arXiv:2603.04871v1 [math.NT] 5 Mar 2026

保持数的三进制表示中数字渐近平均值的变换与函数

M. V. PRATSIOVYTYI、S. O. KLYMCHUK 和 O. P. MAKARCHUK

摘要。本文研究区间 $[0; 1)$ 上的变换，以及保持数x的 s进制表示中数字 r 的渐近平均值的函数，

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)$$

给出变换属于此类的充要条件

1. 引言

考虑实数的小数部分，即区间$[0; 1)$ 中的点时，以下我们将只考虑数 $x \in [0; 1)$。

令 $2 \leqslant s$ 表示一个固定的自然数， $\mathcal{A}_s \equiv \{0, 1, \ldots, s-1\}$ 表示 s 进制表示所用的字母表， $L \equiv \mathcal{A}_s \times \mathcal{A}_s \times \ldots \times \mathcal{A}_s \ldots$ 表示由 s 进制数字组成的序列空间。众所周知，对于每个实数 $x \in [0; \ 1]$ 都存在一个序列 (α_k)，使得 $(\alpha_k) \in L$ 且

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{s^k} + \cdots \equiv \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}.$$

我们将后一种符号表示称为数 x 的进制表示，而 $\alpha_k = \alpha_k(x)$ 则是它的第 k s 位进制数字。一般而言，数 x 的第 k 位数字并不是 x 的定义良好的函数，因为下列等式成立

$$\Delta^s_{c_1\ldots c_{k-1}c_k(0)} = \Delta^s_{c_1\ldots c_{k-1}[c_k-1](s-1)},$$

其中 (i) 表示该数表示中的循环节。这种形式的数称为进制有理数；它们恰有两种 s 进制表示，并构成有理数集合的一个子集。其余的数只有一种表示，称为进制无理数。为确保数的第 k 位数字定义正确，我们约定只采用第一种 s 进制表示，即循环节为 (0) 的那一种。这样， $\alpha_k(x)$ 就是在 $[0, 1]$ 上定义良好的函数。

回顾一下，我们将数字数字频率 $i \in \mathcal{A}s$在 s进制表示$\Delta^s\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots$中的数 x定义为以下极限（若其存在）：

$$\nu_i(x) = \lim_{n\to\infty} v_i^{(n)},$$

2020 数学主题分类。 11K50, 26A27, 26A30.关键词与短语。 s进制实数表示；数字频率；数字的渐近平均值；保持数字渐近平均值的函数；保持数字频率的变换。德拉霍马诺夫国立师范大学科学期刊。系列1：物理与数学科学。——基辅：德拉霍马诺夫国立师范大学，2013年，第15期，第87–99页。

其中 $v_i^{(n)} = n^{-1}N_i(x,n)$ 是数字 i的相对频率，而 $N_i(x,n) = \#\{j : \alpha_j(x) = i,\ j \leqslant n\}$ 表示数 x的 s进制表示中直到第 n位（含该位）出现的数字 i 的数量。

数 x 的 s–进制表示中的数字频率这一概念由 ´Emile Borel 于20世纪初引入 [3], ，事实证明它极具成效。研究人员有效地将其用于各种目的，尤其是：1）定义不同的数学对象（集合、函数、测度、空间变换等）；2）解决若干度量和概率问题（确定数的正规与非正规性质、函数和概率分布的奇异性等）；3）解决遍历理论和分形分析中的问题。特别是，可以用它来定义自相似但非完美的贝西科维奇–埃格尔斯顿集：

$$E[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{s-1}] = \{x : x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},\ \nu_i(x) = \tau_i \geqslant 0,\ i = \overline{0, s-1}\}.$$

所有贝西科维奇–埃格尔斯顿集的勒贝格测度均为零，但以下集合除外：

$$H_s = \{x : x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},\ \nu_i(x) = s^{-1},\ i = \overline{0, s-1}\},$$

关于以底数 s 表示的正规数，根据著名的博雷尔定理 [3]，这类数的勒贝格测度为满测度。

集合 $E[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{s-1}]$ 的豪斯多夫–贝西科维奇分形维数[2, 4, 8]可用以下公式计算

$$\alpha_0(E[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{s-1}]) = -\frac{\ln \tau_0^{\tau_0}\tau_1^{\tau_1}\ldots\tau_{s-1}^{\tau_{s-1}}}{\ln s}.$$

其渐 近似均值是实数 s的 $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ 进制表示中数字的渐近平均值 r

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s^k} \equiv \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},\ \ \alpha_k \in \mathcal{A}_s$$

定义为以下极限（若其存在）：

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x).$$

我们在 [11]中引入了这一概念，并将其用于定义和研究分形集 [12]–[14]的拓扑—度量性质。它与数字频率密切相关，因为当所有数字的频率都存在时，数字的渐近平均值就表示某种平均值。具体而言，若数 x 的 s进制表示具有数字频率 ν_0， ν_1，……，ν_{s-1}，则其数字的渐近平均值 $r(x)$为

$$r(x) = \nu_1(x) + 2\nu_2(x) + \ldots + (s-1)\nu_{s-1}(x).$$

有趣的是，这一概念早在更早的研究中就已出现， [2, 4, 5, 6] 只是当时并未明确命名。

本文介绍并研究数在 3 进制（$s = 3$）表示中保持数字渐近平均值不变的函数，这些函数在区间 $[0, 1)$ 上处处成立，也几乎处处成立（就勒贝格测度而言）；此外，本文还研究保持数字频率的函数。

2. 区间 $[0,1)$ 上的变换及保持数字频率的函数

令 Θ 表示这样一组数字：所有数字的频率 ν_0、 ν_1、..... ν_{s-1} 均存在。

回顾一下，非空集合 X 上的变换 是将该集合双射（即一一映射）到自身的映射。

定义 1。 如果半区间 $[0,1)$ 上的变换 f 保持数字频率，则称其满足等式

$$\nu_i\left(f(x)\right)=\nu_i(x),$$

该等式对所有 $i\in\mathcal{A}_s$、 $x\in\Theta$ 以及 $x\in[0,1)$ 均成立，且频率 $\nu_i(x)$ 与 $\nu_i(f(x))$ 不会同时不存在。

恒等变换提供了一个保持数字频率的函数的平凡例子。在 $[0,1)$ 上由等式定义的函数 f

$$f(x)=\Delta^s_{\alpha_2(x)\alpha_1(x)\alpha_4(x)\alpha_3(x)\ldots}=y,$$

因为对于任意自然数 k，我们有

$$N_i(y,2k)=N_i(x,2k),$$

$$N_i(y,2k+1)=N_i(y,2k)+b,\qquad \text{where}\qquad b\in\{0,1\}.$$

一个不保持数字频率的变换的简单例子是

$$g(\Delta^3_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots})=\Delta^3_{\beta_1(x)\beta_2(x)\ldots\beta_n(x)\ldots},$$

其中 $\beta_i(x)=\alpha_i(x)+1\pmod 3$，且此外 $g(\Delta^3_{(1)})\equiv\Delta^3_{(0)}$。事实上，对于 $x_0=\Delta^3_{(0)}$，$g(\Delta^3_{(0)})\equiv\Delta^3_{(1)}$，也就是说，$1=\nu_0(x_0)\neq\nu_0(g(x_0))=0$。

引理 1. 所有保持数的 s 进制表示中各数字频率不变的区间 $[0;1)$ 上的变换所构成的集合 V，关于变换的复合运算 $\circ$（复合）构成一个非交换群。

证明。众所周知，任意集合上的所有变换关于运算 $\circ$

$$[f_2\circ f_1](x)=f_2(f_1(x))$$

构成一个群。为证明该引理，我们应用子群判别法。

令 $f_1,\ f_2\in V$即 $\nu_i(f_j(x))=\nu_i(x),\ j\in\{1,2\}$ i $f_1(x)=x',\ f_2(x)=x''$。由等式可知，集合 V 对运算 $\circ$ 封闭:

$$\nu_i(f_2(f_1(x)))=\nu_i(f_2(x'))=\nu_i(x')=\nu_i(f_1(x))=\nu_i(x).$$

我们证明，对于每个变换 $f\in V$，其逆变换 f^{-1} 也属于 V。由 $f\in V$ 得 $\nu_i(f(x))=\nu_i(x)$。若 $y=f(x)$，则 $x=f^{-1}(y)$，并且

$$\nu_i(y)=\nu_i(f(x))=\nu_i(x)=\nu_i(f^{-1}(y)).$$

因此，$f^{-1}\in V$。

格 oup (V，$\circ$) 是非交换的，因为对于 [0 的变换；1）定义为

$$f_1(x)=\Delta^s_{\alpha_2(x)\alpha_1(x)\alpha_4(x)\alpha_3(x)\ldots\alpha_{2k}\alpha_{2k-1}\ldots},$$

$$f_2(x)=\Delta^s_{\alpha_3(x)\alpha_2(x)\alpha_1(x)\alpha_4(x)\ldots\alpha_{2k+1}\alpha_{2k}\alpha_{2k-1}\ldots}$$

我们得到 $[f_2 \circ f_1](x) = \Delta^s_{\alpha_4(x)\,\alpha_1(x)\,\alpha_2(x)\,\alpha_3(x)\,\ldots\ldots}$ 以及 $[f_1 \circ f_2](x) = \Delta^s_{\alpha_2(x)\,\alpha_1(x)\,\alpha_4(x)\,\alpha_1(x)\,\ldots\ldots}$。因此，$f_2 \circ f_1 \neq f_1 \circ f_2$。□

定义 2. 若函数 f 定义在区间 $[0; 1)$ 上，取值于 $[0; 1)$，并满足定义 1 的条件，则称函数 f 保持数字频率。

注意，$[0;1)$ 上的每个变换都是函数，但定义在 $[0; 1)$ 上的函数并不都是变换。以下是在 $[0; 1)$ 上定义的保持数字频率但不是变换的函数的简单例子：

$$\omega\left(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) \equiv \Delta^s_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots},$$

$$\delta_i\left(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) \equiv \Delta^s_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

其中 i 是字母表 $\mathcal{A}_s$中的一个固定元素，

$$f(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_j\ldots}) = \Delta^s_{\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}\alpha_{j+1}\alpha_j\alpha_{j+2}\ldots},$$

其中 j 是一个预先指定的自然数。

3. 与保持分形维数的函数的联系

从群论视角来看，分形几何可以被视为研究空间 R^n 上保持分形维数的群变换不变量的理论；也就是说，对于这类变换，任意博雷尔集的像与原像的分形维数都相等 [1, 15]。

定理1. 某些函数保持数字频率，却不保持豪斯多夫–贝西科维奇分形维数。

证明. 集合 Θ 是所有可能的贝西科维奇–埃格尔斯顿集的并集。我们对所有 $x \in [0, 1)$ 定义函数 f，使其满足等式

$$f(x) = \begin{cases} \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{[\tau_0\cdot1]}\underbrace{1\ldots1}_{[\tau_1\cdot1]}\underbrace{2\ldots2}_{[\tau_2\cdot1]}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{[\tau_0\cdot n]}\underbrace{1\ldots1}_{[\tau_1\cdot n]}\underbrace{2\ldots2}_{[\tau_2\cdot n]}\ldots} \equiv x', \text{ якщо } x \in \Theta, \\ x, \text{ if } x \notin \Theta, \end{cases}$$

其中 $\tau_0 = \nu_0(x)$、$\tau_1 = \nu_1(x)$、$\tau_2 = \nu_2(x)$。

显然，x' 取决于数 x的数字频率，也就是说，$x' = g(\nu_0(x)\ \nu_1(x)\ \nu_2(x))$，且函数 f不是 $[0, 1)$ 的变换，因为 $f(\Delta^3_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = f(\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})$。此外，贝西科维奇–埃格尔斯顿集 $E[\tau_0, \tau_1, \tau_2]$ 在映射 f 下的像是单点 x'。

现在我们证明：如果 $x \in E[\tau_0, \tau_1, \tau_2]$，则 $\nu_i(x') = \nu_i(x)$。对于每个充分大的自然数 n，都存在 $k_n \in N$ 使得

$$\sum_{j=1}^{k_n} j = \frac{k_n(k_n+1)}{2} \leqslant n < \frac{(k_n+1)(k_n+2)}{2} = \sum_{j=1}^{k_n+1} j.$$

由于对所有 $z \in R$ 都有 $z - 1 < [z] \leqslant z$，因此可得

$$\sum_{j=1}^{n}([\tau_0 \cdot j] + [\tau_1 \cdot j] + [\tau_2 \cdot j]) \leqslant \sum_{j=1}^{n}(\tau_0 + \tau_1 + \tau_2)j = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{j=1}^{n}([\tau_0\cdot j]+[\tau_1\cdot j]+[\tau_2\cdot j])>\sum_{j=1}^{n}((\tau_0+\tau_1+\tau_2)j-1)=\frac{n(n+1)}{2}-n.$$

对于每个 $i\in 0$，1，2，我们有

$$\frac{N_i(x',n)}{n}\geqslant\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n}[\tau_i\cdot j]}{n}>\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n}(\tau_i\cdot j-1)}{\frac{(k_n+1)(k_n+2)}{2}}=\frac{\tau_i\frac{k_n(k_n+1)}{2}-k_n}{\frac{(k_n+1)(k_n+2)}{2}}\to\tau_i(n\to\infty).$$

On the other hand,

$$\frac{N_i(x',n)}{n}<\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1}[\tau_i\cdot j]}{n}<\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n}\tau_i\cdot j}{\frac{k_n(k_n+1)}{2}}=\frac{\tau_i\frac{(k_n+1)(k_n+2)}{2}}{\frac{k_n(k_n+1)}{2}}\to\tau_i(n\to\infty).$$

因此，$(\nu_i')x=\tau_i$ 对于 $i\in\{0,1,2\}$，这意味着函数 x 保留数字频率。然而，如果 $\tau_0\tau_1\tau_2\neq 0$，那么考虑贝西科维奇–埃格尔斯顿公式 $\alpha_0(E[\tau_0,\tau_1,\tau_2])=-\ln\tau_0^{\tau_0}\tau_1^{\tau_1}\tau_2^{\tau_2}\ln 3\neq 0$。另一方面，$\alpha_0(\{f(x):\ x\in E[\tau_0,\tau_1,\tau_2]\})=\alpha_0(x')=0$，因此

$$\alpha_0(E[\tau_0,\tau_1,\tau_2])\neq\alpha_0(f(E[\tau_0,\tau_1,\tau_2])).$$

□

是否存在保留数字频率但不保留豪斯多夫–贝西科维奇维数的连续函数，仍然是一个未解问题。

4. $[0,1)$的变换以及保留数字渐近均值但不保留数字频率的函数

定义 3. 我们称函数 f 保持数字的渐近平均值，如果

$$r(f(x))=r(x)$$

对所有使 $r(x)$ 存在的 $x\in[0,1)$ 都成立。

定义 4. 我们称函数 f 几乎处处保持数字的渐近平均值（按勒贝格测度的意义），如果等式

$$r(f(x))=r(x)$$

在一个全勒贝格测度集上成立。

由于 $r(x)=\nu_1(x)+\nu_2(x)$，因此保持数字频率的 $[0,1)$ 变换和函数也保持数字的渐近平均值。

不难举出一个不保持数字的渐近平均值的函数。例如，这样的函数由等式定义：

$$I(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})\equiv\Delta^s_{[s-1-\alpha_1][s-1-\alpha_2]\ldots[s-1-\alpha_n]\ldots},$$

由于 $I(\Delta^3_{(0)})=\Delta^3_{(2)}$ 且 $2=r(I(x))\neq r(x)=0$。函数 I 被称为数的 s 进制表示的数字反转器。

引理 2. 对于 3 进制数制，我们有：

$$\begin{aligned}&\text{if } r(x)=0 \text{ then } \nu_0(x)=1 \text{ and } \nu_1(x)=\nu_2(x)=0;\\&\text{if } r(x)=2 \text{ then } \nu_2(x)=1 \text{ and } \nu_0(x)=\nu_1(x)=0.\end{aligned}$$

证明。令 $r(x) = 0$，即 $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$。由于

$$r_n(x) = v_1^{(n)}(x) + 2v_2^{(n)}(x) \geqslant v_i^{(n)}(x) \geqslant 0,$$

对于两者 $i \in 1,2$，由 $r(x) = 0$ 可知 $\nu_1(x) = \nu_2(x) = 0$，因此 $\nu_0(x) = 1$。现在设 $r_n(x) = 2$，即 $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 2$。由于

$$r_n(x) = v_1^{(n)}(x) + 2v_2^{(n)}(x) = 1 - v_0^{(n)}(x) + v_2^{(n)}(x),$$

我们有 $1 \geqslant v_2^{(n)}(x) = r_n - 1 + v_0^{(n)}(x) \geqslant r_n - 1$。取极限 $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 2$，可得 $\lim_{n\to\infty} v_2^{(n)}(x) = 1$。因此，对于 $i \in \{0,1\}$ $0 \leqslant v_i^{(n)}(x) = 1 - v_2^{(n)}(x) - v_{1-i}^{(n)}(x) \leqslant 1 - v_2^{(n)}(x)$。但 $\lim_{n\to\infty} 1 - v_2^{(n)}(x) = 0$，故 $\lim_{n\to\infty} v_i^{(n)}(x) = 0, i \in \{0,1\}$。 □

定理 2. 不存在函数 $f:[0;1) \to [0;1)$，使得 $r(x) = 2r(f(x))$ (2) 和 $\sum(\nu_j(x) - \nu_j(f(x)))^2 \neq 0$ (1) 在集合 $\Theta_{.j=0}$ 上处处成立。

换言之，任何保持三进制数字渐近均值的函数 $f\colon [0;1) \to [0;1)$ 也必须保持所有数字的频率；不存在一个数 $x \in \Theta$，使得这两个条件

$$\sum_{j=0}^{2}(\nu_j(x) - \nu_j(f(x)))^2 \neq 0, \tag{1}$$

$$r(x) = r(f(x)). \tag{2}$$

同时成立。

证明。设 $x \in E[0,0,1]$，则 $r(f(x)) = r(x) = 2$。由引理 2，数 $y = f(x)$ 属于集合 $E[0,0,1]$，这意味着不等式 (1) 不成立。

类似地，如果 $x \in E[1,0,0]$，那么我们有包含关系 $f(x) \in E[1,0,0]$。 □

5. 几乎处处保持渐近均值和数字频率

一个自然的问题是，是否存在这样的函数 f：它保持一个数的数字渐近均值，却不在集合 Θ（从勒贝格测度的意义上）上几乎处处保持数字频率，因而也不在正规数集合 H 上保持数字频率。

我们在点 $x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ 处定义函数 f，其中 $x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ 属于 $[0;1)$，定义如下：

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{if} \quad x \in [0;1] \setminus H, \\ \Delta^3_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}, & \text{if} \quad x \in H, \end{cases}$$

其中，当 $\alpha_n \neq 1$ 时，$\beta_n = \alpha_n$；对于满足 $\alpha_{n_k} = 1$ 的序列 n_k，我们得到

$$\beta_{n_k} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad n_k = 0(\mod 7), \\ 2 & \text{if} \quad n_k = 1(\mod 7), \\ \alpha_{n_k} & \text{in the remaining cases.} \end{cases}$$

因此，函数 $f(x)$在正规点处的像，是通过将该数的每第七个三进制数字“1”替换为“0”，并将随后的数字“1”替换为“2”而得到的。

引理3. 集合 $\{1,2,\ldots,n\}\cap\{7k\colon k\in N\}$ 的基数为 $\left[\frac{n}{7}\right]$，集合 $\{1,2,\ldots,n\}\cap\{7k+1\colon k\in N\}$ 的基数为 $\left[\frac{n-1}{7}\right]$。

证明。设 $k\in N$ 使得 $7k\leqslant n<7(k+1)$。由此可得 $k\leqslant\frac{n}{7}<(k+1)$，因此 $\left[\frac{n}{7}\right]=k$。设 $k\in N$ 使得 $7k+1\leqslant n<7(k+1)+1$。由此可得 $k\leqslant\frac{n-1}{7}<(k+1)$，因此 $\left[\frac{n-1}{7}\right]=k$。 □

定理 3。若 $x\in H$，则 $\nu_0(f(x))=\frac{8}{21}$，$\nu_1(f(x))=\frac{8}{21}$ 且 $\nu_2(f(x))=\frac{5}{21}$。

证明。设 k 为一个充分大的自然数，并设 $\varphi(k)\in N$（其中 φ 是欧拉函数），满足

$$n_{\varphi(k)}\leqslant k\leqslant n_{\varphi(k)+1}.$$

由于 $\nu_1(x)=\frac{1}{3}$，因此 $\frac{1}{3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N(x,n_k)}{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k}{n_k}$，并考虑到引理3，我们有 $N_1(f(x,k)=\varphi(k)-\left[\frac{\varphi(k)}{7}\right]-\left[\frac{\varphi(k)-1}{7}\right]\geqslant\varphi(k)-\varphi(\frac{k}{7}-\frac{\varphi(k)-1}{7}+2\frac{\varphi(k)}{7}-\frac{\varphi(k)-1}{7})$ 对于 $k\to\infty$。$N_1(f(x,k)=\varphi(k)-\left[\frac{\varphi(k)}{7}\right]-\left[\frac{\varphi(k)-1}{7}\right]\leqslant\varphi(k)-\varphi(\frac{k}{7}-\frac{\varphi(k)-1}{7})$ 对于 $k\to\infty$。因此，$\nu_1(f(x))=\frac{5}{21}$。

令 $N_0(x,k)$ 表示数字块 $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$ 中数字“0”的个数。由于 $\nu_0=\frac{1}{3}$，我们有 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{N_0(x,k)}{k}=\frac{1}{3}$，并考虑到引理3，可得

$$\frac{N_0(f(x),k)}{k}=\frac{N_0(x,k)+\left[\frac{\varphi(k)}{7}\right]}{k}\geqslant\frac{N_0(x,k)}{k}+\frac{\frac{\varphi(k)}{7}-1}{n_{\varphi(k)+1}}\to\frac{1}{3}+\frac{1}{21}=\frac{8}{21}\text{ for }k\to\infty.$$

$$\frac{N_0(f(x),k)}{k}=\frac{N_0(x,k)+\left[\frac{\varphi(k)}{7}\right]}{k}\leqslant\frac{N_0(x,k)}{k}+\frac{\frac{\varphi(k)}{7}}{n_{\varphi(k)}}\to\frac{1}{3}+\frac{1}{21}=\frac{8}{21}\text{ for }k\to\infty.$$

因此，$\nu_0(f(x))=\frac{8}{21}$。由于 $\nu_0+\nu_1+\nu_2=1$，于是 $\nu_2(f(x))=1-\frac{5}{21}-\frac{8}{21}=\frac{8}{21}$。 □

若 $x\in H$，则 $r(x)=\frac{1}{3}+2\frac{1}{3}=1$；因此，由定理 3 可得 $r(f(x))=\frac{5}{21}+2\frac{8}{21}=1$。

因此，对于任意三进制正规数 x，函数 f 几乎处处保持数字的渐近平均值。函数 f 在集合 Θ 中几乎处处保持数字的渐近平均值，当且仅当

$$\lambda(\{f(x:x\in H)\}\cap H)=1.$$

对于每个 $x\in H$，我们都指定一个相应的 $y\in H$，使得 $r(x)=r(y)=1$。因此，保持数字渐近均值几乎

处处不变的函数集合 $f\colon\ [0;\ 1] \to [0;1]$ 的基数为超连续统。由此可知，几乎处处保持数字渐近均值不变的函数集合$f\colon\ [0;\ 1] \to [0;1]$ 的基数也为超连续统。

6. 当数字频率不存在时函数对渐近数字均值的保持

我们来构造一个函数 $f(x)$，它保持三进制数字的渐近均值，即对于任意 $x \in H$，都有 $r(x) = r(f(x))$，并且对所有 $i \in \{0,1,2\}$，数字频率$\nu_i(f(x))$ 均不存在。

考虑由 $\beta_n = \Delta^3_0$ 定义的序列 (β_n) $\underbrace{\ldots 0}_{1!}\underbrace{1\ldots 1}_{2!}\ldots\underbrace{0\ldots 0}_{(2n-1)!}\underbrace{1\ldots 1}_{2n!}\ldots$

$$\text{Let } f(x) = \begin{cases} x, \text{ if } x \in [0;1) \setminus H, \\ \Delta^3_{\underbrace{0\ldots 0}_{[\tau_{01}1^x]}\underbrace{1\ldots 1}_{[\tau_{11}1^x]}\underbrace{2\ldots 2}_{[\tau_{21}1^x]}\ldots\underbrace{0\ldots 0}_{[\tau_{0n}n^x]}\underbrace{1\ldots 1}_{[\tau_{1n}n^x]}\underbrace{2\ldots 2}_{[\tau_{2n}n^x]}\ldots}, \text{ if } x \in H, \end{cases} \quad \text{where}$$

$$(\tau_{0n};\tau_{1n};\tau_{2n}) = \begin{cases} (0,4;0,2;0,4), \text{ if } \beta_n = 0, \\ (0,3;0,4;0,3), \text{ if } \beta_n = 1. \end{cases}$$

引理 4. 对于任意 $\alpha > 0$，以下等式成立：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{1+\alpha}}{1^{1+\alpha}+2^{1+\alpha}+\ldots+n^{1+\alpha}} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2+\alpha}}{1^{1+\alpha}+2^{1+\alpha}+\ldots+n^{1+\alpha}} = 2+\alpha.$$

证明。 设 $s_n = \sum_{i=1}^{n} i^{\alpha+1}$，则根据拉格朗日定理，有

$$(n+1)^{2+\alpha} - n^{2+\alpha} = z_n^{1+\alpha}(2+\alpha), \text{ where } z_n \in [n;n+1], \text{ hence}$$

$$\frac{(n+1)^{2+\alpha} - n^{2+\alpha}}{n^{1+\alpha}} = (2+\alpha)\left(\frac{z_n}{n}\right)^{1+\alpha} \to 2+\alpha.$$

由于 $(n+1)^{1+\alpha} - n^{1+\alpha} = n^{1+\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} - 1\right) \to 0$ 对 $n \to \infty$成立，因此根据施托尔茨定理，我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^{1+\alpha}}{s_n - s_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^{1+\alpha}}{s_n} = 0.$

□

引理 5. 数字 $r(f(x))$ 的渐近均值 $f(x)$ 对所有 $x \in H$均等于 1 。

证明。 对于任意 $n \in N$，存在一个自然数 $k_n \in N$，使得

$$\sum_{j=1}^{k_n}\sum_{i=0}^{2}[\tau_{ij}j^{x+1}] \leqslant n < \sum_{j=1}^{k_n+1}\sum_{i=0}^{2}[\tau_{ij}j^{x+1}].$$

于是当 $n \to \infty$ 时，我们有

$$r_n(f(x)) > \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n}([\tau_{1j}j^{x+1}] + 2[\tau_{2j}j^{x+1}])}{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1}\sum\limits_{i=0}^{2}[\tau_{ij}j^{x+1}]} > \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n}(\tau_{1j}+2\tau_{2j})j^{x+1} - k_n}{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1}(\tau_{0j}+\tau_{1j}+\tau_{2j})j^{x+1}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1} - k_n}{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1} j^{x+1}} =$$

$$= 1 - \frac{(k_n+1)^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1} j^{x+1}} - \frac{k_n}{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1} j^{x+1}} \to 1,$$

since $\dfrac{k_n}{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1} j^{x+1}} < \dfrac{k_n}{(k_n+1)^{x+1}} \to 0$ and $\dfrac{(k_n+1)^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1} j^{x+1}} = \left(1+\dfrac{1}{k_n}\right)^{x+1} \cdot \dfrac{k_n^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1} j^{x+1}} \to 0.$

$$r_n(f(x)) < \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1}([\tau_{1j}j^{x+1}]+2[\tau_{2j}j^{x+1}])}{\sum\limits_{j=1}^{k_n}\sum\limits_{i=0}^{2}[\tau_{ij}j^{x+1}]} < \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1}(\tau_{1j}+2\tau_{2j})j^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n}(\tau_{0j}+\tau_{1j}+\tau_{2j})j^{x+1}-k_n} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1} j^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}-k_n} = \frac{1+\frac{(k_n+1)^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}}}{1-\frac{k_m}{\sum\limits_{j=1}^{k_n}}} \to 1.$$

H因此，m r_n (f(=))$_{n\to\infty}$1 □

引理 6. 对于任意数 $x \in H$，相应的值 $f(x)$ 对于所有 3 进制数字的 $i \in \{0,1,2\}$ 都没有明确的数字频率。

证明。由于当 $n \to \infty$ 时，我们有

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}(2k-1)! - \sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)!}{\sum\limits_{k=1}^{2n+1} k! - \sum\limits_{k=1}^{2n-1} k!} = \frac{(2n+1)!}{(2n+1)!+(2n)!} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{2n+1}} \to 1,$$

于是根据施托尔茨定理，我们得到 1! + 3! + . . . + (2n − 1)! 1! + 2! + . . . + (2n − 1)! → 1 因此 2! + . . . + (2n − 2)! 1! + . . . + (2n − 1)! → 0.

Taking into account that $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}(2k-1)! - \sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)!}{\sum\limits_{k=1}^{2n+2} k! - \sum\limits_{k=1}^{2n} k!} = \dfrac{(2n+1)!}{(2n+2)!+(2n+1)!} =$

$\dfrac{1}{2n+3} \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时，则 1! + 3! + . . . + (2n − 1)! 1! + 2! + . . . + (2n)! → 0 因此 2! + . . . + (2n − 2)! 1! + . . . + (2n)! → 0。令

$$k_n = 1! + 2! + \ldots + (2n-1)!,$$
$$l_n = \sum_{j=1}^{k_n}[\tau_{0j}j^x] + [\tau_{1j}j^x] + [\tau_{2j}j^x],$$

则当 $n \to \infty$ 时，我们有

$\dfrac{N_0(f(x),l_n)}{l_n} = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k_n}[\tau_{0j}j^{x+1}]}{l_n} > \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k_n}\tau_{0j}j^{x+1} - 3k_n}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}}$. (It is clear that $\dfrac{k_n}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} \to 0$).

$$\sum_{j=1}^{k_n}\tau_{0j}j^{x+1} = 0,4\sum_{j=1}^{h_n} b_j^{x+1} + 0,3\sum_{j=1}^{s_n} l_j^{x+1},$$

其中

$$\sum_{j=1}^{h_n} b_j^{x+1} + \sum_{j=1}^{s_n} l_j^{x+1} = \sum_{j=1}^{k_n} j^{x+1},$$
$$h_n = 1! + 3! + \ldots + (2n-1)!,$$
$$s_n = 2! + 4! + \ldots + (2n-2)!.$$

We then have $\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{s_n} l_j^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} < \dfrac{s_n \cdot k_n^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} = \dfrac{s_n}{k_n} \cdot \dfrac{k_n^{x+2}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} \to 0 \cdot (2+x) = 0.$

Therefore $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{s_n} l_j^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{h_n} b_j^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k_n} \tau_{0j} j^{x+1} - 3k_n}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} = 0,4.$

On the other hand

$$\frac{N_0(f(x), l_n)}{l_n} < \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n} \tau_{0j} j^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1} + k_n} = \frac{\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n} \tau_{0j} j^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}}}{1 + \frac{k_n}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}}} \to 0,4 \text{ при } n \to \infty.$$

Hence, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N_0(f(x), l_n)}{l_n} = 0,4.$

Now let

$$k_n^* = 1! + 2! + \ldots + (2n)!,$$
$$l_n^* = \sum_{j=1}^{k_n^*} [\tau_{0j} j^x] + [\tau_{1j} j^x] + [\tau_{2j} j^x],$$
$$h_n^* = 1! + 3! + \ldots + (2n-1)!,$$
$$s_n^* = 2! + 4! + \ldots + (2n)!.$$

We obtain, $\sum\limits_{j=1}^{k_n^*} \tau_{0j} j^{x+1} = 0,4 \sum\limits_{j=1}^{h_n^*} b_j^{*x+1} + 0,3 \sum\limits_{j=1}^{s_n^*} l_j^{*x+1}$, where $\sum\limits_{j=1}^{h_n^*} b_j^{*x+1} + \sum\limits_{j=1}^{s_n^*} l_j^{*x+1} = \sum\limits_{j=1}^{k_n^*} j^{x+1}$.

Thus $\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{h_n^*} b_j^{*x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n^*} j^{x+1}} < \dfrac{h_n^*}{k_n^*} \cdot \dfrac{k_n^{*x+2}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n^*} j^{x+1}} \to 0 \cdot (x+2) = 0$ при $n \to \infty$.

Hence, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{h_n^*} b_j^{*x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n^*} j^{x+1}}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{s_n^*} l_j^{*x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n^*} j^{x+1}}=1$.

$$\frac{N_0(f(x),l_n^*)}{l_n^*}>\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n^*}\tau_{0j}j^{x+1}-k_n^*}{\sum\limits_{j=1}^{k_n^*} j^{x+1}}\to 0,4\cdot 0+0,3\cdot 1=0,3 \text{ при } n\to\infty,$$

$$\frac{N_0(f(x),l_n^*)}{l_n^*}<\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n^*}\tau_{0j}j^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n^*} j^{x+1}+k_n^*}\to 0,4\cdot 0+0,3\cdot 1=0,3 \text{ при } n\to\infty.$$

Therefore, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N_0(f(x),l_n^*)}{l_n^*}=0,3$ and the frequency $\nu_0(f(x))$ does not exist.

Similarly we can show that $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N_j(f(x),l_n)}{l_n}=\tau_{j1}$ and $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N_j(f(x),l_n^*)}{l_n^*}=\tau_{j2}$, and therefore also $\nu_j(f(x))$ does not exist for $j\in\{1,2\}$. □

参考文献

[1] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* 保持豪斯多夫–贝西科维奇维数的分形概率分布与变换 // 《遍历理论与动力系统》— 2004年，24. — 第1–16页。[2] *Besicovitch A.S.* 分数维集合。2：二进制系统表示的实数之数字和 // 《数学年刊》— 1934年。— 110，第3期。— 第321-330页。[3]*Borel ´E.* 可数概率´及其´算术应用´ // 《巴勒莫数学通报》。— 1909年。— 27。— 第247–271页。[4] *Eggleston H.G.* 出现于某些数论问题中的分数维集合 // 《伦敦数学会会刊》— 1951年。— 54，第42–93页。[5] ***Hardy G.***与***Littlewood J.***关于丢番图逼近的若干问题 // 《数学学报》。— 1914年。— 37。— 第155–190页。[6] *Kennedy R.E., Cooper C.N.* Cheo与Yien关于数字和的一个定理的推广 // 《斐波那契季刊》— 1991 年，21 — 第 145–149 页。[7] *Olsen L.* 自相似集的正规点与非正规点以及自相似测度的发散点 // 《伦敦数学会杂志》— 2003年。— 2(67)，第1期。— 第103–122页。[8] *Billingsley P.* 遍历理论与信息。——莫斯科：米尔出版社，1969年。——239页。（俄文）[9] *Postnikov A.G.* 随机过程的算术建模 // 苏联科学院斯捷克洛夫数学研究所著作集。— 1960年。— 第57卷。— 第3–84页。（俄文）[10] *Pratsiovytyi M.V.*奇异分布研究中的分形方法。——基辅：国立德拉戈马诺夫师范大学，1998年。——296页。[11] *Pratsiovytyi M.V., Klymchuk S.O.* 实数小数部分的 Q_s–表示中数字的渐近平均值及相关的分形几何与分形分析问题 // 国立德拉戈马诺夫师范大学科学期刊，2011年。——第12期。——第186–195页（乌克兰文）[12] *Pratsiovytyi M.V., Klymchuk S.O.* 贝西科维奇–艾格尔斯顿型线性分形 // 国立德拉戈马诺夫师范大学科学期刊，2012年。——第2卷，第13期。——第80–92页（乌克兰文）[13] *Pratsiovytyi M.V., Klymchuk S.O.* 其4进制表示中具有给定数字渐近平均值的实数集的拓扑、度量与分形性质：在数字

频率存在的情形下。// 国立德拉戈马诺夫师范大学科学期刊。— 2013年。— 第14期。— 第217–226页。（乌克兰文）[14] *Pratsiovytyi M.V., Klymchuk S.O., Makarchuk O.P.* 数的表示中的数字出现频率与数字的渐近平均值 // 《乌克兰数学杂志》。— 2014年。— 第3期。— 第302–310页。[15] *Pratsiovytyi M.V., Torbin H.M.* 分形几何与保持豪斯多夫–贝西科维奇维数的变换 // 动力系统：乌克兰数学大会论文集。— 2001年。— 基辅：乌克兰国家科学院数学研究所，2003年。— 第94–102页。（乌克兰文）[16] *Turbin A.F., Pratsiovytyi M.V.* 分形集、函数与分布。——基辅：Naukova Du mka，1992年。——208页。（俄文）[17] *Khinchin A.Ya.* 连分数。——列宁格勒：国立物理数学文献出版社，1960年。——112页。（俄文）[18] *Shutov A.V.* 论小数部分的分布。II // 代数、数论、泛函分析及相关问题研究：高校间科学论文集。第3辑。——萨拉托夫：萨拉托夫大学出版社，2005年。——第146–158页。（俄文）

(M. V.Pratsiovytyi) 乌克兰国家科学院数学研究所，乌克兰德拉戈马诺夫国立大学，基辅，乌克兰，ORCID 0000-0001-6130-9413电子邮箱地址：prats4444@gmail.com (S. O. Klymchuk) 乌克兰国家科学院数学研究所，基辅，乌克兰，ORCID 0009-0005-3979-4543电子邮箱地址：svetaklymchuk@imath.kiev.ua (O. P. Makarchuk) 乌克兰国家科学院数学研究所，基辅，乌克兰，ORCID 0000-0002-1001-8568电子邮箱地址：makarchuk@imath.kiev.ua