混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 控制的策略优化：良性非凸性与全局最优性

Chih-Fan Pai [a]、Yuto Watanabe [a]、Yujie Tang [b]、Yang Zheng [a]

[a] *Department of Electrical and Computer Engineering, University of California San Diego, CA 92093.*
[b] *School of Advanced Manufacturing and Robotics, Peking University*

arXiv:2603.04843v1 [math.OC] 5 Mar 2026

摘要

混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 控制通过在 $\mathcal{H}_\infty$ 约束下最小化 $\mathcal{H}_2$ 代价界，在性能与鲁棒性之间取得平衡。然而，经典的黎卡提方程/LMI 解法对非凸优化景观的洞察有限，且难以直接扩展到大规模或数据驱动场景。本文从现代策略优化的视角重新审视混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 控制，涵盖一般的双通道与单通道情况。一个核心结果是，两种情形都具有良性非凸结构：
every stationary point is globally optimal。我们刻画了受 $\mathcal{H}_\infty$约束的可行集：它是开的、路径连通的，其边界恰好由使 $\mathcal{H}_\infty$ 约束达到饱和的策略给出。我们还证明，混合目标函数在内部是实解析的，并给出了显式梯度公式。我们的关键分析建立在扩展凸提升（ECL）框架之上，该框架连接了非凸策略优化与凸重构。ECL 构造依赖于非严格黎卡提不等式，使我们能够刻画全局最优性。这些见解揭示了混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$控制中的隐藏凸性，并有助于在大规模设置中设计可扩展的策略迭代方法。

Key words: P策略优化、全局最优性、非凸优化、最优与鲁棒控制。

1 引言

性能与鲁棒性是控制设计中的两个核心目标： $\mathcal{H}_2$ 控制优化平均性能[1], ，而 $\mathcal{H}_\infty$ 控制则保证在最坏情况下的安全性 [2]。混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 控制提供了一个在两者之间进行权衡的系统框架，由此形成了数十年来广泛研究的多种形式 [3–7]。其中，一种颇具影响力的形式是设计一个稳定化控制器，使其在满足 $\mathcal{H}_\infty$ 约束[4,5]的条件下最小化 $\mathcal{H}_2$ 代价上界。基于耦合黎卡提方程[4] 或线性矩阵不等式（LMIs） [5] 的经典解法已经十分成熟，但对于其背后的优化景观却缺乏深入理解。此外，这些方法本质上依赖模型，并且随着系统维度增加而难以扩展，从而限制了它们在大规模或数据驱动场景中的适用性。

相比之下，策略优化已成为控制器设计中一种颇具前景的替代方案 [8, 9], ，其灵感源自强化学习在序贯决策和连续控制任务中的成功 [10]。尽管策略空间是非凸的，近期研究仍揭示了各种控制问题中的良性景观，例如稳定化 [11, 12], 、线性二次型调节（LQR） [13–15],、线性二次高斯（LQG） [16–18], 以及动态滤波 [19]。对于这些控制问题，驻点可能是全局最优的；在温和的假设下，基于梯度的方法能够实现全局收敛。

这些良性优化景观结果背后的一个关键洞见是，许多非凸控制问题可通过适当的变量变换重构为凸问题。具体而言，基于线性矩阵不等式的综合方法虽然涉及辅助李雅普诺夫变量，却为分析策略优化的几何提供了一个视角 [14,16,19–22]。这一视角已在扩展凸提升（ECL）框架中得到形式化，该框架系统地连接了经典凸重构与现代非凸策略优化 [23],。ECL框架具有广泛的适用性，涵盖状态反馈和输出反馈 $\mathcal{H}_2$ 以及$\mathcal{H}_\infty$ 控制，以及分布式控制。

在本文中，我们从现代策略优化的视角重新审视经典的混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 控制设计。基于 $[4, 5]$, 的经典表述，我们分析一般双通道情形及其单通道特例，并系统研究相关的非凸优化景观。我们的结果揭示了隐藏凸性，并证明不存在伪驻点。除了为现代控制中的非凸优化带来新的理论见解外，这些结果还将推动大规模和/或无模型数据驱动场景下的混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 设计。

1.1 我们的贡献

本文从现代非凸优化的视角，对混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$状态反馈控制进行了系统研究。具体而言，我们的主要贡献如下：

⋆ Chih-Fan Pai、Yuto Watanabe 和 Yang Zheng 的工作得到美国国家科学基金会 CMMI 2320697 和美国国家科学基金会 CAREER 2340713 的支持。*Email addresses:* cpai@ucsd.edu（Chih-Fan Pai）、y1watanabe@ucsd.edu（Yuto Watanabe）、yujietang@pku.edu.cn（Yujie Tang）、zhengy@ucsd.edu（Yang Zheng）。

（1）基本景观性质。我们分析了非凸可行集的几何结构。已知该集合是开且路径连通的（引理2）。我们进一步精确刻画了其边界，即恰好使 $\mathcal{H}_\infty$ 约束达到饱和的策略集合（定理1和推论1）。我们还考察了混合代价函数的景观。该代价函数在定义域内部实解析，在其定义域的闭包上连续（定理 2 和引理 3）。因此，混合代价函数是光滑的，我们还给出了其显式梯度公式（引理4和引理5）。这些结果为我们分析混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 控制的驻点性、全局最优性和可解性奠定了基础。

(2) 驻点的全局最优性。我们研究双通道混合控制的全局最优性。 [24]中的单通道设置是其特例。尽管该问题具有非凸性，我们仍证明不存在伪驻点（定理3）。这一性质结合梯度表达式，重新得到了经典的最优性条件（推论2和推论3）。我们进一步分析了存在性与唯一性，证明单通道情形始终存在唯一驻点（定理 5），而双通道情形则可能不存在（事实1）。尽管如此，我们证明，当鲁棒性约束得到充分放宽时，驻点仍然存在（定理4）。

(3) 通过ECL进行分析。我们为双通道混合控制明确构造了扩展凸提升（ECL）（定理 6）。尽管依赖经典的LMI技术，我们的凸提升构造并非易事，因为我们需要使用非严格的黎卡提不等式和线性矩阵不等式，这不同于基于严格不等式的经典次优控制器综合 [5]。这一关键区别使ECL框架能够在整个可行集上证明驻点的全局最优性。此外，所得的凸重构（定理7）不仅保持了原非凸问题的最优值，还能在纳入边界策略时保证可解性（命题1）。

1.2 相关工作

混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 控制。混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 控制的研究可追溯至 [4,5], 的奠基性工作，他们将问题表述为在满足 $\mathcal{H}_\infty$ 约束的条件下最小化 $\mathcal{H}_2$ 代价上界。 [4] 首次通过耦合黎卡提方程确立了这一表述的可解性，随后 [5] 提出了一种更易处理的次优控制器综合方法。后来， [25]证明了一个特例等同于最大熵 $\mathcal{H}_\infty$ 控制 [26]。 [27], 还提出了纳什博弈表述，将混合设计构建为双人博弈，并用耦合黎卡提方程刻画最优控制器。除了分析方法之外， [7], 还提出了一种非光滑优化方法，通过邻近控制算法确保收敛至控制器的一个驻点。此外， [28], 也开发了基于LMI的方法，通过半定规划提供数值解。最近， [24] 研究了单通道情形的策略梯度方法，表明迭代过程会隐式地始终满足 $\mathcal{H}_\infty$ 约束优化，并收敛至全局最优策略。尽管他们的分析证明了驻点的全局最优性，但该分析仅适用于 [5], 中更广泛表述下的一个特殊单通道情形，并依赖于博弈论论证，对于不熟悉动态博弈论的读者而言可能较难理解 [29]。

控制中的策略优化。近年来，直接策略搜索在动力系统控制中的应用日益受到关注 [8,10]。对于经典线性二次调节器，代价具有强制性且梯度占优，因此策略梯度方法能够全局收敛 [13–15]。马尔可夫跳变线性二次调节 [30], 、分布式线性二次调节 [31,32],、线性二次博弈 [33,34],以及混合设计 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ [24]也已证实具有类似的良性优化景观。对于非光滑 $\mathcal{H}_\infty$ 优化，已有工作证明状态反馈 [21], 具有全局收敛性，并表明静态输出反馈 [35]可收敛至 Goldstein驻点。部分观测和动态输出反馈会带来更复杂的优化景观：在 LQG 中，可控且可观的驻点均为全局最优，尽管可能存在鞍点 [36, 37], ，这促使人们研究逃离鞍点 [17] 的方法和黎曼梯度方法 [38]。对于动态输出反馈 $\mathcal{H}_\infty$，稳定控制器构成非凸集合，且该集合可能不连通 [22],，但所有非退化的 Clarke驻点均为全局最优 [37]。关于近期的两篇综述，请参阅 [8,9] 。

非凸控制的凸提升。越来越多的研究利用凸重构来分析非凸控制景观 [14–16,19–21]。许多经典控制问题都可以通过基于线性矩阵不等式的重构来处理[28], ，这解释了策略优化中观察到的良性几何性质。例如，凸重参数化可实现连续时间线性二次调节中的全局收敛 [14, 15],，并证明离散时间 $\mathcal{H}_\infty$ 控制 [21]中 Clarke驻点的全局最优性。向输出反馈情形的扩展包括用于动态估计的凸提升策略 [19] ，以及关于 $\mathcal{H}_\infty$ 控制 [36]的全局最优性结果。最近，ECL框架 [23] 统一了这些观点，涵盖静态与动态策略、光滑与非光滑代价，并依据非严格线性矩阵不等式区分退化与非退化策略。

1.3 论文结构

本文其余部分安排如下。第 2 节 formulates 混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 策略优化问题。第 3 节考察可行集的几何性质及代价函数的结构特性。第4节确立主要的全局最优性结果，并刻画最优性条件以及驻点的存在性与唯一性。第 5 节介绍分析所依据的 ECL 框架，并为混合控制构建专用的 ECL。第 6 节报告数值结果，第 7 节总结全文。技术性证明见附录。

记号。我们用 $\mathbb{S}^k$ 表示 $k \times k$ 实对称矩阵的集合。对于 M_1, $M_2 \in \mathbb{S}^k$，若 $M_2 - M_1$ 为正定（半正定），则记为 $M_1 \prec (\preceq) M_2$ 和 $M_2 \succ (\succeq) M_1$。矩阵的弗罗贝尼乌斯范数记为 $\|\cdot\|$。我们分别用 I_n 和 $0_{m\times n}$ 表示 $n \times n$ 单位矩阵和 $m \times n$ 零矩阵；在上下文明确时省略其下标。对于拓扑空间的子集 S，$\mathrm{int}(S)$ 表示其内部，$\mathrm{cl}(S)$ 表示其闭包。

2 预备知识

本节介绍混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 控制问题，并给出我们的问题陈述。

2.1 系统动力学与鲁棒性

考虑如下连续时间线性动力系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t), \tag{1}$$

其中，$x(t) \in \mathrm{R}^n$ 为状态，$u(t) \in \mathrm{R}^m$ 为控制输入，$w(t) \in \mathrm{R}^n$ 为扰动。我们关注如下形式的静态状态反馈策略：$u(t) = Kx(t)$，其中$K \in \mathrm{R}^{m\times n}$。稳定化策略集合定义为

$$\mathcal{K} = \left\{K \in \mathrm{R}^{m\times n} \mid A+BK \text{ is Hurwitz}\right\}. \tag{2}$$

下文将 $A_K := A+BK$ 和 $W := B_w B_w^\mathsf{T}$分别记为。

在标准线性二次调节器（LQR）中，扰动 $w(t)$被建模为具有单位协方差的零均值白高斯噪声，即 $\mathrm{E}[w(t)w(\tau)] = \delta(t-\tau)I_n$。目标是找到一个稳定策略 $K \in \mathcal{K}$，使平均代价 $\lim_{T\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{T}\int_0^T x(t)^\mathsf{T} Q_2 x(t) + u(t)^\mathsf{T} R_2 u(t)\, dt\right]$ 最小，其中 $Q_2 \succeq 0$ 和 $R_2 \succ 0$ 为性能权重矩阵。众所周知，LQR 可等价地表述为 $\mathcal{H}_2$ 最优控制 [39]: $\min_{K\in\mathcal{K}} \|\mathbf{T}_2(K)\|_{\mathcal{H}_2}^2$，其中 z_2 定义了性能输出，而 $\mathbf{T}_2(K)$表示从 w 到 z_2 的传递函数，如下所示

$$z_2 := \begin{bmatrix} Q_2^{1/2} x \\ R_2^{1/2} u \end{bmatrix},\ \mathbf{T}_2(K) = \begin{bmatrix} Q_2^{1/2} \\ R_2^{1/2} K \end{bmatrix} (sI - A_K)^{-1} B_w. \tag{3}$$

另一方面，$\mathcal{H}_\infty$ 鲁棒控制将扰动 $w(t)$视为能量有界的对抗性输入。其目标是设计一个稳定策略 $K \in \mathcal{K}$，使最坏情况代价$\sup \int_0^\infty x(t)^\mathsf{T} Q_\infty x(t) + u(t)^\mathsf{T} R_\infty u(t) dt$ 在约束 $\|w\|_{\ell_2}^2 = \int_0^\infty w^\mathsf{T}(t) w(t) dt \le 1$ 和$x(0)=0$下最小化，其中 $Q_\infty \succ 0$和 $R_\infty \succ 0$。该问题等价于 $\mathcal{H}_\infty$ 最优控制 [39]: $\inf_{K\in\mathcal{K}} \|\mathbf{T}_\infty(K)\|_{\mathcal{H}_\infty}$，其中 z_∞ 定义了 $\mathcal{H}_\infty$ 性能输出，$\mathbf{T}_\infty(K)$表示从 w 到 z_∞ 的传递函数，如下所示

$$z_\infty := \begin{bmatrix} Q_\infty^{1/2} x \\ R_\infty^{1/2} u \end{bmatrix},\ \mathbf{T}_\infty(K) = \begin{bmatrix} Q_\infty^{1/2} \\ R_\infty^{1/2} K \end{bmatrix} (sI - A_K)^{-1} B_w. \tag{4}$$

也可考虑一种混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 设计

$$\begin{aligned} \inf_{K\in\mathcal{K}} \quad & \|\mathbf{T}_2(K)\|_{\mathcal{H}_2}^2, \\ \text{subject to} \quad & \|\mathbf{T}_\infty(K)\|_{\mathcal{H}_\infty} < \beta, \end{aligned} \tag{5}$$

其中 β 是给定的界。这里，$\mathcal{H}_2$ 通道刻画标称性能，而 $\mathcal{H}_\infty$ 通道保证系统鲁棒性。值得注意的是，这两个通道可以是不同的 [4,5]，也可以是相同的 [24,25]。我们将 $\mathcal{H}_\infty$ 约束下的稳定化策略的可行集定义为

$$\mathcal{K}_\beta := \{K \in \mathcal{K} \mid \|\mathbf{T}_\infty(K)\|_{\mathcal{H}_\infty} < \beta\}. \tag{6}$$

请注意，通常使用严格的 $\mathcal{H}_\infty$ 界来确保存在定义良好的稳定化黎卡提解 [5,24,25]。

2.2 混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 设计的策略优化

尽管问题 (5) 的表述简单，但求解起来颇具挑战 [40,41]。 [4] 中的一种经典方法是在可行集 $\mathcal{K}_\beta$ 上最小化 $\mathcal{H}_2$ 代价的一个上界。

回顾一下，任意稳定策略 $K \in \mathcal{K}$ 的 $\mathcal{H}_2$ 代价为 $\|\mathbf{T}_2(K)\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \mathrm{tr}((Q_2 + K^\mathsf{T} R_2 K)\, \hat{}\, X_K)$，其中 $\hat{}\, X_K$ 是李雅普诺夫方程的唯一解

$$A_K \hat{X}_K + \hat{X}_K A_K^\mathsf{T} + W = 0. \tag{7}$$

为满足式 (6) 中的 $\mathcal{H}_\infty$ 约束，我们转而考虑黎卡提方程 [3–5] 的稳定化解 X_K

$$A_K X_K + X_K A_K^\mathsf{T} + \beta^{-2} X_K S_K X_K + W = 0, \tag{8}$$

其中 $S_K := Q_\infty + K^\mathsf{T} R_\infty K$。根据有界实引理（见引理1），当且仅当式 (8) 存在唯一的稳定化解 $X_K \succeq 0$，使得矩阵 $A_K + \beta^{-2} X_K S_K$ 为赫尔维茨矩阵时，策略 $K \in \mathcal{K}_\beta$ 才满足条件。从式 (8) 中减去式 (7)，得到

$$A_K(X_K - \hat{X}_K) + (X_K - \hat{X}_K) A_K^\mathsf{T} + \beta^{-2} X_K S_K X_K = 0.$$

由于 A_K 为赫尔维茨矩阵，且最后一项为半正定，因此可得 $X_K - X_K \succeq 0$，进而 $\mathcal{H}_2$ 代价存在上界 $\|\mathbf{T}_2(K)\|_{\mathcal{H}_2}^2 \le \mathrm{tr}((Q_2 + K^\mathsf{T} R_2 K) X_K)$，对所有 $K \in \mathcal{K}_\beta$ 均成立。因此，我们定义混合代价

$$J_{\mathrm{mix}}(K) := \mathrm{tr}((Q_2 + K^\mathsf{T} R_2 K) X_K), \quad \forall K \in \mathcal{K}_\beta, \tag{9}$$

其中，X_K 是方程 (8) 的唯一稳定化解。

总之，我们考虑以下混合设计 [3–5]

$$\inf_{K\in\mathcal{K}_\beta} J_{\mathrm{mix}}(K). \tag{10}$$

与 $\mathcal{H}_2$ 代价不同，J_{mix} 使用方程 (8) 中的黎卡提解 X_K 进行计算，而非使用方程 (7) 中的李雅普诺夫解 X_K。由于式 (10) 中的代价和约束通常由不同的信号 z_2 和 z_∞定义，我们将这种形式称为双通道混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 设计。

我们在全文中采用以下标准假设。

假设 1 (A, B) 可稳定，且 $(Q_2^{1/2}, A)$ 可检测。此外，鲁棒性参数满足 $\beta > \beta^* := \inf_{K\in\mathcal{K}} \|\mathbf{T}_\infty(K)\|_{\mathcal{H}_\infty}$。

为便于分析，我们再作一个假设 [14,42]。

假设2 矩阵 Q_2 为半正定。矩阵 W、Q_∞、R_2和 R_∞ 为正定。

注1（单通道情形）当 $\mathcal{H}_2$ 和 $\mathcal{H}_\infty$通道共享相同的性能输出时，式 (9) 中的 J_{mix} 可简化。具体而言，在式 (3) 和 (4) 中令 $Q := Q_2 = Q_\infty$ 和 $R := R_2 = R_\infty$，从而 $z_2 = z_\infty$。在假设 1 下，

$$J_{\mathrm{mix}}(K) = \mathrm{tr}(P_K W), \quad \forall K \in \mathcal{K}_\beta, \tag{11a}$$

其中 P_K 是黎卡提方程的稳定化解

$$A_K^\mathsf{T} P_K + P_K A_K + \beta^{-2} P_K W P_K + Q + K^\mathsf{T} R K = 0 \tag{11b}$$

其中 $A_K + \beta^{-2} W P_K$ 赫尔维茨。更多细节见附录 A.1。正如我们将看到的，这种重新表述得出了更简单的梯度公式和闭式最优解。□

2.3 问题陈述

混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 设计的经典解法主要依赖黎卡提方程或线性矩阵不等式。这些方法对中小规模系统有效，但对优化景观的洞察有限，并且在高维或数据驱动场景中可能面临挑战。

在本文中，我们从非凸优化的视角重新审视式（10）中的混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 控制。我们的目标是揭示关键的结构性质，并为策略优化奠定理论基础，重点关注以下三个方面：

（1）优化景观的几何。我们研究式（6）中受 $\mathcal{H}_\infty$约束的可行域 $\mathcal{K}_\beta$ 的几何，并分析式（9）中混合代价函数的关键性质，包括连续性、解析性和梯度表达式。

（2）驻点的全局最优性。我们考察问题（10）是否存在伪驻点，并进一步推导最优性条件，分析驻点的存在性与唯一性。

（3）基于 ECL 框架的分析。我们探究能否通过适当的凸提升揭示问题（10）中的隐藏凸性。具体而言，我们考察能否构造扩展凸提升（ECL），以证明驻点的全局最优性。

总的来说，我们的结果通过非凸优化和凸提升，重新阐释了混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 控制，并为大规模或无模型设置下设计有原则的策略优化算法提供了指导。

3 基本景观性质

本节研究式（10）的优化景观，即可行集 $\mathcal{K}_\beta$ 的几何性质以及混合代价函数 J_{mix}的结构性质。

3.1 $\mathcal{H}_\infty$ 约束定义域的几何性质

我们从有界实引理的一个版本开始，该引理将黎卡提方程（或不等式）与 $\mathcal{H}_\infty$ 范数的上界联系起来。这里我们稍微滥用了矩阵 A、 B和 C的记号，但在上下文中不会造成混淆。

引理1（有界实引理 [39,推论13.24]）考虑传递函数 $\mathrm{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B$，其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$、 $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$且 $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$。那么，对于任意$\beta > 0$，以下陈述等价。

(1) 矩阵 A 是赫尔维茨矩阵，且 $\|\mathrm{G}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} < \beta$。(2) 存在一个 $X \succ 0$满足Riccati不等式

$$AX + XA^{\mathsf{T}} + \beta^{-2}XC^{\mathsf{T}}CX + BB^{\mathsf{T}} \prec 0. \tag{12}$$

(3) 黎卡提方程

$$AX + XA^{\mathsf{T}} + \beta^{-2}XC^{\mathsf{T}}CX + BB^{\mathsf{T}} = 0 \tag{13}$$

存在唯一的稳定化解

$$\begin{matrix} X & A + \\ \beta^{-2}XC^{\mathsf{T}}C & \end{matrix} \quad \text{（即，该矩阵是赫尔维茨矩阵），且满足} \quad \begin{matrix} X \succeq 0 & A\ B \end{matrix}$$

。若(,)进一步可控，则有 $X \succ 0$。

由 [39, 推论13, 13], 式（13）的稳定化解 X 也是最小的，即对于任意其他对称解 $X \preceq \hat{X}$ $\hat{X}$（13）的解。此性质阐明了定义混合代价函数（9）时稳定化解的含义，因为它给出了相应 $\mathcal{H}_2$ 范数的最紧上界。

引理1对于理解混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 设计(10)的可行集和代价函数起着关键作用。下面总结 $\mathcal{K}_\beta$ 的若干基本性质。

引理2 假设假设1和假设2成立。(6)中的集合 $\mathcal{K}_\beta$具有以下性质：

(1) 它始终非空、开且路径连通；(2) 一般而言，它是非凸且无界的。

证明：根据假设1， $\mathcal{K}_\beta$ 非空这一点可直接得出。为证明其开性，我们对传递函数 $\mathrm{T}_\infty(K)$ 应用引理1。这保证了当且仅当存在满足严格 Riccati不等式的 $X \succ 0$ （其正定性由 $W \succ 0$ 保证）时， $K \in \mathcal{K}_\beta$

$$A_K X + X A_K^{\mathsf{T}} + \beta^{-2} X S_K X + W \prec 0. \tag{14}$$

由于该不等式是严格的，同一个 $X \succ 0$ 保证该不等式对 K 周围足够小邻域内的所有 K' 均成立。因此， $\mathcal{K}_\beta$ 是开集。

可采用与 [22,第三节A部分]类似的策略来证明路径连通性。对式（14）应用舒尔补并引入变量替换 $K = YX^{-1}$ 后可知，当且仅当存在满足 $\mathrm{F}_{\text{cvx}} \prec 0$ 的矩阵 $X \succ 0$ 和 Y 时， $K \in \mathcal{K}_\beta$

$$\mathrm{F}_{\text{cvx}} := \begin{bmatrix} AX + XA^{\mathsf{T}} + BY + Y^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} + W & XQ_\infty^{1/2} & Y^{\mathsf{T}}R_\infty^{1/2} \\ Q_\infty^{1/2}X & -\beta^2 I & 0 \\ R_\infty^{1/2}Y & 0 & -\beta^2 I \end{bmatrix}. \tag{15}$$

上述不等式在提升变量 (X, Y) 上定义了一个凸集。由于映射 $K = YX^{-1}$ 连续，因此可得 $\mathcal{K}_\beta$ 是路径连通的。

尽管 $\mathcal{K}_\beta$的非凸性众所周知，但其无界性尚未得到讨论[1]。下面的例子说明了 $\mathcal{K}_\beta$的非凸性和无界性。□

例1 考虑 $A = -I_2$、 $B = B_w = Q_\infty = R_\infty = I_2$以及在式 (6) 中具有如下形式的策略： $K = \left[\begin{smallmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{smallmatrix}\right]$，其中 $\mathcal{K}_\beta$。令$\beta = 3.5$。我们通过数值计算验证

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{K}_{3.5}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{K}_{3.5},$$

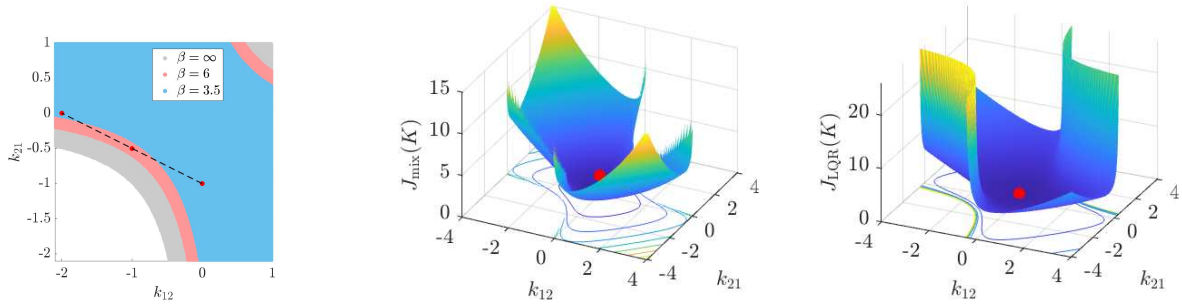
但$K_3 = \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \notin \mathcal{K}_\beta$。为说明$\mathcal{K}_\beta$的无界性，我们在下文解析地计算 $\mathcal{H}_\infty$ 范数

$$\|\mathbf{T}_\infty(K)\|_{\mathcal{H}_\infty} = \frac{\sqrt{k^2+1}}{1-k} < 1.1, \quad \forall K = k \cdot I_2,\ k < 0.$$

这意味着对于任意 $\beta > 1.1$， $\mathcal{K}_\beta$ 都是无界的。

图 1(a) 绘制了 $\mathcal{K}_\beta$ 在子空间 $k_{11} = k_{22} = 0$上的限制，其中 $\beta = 3.5$、6 和 ∞ （即无约束镇定集$\mathcal{K}$）。标记为红色的策略 K_1、 K_2 和 K_3展示了 $\beta = 3.5$的非凸性。正如预期，可行集 $\mathcal{K}_\beta$ 会随着 β 的增大而扩大。□

[1] 离散时间中的集合 $\mathcal{K}_\beta$ 是有界的，这是因为离散时间 $\mathcal{H}_\infty$ 函数 [21] 具有强制性。



(a) $\mathcal{K}_\beta$的非凸性　(b) 非凸且非强制的 J_{mix}　(c) 非凸且强制的 J_{LQR}

图1。(a) 例1中不同 β 下，带有 $k_{11}=k_{22}=0$ 的非凸 $\mathcal{K}_\beta$。(b)–(c) 例2中代价的非凸性和（非）强制性；(b)和(c)的可行集分别为 $\mathcal{K}_{3.5}$ 和 $\mathcal{K}_\infty$。红点标示全局最小值。

接下来，我们刻画 $\mathcal{K}_\beta$的边界。这将在后续讨论 J_{mix}的性质时发挥作用。

定理1 令 cl($\mathcal{K}_\beta$) 表示式(6)中定义的 $\mathcal{K}_\beta$ 的闭包。在假设1和假设2下，我们有

$$\mathrm{cl}(\mathcal{K}_\beta)=\{K\in\mathcal{K}\mid\|\mathbf{T}_\infty(K)\|_{\mathcal{H}_\infty}\le\beta\}.$$

定理1看起来或许显而易见，但其论证实际上颇为微妙。例如，考虑 $f(x)=x^2(x+1)$以及 $C_1=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)<0\}$, $C_2=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\le 0\}$。显然，$C_2$ * cl(C_1), 因为无法通过 C_1中的任何序列逼近 $0\in C_2$。事实上，定理1依赖 $\mathcal{H}_\infty$ 范数的基本性质，以处理上述问题以及边际稳定策略。完整细节见附录A.2。

定理1意味着，$\mathcal{K}_\beta$的边界记为$\partial\mathcal{K}_\beta:=\mathrm{cl}(\mathcal{K}_\beta)\backslash\mathcal{K}_\beta$，它是范数$\mathcal{H}_\infty$ 等于 β的稳定化策略集合。注意，$\partial\mathcal{K}_\beta$ 可能是无界的。

推论1 在假设1和假设2下，$\mathcal{K}_\beta$的边界满足 $\partial\mathcal{K}_\beta\subseteq\{K\in\mathcal{K}\mid\|\mathrm{T}_\infty(K)\|_{\mathcal{H}_\infty}=\beta\}$.

3.2 混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 代价函数的解析性

现在我们来考察代价函数的一些性质。由引理2可知，J_{mix} 是非凸的。接下来的结果表明，它在可行集 $\mathcal{K}_\beta$上是实解析的（因此也是无穷可微的）。

定理 2 在假设 1 下，式（9）中的混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 代价函数 J_{mix} 在 $\mathcal{K}_\beta$上是实解析的。

注意，J_{mix} 是通过式（8）的稳定化解X_K 定义的，该解没有闭式表达。相反，我们使用隐函数定理 [43,定理2.3。5]证明，X_K 关于 $K\in\mathcal{K}_\beta$解析依赖。因此，代价 J_{mix} 是实解析的。证明细节见附录A.4。

由于 $\mathcal{K}_\beta$ 是开集，问题 (10) 的最优值可能无法取到，而只能在边界 $\partial\mathcal{K}_\beta$处逼近。为刻画这一极限行为，我们将 J_{mix} 扩展至 $\partial\mathcal{K}_\beta$。根据推论1，任意 $K\in\partial\mathcal{K}_\beta$ 都满足 $\|\mathrm{T}_\infty(K)\|_{\mathcal{H}_\infty}=\beta$，因此引理1不再适用，且 (8) 不存在稳定化解。尽管如此，已知 (8) 仍存在唯一极小解 X_K，其特征值位于闭左半平面$A_K+\beta^{-2}X_KS_K$ 中（推论 13.13，引理 13.17]）。因此，我们将边界代价定义为

$$\tilde{J}_{\mathrm{mix}}(K)=\mathrm{tr}((Q_2+K^{\mathsf{T}}R_2K)X_K),\quad\forall K\in\partial\mathcal{K}_\beta,\quad(16)$$

其中 X_K 是(8)的最小解。

上述扩展是连续的：当 $K\in\mathcal{K}_\beta$趋近边界点 $K_0\in\partial\mathcal{K}_\beta$时，代价收敛至 $J_{\mathrm{mix}}(K_0)$。引理 3 设假设1和假设2成立。给定任意边界点 $K_0\in\partial\mathcal{K}_\beta$，有

$$\lim_{K\to K_0,K\in\mathcal{K}_\beta}J_{\mathrm{mix}}(K)=\tilde{J}_{\mathrm{mix}}(K_0).$$

该证明依赖于Riccati极小解的一个非平凡连续性结果 [44, 定理11.2.1]，细节见附录 A.3。作为引理 3的直接推论，代价 J_{mix} 是非强制的，当 K 且 $\|K\|<\infty$ 趋近 $\mathcal{K}_\beta$的边界时仍保持有限。尽管如此，由于 J_{mix} 是强制性LQR代价的逐点上界，它表现出部分强制性：$J_{\mathrm{mix}}(K)\to\infty$ 当 $\|K\|\to\infty$。

例2（非强制性）考虑例1中的问题实例。我们设定 $\beta=3.5$ 和 $Q_2=R_2=I_2$以定义 J_{mix}。为便于比较，我们还考虑极限情形 $\beta=\infty$，它退化为LQR 代价 J_{LQR}。全局最优解为 $K^*=-0.4193I_2$（对 J_{mix}）以及 $K^*_{\mathrm{LQR}}=(1-\sqrt{2})I_2$（对 J_{LQR}）。图1(b)描绘了 $K=K^*+\left[\begin{smallmatrix}0&k_{12}\\k_{21}&0\end{smallmatrix}\right]$ 时的 J_{mix}，而图1(c)绘制了 $K=K^*_{\mathrm{LQR}}+\left[\begin{smallmatrix}0&k_{12}\\k_{21}&0\end{smallmatrix}\right]$时的 J_{LQR}。如图1(b)所示，代价 J_{mix} 在 K 且 $\|K\|<\infty$ 趋近边界 $\partial\mathcal{K}_\beta$时保持有界，而不像$J_{\mathrm{LQR}}$ 在图1(c)中发散。□

定理 2 保证 J_{mix} 是无穷可微的。特别地，我们有以下梯度公式。

引理 4 假设假设 1 成立。对于任意 $K\in\mathcal{K}_\beta$，J_{mix} 的策略梯度为

$$\nabla J_{\mathrm{mix}}(K)=2(R_2K+B^{\mathsf{T}}\Gamma_K+\beta^{-2}R_\infty KX_K\Gamma_K)X_K,\quad(17a)$$

其中，X_K 是黎卡提方程 (8) 的稳定化解，而 Γ_K 是以下李雅普诺夫方程的唯一解

$$\tilde{A}_K^{\mathsf{T}}\Gamma_K+\Gamma_K\tilde{A}_K+Q_2+K^{\mathsf{T}}R_2K=0\quad(17b)$$

其中 $\tilde{A}_K:=A_K+\beta^{-2}X_KS_K$ 稳定。

引理 4 适用于一般双通道情形。在 $z_2=z_\infty$ 的单通道情形下，可以利用 (11) 推导出另一种梯度表达式。

引理 5 假设假设 1 成立。若 $z_2=z_\infty\in$　(3)

且满足 (4)，则 J_{mix} 的策略梯度可计算为

$$\nabla J_{\mathrm{mix}}(K) = 2(RK + B^{\mathsf{T}} P_K)\Lambda_K, \quad \forall K \in \mathcal{K}_\beta \tag{18a}$$

其中， P_K 是黎卡提方程 (11b) 的稳定化解， Λ_K 是李雅普诺夫方程的解

$$\hat{A}_K \Lambda_K + \Lambda_K \hat{A}_K^{\mathsf{T}} + W = 0 \tag{18b}$$

其中 $\hat{} \; A_K := A_K + \beta^{-2} W P_K$ 为稳定解。

(17) 中的公式也适用于单通道情形，只需令 $Q_2 = Q_\infty$ 和 $R_2 = R_\infty$。尽管在数学上等价，(18) 中的替代表达式更有利于分析。我们的引理4和引理5的证明基于 [16, 附录 B.4]，中将李雅普诺夫方程的灵敏度分析应用于黎卡提情形的策略。具体细节见附录 A.5。

备注 2（与线性二次调节器的比较）引理4和引理5表明，计算 ∇J_{mix} 需要求解一个黎卡提方程和一个李雅普诺夫方程，比线性二次调节器情形稍微复杂一些；后者只需两个李雅普诺夫方程 *[45,* 第 IV 节 *]*。注意，当 $\beta \to \infty$ 时，(9) 和 (11) 中的 J_{mix} 化简为J_{LQR}，且两个梯度公式均化简为 ∇J_{LQR}。特别地，有 $\nabla J_{\mathrm{LQR}}(K) = 2(R_2 K + B^{\mathsf{T}} \Gamma_K) X_K$，其中 X_K 和 Γ_K 是李雅普诺夫方程的解

$$\begin{aligned} &A_K X_K + X_K A_K^{\mathsf{T}} + W = 0, \\ &A_K^{\mathsf{T}} \Gamma_K + \Gamma_K A_K + Q_2 + K^{\mathsf{T}} R_2 K = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

这是预期的，因为当 $\beta \to \infty$ 时，(10) 会退化为线性二次调节器。 □

4 无伪驻点

本节将刻画混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 设计(10) 的全局最优性。

4.1 任意驻点都是全局最优的

由于 $\mathcal{K}_\beta$ 是开集， J_{mix} 的任何局部极小值都必须位于其内部，因此必定是一个驻点。尽管存在非凸性，我们仍证明了一个关键结论： (10) 的每个驻点（若存在）都是全局最优的。

定理3 假设假设1和假设2成立。对于任意策略 $K \in \mathcal{K}_\beta$，如果 K 是一个驻点，即 $\nabla J_{\mathrm{mix}}(K) = 0$，那么 K 是 (10) 的全局极小值。

由于不存在伪驻点，混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 设计（10）呈现出隐藏凸性：每个局部最小值都是全局最优。这与近期关于状态反馈问题中良性非凸性的研究结果相一致，例如线性二次调节器 [13–15] 和 $\mathcal{H}_\infty$ 控制 [21, 23, 46]。

定理3与 [24, 命题 A.5],的关系最为密切，后者证明了单通道情形下所有驻点的全局最优性。其证明依赖于博弈论表述，而该表述能否扩展到双通道情形 (10) 尚不明确。相比之下，我们的方法基于近期提出的 ECL框架 [23]，所实现的凸重构，更为直观，并直接处理一般的双通道问题。从这个意义上说， [24, 命题 A.5] 可视为定理 3 的一个特例。我们的证明包含一个显式的 ECL 构造，需要对（非）严格黎卡提不等式进行仔细分析。详情见第 5 节。

基于引理 4 和定理3，我们进一步推导出刻画问题 ($R_\infty =$) 全局最优解的驻点条件。为简化表达，我们假设以 作为设计参数 。

$$\alpha^2 R_2 \qquad \alpha \geq 0$$

推论 2 假设假设1和假设2成立，并假设 $R_\infty = \alpha^2 R_2$ 对于某个 $\alpha \geq 0$成立。则策略 $K \in \mathcal{K}_\beta$是（10）的全局最优解，当且仅当存在矩阵$\Gamma \succeq 0$ 和 $X \succ 0$ 满足以下条件:

$$K = -R_2^{-1} B^{\mathsf{T}} \Gamma \left(I + \beta^{-2} \alpha^2 X \Gamma\right)^{-1}, \tag{20a}$$

$$A_K X + X A_K^{\mathsf{T}} + \beta^{-2} X S_K X + W = 0, \tag{20b}$$

$$\tilde{A}_K^{\mathsf{T}} \Gamma + \Gamma \tilde{A}_K + Q_2 + K^{\mathsf{T}} R_2 K = 0, \tag{20c}$$

其中 $\tilde{A}_K := A_K + \beta^{-2} X S_K$ 进一步是赫尔维茨的。

证明：我们从两个方向证明其等价性。

$\Rightarrow$。假设 $K \in \mathcal{K}_\beta$ 是（10）的全局最优解。由于 $\mathcal{K}_\beta$是开集，我们必须有 ∇J_{mix}（K） $= 0$。利用梯度公式（17）并令 ∇J_{mix}（K） $= 0$ ，可得

$$2(R_2 K + B^{\mathsf{T}} \Gamma_K + \beta^{-2} R_\infty K X_K \Gamma_K) X_K = 0, \tag{21}$$

其中， X_K 是黎卡提方程 (8) 的唯一稳定化解， Γ_K 满足李雅普诺夫方程 (17b)。由于 $W \succ 0$，有界实引理保证 $X_K \succ 0$。此外，(17b) 意味着 $\Gamma_K \succeq 0$。因此，矩阵 $I + \beta^{-2} \alpha^2 X_K \Gamma_K$ 可逆。令 $\Gamma := \Gamma_K$ ，且 $X := X_K$。然后利用 $R_\infty = \alpha^2 R_2$，我们可以重新整理 (21)，得到 (20a)。显然，(8) 和 (17b) 分别对应于 (20b) 和 (20c)。因此，三个最优性条件均得到满足。

$\Leftarrow$。假设存在满足 (20a) 至 (20c) 的 $X \succ 0$ 和 $\Gamma \succeq 0$ 。根据 (20b) 以及 A_K的稳定性，引理1意味着 $K \in \mathcal{K}_\beta$。将 (20a) 中 K 的表达式代入梯度公式 (17)，可确认 $\nabla J_{\mathrm{mix}}(K) = 0$。最后，根据定理3，我们得出 K 是 (10) 的全局极小值。□

推论 2 给出了策略 $K \in \mathcal{K}_\beta$ 达到全局最优的充要条件。 [4, 定理41] 中也通过拉格朗日乘子推导出了类似条件，但只证明了其必要性。

显然，推论 2 也适用于单通道情形。然而，式 (11) 中的另一种表述使式 (18) 中的梯度表达式更简单，并进一步加深了我们对全局最优性的理解。为说明这一点，在$W \succ 0$时，李雅普诺夫方程 (18b) 的解 Λ_K 是正定的，因此，驻点条件 $\nabla J_{\mathrm{mix}}(K) = 0$ 意味着 $K = -R^{-1} B^{\mathsf{T}} P_K$. 。将其代入黎卡提方程 (11b) 后，可得到一个单一的黎卡提方程，如下所述。

推论3 在假设1和假设2下，若 $z_2 = z_\infty$ 满足式 (3) 和 (4)，则策略 $K \in \mathcal{K}_\beta$ 是式 (10) 的全局最优解，当且仅当存在一个矩阵 $P \succeq 0$ 使得:

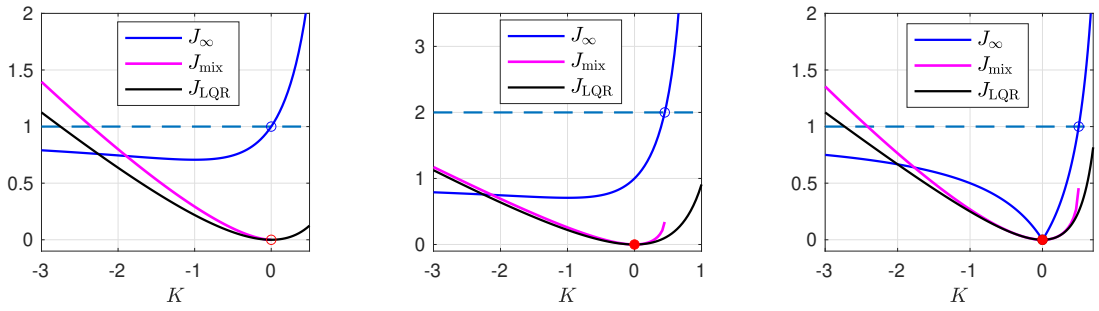
$$K = -R^{-1} B^{\mathsf{T}} P, \tag{22a}$$

$$A^{\mathsf{T}} P + P A + P(\beta^{-2} W - B R^{-1} B^{\mathsf{T}}) P + Q = 0, \tag{22b}$$

其中 $A + (\beta^{-2} W - B R^{-1} B^{\mathsf{T}}) P$ 进一步满足赫尔维茨稳定性。

证明与推论2的证明类似。我们在附录B.1中给出一些细节。

与耦合条件



(a) 双通道： $\beta = 1$　　(b) 双通道： $\beta = 2$　　(c) 单通道： $\beta = 1$

图2. 例 3 中 J_{mix}、 J_∞ 和 J_{LQR} 的优化景观。(a) 下确界 J_1^* 未取得（空心红圈标记边界）。(b) 最小值 J_2^* 已取得（实心红点）。(c) 单通道情形：最小值已取得（实心红点）。

（20）相比，（22）中的条件简单得多，只需求解一个独立于 K的黎卡提方程。

注3（与线性二次调节器的联系）当 $\beta \to \infty$ 时，单通道和双通道情形中的两个最优性条件 (20) 和 (22) 均化为经典的线性二次调节器黎卡提方程

$$A^\mathsf{T}P + PA - PBR^{-1}B^\mathsf{T}P + Q = 0,$$

其最优策略为 $K = -R^{-1}B^\mathsf{T}P$，其中 P 是稳定化解。□

注4（与 $\mathcal{H}_\infty$ 次优控制的联系）黎卡提方程（22b）与状态反馈$\mathcal{H}_\infty$ 次优控制密切相关。根据 *[39,* 定理17，*6]* 和 *[44,* 定理20.2，*1],* 当且仅当存在一个策略 $K \in \mathcal{K}_\beta$时，它才存在唯一的稳定化解 P。一个次优策略由 $K = -R^{-1}B^\mathsf{T}P$给出。如推论3所示，该 K策略还可求解带有 $z_2 = z_\infty$的问题（10）。这凸显了（10）与若干经典表述之间的密切联系，包括最大熵 $\mathcal{H}_\infty$ 控制、 *[47],* 风险敏感控制 *[48],* 以及零和动态博弈 *[29, 34]*。□

4.2 驻点的存在性

定理3和推论2-3并不能确保驻点的存在性。特别是，最优性条件（20）可能无解。下面总结这一事实。

事实1 在假设1和假设2下，混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$控制（10）在 $\mathcal{K}_\beta$ 中可能不存在驻点，且其最优值可能无法在 $\mathcal{K}_\beta$内达到。

事实上，（20）的不可行性源于过于严格的鲁棒性要求。通过增大 β 放宽该约束，可保证驻点的存在性。

定理4 在假设 1下，存在阈值 $\underline{\beta} > 0$，使得对所有 $\beta > \underline{\beta}$，问题（10）存在驻点 $K \in \mathcal{K}_\beta$。等价地，存在满足（20）的（K， X， Γ），其中 X 是（20b）的稳定化解。

注意，该存在性结果并不依赖于假设 $R_\infty = \alpha^2 R_2$。证明采用围绕线性二次调节器情形的扰动论证。关键洞见在于，当$\beta \to \infty$时，最优性条件（20）收敛到线性二次调节器的最优性条件（注3），而后者始终存在驻点。细节在技术上较为复杂，我们将其放在附录 B.2中给出。

相比之下，单通道情形总是存在一个驻点，该点达到最优值，这得益于它与 $\mathcal{H}_\infty$ 次优控制的联系（注4）。

定理 5 在假设1和假设2下，带有 $z_2 = z_\infty$的单通道问题(10)存在唯一驻点 $K \in \mathcal{K}_\beta$，由 $K = -R^{-1}B^\mathsf{T}P$给出，其中 P是黎卡提方程(22b)的稳定化解。

证明：由 [39, 定理17.6]和 [44, 定理20.2.1],可知，(22b) 存在稳定化解当且仅当 $\mathcal{K}_\beta$ 非空，该条件由假设 1满足。随后，在假设 2下，驻点由(22a)给出，其唯一性源于稳定化解的唯一性。□

我们给出一个说明定理 4 和 5 的简单例子，表明驻点的存在性取决于 β。

例 3 考虑(10)的一个标量实例，其中 $A = -1$， $B = B_w = 1$， $Q_2 = 0$， $Q_\infty = 1$， $R_2 = R_\infty = 1$。稳定化集合为 $\mathcal{K} = \{k \in \mathbb{R} : k < 1\}$。 $\mathcal{H}_\infty$ 范数可按闭式计算为 $J_\infty(k) := \|\mathbb{T}_\infty(k)\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sqrt{1+k^2}/(1-k)$，对所有 $k < 1$成立，由此得到可行集

$$\mathcal{K}_\beta = \{k : 1 + k^2 < \beta^2(1-k)^2,\ k < 1\}.$$

令 $J_{\mathrm{mix}}(k) = k^2 X_k$ 且 X_k 为 $\beta^{-2}(k^2+1)X_k^2 + 2(k-1)X_k + 1 = 0$的稳定化解，则问题 (10) 可写为

$$J_\beta^* := \inf_{k \in \mathcal{K}_\beta} k^2 X_k, \quad X_k = \frac{1-k-\sqrt{(k-1)^2 - \beta^{-2}(k^2+1)}}{\beta^{-2}(k^2+1)}.$$

情形 1： $\beta = 1$。我们有 $\mathcal{K}_1 = \{k : k < 0\}$。下确界$J_1^* = 0$ 在 $\mathcal{K}_1$ 中无法取到，但当 $k \to 0^-$ 和$X_k \to 1^+$ 时可无限逼近（见图 2(a)）。

情形 2： $\beta = 2$。我们有 $\mathcal{K}_2 = \{k : k < (4-\sqrt{7})/3\}$。下确界 $J_2^* = 0$ 由最优策略 $k^* = 0$ 取到（见图 2(b)）。可通过引理 *4* $\nabla J_{\mathrm{mix}}(k^*) = 0$验证。

情形 3（单通道）： $\beta = 1$。我们考虑 $Q = 0$和 $R = 1$，这保留了 LQR 代价，但改变了 $\mathcal{H}_\infty$约束（图 2(c)中的蓝色曲线）。这里， J_{mix} 总是存在一个驻点，这表明，除 β 之外，问题结构也会影响最优策略的存在性。

5 基于扩展凸提升的分析

本节利用近期提出的 ECL框架，证明定理3中的全局最优性结果，详细介绍问题 (10) 的 ECL 构造，并讨论其可解性

相关凸重构。

5.1 扩展凸提升框架

ECL框架 [23] 利用凸工具研究一类非凸优化问题。其核心思想简单明了，基于变量替换。设 $f:\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ 为光滑非凸函数。假设存在一个光滑双射 $y=\phi(x)$，使得 $g(y) := f(\phi^{-1}(y))$ 变为凸函数。显然，$\min f(x) = \min g(y)$，且 f 的每个驻点都是全局最优解。此处，映射$y=\phi(x)$ 起到直接凸化的作用。

ECL 将这一思想推广到更广泛的一类受约束非凸问题，这些问题可能无法进行直接凸化。事实上，此类问题经常出现在控制领域中，包括（10）。我们首先回顾 ECL 的定义和关键结果，并针对本文的研究场景给出一个经过简化、便于理解且与之相关的版本。

对于定义域为 $D\subseteq \mathrm{R}^d$ 的函数 $f:\mathcal{D}\to\mathrm{R}$，我们将其严格上图集和非严格上图集定义为

$$\begin{aligned}\operatorname{epi}_{>}(f) &:= \{(x,\gamma)\in\mathcal{D}\times\mathrm{R} \mid \gamma > f(x)\},\\ \operatorname{epi}_{\geq}(f) &:= \{(x,\gamma)\in\mathcal{D}\times\mathrm{R} \mid \gamma \geq f(x)\}.\end{aligned}$$

定义1（扩展凸提升 [23]）设 $f:\mathcal{D}\to\mathrm{R}$ 为连续函数，其中 $\mathcal{D}\subseteq\mathrm{R}^d$ 是开集。若元组（$\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}$，$\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}$，$\Phi$）满足以下条件，则称其为 f 的 ECL：

（1） $\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}\subseteq\mathrm{R}^d\times\mathrm{R}\times\mathrm{R}^{d_\xi}$ 是一个提升集，并带有额外变量 $\xi\in\mathrm{R}^{d_\xi}$，使得其到前 $d+1$ 个坐标的典范投影为 $\pi_{x,\gamma}(\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}) = \{(x,\gamma): \exists\xi\in\mathrm{R}^{d_\xi} \text{ s.t. } (x,\gamma,\xi)\in\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}\}$，满足

$$\operatorname{epi}_{>}(f)\subseteq\pi_{x,\gamma}(\mathcal{L}_{\mathrm{lft}})\subseteq\operatorname{cl}\operatorname{epi}_{\geq}(f). \tag{23}$$

(2) $\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}\subseteq\mathrm{R}\times\mathrm{R}^{d+d_\epsilon}$ 是一个凸集，且 Φ 是从 $\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}$ 到 $\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}$的 C^2 微分同胚。

(3) 对于任意$(x,\gamma,\xi)\in\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}$，$\Phi(x,\gamma,\xi)=(\gamma,\zeta_1,\epsilon)$，存在某个 $\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}$，$(\zeta_1,\epsilon)\in\mathrm{R}^{d+d_\epsilon}$，使得我们有$(\gamma,\zeta_1)\in\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}$。换言之，映射$\Phi$ 直接在第一个分量中输出 γ。

该过程通过引入上图和提升变量 ξ，推广了直接凸化。集合包含关系(23)也增加了灵活性。与直接凸化类似，ECL 的存在使得可以将 f在 $\mathcal{D}$ 上的最小化重构为一个凸问题。具体而言，我们有以下等价性 [23]

$$\inf_{x\in\mathcal{D}} f(x) = \inf_{(\gamma,\zeta_1)\in\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}} \gamma, \tag{24}$$

根据 ECL 构造，右侧是凸的。

我们在此定义 f的非退化点。

定义2（非退化点 [23]）给定针对 f 的一个 ECL $(\mathcal{L}_{\mathrm{lft}},\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}},\Phi)$，若点 $x\in\mathcal{D}$ 满足 $(x,f(x))\in\pi_{x,\gamma}(\mathcal{L}_{\mathrm{lft}})$，则称其为非退化点。

最后，ECL 的存在性证明了 f 的非退化驻点具有全局最优性。

引理 6（[23, 定理3。2]）设 $f:\mathcal{D}\to\mathrm{R}$ 可微，其中 $\mathcal{D}\subseteq\mathrm{R}^d$ 为开集。假设 f 存在一个 ECL（$\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}$、$\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}$、$\Phi$）。那么，任何满足 $\nabla f(x^*)=0$ 的非退化驻点x^*都是 f 在 $\mathcal{D}$ 上的全局极小值。

5.2 通过 ECL 构造证明定理3

本节中，我们为问题 (10) 构造一个 ECL，并证明在假设1和假设2下，$\mathcal{K}_\beta$ 中所有可行策略都是非退化的。因此，定理3可直接由定理 6 推出。ECL 构造的细节较为复杂，且依赖于（非）严格有界实引理。

我们首先刻画 ˜ 扩展代价 J_{mix} 的非严格上图，这对于 ECL 构造至关重要。使用扩展代价可以简化对边界情形的处理，并有助于后续证明。

˜引理 7 考虑式 (16) 中定义的扩展代价 $J_{\mathrm{mix}}:\operatorname{cl}(\mathcal{K}_\beta)\to\mathrm{R}$。在假设1和假设2下，若且唯若存在某个 $X\succ 0$ 使得，一对 $(K,\gamma)\in\tilde{}\operatorname{epi}_{\geq}(J_{\mathrm{mix}})$

$$\begin{aligned}&\gamma\geq\operatorname{tr}(Q_2X)+\operatorname{tr}(R_2KXK^{\mathsf{T}}),\\ &A_KX+XA_K^{\mathsf{T}}+W+\beta^{-2}XS_KX\preceq 0.\end{aligned}$$

引理 7 的证明见附录 C.1。现在我们分三步为 (10) 构造一个 ECL。

步骤 1：提升集。受引理 7 启发，我们引入一个提升集 $\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}$，并增加一个变量 X

$$\mathcal{L}_{\mathrm{lft}} := \left\{(K,\gamma,X)\,\middle|\,\begin{array}{l}K\in\mathrm{R}^{m\times n},\ \gamma\in\mathrm{R},\ X\succ 0,\\ \gamma\geq\operatorname{tr}(Q_2X)+\operatorname{tr}(R_2KXK^{\mathsf{T}}),\\ A_KX+XA_K^{\mathsf{T}}+\beta^{-2}XS_KX+W\preceq 0\end{array}\right\}. \tag{25a}$$

步骤 2：凸集。我们定义一个凸 set

$$\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}} := \left\{(\gamma,X,Y)\,\middle|\,\begin{array}{l}\gamma\in\mathrm{R},\ X\succ 0,\ Y\in\mathrm{R}^{m\times n},\ \mathrm{F}_{\mathrm{cvx}}\preceq 0,\\ \gamma\geq\operatorname{tr}(Q_2X)+\operatorname{tr}(R_2YX^{-1}Y^{\mathsf{T}})\end{array}\right\}, \tag{25b}$$

其中 $\mathrm{F}_{\mathrm{cvx}}$ 在 (15) 中定义。

步骤 3：微分同胚。利用经典的变量替换 $Y=KX$，我们定义映射

$$\Phi(K,\gamma,X) := (\gamma,X,KX),\quad \forall(K,\gamma,X)\in\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}. \tag{25c}$$

引理 7 立即推出以下关键结果，从而验证了 ECL 构造。

Co推论 4 在假设1和假设2下，我们 *have*

$$\operatorname{epi}_{\geq}(\tilde{J}_{\mathrm{mix}})=\pi_{K,\gamma}(\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}).$$

下述结果验证了所构造的元组 $(\mathcal{L}_{\mathrm{lft}},\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}},\Phi)$ 构成 (10) 的一个 ECL。

定理 6 在假设1和假设2下，$\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}$ 到 (K,γ) 的典范投影，记为 $\pi_{K,\gamma}(\mathcal{L}_{\mathrm{lft}})$，满足

$$\operatorname{epi}_{\geq}(J_{\mathrm{mix}})\subseteq\pi_{K,\gamma}(\mathcal{L}_{\mathrm{lft}})=\operatorname{cl}\operatorname{epi}_{\geq}(J_{\mathrm{mix}}). \tag{26}$$

此外，由 (25c) 给出的映射 Φ 是从 (25a) 中的 $\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}$ 到 (25b) 中的 $\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}$ 的一个 C^2（事实上是 C^∞）微分同胚。

注意，(26) 中的集合包含直接由推论 4 得出，而证明 (26) 中的集合恒等式则还需要 ˜ 一个额外的论证，以表明 $\operatorname{epi}_{\geq}(J_{\mathrm{mix}})=\operatorname{cl}\operatorname{epi}_{\geq}(J_{\mathrm{mix}})$，证明细节见附录 C.2。

由于 $\operatorname{epi}_{>}(J_{\mathrm{mix}})\subseteq\operatorname{epi}_{\geq}(J_{\mathrm{mix}})$，(26) 中的包含关系比 (23) 中 ECL 定义所要求的更强，

这扩大了非退化点的集合，使 ECL 能够在 $\mathcal{K}_\beta$上认证全局最优性。

注5（另一种有效的 ECL）在构造 (25a) 中的 $\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}$ 时，非严格 Riccati不等式对于建立 epi≥(J_{mix})$\subseteq \pi_{K,\ \gamma}(\mathcal{L}_{\mathrm{lft}})$ 至关重要。若改用严格 Riccati不等式，该构造仍可得到有效的 ECL，但只能保证较弱的包含关系 epi>(J_{mix})$\subseteq \pi_{K,\ \gamma}(\mathcal{L}_{\mathrm{lft}})$。

根据引理 6，ECL 可以证明任意非退化驻点都是全局最优解。根据定义 2 以及定理 6 中给出的包含关系 epi≥(J_{mix})$\subseteq \pi_{K,\ \gamma}(\mathcal{L}_{\mathrm{lft}})$，我们得到以下理想性质。

推论5 使用式 (25) 中的 ECL ($\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}, \mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}, \Phi$)，任意 $K \in \mathcal{K}_\beta$ 都是非退化的。

结合事实5以及 J_{mix} over$\mathcal{K}_\beta$ 的可微性（引理 4），定理 3 中确立的全局最优性可直接由引理 6 中的 ECL 保证得到。

5.3 凸重构及其可解性

ECL构造还可导出式(24)中的凸重构，从而进一步揭示问题(10)的性质。

定理7 考虑问题(10)以及式(25b)中的凸集 $\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}$。在假设1和假设2下，有

$$\inf_{K\in\mathcal{K}_\beta} J_{\mathrm{mix}}(K) = \min_{(\gamma,X,Y)\in\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}} \gamma. \tag{27}$$

我们在式(27)中使用“min”，表示最优值始终能够达到（见命题1）。不同于问题(10)在策略空间 $\mathcal{K}_\beta$上对K进行优化，式(27)中的凸重构在更高维集合 $\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}$上对$(\gamma, X, Y)$进行优化。

与定理7最相关的结果是 [5, 定理4。3]，该定理通过严格线性矩阵不等式给出了类似的重构（其中的公式(30)–(31)）。尽管严格形式产生相同的最优值，但它无法体现所有驻点的全局最优性（定理3）。

现在我们讨论该重构的可解性。

命题1 设 γ^* 为式(10)的（有限）最优值。在假设1和假设2下，以下结论成立。

(1) 式(27)中的重构，即 min$_{(\gamma,X,Y)\in\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}} \gamma$，存在解。也就是说，存在 $(\gamma^*, X^*, Y^*) \in \mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}$，使其达到最小值 γ^*。

(2) 相应的策略 $K^* := Y^*(X^*)^{-1}$ 属于~cl($\mathcal{K}_\beta$)，其扩展代价值为 $J_{\mathrm{mix}}(K^*) = \gamma^*$。

证明：由定理7，$\gamma^* = \min_{(\gamma,X,Y)\in\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}} \gamma$。首先注意到，$\gamma^*$ 无法在 $\|K\| \to \infty$ 处达到，因为相应的代价会发散。现在考虑 γ^* 在 $\mathcal{K}_\beta$中达到的情形，即存在 $K^* \in \mathcal{K}_\beta$，使得 $J_{\mathrm{mix}}(K^*) = \gamma^*$。也就是说，$(K^*, \gamma^*) \in$ epi≥(J_{mix})。由式(26)中的包含关系 epi≥(J_{mix})$\subseteq \pi_{K,\gamma}(\mathcal{L}_{\mathrm{lft}})$，可知存在 X^*，使得 $(K^*, \gamma^*, X^*) \in \mathcal{L}_{\mathrm{lft}}$。应用微分同胚 $\Phi(K^*, \gamma^*, X^*) = (\gamma^*, X^*, Y^*) \in \mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}$，即可证明这种情况下的可解性。

接下来，考虑 γ^* 在 $\mathcal{K}_\beta$中未达到的情形。根据引理 3 中的连续性，存在一个边界~策略 $K^* \in \partial\mathcal{K}_\beta$，使得 $J_{\mathrm{mix}}(K^*) = \gamma^*$。关键的是，数对 (K^*, γ^*) 仍可有效提升至 $\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}$。这由~推论 4 得出，其中 epi≥($J_{\mathrm{mix}}$)$= \pi_{K,\ \gamma}(\mathcal{L}_{\mathrm{lft}})$ 保证存在 X^*，使得 $(K^*, \gamma^*, X^*) \in \mathcal{L}_{\mathrm{lft}}$。应用微分同胚 $\Phi(K^*, \gamma^*, X^*) = (\gamma^*, X^*, Y^*) \in \mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}$，即可证明其可解性。

综合这两种情形，并注意到由于 $Y^* = K^*X^*$，有 $K^* = Y^*(X^*)^{-1}$，我们得出结论：存在 $(\gamma^*, X^*, Y^*) \in \mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}$，且满足 $K^* \in$ cl($\mathcal{K}_\beta$)。□

命题1保证了(27)中凸重构的可解性，以及最优策略的恢复，即使最优值在 $\mathcal{K}_\beta$ 中未达到，此时策略位于边界 $\partial\mathcal{K}_\beta$ 上。

6 数值实验

本节中，我们给出数值实验，评估不同方法在小规模与大规模情形下求解混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 控制 (5) 和 (10) 的性能。

6.1 数值方法与实验设置

我们比较四种方法：

(1) 解析解：对于单通道情形，我们求解黎卡提方程 (22b)，并由 (22a) 得到最优策略。(2) 策略迭代：受推论2和推论3中的最优性条件启发，我们通过迭代更新策略来求解 (10) 及其单通道情形。具体细节如下。(3) 基于 LMI 的凸优化：使用锥规划求解器 MOSEK [49] 求解凸重构问题 (27)。(4) HIFOO：一种用于固定阶数 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 控制器综合 [50]的先进非光滑优化软件包（v3.501，搭配 Hanso 2.01 ）。

策略迭代。该方法从一个可行策略出发，在策略评估（求解黎卡提方程）和策略改进之间交替进行。它可以视为求解驻点$\nabla J_{\mathrm{mix}}(\cdot) = 0$ 的不动点迭代。在具有 $z_2 = z_\infty$ 的单通道情形下，使用 (18)，更新可简化为：

$$K' = -R^{-1}B^{\mathsf{T}}P_K, \tag{28a}$$

这等价于高斯-牛顿更新：

$$K' = K - \eta R^{-1}\nabla J_{\mathrm{mix}}\ K\ \Lambda_K^{-1} \qquad \eta = 1/2 \qquad (),$$

其中 。该更新保持可行性，其收敛性已在 [24] 中得到证明。对于一般的双通道情形，我们采用基于式（17）的类似固定点迭代：

$$K' = -R_2^{-1}B^{\mathsf{T}}\Gamma_K(I + \beta^{-2}\alpha^2 X_K\Gamma_K)^{-1}. \tag{28b}$$

尽管尚未有正式的收敛性分析，我们推测该方法在 β 足够大时会收敛，并将此留待未来研究。

实验设置。所有实验均在 MATLAB R2024b 中进行。稳定化黎卡提解使用 MATLAB 的 icare 计算。策略迭代运行至收敛 $\|K' - K\| < 10^{-5}$。对于基于LMI的方法，我们使用 MOSEK 的默认高精度停止准则。

我们从以下方面比较这些方法：1）运行时间复杂度；2）收敛策略的 J_{mix} 平方根；3）所得的 $\mathcal{H}_2$ 和 $\mathcal{H}_\infty$ 范数。

6.2 低维示例

我们从一个具有 3×3 策略矩阵的低维示例（实例0）开始。问题参数为

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix},\quad B_w=5I_3.$$

$\mathcal{H}_2$ 和 $\mathcal{H}_\infty$ 通道的性能矩阵为

$$Q_2=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\quad R_2=\frac{1}{4}I_3,\quad Q_\infty=R_\infty=I_3.$$

对于特殊情形 $z_2=z_\infty$，我们设定 $Q=R=I_3$。可实现的最小鲁棒性水平（即最优 $\mathcal{H}_\infty$ 范数）为 $\beta^*\approx 5.24$。我们使用 $\beta=6$、14和18评估所有方法。可以验证，假设1和假设2均成立。作为参考，在单通道情形下，最优 LQR 策略达到的 $\mathcal{H}_\infty$ 范数为 ≈ 9.26（最优 LQR 代价为 ≈ 9.92）；在双通道情形下，相应的数值约为19.15和4.65。因此，我们选取的 β 值足够小，使得双通道情形下的问题(5)无法解析求解。

表1总结了全部四种方法的性能。ARE 行表明，求解(22b)效率最高；当 $z_2=z_\infty$时，它可作为基准。从策略迭代行可以看出，单通道更新(28a)表现可靠，运行时间仅约为求解(22b)的10倍。在双通道情形下，对于 $\beta=18$，策略迭代(28b)能够收敛，整个过程中保持可行，并达到(10)的最优策略，这与基于线性矩阵不等式的解一致。然而，对于较小的 β值，(28b)无法收敛，这一观察与我们的猜想一致。对于 $\beta=6$，迭代点会离开可行集 $\mathcal{K}_\beta$，导致过程终止（例如，在某次迭代 t中，K_t 的 $\mathcal{H}_\infty$ 范数超过6）。对于 $\beta=14$，迭代点在 $\mathcal{K}_\beta$ 中始终可行，但无法收敛，而是呈现周期性行为，表明可能存在极限环。

从线性矩阵不等式这一行可以看出，通过求解凸重构可达到J_{mix} 的全局最小值，且所得策略的梯度 ∇J_{mix} 几乎为零。总体而言，三种方法（ARE、策略迭代、线性矩阵不等式）在成功时都能得到几乎相同的解。最后，对于较小的 β，HIFOO 求解器的可靠性较低，常会触发警告或无法返回可行解。即使在 $\beta=18$处，其性能（尤其是 $\mathcal{H}_\infty$ 范数）也与其他方法存在明显差异。这是意料之中的，因为 HIFOO 依赖非光滑局部优化，且无法保证全局最优性。相比之下，我们在定理3中的结果保证，通过基于梯度的方法找到的驻点都是全局最优解。

6.3 高维示例

接下来，我们考虑三个高维示例，其策略矩阵的大小分别为 15×15、60×60 和 90×90，分别称为实例 1、2 和 3。单通道公式的问题数据经过调整自 [24, 第 7.3] 节。对于双通道表述，我们保留相同的 $\mathcal{H}_\infty$ 性能信号，但使用 $Q_2=I$ 和 $R_2=\frac{1}{4}R_\infty$来指定 $\mathcal{H}_2$ 性能。

表1 实例0上不同方法的比较。双通道和单通道情形的结果分别列于双通道和单通道子列中。短划线（–）表示结果不可用。粗体数值标示所有方法中运行时间最短的结果。

		$\beta=6$		$\beta=14$		$\beta=18$	
		2-ch	1-ch	2-ch	1-ch	2-ch	1-ch
ARE	time	-	**0.01**	-	**0.01**	-	**0.01**
	$J_{\mathrm{mix}}^{1/2}$	-	16.1	-	10.4	-	10.2
	$\mathcal{H}_2$	-	12.7	-	9.9	-	9.9
	$\mathcal{H}_\infty$	-	5.93	-	8.50	-	8.79
PI	time	-	0.04	-	0.05	**0.10**	0.06
	$J_{\mathrm{mix}}^{1/2}$	-	16.1	-	10.4	4.80	10.2
	$\mathcal{H}_2$	-	12.7	-	9.95	4.67	9.93
	$\mathcal{H}_\infty$	-	5.93	-	8.50	15.2	8.79
LMI	time	0.49	0.17	0.49	0.18	0.49	0.49
	$J_{\mathrm{mix}}^{1/2}$	8.12	16.1	4.91	10.4	4.80	10.2
	$\mathcal{H}_2$	6.54	12.7	4.72	9.95	4.67	9.93
	$\mathcal{H}_\infty$	5.96	5.93	13.1	8.50	15.2	8.79
hifoo	time	-	-	11.6	1.59	2.46	2.53
	$\mathcal{H}_2$	-	-	$>10^4$	9.92	4.65	9.91
	$\mathcal{H}_\infty$	-	-	9.69	10.4	17.9	9.26

实例 1–3 的最小鲁棒性水平 β^* 分别为≈ 0.067、0.098 和 0.096。与低维示例（实例0）不同，我们在此重点评估不同方法的可扩展性。因此，我们测试了更大的鲁棒性水平，将 $\beta=10$、15 和 20 设为测试值。可以验证，所有假设均得到满足。

表2总结了高维示例的结果。如 ARE 行所示，即使在更大规模下，求解黎卡提方程对于单通道情形仍然非常高效。PI 行表明，随着问题规模增大，式 (28) 中的更新仍然有效。值得注意的是，双通道更新 (28b) 在所有实例中均能收敛，所得策略的梯度几乎消失，这从经验上支持了我们的猜想。这一现象表明，(28b) 具有隐式正则化特性：当 β 足够大时，它能够保持可行性并实现收敛。

线性矩阵不等式这一行表明，J_{mix} 的全局最小值可以通过求解一个凸重构来实现。然而，尽管该方法得出的策略梯度几乎为零，线性矩阵不等式方法的扩展性仍然较差：其在实例 2 和 3 上的运行时间显著长于解析方法和策略迭代方法。总体而言，与经典的基于LMI的方法相比，这些结果表明，策略迭代在处理大规模问题时具有更好的扩展性。

7 结论

本文考察混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 控制的非凸优化景观。我们刻画了可行集和代价函数，并表明尽管存在非凸性，每个驻点都是全局最优解。基于 ECL框架的分析进一步阐明了严格与非严格黎卡提不等式在认证全局最优性及确保凸

表2 实例1-3（记为 I_{1-3}）上不同方法的比较。双通道和单通道情形的结果分别列于 2-ch 和 1-ch 子列中。短横线（-）表示结果不可用。粗体数值表示运行时间最优。

		我1, $\beta=10$		I2, $\beta=15$		I3, $\beta=20$	
		2-ch	1-ch	2-ch	1-ch	2-CH	1-CH
ARE	time	-	**0.02**	-	**0.03**	-	**0.05**
	$J_{\text{mix}}^{1/2}$	-	0.47	-	1.12	-	1.22
	$\mathcal{H}_2$	-	0.47	-	1.12	-	1.22
	$\mathcal{H}_\infty$	-	0.09	-	0.14	-	0.14
PI	time	**0.10**	0.06	**0.28**	0.09	**0.61**	0.46
	$J_{\text{mix}}^{1/2}$	0.99	0.47	1.99	1.12	2.44	1.22
	$\mathcal{H}_2$	0.99	0.47	1.99	1.12	2.44	1.22
	$\mathcal{H}_\infty$	1.98	0.09	7.72	0.14	9.27	0.14
LMI	time	0.27	0.37	11.3	20.1	89.7	143
	$J_{\text{mix}}^{1/2}$	1.00	0.47	1.99	1.12	2.44	1.22
	$\mathcal{H}_2$	0.99	0.47	1.99	1.12	2.44	1.22
	$\mathcal{H}_\infty$	1.98	0.09	7.77	0.14	9.27	0.13
hifoo	time	1.43	8.57	35.6	27.5	262	221
	$\mathcal{H}_2$	0.99	0.47	1.99	1.12	2.44	1.22
	$\mathcal{H}_\infty$	2.01	0.09	8.57	0.14	10.1	0.14

重构可解性方面的作用。还有若干开放问题值得进一步研究。其中一个重要问题是，为一般双通道情形（尤其是较大的 β）建立策略迭代的收敛保证。另一个问题是，针对混合 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 设计，设计有理论依据且可扩展的策略优化算法，并提供可证明的性能保证。

附录

附录分为三个部分：第2—3节的证明、第4节的证明以及第 5 节的证明。

A 第2和第3节的证明

A.1 式（11）中的代价等价性证明

令 $\tilde{S}_K := Q + K^\mathsf{T} R K$。根据引理1，黎卡提方程

$$A_K X_K + X_K A_K^\mathsf{T} + \beta^{-2} X_K \tilde{S}_K X_K + W = 0, \tag{A.1}$$

$$A_K^\mathsf{T} P_K + P_K A_K + \beta^{-2} P_K W P_K + \tilde{S}_K = 0 \tag{A.2}$$

对于任意 $K \in \mathcal{K}_\beta$，分别存在唯一的稳定化解 X_K 和 P_K。为验证式（11a）中的代价等价性，定义 $\tilde{X}_K := -\beta^{-2} X_K$。代入（A.1）可得

$$A_K \tilde{X}_K + \tilde{X}_K A_K^\mathsf{T} - \tilde{X}_K \tilde{S}_K \tilde{X}_K - \beta^{-2} W = 0, \tag{A.3}$$

其中相应的闭环矩阵为 $A_K - X_K S_K = A_K + \beta^{-2} X_K \tilde{S}_K$，根据假设该矩阵是赫尔维茨的。因此，$\tilde{X}_K$ 是（A.3）的稳定化解。现在考虑与（A.2）和（A.3）相关的哈密顿矩阵：

$$H(K) = \begin{bmatrix} A_K & \beta^{-2} W \\ -\tilde{S}_K & -A_K^\mathsf{T} \end{bmatrix}, \; \tilde{H}(K) = \begin{bmatrix} A_K^\mathsf{T} & -\tilde{S}_K \\ \beta^{-2} W & -A_K \end{bmatrix}.$$

由于这两个哈密顿矩阵具有相同的特征值（如 $H(K) = \tilde{H}(K)^\mathsf{T}$），且它们所关联的闭环矩阵 $A_K + \beta^{-2} W P_K$ 和 $A_K - \tilde{X}_K \tilde{S}_K$ 均为赫尔维茨，它们必定具有相同的稳定特征值。因此，我们有

$$\operatorname{tr}(A_K + \beta^{-2} W P_K) = \operatorname{tr}(A_K + \beta^{-2} X_K \tilde{S}_K)$$

这意味着 $\operatorname{tr}(W P_K) = \operatorname{tr}(X_K S_K)$。

A.2 定理1的证明

我们证明两个方向上的集合包含关系。下面给出第一个方向，其证明关键依赖于状态反馈 $\mathcal{H}_\infty$ 代价函数的全局最优性性质。

引理8 在假设1和假设2下，我们有

$$\{K \in \mathcal{K} \mid \|\mathbf{T}_\infty(K)\|_{\mathcal{H}_\infty} \le \beta\} \subseteq \operatorname{cl}(\mathcal{K}_\beta).$$

证明：我们断言，对于任意满足 $K \in \mathcal{K}$ with $\|\mathbf{T}_\infty(K)\|_{\mathcal{H}_\infty} \le \beta$ 的 $K \in \mathcal{K}$，存在一个序列 $\{K_j\} \subset \mathcal{K}_\beta$ 使得 $K_j \to K$，因此 $K \in \operatorname{cl}(\mathcal{K}_\beta)$。

反设该结论不成立。则存在 K 的一个邻域 $U \subset \mathcal{K}$，使得 $U \cap \mathcal{K}_\beta = \emptyset$，这意味着对所有 $K' \in U$，都有 $\|\mathbf{T}_\infty(K')\|_{\mathcal{H}_\infty} \ge \beta$。因此，$K$（其中 $\|\mathbf{T}_\infty(K)\|_{\mathcal{H}_\infty} \le \beta$）是 U 上的 $\|\mathbf{T}_\infty(\cdot)\|_{\mathcal{H}_\infty}$ 的一个局部极小值。由连续性可知，显然有 $\|\mathbf{T}_\infty(K)\|_{\mathcal{H}_\infty} = \beta$。

然而，根据 [23, 推论 4.1], ， $\|\mathbf{T}_\infty(\cdot)\|_{\mathcal{H}_\infty}$ 的每个局部极小值都是能够取得下确界 $\beta^* := \inf_{K \in \mathcal{K}} \|\mathbf{T}_\infty(K)\|_{\mathcal{H}_\infty}$ 的全局极小值。因此，必有 $\|\mathbf{T}_\infty(K)\|_{\mathcal{H}_\infty} = \beta^*$，但这与 $\beta \ne \beta^*$ 矛盾。因此，这样的邻域 U 不可能存在。 □

现在我们陈述第二个辅助引理。关键思路是利用这样一个事实来排除边际稳定策略：当 K 趋近于边际稳定策略时， $\mathcal{H}_\infty$ 代价会发散。

引理 9 在假设1和假设2下，有

$$\operatorname{cl}(\mathcal{K}_\beta) \subseteq \{K \in \mathcal{K} \mid \|\mathbf{T}_\infty(K)\|_{\mathcal{H}_\infty} \le \beta\}.$$

证明：我们首先证明，任意 $K \in \operatorname{cl}(\mathcal{K}_\beta)$ 都必须满足 $\|\mathbf{T}_\infty(K)\|_{\mathcal{H}_\infty} \le \beta$。反设存在 $K \in \operatorname{cl}(\mathcal{K}_\beta)$，使得对于某个 $\epsilon > 0$，有 $\|\mathbf{T}_\infty(K)\|_{\mathcal{H}_\infty} = \beta + \epsilon$。那么存在一个序列 $\{K_j\} \subset \mathcal{K}_\beta$，使得 $K_j \to K$。由 $\|\mathbf{T}_\infty(\cdot)\|_{\mathcal{H}_\infty}$ 的连续性，存在 N，使得对所有 $j > N$，都有 $\|\mathbf{T}_\infty(K_j)\|_{\mathcal{H}_\infty} \in [\beta, \beta + \epsilon)$，这与 $\{K_j\} \subset \mathcal{K}_\beta$ 矛盾。

接下来我们证明，$\operatorname{cl}(\mathcal{K}_\beta) \subset \mathcal{K}$。只需证明 $\operatorname{cl}(\mathcal{K}_\beta) \cap \partial\mathcal{K} = \emptyset$，其中 $\partial\mathcal{K}$ 包含所有满足 A_K 边际稳定的策略 K。证明采用反证法。假设存在某个 $K \in \operatorname{cl}(\mathcal{K}_\beta) \cap \partial\mathcal{K}$。那么存在 $\{K_j\} \subset \mathcal{K}_\beta$ 满足 $K_j \to K$。考虑传递函数序列

$$\mathbf{T}_\infty(K_j) = \begin{bmatrix} Q_\infty^{1/2} \\ R_\infty^{1/2} K_j \end{bmatrix} (sI - A_{K_j})^{-1} B_w,$$

其中 A_{K_j} 稳定，且 $\|\mathbf{T}_\infty(K_j)\|_{\mathcal{H}_\infty} < \beta$，因为 $K_j \in \mathcal{K}_\beta$。由于 $K_j \to K \in \partial\mathcal{K}$，我们有

$$\lim_{j \to \infty} \left(A_{K_j}, B_w, \begin{bmatrix} Q_\infty^{1/2} \\ R_\infty^{1/2} K_j \end{bmatrix} \right) = \left(A_K, B_w, \begin{bmatrix} Q_\infty^{1/2} \\ R_\infty^{1/2} K \end{bmatrix} \right)$$

其中 A_K 至少有一个特征值位于虚轴上。

由于 $A_K, B_w, \begin{bmatrix} Q_\infty^{1/2} \\ R_\infty^{1/2} K \end{bmatrix}$ 是最小的，$\mathrm{T}_\infty(K)$ 至少有一个极点位于虚轴上。由 [23, 引理 D.1], 可知

$$\lim_{j\to\infty} \|\mathbf{T}_\infty(K_j)\|_{\mathcal{H}_\infty} = +\infty,$$

这与对所有 j 都有 $\|\mathrm{T}_\infty(K_j)\|_{\mathcal{H}_\infty} < \beta$ 相矛盾。因此，$\mathrm{cl}(\mathcal{K}_\beta) \cap \partial\mathcal{K} = \emptyset$，从而 $\mathrm{cl}(\mathcal{K}_\beta) \subset \mathcal{K}$。□

结合引理 8 和引理 9 可得所需结果。

A.3 引理 3 的证明

我们的目标是证明，对于任意 $K_0 \in \partial\mathcal{K}_\beta$

$$\lim_{K\to K_0, K\in\mathcal{K}_\beta} J_{\mathrm{mix}}(K) = \tilde{J}_{\mathrm{mix}}(K_0),$$

~即，扩展代价函数 J_{mix} 在边界 $\partial\mathcal{K}_\beta$ 上连续。为此，只需证明

$$\lim_{K\to K_0, K\in\mathcal{K}_\beta} \|X_K - X_{K_0}\| = 0. \tag{A.4}$$

也就是说，黎卡提方程 (8) 的最小解 X_K 关于 $K \in \mathrm{cl}(\mathcal{K}_\beta)$ 连续。

该证明依赖于以下非平凡定理，该定理确立了黎卡提方程的最小解对其系数的连续依赖性。

定理 8（[44, 定理 11.2.1]）黎卡提方程 $AX + XA^\mathsf{T} + XDX + C = 0$的最小解 X在所有满足 $D \succeq 0$、$C = C^\mathsf{T}$ 且 (A, D) 可稳定的 (A, C, D) 所构成的集合上，是系数 (A, C, D) 的连续函数。

为证明 (A.4)，我们对任意 $K \in \mathrm{cl}(\mathcal{K}_\beta)$，将定理 8 应用于相应的黎卡提方程 (8)。不难验证，系数矩阵 A_K、W、$\beta^{-2}S_K$ 关于 K 连续，并满足定理 8 要求的所有条件。因此，最小解 X_K 关于 $K \in$cl($\mathcal{K}_\beta$)连续，从而证明了 (A.4)。

A.4 定理 2 的证明

要证明 J_{mix} 在 $\mathcal{K}_\beta$ 上实解析，只需证明方程 (8) 的稳定化解 X_K 关于 $K \in \mathcal{K}_\beta$ 实解析。我们将利用以下版本的隐函数定理来证明这一点。

定理 9 *[51, 定理 2.3。5]* 设 $F: \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ 是一个映射，其每个分量（记为 F_j，其中 $j = 1, \ldots, m$）都是实解析函数。假设 $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^m$ 是方程 $F(x, y) = 0$ 的一个解。此外，假设雅可比矩阵

$$\mathbf{J}_y F(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}$$

在 $(x, y) = (x_0, y_0)$ 处可逆。那么，存在 x_0 的一个邻域 $U \subseteq \mathbf{R}^k$，以及一个映射 $\phi: U \to \mathbf{R}^m$，使得
(1) ϕ 的每个分量都是实解析函数，并且 (2) 对所有 $x \in U$，$F(x, \phi(x)) = 0$。

现在我们继续验证黎卡提方程(8)是否满足定理 9 中的条件。通过对 (8) 进行向量化，我们定义如下映射 F： $\mathcal{K}_\beta \times \mathbf{R}^{n^2} \to \mathbf{R}^{n^2}$，其定义为

$$\begin{aligned} F(K, \mathrm{vex}(X)) = &(I_n \otimes A_K + A_K \otimes I_n)\,\mathrm{vec}(X) \\ &+ \beta^{-2}\mathrm{vec}\,(XS_KX) + \mathrm{vec}(W), \end{aligned}$$

接下来，我们计算 F 关于 $\mathrm{vex}^\mathsf{T}(X)$ 的雅可比矩阵。利用标准矩阵微积分以及 X 和 S_K 的对称性，

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{vec}(XS_KX)}{\partial \mathrm{vec}^\mathsf{T} X} \\ =&(X^\mathsf{T} \otimes I_n)\frac{\partial \mathrm{vec}(XS_K)}{\partial \mathrm{vec}^\mathsf{T} X} + (I_n \otimes XS_K)\frac{\partial \mathrm{vec}X}{\partial \mathrm{vec}^\mathsf{T} X} \\ =&(X^\mathsf{T} \otimes I_n)(S_K^\mathsf{T} \otimes I_n) + I_n \otimes XS_K \\ =&X^\mathsf{T}S_K^\mathsf{T} \otimes I_n + I_n \otimes XS_K. \end{aligned}$$

记 $\tilde{A}_K := A_K + \beta^{-2}XS_K$，则可得

$$\frac{\partial F(K, \mathrm{vec}(X))}{\partial \mathrm{vec}^\mathsf{T}(X)} = I_n \otimes \tilde{A}_K + \tilde{A}_K \otimes I_n.$$

~现在注意，对于任意 $K \in \mathcal{K}_\beta$，当 X 是方程 (8) 的稳定化解时，矩阵 A_K 是 Hurwitz 矩阵（因而可逆）。因此，对于满足 $F(K_0, \mathrm{vec}(X_0)) = 0$ 的任意一对 $(K_0, \mathrm{vec}(X_0))$，其中 X_0 是与 $K_0 \in \mathcal{K}_\beta$ 相关联的稳定化解，上述雅可比矩阵可逆。由定理 9 可知，X_K 在 $K_0 \in \mathcal{K}_\beta$ 的某个邻域内是实解析的。由于 K_0 是任意的，我们得出 X_K 在整个集合 $\mathcal{K}_\beta$ 上都是实解析的。□

A.5 引理 4 的证明

我们先给出一个辅助引理，用以刻画黎卡提方程稳定化解的导数。关键思路是围绕该解将黎卡提方程线性化，从而得到一个关于导数的李雅普诺夫方程。

引理 10 设 $M: (-\delta, \delta) \to \mathbf{R}^{n\times n}$, $G: (-\delta, \delta) \to \mathbf{S}_+^n$，且 $H: (-\delta, \delta) \to \mathbf{S}_+^n$ 是某个 $\delta > 0$ 上的实解析矩阵值函数。假设黎卡提方程

$$\mathcal{R}(X_t, t) := M_tX_t + X_tM_t^\mathsf{T} + G_t + X_tH_tX_t = 0 \tag{A.5}$$

对所有 $t \in (-\delta, \delta)$ 都存在唯一的稳定化解 X_t，即 $M_t + X_tH_t$ 是赫尔维茨矩阵。那么，X_t 在 $t \in (\delta, \delta)$ 上实解析，其在 $t = 0$ 处的导数记为 X_0'，满足以下李雅普诺夫方程

$$\begin{aligned} &(M_0 + X_0H_0)X_0' + X_0'(M_0 + X_0H_0)^\mathsf{T} \\ &\quad + (M_0'X_0 + X_0M_0'^\mathsf{T} + G_0' + X_0H_0'X_0) = 0. \end{aligned} \tag{A.6}$$

证明：根据定理 2 的证明，稳定化解 X_t 关于 t 实解析。由于 M_t、G_t、H_t 和 X_t 都是实解析的，因此各自都可以在 $t = 0$ 附近进行泰勒展开：

$$\begin{aligned} &M_t = M_0 + tM_0' + o(t),\ G_t = G_0 + tG_0' + o(t), \\ &H_t = H_0 + tH_0' + o(t),\ X_t = X_0 + tX_0' + o(t). \end{aligned} \tag{A.7}$$

将 (A.7) 代入黎卡提方程 (A.5)，并使用$\mathcal{R}(X_0, 0) = 0$，得到 $\mathcal{M}t + o(t) = 0$，其中 $\mathcal{M}$ 表示 (A.6) 的左端项。由于该等式对所有足够小的 t都成立，因此

t 的系数必须为零，从而得到 (A.6)。 □

现在推导 J_{mix} 的梯度公式。考虑任意方向 $\Delta \in \mathbb{R}^{m\times n}$。对于所有满足 $K+t\Delta \in \mathcal{K}_\beta$ 的充分小的 $t>0$，定义 M_t:$= A+B(K+t\Delta)$,$G_t := W$, $H_t = \beta^{-2}(Q_\infty + (K+t\Delta)^\mathsf{T} R_\infty ($ $K+t\Delta))$，并令 X_t 为 $M_t X_t + X_t M_t^\mathsf{T} + G_t + X_t H_t X_t = 0$ 的稳定化解，其存在性由引理1保证。在 $t=0$ 处，我们有

$$\begin{aligned} &M_0 = A_K,\ M_0' = B\Delta,\ G_0' = 0,\ H_0 = \beta^{-2}S_K \\ &H_0' = \beta^{-2}(K^\mathsf{T}R_\infty\Delta + \Delta^\mathsf{T}R_\infty K),\ X_0 = X_K. \end{aligned} \tag{A.8}$$

根据引理 10， X_t 有如下的一阶展开:

$$X_t = X_K + tX_0' + o(t). \tag{A.9}$$

由 (A.6) 和 (A.8)，导数 X_0' 满足

$$\begin{aligned} &\tilde{A}_K X_0' + X_0'\tilde{A}_K^\mathsf{T} + B\Delta X_K + X_K\Delta^\mathsf{T}B^\mathsf{T} \\ &\quad + \beta^{-2}X_K(K^\mathsf{T}R_\infty\Delta + \Delta^\mathsf{T}R_\infty K)X_K = 0, \end{aligned}$$

其中 $\tilde{A}_K := A_K + \beta^{-2}X_K S_K$。解为

$$\begin{aligned} X_0' = \int_0^\infty e^{\tilde{A}_K s}\Big(&B\Delta X_K + X_K\Delta^\mathsf{T}B^\mathsf{T} \\ &+\beta^{-2}X_K(K^\mathsf{T}R_\infty\Delta + \Delta^\mathsf{T}R_\infty K)X_K\Big)e^{\tilde{A}_K^\mathsf{T}s}\,ds. \end{aligned} \tag{A.10}$$

现在利用 (A.9)，可将代价展开为

$$\begin{aligned} &J_{\mathrm{mix}}(K+t\Delta) = o(t) + J_{\mathrm{mix}}(K) \\ &+ t\cdot\mathrm{tr}\left((K^\mathsf{T}R_2\Delta + \Delta^\mathsf{T}R_2K)X_K + (Q_2 + K^\mathsf{T}R_2K)X_0'\right). \end{aligned}$$

因此，方向导数为

$$\begin{aligned} \left.\frac{dJ_{\mathrm{mix}}(K+t\Delta)}{dt}\right|_{t=0} &= \mathrm{tr}((K^\mathsf{T}R_2\Delta + \Delta^\mathsf{T}R_2K)X_K) \\ &\quad + \mathrm{tr}((Q_2 + K^\mathsf{T}R_2K)X_0'). \end{aligned}$$

将 (A.10) 中的 X_0' 代入，可得第二个迹项为

$$\mathrm{tr}\left(2X_K(\Gamma_K B + \beta^{-2}\Gamma_K X_K K^\mathsf{T}R_\infty)\Delta\right)$$

其中 Γ_K 满足李雅普诺夫方程 $\tilde{A}_K^\mathsf{T}\Gamma_K + \Gamma_K\tilde{A}_K + Q_2 + K^\mathsf{T}R_2K = 0$。最后，利用恒等式

$$\left.\frac{dJ_{\mathrm{mix}}(K+t\Delta)}{dt}\right|_{t=0} = \mathrm{tr}(\nabla J_{\mathrm{mix}}(K)^\mathsf{T}\Delta),$$

我们得到式 (17) 中的梯度公式。 □

B 第4节中的证明

B.1 推论3的证明

证明：证明过程与推论 2 的证明类似。我们证明等价性的两个方向。

$\Rightarrow$。假设 $K \in \mathcal{K}_\beta$ 是（10）的全局极小值。那么，其由（18）给出的策略梯度必须为零，即 $\nabla J_{\mathrm{mix}}(K) = 2(RK + B^\mathsf{T}P_K)\Lambda_K = 0$，其中 $P_K \succeq 0$ 是黎卡提方程（11b）的唯一稳定化解

$$A_K^\mathsf{T}P_K + P_K A_K + \beta^{-2}P_K W P_K + Q + K^\mathsf{T}RK = 0,$$

并且 Λ_K 是与 K相关联的李雅普诺夫方程(18b)的唯一解。由于 $W \succ 0$，李雅普诺夫方程蕴含 $\Lambda_K \succ 0$，因此我们有 $K = -R^{-1}B^\mathsf{T}P_K$。现在令 $P := P_K$，我们立即得到 (22a)。将其代入黎卡提方程(11b)可得

$$\begin{aligned} &(A - BR^{-1}B^\mathsf{T}P)^\mathsf{T}P + P(A - BR^{-1}B^\mathsf{T}P) \\ &\qquad + \beta^{-2}PWP + Q + PBR^{-1}B^\mathsf{T}P = 0, \end{aligned}$$

这与(22b)完全相同。最后，由于 P是($A_K + \beta^{-2}WP = A + \beta^{-2}W - $b)的稳定化解，矩阵( )是赫尔维茨的。

$\Leftarrow$。现在假设 $K = -R^{-1}B^\mathsf{T}P$，其中 $P \succeq 0$ 是黎卡提方程(22b)的唯一稳定化解，使得 $A + (\beta^{-2}W - BR^{-1}B^\mathsf{T})P$ 是赫尔维茨的。首先，将 $K = -R^{-1}B^\mathsf{T}P$代入如下黎卡提方程（其形式与(11b)一致）

$$A_K^\mathsf{T}P + PA_K + \beta^{-2}PWP + Q + K^\mathsf{T}RK = 0,$$

我们精确地恢复了(22b)。这证实 P满足与 K相关联的黎卡提方程(11b)。接下来，我们验证 P 是(11b)的稳定化解。注意到

$$A_K + \beta^{-2}WP = A + (\beta^{-2}W - BR^{-1}B^\mathsf{T})P.$$

根据假设，该矩阵是赫尔维茨的，这证实P是(11b)的稳定化解。因此，由引理1可得 $K \in \mathcal{K}_\beta$。最后，我们从梯度公式 (18)可知 $\nabla J_{\mathrm{mix}}(K) = 2(RK + B^\mathsf{T}P)\Lambda_K = 0$，因此 K 是一个驻点。随后，我们由定理3得出结论： K 对(10)是全局最优的。□

B.2 定理4的证明

证明：我们的证明基于隐函数定理（定理 9）。设 $\epsilon := \beta^{-1}$。根据与(20)类似的最优性条件（不假设 $R_\infty = \alpha^2 R_2$），我们定义如下向量化函数

$$\begin{aligned} F(K,X,\Gamma,\epsilon) &= \begin{bmatrix} F_K(K,X,\Gamma,\epsilon) \\ F_X(K,X,\Gamma,\epsilon) \\ F_\Gamma(K,X,\Gamma,\epsilon) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathrm{vec}\left(R_2K + B^\mathsf{T}\Gamma + \epsilon^2 R_\infty K X\Gamma\right) \\ \mathrm{vec}\left(A_K X + XA_K^\mathsf{T} + \epsilon^2 X S_K X + W\right) \\ \mathrm{vec}\left(\tilde{A}_K^\mathsf{T}\Gamma + \Gamma\tilde{A}_K + Q_2 + K^\mathsf{T}R_2K\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中 $\tilde{A}_K = A_K + \epsilon^2 X S_K$ 是赫尔维茨矩阵。该方程刻画了 J_{mix} 的极小化解。由于 $\epsilon_0 = 0$ 对应线性二次调节器情形，我们知道存在某个 (X_0, Γ_0, K_0) 满足

$$F(X_0, \Gamma_0, K_0, \epsilon_0) = 0$$

并且 $A_{K_0} := A + BK_0$ 保证是稳定的。然后，计算雅可比矩阵 $\mathrm{J}_{(K,X,\Gamma)}F$ 并不十分困难

F在 $(K_0, X_0, \Gamma_0, 0)$ 处

$$\mathbf{J}_{(K,X,\Gamma)}F(K_0,X_0,\Gamma_0,0)=\begin{bmatrix} I\otimes R_2 & \begin{bmatrix}0 & (I\otimes B^{\mathsf{T}})\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}*\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}H_1 & 0\\ 0 & H_2\end{bmatrix}\end{bmatrix},$$

其中 H_1 和 H_2 是如下可逆矩阵

$$\begin{aligned} H_1 &= I\otimes A_{K_0}+A_{K_0}\otimes I,\\ H_2 &= I\otimes A_{K_0}^{\mathsf{T}}+A_{K_0}^{\mathsf{T}}\otimes I. \end{aligned}$$

由舒尔补，由于

$$I\otimes R_2-\begin{bmatrix}0 & (I\otimes B^{\mathsf{T}})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_1^{-1} & 0\\ 0 & H_2^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}*\\0\end{bmatrix}=I\otimes R_2$$

是可逆的，故 $\mathbf{J}_{(K,X,\Gamma)}F(K_0,X_0,\Gamma_0,0)$ 亦可逆。因此，所需结果由定理 9 得出。特别地，存在 $\epsilon_0=0$ 的一个邻域 $U\subset\mathrm{R}$ 以及一个实解析映射 $\phi\colon U\to\mathrm{R}^{mn+2n^2}$，使得

$$F(\phi(\epsilon),\epsilon)=0,\quad \forall\epsilon\in U,$$

且 A_K 是赫尔维茨的。注意，对任意充分小的 $\epsilon>0$，A_K 的稳定性都得到保证。因此，对任意充分小的 $\epsilon\in U$，即对任意充分大的 $\beta>(\sup_{\epsilon\in U}\epsilon)^{-1}$，(20) 的解存在。□

C 第 5 节证明

C.1 引理 7 的证明

证明：⇒。我们首先证明这个较简单的方向。假设 $K\in\mathsf{cl}(\mathcal{K}_\beta)$ 且 $J_{\mathrm{mix}}(K)\le\gamma$。令 $X:=X_K\succ 0$ 为方程 (8) 的最小解。由此可得

$$\mathrm{tr}(Q_2X)+\mathrm{tr}(R_2K^{\mathsf{T}}R_2K)=J_{\mathrm{mix}}(K)\le\gamma.$$

⇐。我们首先证明 A_K 是稳定的。这由假设 $W\succ 0$ 以及满足以下条件的 $X\succ 0$ 的存在性可知

$$A_KX+XA_K^{\mathsf{T}}+\beta^{-2}XS_KX+W\preceq 0.$$

然后，应用非严格有界实引理 [37,引理 3.2 (2)]，得到 $\|\mathbf{T}_\infty(K)\|_{\mathcal{H}_\infty}\le\beta$，这意味着 $K\in\mathsf{cl}(\mathcal{K}_\beta)$。接下来我们验证 $\gamma\ge J_{\mathrm{mix}}(K)$。令 X_K 表示方程 (8) 的最小解。我们观察到

$$\begin{aligned}\gamma &\ge \mathrm{tr}(Q_2X)+\mathrm{tr}(R_2KXK^{\mathsf{T}})\\ &\ge \mathrm{tr}(Q_2X_K)+\mathrm{tr}(R_2KX_KK^{\mathsf{T}})=\tilde{J}_{\mathrm{mix}}(K),\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由假设得出，第二个不等式则利用了最小解性质 $X\succeq X_K$。□

C.2 Proof of Theorem 6

证明分为两部分：

- 由 (25c) 给出的映射 Φ 是从 $\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}$ 到 $\mathcal{F}_{\text{凸}}$的 C^2（实际上是C^∞）微分同胚。这一点将在附录 C.2.1 中证明。
- 式（26）中给出的 $\mathrm{epi}_{\geq}(J_{\text{混合}})\subseteq\pi_{K,\gamma}(\mathcal{L}_{\text{左分式}})=\mathsf{clepi}_{\geq}(J_{\text{混合}})$ 的包含关系成立。证明见附录 C.2.2。

C.2.1 从 $\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}$ 到 $\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}$的微分同胚证明我们先介绍一些辅助记号。记

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}^0&=\left\{(K,\gamma,X)\,\middle|\,K\in\mathrm{R}^{m\times n},\ \gamma\in\mathrm{R},\ X\succ 0\right\},\\ \mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}^0&=\left\{(\gamma,X,Y)\,\middle|\,\gamma\in\mathrm{R},\ X\succ 0,\ Y\in\mathrm{R}^{m\times n}\right\}.\end{aligned}$$

显然，$\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}^0$ 和 $\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}^0$ 可分别与某些欧几里得空间的开子集相对应，且 $\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}^0$ 是凸的。此外，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}=\left\{(K,\gamma,X)\in\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}^0\,\middle|\,\begin{matrix}\gamma\ge\mathrm{tr}(Q_2X)+\mathrm{tr}(R_2KXK^{\mathsf{T}}),\\ A_KX+XA_K^{\mathsf{T}}+W+\beta^{-2}XS_KX\preceq 0\end{matrix}\right\},\quad(\mathrm{C}.1)$$

$$\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}=\left\{(\gamma,X,Y)\in\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}^0\,\middle|\,\begin{matrix}\gamma\ge\mathrm{tr}(Q_2X)+\mathrm{tr}(R_2YX^{-1}Y^{\mathsf{T}}),\\ \mathrm{F}_{\mathrm{cvx}}\preceq 0\end{matrix}\right\}.\quad(\mathrm{C}.2)$$

现在，我们可以扩展式（25c）中 Φ 的定义域，使其定义在更大的集合 $\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}^0$上：

$$\Phi(K,\gamma,X)=(\gamma,X,KX),\quad\forall(K,\gamma,X)\in\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}^0.\quad(\mathrm{C}.3)$$

接下来的证明分为以下两部分：(1) Φ 是从 $\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}^0$ 到 $\mathcal{F}_{\mathrm{lft}}^0$的 C^2 微分同胚。(2) 对任意$(K,\gamma,X)\in\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}^0$，当且仅当 $\Phi(K,\gamma,X)\in\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}$时，$(K,\gamma,X)\in\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}$。

第一部分。考虑式（C.3）中的 Φ，并定义映射

$$\Psi(\gamma,X,Y)=(YX^{-1},\gamma,X),\quad\forall(\gamma,X,Y)\in\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}^0.\quad(\mathrm{C}.4)$$

很容易验证，

$$\Phi\ \mathcal{L}_{\mathrm{lft}}^0\subseteq\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}^0\qquad\Psi\ \mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}^0\subseteq\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}^0\text{和}\Phi\circ\Psi\text{。}$$

现在可以构造复合映射：$\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}^0\to\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}^0$ 和 $\Psi\circ\Phi$：$\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}^0\to\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}^0$。也很容易看出，这两个复合映射分别是其定义域上的恒等函数。

综上所述，我们可以得出结论：Φ 是从 $\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}^0$ 到 $\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}^0$ 的双射，Ψ 是其逆映射。最后，Φ 和 Ψ 实际上都是 C^∞ 函数，因为 Φ 或 Ψ 中的每个元素都是有理函数。

第二部分。考虑（C.3）中的映射 Φ。我们将证明，$(K,\gamma,X)\in\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}$ 当且仅当 $\Phi(K,\gamma,X)\in\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}$。任取$(K,\gamma,X)\in\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}$，并令 $Y=KX$，使得$\Phi(K,\gamma,X)=(\gamma,X,Y)$。根据（C.1）中 $\mathcal{L}_{\mathrm{lft}}$ 的定义，(K,γ,X)满足以下不等式：

$$\begin{aligned}&X\succ 0,\ \gamma\ge\mathrm{tr}(Q_2X)+\mathrm{tr}(R_2KXK^{\mathsf{T}}),\\ &A_KX+XA_K^{\mathsf{T}}+W+\beta^{-2}XS_KX\preceq 0.\end{aligned}\quad(\mathrm{C}.5)$$

由于 $X\succ 0$，我们可以将 $K=YX^{-1}$表示为.....。利用Schur补以及 $Y=KX$，（C.5）中的Riccati不等式等价于 $\mathrm{F}_{\mathrm{cvx}}\preceq 0$。将$(\gamma,X,Y)$的已得性质与（C.2）中 $\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}$ 的定义进行比较，可以确认$(\gamma,X,Y)\in\mathcal{F}_{\mathrm{cvx}}$。反向进行上述推导，不难证明另一个方向。

C.2.2 （26）的证明

我们首先证明包含关系 $\mathrm{epi}_{\geq}(J_{\mathrm{mix}})\subseteq\pi_{K,\gamma}(\mathcal{L}_{\mathrm{lft}})$，这可由推论 4 以及事实~that $\mathrm{epi}_{\geq}(J_{\mathrm{mix}})\subseteq\mathrm{epi}_{\geq}(J_{\mathrm{mix}})$ 立即得出。接下来，集合恒等式

$$\pi_{K,\gamma}(\mathcal{L}_{\mathrm{lft}})=\mathrm{cl}\ \mathrm{epi}_{\geq}(J_{\mathrm{mix}}).\quad(\mathrm{C}.6)$$

将通过以下引理予以证明。

引理 11 在假设1和假设2下，我们有$\tilde{\text{epi}}\geq(J_{\text{mix}}) = \text{clepi}\geq(J_{\text{mix}})$。

$\tilde{}$证明：$\subseteq$。设 $(K,\gamma)\in\text{epi}\geq(J_{\text{mix}})$，即 $K\in\text{cl}(\mathcal{K}_\beta)$ 且$\tilde{J}_{\text{mix}}(K) = \text{tr}((Q_2+K^\mathsf{T}R_2K)X_K)\leq\gamma$。我们断言，存在一个属于 $\text{epi}\geq(J_{\text{mix}})$ 的序列收敛到 (K,γ)。由于 $K\in\text{cl}(\mathcal{K}_\beta)$，存在一个序列 $\{K_n\}\subset\tilde{\mathcal{K}_\beta}$ 使得 $K_n\to K$。由于 J_{mix} 在 $\text{cl}(\mathcal{K}_\beta)$ 上连续，因此 $\tilde{J}_{\text{mix}}(K_n)\to\tilde{J}_{\text{mix}}(K)$。取 $\gamma_n=\gamma+\frac{1}{n}$。则 $(K_n,\gamma_n)\in\text{epi}\geq(J_{\text{mix}})$，且 $(K_n,\gamma_n)\to(K,\gamma)$。因此，$(K,\gamma)\in\text{cl epi}\geq(J_{\text{mix}})$。

$\supseteq$. 设 $(K,\gamma)\in\text{cl epi}\geq(J_{\text{mix}})$，即存在序列 $(K_n,\gamma_n)\in\text{epi}\geq(J_{\text{mix}})$，使得 $(K_n,\gamma_n)\to(K,\gamma)$。我们有 $K_n\in\mathcal{K}_\beta$，$J_{\text{mix}}(K_n)\leq\gamma_n$以及 $K_n\to K\in\text{cl}(\mathcal{K}_\beta)$。$\tilde{}$由 J_{mix} 在 $\text{cl}(\mathcal{K}_\beta)$ 上的连续性，对 $J_{\text{mix}}(K_n)\leq\gamma_n$ 的两$\tilde{}$边取极限，可得 $J_{\text{mix}}(K)\leq\gamma$。因此，$\tilde{}(K,\gamma)\in\text{epi}\geq(J_{\text{mix}})$。□

结合引理 11 与推论 4，可得 (C.6)。

参考文献

[1] R. E. Kalman *et al.*, “对最优控制理论的贡献，” *Bol. soc. mat. mexicana*, 第5卷，第2期，第102–119页，1960。[2] J. C. Doyle *et al.*, “标准 $\mathcal{H}_2$ 与 $\mathcal{H}_\infty$控制问题的状态空间解，” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 第34卷，第8期，第831–847页，1989。[3] K. Glover与J. C. Doyle, “满足 H_∞范数界的所有镇定控制器的状态空间公式及其与风险敏感性的关系，” *Systems & controlletters*, 第11卷，第3期，第167–172页，1988。[4] D. S. Bernstein与W. M. Haddad, “具有H_∞ 性能界的LQG 控制：一种黎卡提方程方法，” *IEEETransactions on Automatic Control*, 第34卷，第3期，第293–305页，1989。[5] P. P. Khargonekar与M. A. Rotea, “混合 H_2/H_∞ 控制：一种凸优化方法，” *IEEE Transactions onAutomatic Control*, 第36卷，第7期，第824–837页，1991。[6]I. Kaminer、P. P. Khargonekar与M. A. Rotea, “基于凸优化的离散时间系统混合 H_2/H_∞ 控制，” *Automatica*, 第29卷，第1期，第57–70页，1993。[7] P. Apkarian、D. Noll与A. Rondepierre, “基于非光滑优化的混合 H_2/H_∞控制，” *SIAM Journal on Controland Optimization*, 第47卷，第3期，第1516–1546页，2008。[8] B. Hu *et al.*, “迈向学习控制策略的策略优化理论基础，” *Annual Review ofControl, Robotics, and Autonomous Systems*, 第6卷，第123– 158页，2023。[9] S. Talebi *et al.*, “控制中的策略优化：几何与算法含义，”预印本，2024。[10]B. Recht, “强化学习导览：来自连续控制的视角，” *Annual Review of Control, Robotics, andAutonomous Systems*, 第2卷，第253–279页，2019。[11]J. Perdomo、J. Umenberger与M. Simchowitz, “通过策略梯度方法镇定动力系统，”载于 *Advances in Neural Information Processing Systems*, 第34卷。Curran Associates, Inc., 2021, 第29274–29 286页。[12]F. Zhao、X. Fu与K. You, “论通过策略梯度方法镇定线性系统的样本复杂度，” *arXiv preprint arXiv:2205.14335*, 2022。[13] M. Fazel *et al.*, “线性二次调节器策略梯度方法的全局收敛，”载于 *International conference on machine learning*。PMLR, 2018, 第1467–1476页。[14]H. Mohammadi *et al.*, “无模型线性二次调节器梯度方法的收敛性与样本复杂度”，问题，” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 第67卷，第5期，第2435–2450页，2022年。[15]Y. Watanabe和Y. Zheng, “重新审视线性二次调节器中的强对偶、隐藏凸性与梯度优势，” *arXiv preprint arXiv:2503.10964*, 2025年。[16]Y. Tang、Y. Zheng和N. Li, “线性二次高斯（LQG）控制的优化景观分析，”载于 *Learning for Dynamics and Control*。PMLR, 2021年，第599–610页。[17]Y. Zheng *et al.*, “在线性二次高斯（LQG）控制的策略优化中逃离高阶鞍点，”载于 *2022 IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC)*。IEEE, 2022年，第5329–5334页。[18]J. Duan *et al.*, “关于动态输出反馈线性二次控制的优化景观，” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023年。[19]J. Umenberger *et al.*, “用于输出估计的全局收敛策略搜索，”载于 *Advances in Neural InformationProcessing Systems*, 第35卷。Curran Associates, Inc., 2022年，第22778–22 790页。[20]Y. Sun和M. Fazel, “通过策略梯度学习最优控制器：经由凸参数化实现全局最优性，”载于 *Proceedings of the 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2021年，第4576–4581页。[21] X. Guo和B. Hu, “状态反馈 $\mathcal{H}_\infty$ 鲁棒控制的直接策略搜索的全局收敛：基于Goldstein次微分重新审视非光滑综合，”载于 *Advances in Neural Information Processing Systems*, 第35卷。Curran Associates, Inc., 2022年，第32 801–32 815页。[22]B. Hu和Y. Zheng, “具有鲁棒性约束的动态输出反馈控制的可行集与次水平集的连通性，” *IEEE Control Systems Letters*, 第7卷，第442–447页，2022年。[23] Y. Zheng、C.-F. Pai和Y. Tang, “最优与鲁棒控制中的良性非凸景观，第二部分：扩展凸提升，”*arXiv preprint arXiv:2406.04001*, 2024年。[24]K. Zhang、B. Hu和T. Ba¸sar, “具有鲁棒性保证的$\mathcal{H}_2$ 线性控制策略优化：隐式正则化与全局收敛，” *SIAM Journal on Control and Optimization*, 第59卷，第6期，第4081–4109页，2021年。[25] D. Mustafa, “最大熵/H_∞ 控制与组合 H_∞/LQG控制之间的关系，” *Systems & Control Letters*, 第12卷，第3期，第193–203页，1989年。[26]K. Glover和D. Mustafa, “最大熵 H_∞控制器的推导及其熵的状态空间公式，”*International Journal of Control*, 第50卷，第3期，第899–916页，1989年。[27] D. J. Limebeer、B. D. Anderson和B. Hendel, “混合 H_2/H_∞ 控制的纳什博弈方法，” *IEEE Transactions onAutomatic Control*, 第39卷，第1期，第69–82页，1994年。[28] C. Scherer、P. Gahinet和M. Chilali, “通过LMI优化实现多目标输出反馈控制，” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 第42卷，第7期，第896–911页，1997年。[29]T. Ba¸sar和P. Bernhard, *H^∞ optimal control and related minimax design problems: a dynamic game approach*。施普林格科学与商业媒体，2008年。[30]J. P. Jansch-Porto、B. Hu和G. E. Dullerud, “马尔可夫跳变线性二次控制的策略优化：梯度法与全局收敛，” *IEEE Transactionson Automatic Control*, 第68卷，第4期，第2475–2482页，2023年。[31] Y. Li、Y. Tang、R. Zhang和N. Li, “用于分散式线性二次控制的分布式强化学习：一种无导数策略优化方法，” *IEEE Transactions onAutomatic Control*, 第67卷，第12期，第6429–6444页，2022年。[32]L. Furieri、Y. Zheng和M. Kamgarpour, “学习全局最优的分布式LQ调节器，”载于 *Proceedings of the 2nd Conference on Learning for Dynamics and Control*, 《机器学习研究论文集》，第120卷，2020年，第287–297页。[33] K. Zhang、Z. Yang和T. Basar, “策略优化可证明地收敛于零和线性二次博弈中的纳什均衡，”*Advances in Neural Information Processing Systems*, 第32卷，2019年。

[34]Y. Watanabe、C.-F. Pai和Y. Zheng，“无限时域线性二次微分博弈中的半定规划对偶，” *arXiv preprint arXiv:2504.02201*，2025年。[35] X. Guo *et al.*，“结构化 $\mathcal{H}_\infty$ *Advances in Neural Information Processing Systems* 控制的无导数策略优化复杂度，”，第卷，第36, 5050–5078, 2023页–页。[36]Y. Tang、Y. Zheng和N. Li，“线性二次高斯（LQG）控制的优化景观分析，”*Mathematical Programming*，第202卷，第1期，第399–444页，2023年。[37] Y. Zheng、C.-f. Pai和Y. Tang，“最优与鲁棒控制中的良性非凸景观，第一部分：全局最优性，” *arXiv preprint arXiv:2312.15332* 2023，。[38]S. Kraisler和M. Mesbahi，“输出反馈综合的轨道几何：商流形与LQG直接策略优化，” *IEEE Control Systems Letters*，2024年。[39] K. Zhou，J. C. Doyle和K. Glover，*Robust and Optimal Control* 1996。普伦蒂斯·霍尔，。[40] M. A. Rotea和P. P. Khargonekar，“带有 H^∞约束的H^2-最优控制：状态反馈情形，” *Automatica*，第27卷，第2期，第307–316页，1991年。[41] A. Megretski，“混合 H_2 H_∞ *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control* 控制中的最优控制器阶数，”载于，第卷。IEEE，第4, 3173–3174页–页。[42] I. Fatkhullin和B. Polyak，“优化静态线性反馈：梯度法，” *SIAM Journal on Control and Optimization*，第59卷，第5期，第3887–3911页，2021年。

[43] S. G. Krantz 和 H. R. Parks，*A primer of real analytic functions*。施普林格科学与商业媒体，2002 年。[44] P. Lancaster 和 L. Rodman，*Algebraic riccati equations*。克拉伦登出版社，1995 年。[45] W. Levine 和 M. Athans，“线性多变量系统最优常值输出反馈增益的确定”，*IEEE Transactions on Automatic control*，第 15 卷，第 1 期，第 44– 48 页，1970 年。[46]Y. Tang 和 Y. Zheng，“关于非光滑 $\mathcal{H}_\infty$ 输出反馈控制中直接策略搜索的全局最优性”，*arXiv preprint arXiv:2304.00753*，2023 年。[47] D. Mustafa 和 K. Glover，*Minimum entropy $\mathcal{H}_\infty$ control*。施普林格，1990 年。[48]D. Jacobson，“具有指数性能准则的最优随机线性系统及其与确定性微分博弈的关系”，*IEEE Transactions on Automatic control* 124，第 18 卷，第 2 期，第 –131 页，1973 年。[49] M. ApS，“适用于 MATLAB 的 Mosek 优化工具箱”，*User's Guide and Reference Manual Version* 4, 1, 2019，，第 p. 卷。[50]J. V. Burke *et al.*，“HIFOO——用于固定阶控制器设计和 H_∞ *IFAC Proceedings Volumes* 优化的 MATLAB 软件包”，，第 no. 卷，第 39, 9, 339–344, 2006 pp. 页。[51] S. G. Krantz 和 H. R. Parks，*The implicit function theorem: history theory and applications*，，。施普林格科学与商业媒体，2002 年。