subset \Gamma$是由 g_0生成的子群。设 $\widetilde{\gamma}:\ \mathbb{R} \to B_2$ 是由 g_0生成的测地线，设x、$y \in \partial B_2$ 是由 $\widetilde{\gamma}$ 连接的 B_2 的边界上的两个点，并设 $v \in \mathbb{C}^n$ 是 g_0 所对应于特征值1的特征向量。

Then 对于任意 $l \in \mathbb{N}^*$，存在 $p_0 \in \mathbb{N}^*$，使得对于所有 $p \geq p_0$，该收敛级数 *es*

$$\sum_{[g]\in\Gamma_0\backslash\Gamma} \mathfrak{J}(g,z)^{-2p} \frac{\langle z,v\rangle^{2l}}{(\langle z,x\rangle\langle z,y\rangle)^{3p+l}}\,, \tag{6.24}$$

在 $z \in B_2$中不恒等于零。

证明。对于任意 $l \in \mathbb{N}^*$ 以及由具有实~~特征值的上述双曲型元素生成的 $\Gamma_0 \subset$ SU(2, 1)，Barron 在 [5, § 4] 中构造了一个满足玻尔-索末菲条件的拉格朗日子流形 Λ_l，并利用命题 3.4 的再生性质证明，在 [5, 命题4.7] 中，(6.24) 与各向同性态相差一个乘性常数，该各向同性态与拉格朗日环面 $\Lambda_l := \Lambda_l/\Gamma_0$ 相关联。由定理 4.1 可知，对于任意 $l \in \mathbb{N}^*$，存在 $p_0 \in \mathbb{N}^*$，使得 (6.24) 对任意 $p \geqslant p_0$ 在 $z \in B_n$ 中都不恒等于零。□

对于光滑紧流形（X, g^{TX}）的情形，该结果在 [5, § 4]~~中利用 [3, 定理3.2] 以及 Λ_l 为拉格朗日这一事实推导得出。

参考文献

[1] N. ALLUHAIBI AND T. BARRON, 有界对称域上的向量值自守形式,《全球分析与几何年刊》, 55 (2019), pp. 417–441.[2] T. BARRON, 球商空间上的闭测地线与多重正则截面,《复分析与协同》, 5 (2019), pp. Paper No. 5, 8.[3] D. BORTHWICK, T. PAUL, AND A. URIBE, 勒让德分布及其在相对庞加莱´级数中的应用,《数学创刊》, 122 (1995), pp. 359–402.[4] X. DAI, K. LIU, AND X. MA,伯格曼核的渐近展开,《微分几何杂志》, 72 (2006), pp. 1–41.

[5] T. FOTH, 复双曲空间上的玻尔-索末菲环面与相对庞加莱´级数, 《通讯：分析与几何》, 10 (2002), pp. 151–175.[6] T. FOTH AND S. KATOK, 复双曲空间上自守形式的张成集与标架流的动力学, 《遍历理论与动力系统》, 21 (2001), pp. 1071–1099.[7] E. FREITAG, 希尔伯特模形式, 施普林格出版社, 柏林, 1990.[8] L. IOOS, 量子化与各向同性子流形, 《密歇根数学杂志》, 71 (2022), pp. 177–220.[9] S. KATOK, 闭测地线、周期与模形式的算术, 《数学创刊》, 80 (1985), pp. 469–480.[10] H. KLINGEN, 西格尔模形式导论, 剑桥高等数学研究丛书第20卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1990.[11] S. KOBAYASHI, 有界域的几何, 《美国数学会汇刊》, 92 (1959), pp. 267–290.[12] J. KOLL´AR, 沙法列维奇映射与自守形式, M. B. Porter讲座, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 1995.[13] Z. LU AND S. ZELDITCH, Szeg¨o核与庞加莱´级数, 《数学分析杂志》, 130 (2016), p. 167–184.[14] X. MA, 轨形与解析挠率, 《美国数学会汇刊》, 357 (2005), pp. 2205–2233.[15] X. MA AND G. MARINESCU, 辛流形上的广义伯格曼核, 《巴黎科学院报告》, 339 (2004), pp. 493–498.[16] X. MA AND G. MARINESCU, 自旋狄拉克算子的伯格曼核渐近展开的首批系数, 《国际数学杂志》, 17 (2006), pp. 737–759.[17] X. MA AND G. MARINESCU, 全纯莫尔斯不等式与伯格曼核, 数学进展第254卷, Birkh¨auser出版社, 巴塞尔, 2007.[18] X. MA AND G. MARINESCU, 伯格曼核渐近展开的指数估计, 《数学年刊》, 362 (2015), pp. 1327–1347.[19] J. MILNOR, 关于曲率与基本群的注记, 《微分几何杂志》, 2 (1968), pp. 1–7.[20] N. MOK, 厄米局部对称流形上的度量刚性定理, 纯数学丛书第6卷, 世界科学出版公司, 蒂内克, 新泽西州, 1989.[21] P. PETERSEN, 黎曼几何, 数学研究生教材第171卷, 施普林格, 查姆, 第三版, 2016.[22] A. WEIL, 《关于卡勒流形的导论》, 科学与工业时事丛书第 1267 卷 , 赫尔曼出版社 , 巴黎 , 1958.

塞尔吉-蓬图瓦兹巴黎大学，95300 塞尔吉-蓬图瓦兹，法国电子邮箱: louis.ioos@cyu.fr

华中科技大学数学与统计学院、湖北省工程建模与科学计算重点实验室，武汉 430074，中国电子邮箱: wlu@hust.edu.cn

南开大学陈省身数学研究所与 LPMC，天津 30071，中华人民共和国电子邮箱: xiaonan.ma@nankai.edu.cn

科隆大学数学研究所，Weyertal 86-90，50931 科隆，德国；罗马尼亚科学院西米翁·斯托伊洛夫数学研究所，布加勒斯特，罗马尼亚电子邮箱: gmarines@math.uni-koeln.de