arXiv:2603.04876v1 [math.AC] 5 Mar 2026

由图的正则性和v-数产生的格点：胡须图与 Cameron-Walker

PRATIVA BIS WAS、MOUSUMI MANDAL 和 KAMALESH SAHA

ABSTRACT. 设 G 是一个以 n 为顶点的简单图，且 $I(G) \subseteq R$ 是其边理想。本文开始研究确定 $\mathbb{N}^2$ 中的格点，这些格点表现为一对 (reg($R/I(G)$)，v($I(G)$))，其中 G 遍历所有以 n 为顶点的连通图，并将此集合记为 RV(n)。这里，“reg”表示（Castelnuovo-Mumford）正则性，“v”表示 v-数。通过确定满足 $A(n) \subseteq$ RV(n) $\subseteq B(n)$ 的两个集合 $A(n)$ 和 $B(n)$，我们建立了 RV(n) 的一般界。此外，我们明确确定了 RV(n) 的子集，其中包含由以 n 个顶点构成的胡须图和 Cameron-Walker 图所产生的所有可能的数对 (reg($R/I(G)$)，v($I(G)$))。最后，我们提出了一个关于由连通弦图产生的 RV(n) 子集的猜想。

1. Introduction

在图论中，一个经典问题是确定固定顶点数的连通图所产生的图不变量元组构成的格点集合。更具体地说，设 $a_1(G)...a_k(G)$ 是与图 G 相关联的 k 个不变量。接下来研究所有可能的元组

$$(a_1(G), \ldots, a_k(G)),$$

其中 G 遍历所有具有固定顶点数 n 的连通图。从本质上说，了解这些边界有助于确定哪些图不变量组合是可能的，并避免我们寻找并不存在的图。

自 Villarreal 于 [28] 1990年 引入边理想以来，这一视角也在交换代数中受到广泛关注。研究者以类似的思路研究边理想的代数不变量，如今这已成为交换代数中的一个经典问题。例如，考察连通图 G （其 G 个 $|V(G)| = n$ ）对应的所有可能的数对 (reg($R/I(G)$)，pd($R/I(G)$))，可以深入了解模 $R/I(G)$ 的 Betti 表可能具有的形状和大小。这里， $I(G)$ 表示图 G、 $R = K[V(G)]$ 的边理想，其中 K 是一个域；reg 表示（Castelnuovo-Mumford）正则性，pd 表示射影维数。

在 [10], Ha-Hibi 开始研究这一对数值 (pd($R/I(G)$)，reg($R/I(G)$)) 后，Erey-Hibi 于 [6] 确定了二分图中这些数值对的完整列表。在 [13], Hibi-Kanno-Kimura-Matsuda-Van Tuyl 完全确定了由下列数值组所产生的格点：

2020年 AMS 分类：05C69、05C25、05E40、13D02、13F55。关键词：v-数、Castelnuovo-Mumford 正则度、边理想、格点、胡须图、Cameron-Walker 图。

对于具有 n 个顶点的 Cameron-Walker 图，数值组为 (depth($R/I(G)$), reg($R/I(G)$), dim($R/I(G)$), deg($h(R/I(G))$))。在 [14], Hibi-Kimura-Matsuda-Tsuchiya 研究了 Cameron-Walker 图中的数值对 (reg($R/I(G)$) $a(R/I(G))$)。在 [15], Hibi-Kimura-Matsuda-Van Tuyl 研究了数值对 (reg($R/I(G)$), deg($h(R/I(G))$))，并完全确定了 Cameron-Walker 图中的这些数值对。在 [16], Hibi-Madani 研究了具有 n 个顶点的连通图中的三元组 ($\kappa(G)$ $f(G)$ $diam(G)$)。在 [17], Higashitani-Kanno-Ueji 研究了具有 n 个顶点的连通图中可能出现的数值对 (dim($I(G)$),depth($I(G)$))。

2020 年，受 Reed–Muller 型码研究的启发，Cooper 等人引入了一个新的理想的不变量，称为 v-数，其名称源自 Wolmer Vasconcelos（也称为 Vasconcelos 数）。自引入以来，v-数受到了广泛关注，尤其是在边理想的背景下（见 [1, 2, 4, 7, 8, 9, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27]）。值得注意的是，Saha–Sengupta [26] 和 Civan [4]证明了，v-数与边理想的 Castelnuovo–Mumford 正则性之间不存在一般性的关系。特别地，对于 reg($R/I(G)$)，其值可能任意大于 v($I(G)$)；反之，即使对于连通图，v($I(G)$) 也可能显著大于 reg($R/I(G)$)。为简化记号，我们用 reg(G) 表示 reg($R/I(G)$)，并用 v(G) 表示 v($I(G)$)。我们将所有可能的对 (reg(G),v(G)) 的集合记为 RV(n)，其中 G 遍历所有具有 n个顶点的连通图，即

$$\mathcal{RV}(n) = \left\{ (r,v) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{there exists a connected graph } G \text{ on } n \text{ vertices} \\ \text{with } \operatorname{reg}(G) = r \text{ and } \mathrm{v}(G) = v \end{array} \right\}.$$

上一段中的观察自然引出了这样一个问题：确定由具有 n 个顶点的连通图所产生的所有可能的数对 (reg(G)，v(G)) 的集合，也就是确定集合 RV(n) 。此外，即使已知 RV(n)，当我们将范围限制在边理想背景下的一些重要图类（如弦图、二部图、胡须图、Cameron-Walker 图等）时，找出 RV(n) 的子集也十分重要且颇具挑战性。迄今为止，尚无针对这一方向的系统研究；与其他图不变量相比，对于具有固定顶点数的图，研究 v-数也没有通用方法。本文将详细探讨这一问题，并提出一些方法，以期为今后 v-数研究的发展铺平道路。下文将按章节介绍本文的具体工作。

第 2 节回顾本文所需的预备知识。第 3 节旨在研究固定顶点数的连通图的（正则性，v-数）所构成的 $\mathbb{N}^2$ 中的格点。首先，在命题 3.2 中，我们利用 G的边支配数建立 v(G) 的上界。接着，对于给定的正整数 $n \geq 3$，我们在 $\mathbb{N}^2$ 中找到两个集合 $A(n)$ 和 $B(n)$，它们可用于预测我们所需的格点。本节的主要结果如下。

定理 3.5。 令 $A(n) = \{(r,v) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \le r < \frac{n}{2}, 1 \le v \le r - \lceil \frac{r}{n-2r} \rceil + 1\}$ 且 $B(n) = \{(r,v) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \le r < \frac{n}{2}, 1 \le v < \frac{n}{2}\}$。那么对于 $n \ge 3$，有

$$A(n) \subseteq \mathcal{RV}(n) \subseteq B(n).$$

接下来，在第 4 节中，我们完全确定了在固定顶点数的连通胡须图中出现的所有（正则性，v-数）对。具体而言，我们找到 RV(n) 的以下子集；该子集是 RV(n) 在带刺图上的限制，记为 $\mathrm{RV}_W(n)$。

定理 4.5。 对于具有 $n = 2m$ 个顶点的连通胡须图 W_G 类，(正则性(W_G)，v(W_G)) 的格点为

$$\mathcal{RV}_W(n) = \{(r,v) \mid 1 \le r \le m-1 \ and \ 1 \le v \le r - \left\lceil \frac{r}{m-r} \right\rceil + 1\}.$$

此外，由于带刺图始终具有偶数个顶点，因此当 n 为奇数时，我们有 $\mathcal{RV}_W(n) = \varnothing$。

在最后一节（第 5 节）中，我们开展了与胡须图类似的研究，重点考察 Cameron–Walker 图。具体而言，我们确定了集合 $\mathrm{RV}_{CW}(n)$，它是集合 RV(n) 在 Cameron–Walker 图上的限制。下面给出了固定顶点数的 Cameron–Walker 图的（正则性，v-数）对在 $\mathbb{N}^2$ 中所产生格点的分类。

定理 5.4。 对于 *Cameron-Walker* 图这一类，我们有 $\mathcal{RV}_{CW}(n) = \varnothing$ 当$n < 5$时；而对于 $n \ge 5$，我们有

$$\mathcal{RV}_{CW}(n) = \left\{(r,v) \mid 2 \le r \le \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \ and \ 1 \le v \le \min\{r-1, n-2r\}\right\}.$$

本文最后提出一个猜想，讨论由连通弦图产生的 RV(n) 子集，并展望未来研究的一些可能方向。

2. Preliminaries

本节回顾图论与交换代数中的一些相关预备知识。

定义 2.1。 一个（简单）图 G 是一对 ($V(G)$ $E(G)$)，其中 $V(G)$ 是一个有限集合，称为 G 的顶点集； $E(G)$ 是 G 的所有二元子集组成的集合，称为 G 的边集。 G 的边理想记为 $I(G)$，它是 $R = K[V(G)]$ 中的一个二次平方自由单项式理想，定义如下

$$I(G) := \langle x_i x_j \mid \{x_i, x_j\} \in E(G) \rangle.$$

图 H 称为图 G 的子图，如果 $V(H) \subseteq V(G)$且 $E(H) \subseteq E(G)$。 G 的子图 H 称为 G 的诱导子图，如果对任意两个顶点 $u, v \in V(H)$，只要$\{u,v\} \in E(G)$，就有$\{u,v\} \in E(H)$。对任意 $A \subseteq V(G)$，我们用 $G[A]$ 表示 G 在顶点集 A上的诱导子图。此外，我们用 $G - A$ 表示诱导子图

$G[V(G) \setminus A]$。若 $A = \{x\}$仅由单个顶点组成，则我们简记为 $G - x$，而不记为 $G - \{x\}$。G中 A 的邻集记为 $N_G(A)$，定义为

$$N_G(A) = \{x_i \in V(G) \mid \{x_i, x_j\} \in E(G) \text{ for some } x_j \in A\}.$$

我们将 $N_G[A] := N_G(A) \cup A$ 记作。再次，对于 $V(G)$ 的任意两个子集 A、B，我们将 $N_B(A)$ 定义为 A 在 B 中的邻点，即 $N_B(A) = N_G(A) \cap B$。图 G 中顶点 x 的度 记作 $\deg_G(x)$，它等于集合 $N_G(\{x\})$ 的基数。

如果集合 $A \subseteq V(G)$ 是图 G 的独立集，则称之为独立集；也就是说，图 $G[A]$ 不含边，换言之，A 中任意两个顶点之间都没有边。G 中所有独立集的最大规模称为 G 的独立数，记作 $\alpha(G)$。如果对于每个 $e \in E(G)$，集合 $C \subseteq V(G)$ 都满足 $C \cap e \neq \varnothing$，则称其为 G 的顶点覆盖。根据这两个定义可验证，A 是 G 的极大独立集，当且仅当 $N_G(A) = V(G) \setminus A$ 是 G 的极小顶点覆盖。注意，若 A 是独立集，则 $N_G(A) \cap A = \varnothing$。

定义 2.2。设 G 是一个图，M 是 G 的一组两两不相交的边。则称 M 为 G 的一个匹配。G 的匹配数是 G 的最大匹配中的边数，记为 $\mathrm{m}(G)$。图 G 的一个诱导匹配是 G 的一个匹配 $M = \{e_1, \ldots\ldots, e_m\}$，满足 G 中包含于 $\bigcup_{i=1}^{m} e_i$ 的边仅有 $e_1, \ldots\ldots, e_m$。G 的诱导匹配数是 G 的最大诱导匹配中的边数，记为 $\mathrm{im}(G)$。

定义 2.3。设 R 是一个具有标准分次的多项式环，$I \subseteq R$ 是一个分次理想。则对于任意 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(I)$，存在一个齐次多项式 f，使得 $(I : f) = \mathfrak{p}$，其中 $\mathrm{Ass}(I)$ 表示 I 的关联素理想集合。I 的 v-数定义如下：

$$\mathrm{v}(I) := \min\{\deg(f) \mid f \text{ is homogeneous and } (I : f) \text{ is a prime}\}.$$

一般来说，不变量 v-数依赖于基域的特征 K。然而，Jaramillo 和 Villarreal 在 [18] 中通过给出 v-数的组合描述，证明了对于无平方因子单项式理想，v-数与基域的选取无关。特别地，借助 [18, 引理 3.4] 和 [18, 定理 3.5], ，我们得到图的边理想情形下 v-数的如下组合定义，或简称为图的 v-数。

定义 2.4. 设 G是一个图，A 是 G 的一个独立集，使得 $N_G(A)$ 是 G的一个顶点覆盖。则我们有 $(I(G) : X_A) = N_G(A)$，其中 $X_A = \prod_{x_i \in A} x_i$。此外，我们有

$$\mathrm{v}(G) := \min\{|A| \mid A \text{ is independent and } N_G(A) \text{ is a vertex cover of } G\}.$$

若 A 是一个独立集，使得 $N_G(A)$ 是 G 的一个顶点覆盖且 $|A| = \mathrm{v}(G)$，则我们称 A 是 G的一个对应于 $\mathrm{v}(G)$ 的独立集。

现在，我们回顾一些众所周知的图类。

定义 2.5. 一个有 n 个顶点的路径图，记作 P_n，是指经过重新标记顶点后满足 $V(P_n) = \{x_1, .., x_n\}$ 和 $E(P_n) = \{\{x_i, x_{i+1}\} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ 的图。一个有 n 个顶点的图称为长度为 n的圈，记作 C_n，如果它是连通的且每个顶点恰有两个邻点。如果一个连通图不含诱导圈，则称它为树；树的不交并称为森林。如果图 G不含长度大于三的诱导圈，则称其为弦图。二分图是不含任何奇数长度诱导圈的图。换言之，如果一个图的顶点集可以划分为两个独立集，则称该图为二分图。一个有 n 个顶点的完全图，记作 K_n，是指任意一对顶点之间都有一条边的图。

设 M 是一个有限生成的分次 R-模。那么，我们可以将 M 的分次最小自由分解写成如下形式:

$$0 \to \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{g,j}(M)} \to \cdots \to \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{1,j}(M)} \to \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{0,j}(M)} \to M \to 0,$$

其中 $\beta_{i,\ j}(M) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$称为 M的第$(i,\ j)$个分次 $Betti$数，而 $R(-j)$表示次数平移 j后的多项式环。

定义 2.6. M的*Castelnuovo-Mumford* 正则性（简称正则性</style），记作 $\mathrm{reg}(M)$, 定义如下:

$$\mathrm{reg}(M) := \max\{j - i \mid \beta_{i,j}(M) \neq 0\}.$$

引理2.7. [5,引理 2.10] 设 G 是一个简单图。那么，对于 G的任意顶点 x ，

$$\mathrm{reg}(G) \leq \max\{\mathrm{reg}(G - x),\ \mathrm{reg}(G - N_G[x]) + 1\}.$$

接下来，我们可以从文献中获得图的正则性和 v-数的界:

定理 2.8。 [20, 引理 2。2] 对于任意图 G，正则度(G) ≥匹配数(G)。

命题 2.9。 设 G 是一个具有 $n \geq 3$ 个顶点的连通图。那么 正则度$(G) < \frac{n}{2}$。

证明。 由 [11, 定理 6.7], 可得 $\mathrm{reg}(G) \leq m(G)$。根据匹配数的定义，我们可知 $m(G) \leq \frac{n}{2}$。若 n为奇数，则显然有$-m(G) < \frac{n}{2}$，因此 $\mathrm{reg}(G) < \frac{n}{2}$。若 n 为偶数，则$n \geq 4$, 于是由 [6,推论 3.3]可得$\mathrm{reg}(G) < \frac{n}{2}$。□

定理2.10。 [29, 定理 2。18] 若 G 是森林，则 正则度(G) =匹配数(G)。

定理 2.11。 [11, 推论 6。9] 对于弦图 G，有 正则度(G) =匹配数(G) .

3. An approximation of the set $\mathcal{RV}(n)$

本节的主要目的是给出集合 $\mathrm{RV}(n)$ 的一个近似范围。我们首先利用 G 的边支配数和 G 中顶点的数量，建立 $\mathrm{v}(G)$ 的一个紧上界。最后，我们确定 $\mathbb{N}^2$ 的两个子集 $A(n)$ 和 $B(n)$，并证明

$A(n) \subseteq \mathrm{RV}(n) \subseteq B(n)$。我们先从图的边支配数定义开始。

定义 3.1. 图 G 的极大匹配的最小大小称为 G的边支配数，记作 $\gamma_e(G)$。因此，对于任意图 G，有 $\gamma_e(G) \leq m(G)$。

下面给出了 v-数与边支配数之间的关系。

命题 3.2. 设 G 是一个有 $n \geq 3$ 个顶点的连通图。那么

$$\mathrm{v}(G) \leq \min\left\{\gamma_e(G), \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right\}.$$

因此，我们有 $\mathrm{v}(G) \leq \min\{m(G), \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$。

证明. 设 M 是 G 中的一个极大匹配，且 $|M| = \gamma_e(G)$。考虑 G 内部的顶点集 A，它是一个极大独立集。现在，设 $e' = \{x_i, x_j\}$ 是G的任意一条边。由于 M 是 G中的极大匹配，因此 x_i 和 x_j 中必有一个属于 $\bigcup_{e\in M} e$。不失一般性，假设 $x_i \in \bigcup_{e\in M} e$。若 $x_i \in A$，则 $x_j \in N_G(A)$。再者，若 $x_i \notin A$，则 $x_i \in N_G(A)$，因为 A 是 $\bigcup_{e\in M} e$内部的极大独立集。因此，$N_G(A)$是 G的一个顶点覆盖。由于 A 是 G的独立集，且 $N_G(A)$是 G的顶点覆盖，根据图的 v-数的组合定义（见定义 2.4），我们有 $\mathrm{v}(G) \leq |A|$。由于 A 是 $\bigcup_{e\in M} e$内部的 G 的独立集，因此 $|A| \leq |M| = \gamma_e(G)$，从而 $\mathrm{v}(G) \leq \gamma_e(G)$。

现在我们的目标是证明 $\mathrm{v}(G) \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$。注意，若 n为奇数，则 $m(G) \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$，因此该不等式可由前一个不等式推出。所以，唯一尚待考虑的情况是 n 为偶数且 $m(G) = \frac{n}{2}$。此时，G和 $n \geq 3$ 部分的连通性将发挥作用。设 $M = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ 是 G 中的一个极大匹配，且$m = m(G)$。由于 G 连通，$n \geq 4$（因为 n 为偶数）且 $m(G) = \frac{n}{2}$，因此 M中至少存在两条边，记为 e_1 和 e_2，以及一个顶点 $x \in e_1$，使得 $N_G(x) \cap e_2 \neq \emptyset$。现在，从 $e_3 \cup e_4 \cup \cdots \cup e_m$ 中选取一个极大独立集 A'，使得 $A' \cap N_G(x) = \emptyset$。容易验证，$A = A' \cup \{x\}$ 是 G 的一个独立集，而 $N_G(A)$ 是 G的一个顶点覆盖。因此，根据 v-数的组合定义，我们得到 $\mathrm{v}(G) \leq |A| = 1 + |A'| \leq 1 + (m-2) = m - 1 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$。□

注记 3.3。由 v-数（根据 [18, 命题 3.8] 或 [26, 命题 3.9]）和边支配数（根据定义）在图的不交并上的可加性可知，对于任意图 G，有 $\mathrm{v}(G) \leq \gamma_e(G)$。此外，如果 G 是一个图，且 G 的任何连通分支都不是 K_2，则 $\mathrm{v}(G) \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$。

引理 *3.4*。设 G 是一个具有 x、y、$z \in V(G)$ 的图，使得 $\{x, y, z\}$ 诱导出一个 P_3，其中 $\{x, y\}$、$\{y, z\} \in E(G)$，$\deg_G(y) = 2$ 且 $\deg_G(z) = 1$。如果 A 是一个独立集，使得$N_G(A)$ 是 G的顶点覆盖，则 $A \cap \{x, y, z\} \neq \emptyset$。

证明。已知 $f = \{y, z\}$ 是 G 的一条边。由于 $N_G(A)$ 是 G 的一个顶点覆盖，我们有 $f \cap N_G(A) \neq \emptyset$。若 $y \in N_G(A)$，则 $N_G(y) \cap A \neq \emptyset$。由给定条件 $\{x, y\}, \{y, z\} \in$

$E(G)$ 且 $\deg_G(y) = 2$，由此可得 $N_G(y) = \{x, z\}$，从而 $\{x, z\} \cap A \neq \varnothing$ 在此情形下。现在，若 $y \notin N_G(A)$，则我们有 $z \in N_G(A)$。由于由给定条件有 $N_G(z) = \{y\}$，我们应有 $y \in A$。证明至此完成。□

接下来，我们将证明我们的主要结果之一，它给出了集合 $\mathrm{RV}(n)$ 的一个近似范围。

定理 3.5. 设 $A(n) = \{(r, v) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq r < \frac{n}{2}, 1 \leq v \leq r - \lceil \frac{r}{n-2r} \rceil + 1\}$ 且 $B(n) = \{(r, v) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq r < \frac{n}{2}, 1 \leq v < \frac{n}{2}\}$。则对于 $n \geq 3$，我们有

$$A(n) \subseteq \mathcal{RV}(n) \subseteq B(n).$$

证明。设 G 是一个具有 $n \geq 3$ 个顶点的连通图。则由命题 2.9，我们有 $\mathrm{reg}(G) < \frac{n}{2}$。此外，由命题 3.2 可知 $\mathrm{v}(G) < \frac{n}{2}$。因此，我们有 $\mathrm{RV}(n) \subseteq B(n)$。

现在，令 $(r, v) \in A(n)$。我们需要证明，存在一个以 n 个顶点为顶点集的连通图 G，满足 $\mathrm{reg}(G) = r$ 且 $\mathrm{v}(G) = v$。根据 n 和 r 的取值，考虑以下情形：

情形 I。 若 $n - 2r \geq r$，则 $r - \lceil \frac{r}{n-2r} \rceil + 1 = r$。这给出

$$\min\left\{r,\ r - \left\lceil \frac{r}{n-2r} \right\rceil + 1\right\} = r.$$

令 G 为一个顶点集为

$$V(G) = \{y_1, y_2, \ldots, y_r, z_1, z_2, \ldots, z_r\} \bigcup \{x_1, \ldots, x_v\} \bigcup \{w_1, \ldots, w_{n-2r-v}\}.$$

由于 $(r, v) \in A(n)$，我们有 $v \leq r$。于是我们可以将边集表示为

$$\begin{aligned} E(G) = &\{\{x_1, x_i\} \mid i = 2, \ldots, v\} \bigcup \{\{x_1, y_i\} \mid i = 1, \ldots, r - v + 1\} \\ &\bigcup \{\{x_i, y_{r-v+i}\} \mid i = 2, \ldots, v\} \bigcup \{\{y_i, z_i\} \mid i = 1, \ldots, r\} \\ &\bigcup \{\{x_1, w_i\} \mid i = 1, \ldots, n - 2r - v\}. \end{aligned}$$

注意到，G 是一个具有 n 个顶点的树（见图 1），因为 G 中不存在诱导圈。它是

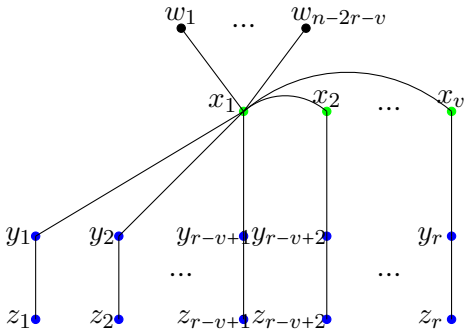


FIGURE 1. 一个具有 $n - 2r \geq r$ 且 $(\mathrm{reg}(G), \mathrm{v}(G)) = (r, v)$ 的树 G

显然，$\{\{y_i, z_i\} \mid i = 1, \ldots, r\}$ 是 G 的一个诱导匹配。因此，根据定理 2.8，我们

有 $\mathrm{reg}(G) \geq \mathrm{im}(G) \geq r$。现在，根据图 $G - x_1$ 和 $G - N_G[x_1]$ 的结构，可以很容易地得到 $\mathrm{im}(G - x_1) = r$ 和 $\mathrm{im}(G - N_G[x_1]) = v - 1$。由于 $G - x_1$ 和 $G - N_G[x_1]$ 都是森林，根据定理2.10，$\mathrm{reg}(G - x_1) = r$ 且 $\mathrm{reg}(G - N_G[x_1]) = v - 1$。因此，利用引理2.7，我们得到 $\mathrm{reg}(G) \leq \max\{r, v - 1 + 1\} = r$。于是，$\mathrm{reg}(G) = r$。接下来，我们注意到，$\{x_1, y_{r-v+2}, \ldots, y_r\}$ 是 G 的一个独立集，其邻集是 G 的一个顶点覆盖。根据定义 2.4，我们有 $\mathrm{v}(G) \leq |\{x_1, y_{r-v+2}, \ldots, y_r\}| = v$。为证明反向不等式，设 A 是与 G 的 v-数对应的独立集。那么，A 是 G 的一个独立集，使得 $N_G(A)$ 是 G 的一个顶点覆盖，且 $|A| = \mathrm{v}(G)$。从 G 的结构可知，对每个 $i = 1, \ldots, v$，$B_i = \{x_i, y_{r-v+i}, z_{r-v+i}\}$ 诱导出一个 P_3，作为 G 的子图，其中 $\deg_G(y_{r-v+i}) = 2$ 且 $\deg_G(z_{r-v+i}) = 1$。因此，根据引理 3.4，对每个 $i = 1, \ldots, v$，都有 $B_i \cap A \neq \varnothing$。由于当 $i \neq j$ 时 $B_i \cap B_j = \varnothing$，可得 $|A| \geq v$。于是，$\mathrm{v}(G) \geq v$，进而 $\mathrm{v}(G) = v$。

情形 II。令 $n - 2r < r$。于是我们有

$$\min\left\{r,\ r - \left\lceil \frac{r}{n-2r} \right\rceil + 1\right\} = r - \left\lceil \frac{r}{n-2r} \right\rceil + 1.$$

令 $v = r - \lceil \frac{r}{n-2r} \rceil + 1 - p$，其中 $0 \leq p \leq r - \lceil \frac{r}{n-2r} \rceil$。我们需要证明，存在一个以 n 个顶点构成的连通图 G，满足 $\mathrm{reg}(G) = r$ 且 $\mathrm{v}(G) = v$。令 G 为顶点集为

$$V(G) = \bigcup_{i=1}^{n-2r} \{y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{it_i}, z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{it_i}\} \bigcup \{x_i \mid i = 1, \ldots, n-2r\},$$

其中某些 t_i 可以为 0；$t_i = 0$ 表示对于特定的 i，不存在这样的 y_{ij} 和 z_{ij}。现在，我们考虑以下边集

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{n-2r} \bigcup_{j=1}^{t_i} \{\{x_i, y_{ij}\}, \{y_{ij}, z_{ij}\}\} \bigcup \{\{x_1, x_i\} \mid i \in [n-2r] \text{ and } t_i = 0\}$$
$$\bigcup \{\{x_i, x_j\} \mid i, j \in [n-2r] \text{ and } t_i \neq 0, t_j \neq 0\},$$

其中，对于每个 $i = 2$，$\sum_{i=1}^{n-2r} t_i = r$ 满足 $t_1 = \lceil \frac{r}{n-2r} \rceil + p$，且 $0 \leq t_i \leq t_1$ 满足，.....，$n - 2r$。在图 2 中，我们展示了为此情形定义的图 G 的结构，其中对于所有 $i \in [q]$，$t_i \neq 0$，并且对于所有 $i \in \{q+1, \ldots, n-2r\}$，$t_i = 0$。随后注意到，$G$ 是一个具有 n 个顶点且满足 $t_1 \geq 2$ 的连通弦图。同样，对于每个 $0 \leq p \leq r - \lceil \frac{r}{n-2r} \rceil$，由于 $(n-2r)\lceil \frac{r}{n-2r} \rceil \geq r$，这样的 G 的存在性得到了保证。注意，边集 $M = \bigcup_{i=1}^{n-2r} \{\{y_{ij}, z_{ij}\} \mid 1 \leq j \leq t_i\}$ 显然是图 G 的极大导出匹配。因此，我们有

$$\mathrm{im}(G) \geq |M| = \sum_{i=1}^{n-2r} t_i = r.$$

对于反向不等式，设 M' 是 G 的一个具有最大基数的诱导匹配，即 $|M'| = \mathrm{im}(G)$。若 M' 不包含任何满足对某个 $1 \leq i \leq n-2r$ 有 $x_i \in e$ 的边 e，则 M' 的唯一选择是 M。在这种情况下，$\mathrm{im}(G) = r$。现在，假设 M' 包含一条边 e，使得对某个 $i \in \{1, \ldots, n-2r\}$ 有 $x_i \in e$。若 $t_i = 0$，则唯一可能是 $e = \{x_1, x_i\}$，并且由我们对 $E(G)$ 的选择，M' 的其他边都不包含任何 x_k。在这种情况下，对所有 $1 \leq j \leq t_1$，我们应有 $\bigcup_{i=2}^{n-2r} \{\{y_{ij}, z_{ij}\} \mid 1 \leq j \leq t_i\} \subseteq M'$ 以及 $\{y_{1j}, z_{1j}\} \notin M'$。

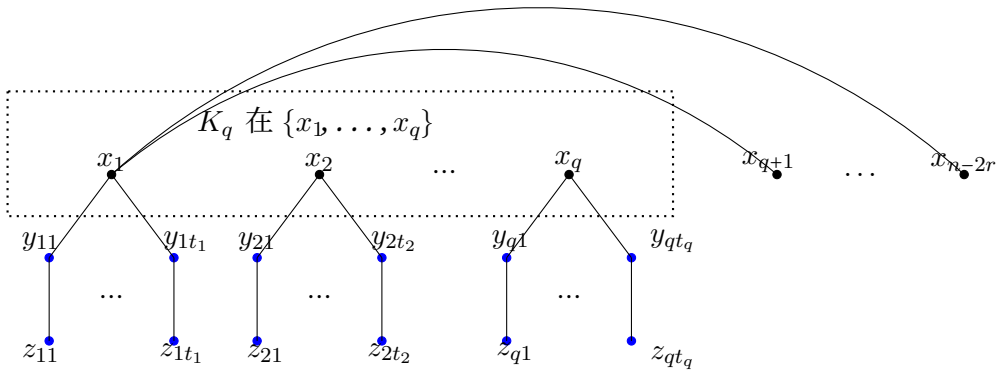


FIGURE 2. 一个弦图 G 具有 $n-2r<r$ 且 $(\mathrm{reg}(G),\ \mathrm{v}(G))=(r,\ v)$

于是 $M''=(M'\setminus\{e\})\cup\{\{y_{1j},z_{1j}\}\mid 1\le j\le t_1\}$ 是 G 的一个诱导匹配。由于 $t_1\ge 2$，我们有 $|M''|>|M'|=\mathrm{im}(G)$，这是不可能的。因此，我们可以假设 $t_i\neq 0$。于是，要么对某个 $j\in[n-2r]\setminus\{i\}$ 有 $e=\{x_i,x_j\}$，要么对某个 $j\in[t_i]$ 有 $e=\{x_i,y_{ij}\}$。在这种情况下，我们还看到 M' 不包含任何其他含有 x_k 的边，因为 G 在顶点集 $\bigcup_{i=1}^{n-2r}\{x_i,y_{ij}\mid 1\le j\le t_i\}$ 上的诱导子图的诱导匹配数为 1（具体而言，它是一个附有若干悬挂边的完全图）。因此，考虑诱导匹配 $M''=(M'\setminus\{e\})\cup\{\{y_{ij},z_{ij}\}\mid 1\le j\le t_i\}$，我们可以看到 $M''\subseteq M$，因为 M 是包含 $\bigcup_{i=1}^{n-2r}\{\{y_{ij},z_{ij}\}\mid 1\le j\le t_i\}$ 的一个极大导出匹配。于是，由于 $t_i\ge 1$，我们有 $r=|M|\ge|M''|\ge|M'|=\mathrm{im}(G)$。因此，我们最终得到 $\mathrm{im}(G)=r$。由于 G 是弦图，由定理 2.11 可得 $\mathrm{reg}(G)=\mathrm{im}(G)=r$。接下来，我们的目标是证明 $\mathrm{v}(G)=v$。取 G 的独立集 $B=(\bigcup_{i=2}^{n-2r}\{y_{ij}\mid 1\le j\le t_i\})\cup\{x_1\}$。于是，容易验证 $N_G(B)$ 是 G 的一个顶点覆盖。因此，由定义 2.4，我们有

$$\mathrm{v}(G)\le|B|=\sum_{i=2}^{n-2r}t_i+1=r-\left\lceil\frac{r}{n-2r}\right\rceil-p+1.$$

对于反向不等式，令 A 为 G 的一个独立集，对应于 $\mathrm{v}(G)$，即，A 是 G 的一个独立集，且 $N_G(A)$ 是 G 的一个顶点覆盖，并且 $|A|=\mathrm{v}(G)$。由于 $\{x_1,\ldots,x_{n-2r}\}$ 诱导出一个完全图，且在 x_1 处可能附着一些悬挂边，因此集合 A 至多包含一个 x_i。若可能，令 $x_i\notin A$ 对所有 $i=1,\ldots,n-2r$ 成立。对于每个满足 $t_i\neq 0$ 的 $i\in\{1,\ldots,n-2r\}$，考虑集合族 $B_{ij}=\{x_i,y_{ij},z_{ij}\}$，其中 $j=1,\ldots,t_i$。注意，B_{ij} 诱导出的子图是 G 的一个 P_3，且 $\deg_G(y_{ij})=2$，$\deg_G(z_{ij})=1$。由引理 3.4 可知，$y_{ij}\in A$ 或 $z_{ij}\in A$ 成立，因为 $x_i\notin A$。这意味着 $\mathrm{v}(G)=|A|\ge\sum_{i=1}^{n-2r}t_i=r$，这是不可能的，因为我们已经有 $\mathrm{v}(G)\le r-\lceil\frac{r}{n-2r}\rceil-p+1$ 且 $\lceil\frac{r}{n-2r}\rceil\ge 2$。因此，对于某个 $i\in\{1,\ldots,n-2r\}$，A 必须包含一个 x_i；此外，利用前面的论证，可以得出 $t_i\neq 0$。考虑满足 $t_m\neq 0$ 的某个 $m\in\{1,\ldots,n-2r\}$ 的 $x_m\in A$。由于引理 3.4 以及 $(\{x_1,\ldots,x_{n-2r}\}\setminus\{x_m\})\cap A=\varnothing$，有 $B_{ij}\cap A\neq\varnothing$，因此我们应有 $\{y_{ij},z_{ij}\}\cap A\neq\varnothing$，对于

每个满足 $t_i \neq 0$ 的 $i \in \{1, \ldots, n-2r\} \setminus \{m\}$，其中对于每个 i， $j \in \{1, \ldots, t_i\}$。这给出 s

$$\mathrm{v}(G) = |A| \geq 1 + \sum_{i=1}^{n-2r} t_i - t_m \geq r - t_1 + 1 = r - \left\lceil \frac{r}{n-2r} \right\rceil - p + 1.$$

因此，$\mathrm{v}(G) = r - \lceil \frac{r}{n-2r} \rceil - p + 1$，证明至此完成。 □

4. The set $\mathrm{RV}_W(n)$: Restriction of $\mathrm{RV}(n)$ to whisker graphs

本节中，我们明确找出所有以对 $(\mathrm{reg}(G), \mathrm{v}(G))$ 形式出现的格点，其中 G 遍历顶点数固定的所有连通带刺图。特别地，我们找出 $\mathrm{RV}(n)$ 的子集 $\mathrm{RV}_W(n)$。我们先给出带刺图的定义和一些已知结果。

定义 4.1. 设 G 是一个具有 $V(G) = \{x_1, \ldots, x_m\}$ 的图。通过向 G 添加一组新顶点 $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$，并对每个 $1 \leq i \leq m$ 将边 $\{x_i, y_i\}$ 连接到 G，构造图 W_G。图 W_G 称为 G 的带刺图，而附加的边 $\{x_i, y_i\}$ 称为悬挂边。注意，带刺图的顶点数总是偶数。

带刺图是满足 [22, 引理 4.1]条件的极大覆盖图。因此，根据 [22, 定理 4.12],，我们得到如下结论。

定理 4.2。 设 G 是一个简单连通图， W_G 是 G的带刺图。那么我们有 $\mathrm{reg}(W_G)$ =i $\mathrm{m}(W_G)$。此外，可以看出 $\mathrm{im}(W_G) = \alpha(G)$。

定理 4.3。 [26, 定理 4.12] 设 G 是一个简单连通图， W_G 是 G的带刺图。那么 v($W_G) \leq \mathrm{im}(W_G)$。

引理 4.4。 设 G 是一个有 $m \geq 2$ 个顶点的连通图， W_G 是它的带刺图。则以下结论成立。

(a) $1 \leq \mathrm{reg}(W_G) \leq m - 1$, *(b)* $1 \leq \mathrm{v}(W_G)$
$\leq r - \lceil \frac{r}{m-r} \rceil + 1$，其中~~$r$~~ = $\mathrm{reg}(W_G)$。

证明。 (a) 由于 W_G 有 $2m$ 个顶点，由命题 2.9 可知 $\mathrm{reg}(W_G) \leq m-1$。此外，$\mathrm{reg}(W_G) \geq 1$ 显然成立。

(b) 设 G 是一个连通图，满足 $|V(G)| = m$，且 W_G 是其带刺图。由定理 4.2, $\mathrm{reg}(W_G) = \mathrm{im}(W_G) = \alpha(G) = r$。若 $r \leq m - r$，则 $r - \lceil \frac{r}{m-r} \rceil + 1 = r$，由定理 4.3 可得 $\mathrm{v}(W_G) \leq r$。现在考虑情形 $r > m - r$。由带余除法，可将 $r = (m-r)k + s$ 写成某些 $k \geq 1$ 和 $0 \leq s < m - r$ 的形式。设 B 是 G 的一个基数为 r 的极大独立集，且 $A = V(G) \setminus B$。考虑集合 $C = \{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq A$，它是 B 的极小覆盖，即 $B \subseteq N_G(C)$，并且 C 在此性质下是极小的。显然， $|C| = p \leq |A| = m - r$。假设 v_i 覆盖了 B 中的 t_i 个顶点（记为 B_i），且 $C_i = (N_A(B_i) \setminus \bigcup_{j \neq i} N_A(B_j)) \setminus \{v_1, \ldots, v_p\}$，其中 $i = 1, \ldots, p$。令 $|C_i| = q_i$，并注意到 $\sum_{i=1}^{p} q_i \leq m - r - p$。现在考虑两种可能的情形:

情形 I. 假设 $s > 0$。若可能，对每个 $i = 1, \dots, p$，令 $t_i \le k + q_i$。由于每个 v_i 覆盖了 B 中的 t_i 个顶点，因此 C 至多覆盖 B 中的 $\sum_{i=1}^{p} t_i$ 个顶点。现在我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p} t_i &\le kp + \sum_{i=1}^{p} q_i \\ &\le kp + m - r - p \\ &= m - r + (k-1)p \\ &\le (m-r) + (k-1)(m-r) \quad (\text{since } p \le m-r) \\ &= (m-r)k < r \quad (\text{as } r = (m-r)k + s \text{ and } s > 0).\end{aligned}$$

这表明， C 至多覆盖 $r-1$ 个 B的顶点，这与 C 是 B的极小覆盖这一事实矛盾。因此，存在一个 $v_i \in C$，使得 $t_i \ge (k+1) + q_i$。考虑集合 $D = \{v_i\} \cup \{x \in C_i \mid x \notin N_A(v_i)\} \cup (B \setminus B_i)$。注意， D是 G 的一个极大独立集，并且

$$\begin{aligned}|D| &\le 1 + |C_i| + |B \setminus B_i| \\ &= 1 + q_i + r - t_i \\ &\le 1 + q_i + r - (k+1) - q_i \\ &= 1 + r - (k+1) \\ &= r - \left\lceil \frac{r}{m-r} \right\rceil + 1.\end{aligned}$$

最后一个等式是基于这样一个事实： $r = (m-r)k + s$，其中 $s > 0$。显然， D是 W_G 的一个独立集，并且 $V(G) \setminus D \subseteq N_{W_G}(D)$，因为 D 是 G的一个极大独立集。同样， $N_{W_G}(D)$包含连接到 D中各顶点的悬挂顶点。因此，根据 W_G的构造可知， $N_{W_G}(D)$是 W_G的一个极小顶点覆盖。因此，根据定义 2.4，$\mathrm{v}(W_G) \le |D| \le r - \lceil \frac{r}{m-r} \rceil + 1$。

情形 II。 假设 $s = 0$。若可能，令 $t_i < k + q_i$对所有 $1 \le i \le p$成立。显然， C在 B中至多覆盖 $\sum_{i=1}^{p} t_i$ 个顶点。现在，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p} t_i &< kp + \sum_{i=1}^{p} q_i \\ &\le kp + (m - r - p) \\ &= (m-r) + (k-1)p \\ &\le (m-r)k \quad (\text{since } p \le m-r) \\ &= r \quad (\text{as } r = (m-r)k + s \text{ and } s = 0)\end{aligned}$$

因此， C在 B中至多覆盖 $r-1$ 个顶点，这与 C覆盖 B这一事实相矛盾。因此，存在一个 $v_i \in C$，使得对某个 i有 $t_i \ge k + q_i$。与前一情形类似，我们考虑 $D = \{v_i\} \cup \{x \in C_i \mid x \notin N_A(v_i)\} \cup B \setminus B_i$。这里 D是 G的一个极大独立集，并且

$$|D| \le 1 + |C_i| + |B \setminus B_i|$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + q_i + r - t_i \\
&\leq 1 + q_i + r - k - q_i \\
&= 1 + r - k \\
&= r - \left\lceil \frac{r}{m-r} \right\rceil + 1 \quad (\text{since } r = (m-r)k).
\end{aligned}
$$

如第一种情形所述， D 是 W_G 的一个独立集，且 $N_{W_G}(D)$是 W_G的一个极小顶点覆盖。因此，根据v-数的组合定义，我们有$\mathrm{v}(W_G) \leq |D| \leq r - \lceil \frac{r}{m-r} \rceil + 1$。最后，由于 $I(W_G)$ 不是素理想，我们还有$\mathrm{v}(W_G) \geq 1$。这就完成了证明。□

以下是本节的主要定理，它表明，引理 4.4 中给出的正则性和 v-数的界可以由连通带刺图实现。

定理 4.5。 对于具有 $n = 2m$ 个顶点的连通胡须图类 W_G ，（正则性（W_G），v（W_G））的格点为

$$\mathcal{RV}_W(n) = \{(r, v) \mid 1 \leq r \leq m-1 \text{ and } 1 \leq v \leq r - \left\lceil \frac{r}{m-r} \right\rceil + 1\}.$$

此外，由于带刺图的顶点数总是偶数，因此当 n 为奇数时，我们有 $\mathcal{RV}_W$（n） = ∅。

证明。 设 W_G 是一个具有 n 个顶点的连通带刺图。根据引理 4.4，我们有 $1 \leq r \leq m-1$和 $1 \leq v \leq r - \lceil \frac{r}{m-r} \rceil + 1$，其中$m = \frac{n}{2}$。因此，我们有

$$\mathcal{RV}_W(n) \subseteq \{(r, v) \mid 1 \leq r \leq m-1 \text{ and } 1 \leq v \leq r - \left\lceil \frac{r}{m-r} \right\rceil + 1\}.$$

对于反向包含，设 $r \leq m-1$ 和 $v \leq r - \lceil \frac{r}{m-r} \rceil + 1$ 是两个正整数。则v可写成 $r - \lceil \frac{r}{m-r} \rceil + 1 - p$的形式，其中 $0 \leq p \leq r - \lceil \frac{r}{m-r} \rceil$。我们需要证明，存在一个具有 m 个顶点的连通图 G ，使得 $\mathrm{reg}(W_G) = r$ 且 $\mathrm{v}(W_G) = v$。令 G 为一个顶点集为

$$V(G) = \{x_1, \ldots, x_{m-r}\} \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \{y_{i1}, \ldots, y_{it_i}\} \right),$$

和边集

$$
\begin{aligned}
E(G) = \left(\bigcup_{i=1}^{k} \{\{x_i, y_{ij}\} \mid 1 \leq j \leq t_i\} \right) \bigcup \{\{x_i, x_j\} \mid 1 \leq i < j \leq m-r\} \\
\bigcup \{\{y_{11}, x_i\} \mid k+1 \leq i \leq m-r\},
\end{aligned}
$$

其中 $k \leq m-r$、 $\sum_{i=1}^{k} t_i = r$、 $t_1 = \lceil \frac{r}{m-r} \rceil + p$ 和 $1 \leq t_i \leq t_1$ 对每个 $i = 2$, ..., k。那么 G 是一个具有 m 个顶点的连通图。注意，对每个 $0 \leq p \leq r - \lceil \frac{r}{m-r} \rceil$，由于 $(m-r)\lceil \frac{r}{m-r} \rceil \geq r$，因此可以保证存在这样的 G。我们考虑 G 的带刺图 W_G ，其顶点集和边集如下：

$$V(W_G) = V(G) \bigcup \{u_1, \ldots, u_{m-r}\} \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \{z_{i1}, \ldots, z_{it_i}\} \right),$$

$$E(W_G) = E(G) \bigcup \{\{x_i, u_i\} \mid i \in [m-r]\} \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{m-r} \{\{y_{ij}, z_{ij}\} \mid j \in [t_i]\} \right).$$

从 G 的结构（见图 3）可以清楚地看出，顶点集 $\bigcup_{i=1}^{k}\{y_{i1}, \ldots\ldots, y_{it_i}\}$

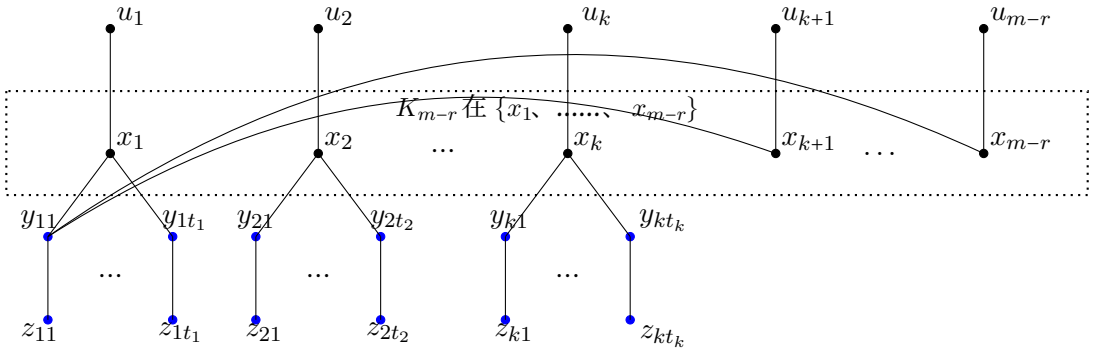


FIGURE 3. 一个带刺图 W_G，其 $(\mathrm{reg}(W_G), \mathrm{v}(W_G)) = (r, v)$

是 G 的一个极大独立集。因此，独立数 $\alpha(G) \geq \sum_{i=1}^{k} t_i = r$。为证明反向不等式，设 D 是 G 的一个极大独立集，且 $\alpha(G) = |D|$。由于 G 在顶点集 $\{x_1, \ldots\ldots, x_{m-r}\}$ 上的诱导子图构成一个完全图，D 在 $\{x_1, \ldots\ldots, x_{m-r}\}$ 中至多包含一个 x_i。如果 D 不包含任何 x_i，那么 D 必须等于 $\bigcup_{i=1}^{k}\{y_{i1}, \ldots\ldots, y_{it_i}\}$，从而得到 $\alpha(G) = r$。设 D 包含某个 x_i，其中 $1 \leq i \leq m-r$。若 $i \in [k]$，则考虑 $D' = (D \setminus \{x_i\}) \bigcup \{y_{i1}\}$；否则，考虑 $D' = (D \setminus \{x_i\}) \bigcup \{y_{11}\}$。于是，我们有 $|D| = |D'|$ 和 $D' \subseteq \bigcup_{i=1}^{k}\{y_{i1}, \ldots\ldots, y_{it_i}\}$。因此，$\alpha(G) = |D| \leq \sum_{i=1}^{k} t_i = r$。consequently，我们有 $\alpha(G) = r$。故由定理 4.2，$\mathrm{reg}(W_G) = \mathrm{im}(W_G) = \alpha(G) = r$。

接下来，我们的目标是证明 $\mathrm{v}(W_G) = v = r - \lceil \frac{r}{m-r} \rceil + 1 - p$。首先，考虑图 G 的独立集 $B = \bigcup_{i=2}^{k}\{y_{ij} \mid 1 \leq j \leq t_i\} \bigcup \{x_1\}$。由于 $\{x_1, \ldots, x_{m-r}\}$ 在 W_G 中诱导出一个完全图，因此可以看出，B 的邻点 $N_{W_G}(B)$ 构成了 W_G 的一个极小顶点覆盖。因此，根据定义 2.4，我们有

$$\mathrm{v}(W_G) \leq |B| = \sum_{i=2}^{k} t_i + 1 = r - \left\lceil \frac{r}{m-r} \right\rceil - p + 1.$$

对于反向不等式，设 A 是 W_G 的一个独立集，使得 $(I(W_G) : X_A) = N_{W_G}(A)$ 且 $|A| = \mathrm{v}(W_G)$。由于 $\{x_1, \ldots, x_{m-r}\}$ 在 W_G 中诱导出一个完全图，集合 A 至多包含一个 x_i。对于每个 $i \in \{2, \ldots, k\}$，考虑集合族 $B_{ij} = \{x_i, y_{ij}, z_{ij}\}$，其中 $j = 1, \ldots, t_i$。注意到 B_{ij} 在 W_G 中作为子图诱导出一个 P_3，且 $\deg y_{ij} = 2$ 和 $\deg z_{ij} = 1$。因此，根据引理 3.4，有 $B_{ij} \cap A \neq \varnothing$。同样地，我们看到，对于每个 $j \in [t_1]$，$\{y_{1j}, z_{1j}\} \cap N_{W_G}(A) \neq \varnothing$，因为 $N_{W_G}(A)$ 是 W_G 的一个极小顶点覆盖。因此，顶点集合 $N_{W_G}(y_{1j}) \cup N_{W_G}(z_{1j})$ 对每个 $1 \leq j \leq t_1$ 都将与 A 非平凡相交。注意，

$$N_{W_G}(y_{1j}) \bigcup N_{W_G}(z_{1j}) = \begin{cases} \{x_1, x_{k+1}, \ldots, x_{m-r}, y_{1j}, z_{1j}\} & \text{if } j = 1 \\ \{x_1, y_{1j}, z_{1j}\} & \text{if } 2 \leq j \leq t_1 \end{cases}$$

由于 A 至多包含一个 x_i，综合上述所有可能性可知，存在 $s \in [k]$ 使得

$$\begin{aligned} \mathrm{v}(W_G) = |A| &\geq \sum_{i=1}^{k} t_i - t_s + 1 \\ &\geq \sum_{i=1}^{k} t_i - t_1 + 1 \quad (\text{since } t_1 \geq t_s) \\ &= r - \left\lceil \frac{r}{m-r} \right\rceil - p + 1. \end{aligned}$$

因此，最终得到 $\mathrm{v}(W_G) = r - \lceil \frac{r}{m-r} \rceil - p + 1 = v$，证明完毕。 □

5. The set $\mathrm{RV}_{CW}(n)$: Restriction of $\mathrm{RV}(n)$ to Cameron-Walker graphs

本节中，我们确定当 G 限定为顶点数固定的 Cameron-Walker 图时，所有可能的 $(\mathrm{reg}(G), \mathrm{v}(G))$ 对。特别地，我们得到 $\mathrm{RV}(n)$ 的以下子集：

$$\mathcal{RV}_{CW}(n) = \left\{ (r, v) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{there exists a Cameron-Walker graph } G \text{ on } n \text{ vertices} \\ \text{with } \mathrm{reg}(G) = r \text{ and } \mathrm{v}(G) = v \end{array} \right\}.$$

我们先介绍 Cameron-Walker 图的定义及其一些性质。

图的悬挂边（或胡须）是与一个度为 1 的顶点关联的边。类似地，图中的悬挂三角形是 C_3 （等价地， K_3）的一个副本，其中有两个顶点的度为 2。在文献中，悬挂三角形通常定义为一个诱导三角形，其中两个顶点的度为 2，第三个顶点的度大于 2。然而，在我们的设定中，图 C_3 本身也被视为悬挂三角形。如果一个图是通过将若干条悬挂边连接到一个固定顶点上得到的，则称其为星图；换言之，除一个顶点外，其余所有顶点的度均为 1 的连通图称为星图。如果一个图是通过将一个或多个悬挂三角形连接到一个固定顶点上得到的，则称其为星三角形。

根据定义，对于图 G，总有 $\mathrm{im}(G) \leq m(G)$。2005 年，Cameron-Walker 对满足等式 $\mathrm{im}(G) = m(G)$ 的所有这类连通图 G 进行了分类（见 [3,定理 1]）。后来， [12, 备注 0.1] 修正了其分类中的一个小疏漏。特别地，对于连通图 G，当且仅当 G 是以下图之一时，$\mathrm{im}(G) = m(G)$:

(a) 星图；(b) 星三角形；(c) 一个连通有限图，由一个顶点划分为 $\{v_1、\ldots\ldots、v_m\} \sqcup \{w_1、\ldots\ldots、w_m\}$ 的连通二分图构成，并且每个顶点 v_i 至少连接一个胡须，也可能有一些悬挂三角形连接到每个顶点 w_j （见图 4）。

定义 5.1。 有限连通简单图 G 称为 *Cameron-Walker* 图（以 Kathie Cameron 和 Tracy Walker 命名），如果 G 既不是星图也不是星三角形，并且满足 $\mathrm{im}(G) = m(G)$，即 G 是上述类型 (c) 的图。

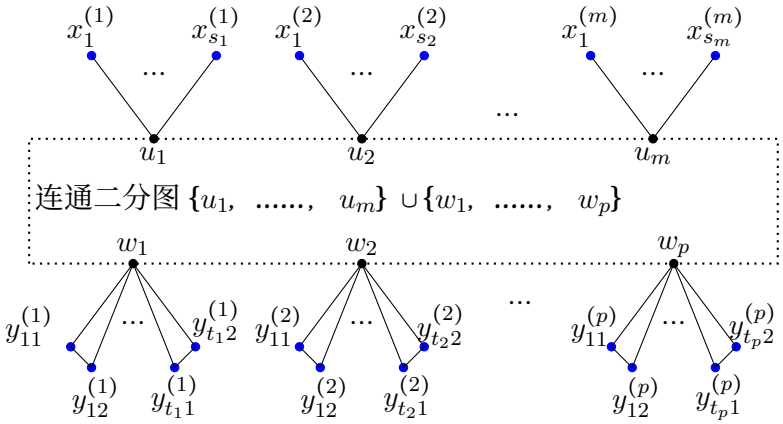


FIGURE 4. 一个 Cameron-Walker 图

注意，对于图 4 中采用相同记号的 Cameron-Walker 图，我们总有$s_i \geq 1$ 对每个 $i \in [m]$ 以及 $t_j \geq 0$ 对每个 $j \in [p]$。以下结果将在本节余下部分中用到。

定理 5.2。 [15, 定理 4。2] 设 G 是一个采用图 *4* 中相同记号的 *Cameron-Walker* 图。那么

(i) $|V(G)| = m + p + \sum_{i=1}^{m} s_i + 2\sum_{j=1}^{p} t_j$;

(ii) $\mathrm{reg}(G) = m + \sum_{j=1}^{p} t_j$.

以下引理给出了 Cameron-Walker 图的正则性和 v-数的紧上界。

引理 5.3. 设 G 是一个具有 n 个顶点的 *Cameron-Walker* 图。那么我们有 $n \geq 5$ 以及 *(a)* $2 \leq \mathrm{reg}(G) \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, *(b)* $1 \leq \mathrm{v}(G) \leq \min\{r-1, n-2r\}$，其中 $r = \mathrm{reg}(G)$。

证明。 a) 由 [15, 定理 5.1], 可知 $2 \leq \mathrm{reg}(G) \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$。 —

b) 设 G 是一个 Cameron-Walker 图，其记号如图 4 所示。于是注意到

$$\begin{aligned} n &= m + p + \sum_{i=1}^{m} s_i + 2\sum_{j=1}^{p} t_j \\ &\geq 2m + p + 2\sum_{j=1}^{p} t_j, \end{aligned} \tag{1}$$

这是因为 $s_i \geq 1$ 对所有 $1 \leq i \leq m$ 均成立。对此，需要注意的是，某些 t_j 可能为 0，这意味着顶点w_j上没有连接三角形。现在，由定理 5.2 可得 $\mathrm{reg}(G) = r = m + \sum_{j=1}^{p} t_j$，由公式 (1) 可得 $n \geq 2r + p$，等价地，$n - 2r \geq p$。从图 4 所示的 G 的结构可清楚看出，$W = \{w_1, \ldots, w_p\}$ 是 G 的一个独立集，且 $N_G(W)$ 是G的一个顶点覆盖。因此，根据图的 v-数的定义，有 $\mathrm{v}(G) \leq |W| = p$。由此可得 $\mathrm{v}(G) \leq n - 2r$。现在，只需证明 $\mathrm{v}(G) \leq r - 1$。若 $p < m$，则有 $\mathrm{v}(G) \leq p \leq m - 1 \leq r - 1$。设 $p \leq m$。那么我们考虑两种可能的情形:

情形 I. 令 $t_j \neq 0$，其中某个 $1 \leq j \leq p$。不失一般性，假设对于所有 $1 \leq j \leq c$，$t_j \neq 0$，且当 $c < p$ 时，对于所有 $c + 1 \leq j \leq p$，$t_j = 0$。现在，我们考虑顶点集$A = \{w_1, \ldots, w_c\} \cup (U \setminus \bigcup_{j=1}^{c} N_U(w_j))$，其中 $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$。由 G 的结构（见图 4）可知，A 是 G 的独立集，而 $N_G(A)$ 是 G 的顶点覆盖。因此，根据 v- 数的定义，我们有

$$\mathrm{v}(G) \leq |A| = c + m - |\bigcup_{j=1}^{c} N_U(w_j)|.$$

由于 G 连通，$\bigcup_{j=1}^{c} N_U(w_j) \neq \varnothing$，即 $|\bigcup_{j=1}^{c} N_U(w_j)| \geq 1$。因此，

$$\mathrm{v}(G) \leq c + m - 1 \leq \sum_{j=1}^{p} t_j + m - 1 = r - 1.$$

情形 II。对于所有 $1 \leq j \leq p$，令 $t_j = 0$。于是我们可以看到，$m \geq 2$，因为 G 不是星图。现在，由于 G 是连通的，因此 u_1 与 u_2 之间存在一条路径。根据 G 的结构，显然 u_1 与 u_2 之间的路径实际上位于诱导子图 $G[S]$ 中，其中 $S = U \cup W$ 满足 $W = \{w_1, \ldots, w_p\}$。由于图 $G[S]$ 是一个部集为 U 和 W 的连通二分图，因此存在 u_i、$u_j \in U$，满足 $i \neq j$ 和 $w_k \in W$，使得 $\{u_i, w_k\}$、$\{u_j, w_k\} \in E(G[S])$。现在，取集合 $A = \{w_k\} \cup (U \setminus N_U(w_k))$。接下来容易验证，$A$ 是 G 的一个独立集，并且 $N_G(A)$ 是 G 的一个顶点覆盖。因此，根据 v-数的定义，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}(G) &\leq |A| \\
&= 1 + |U| - |N_U(w_k)| \\
&\leq 1 + |U| - 2 \quad (\text{since } |N_U(w_k)| \geq 2) \\
&= m - 1 = r - 1 \quad (\text{since } t_j = 0 \text{ for all } j \in [p]).
\end{aligned}$$

因此，最终得到 $\mathrm{v}(G) \leq \min\{r - 1, n - 2r\}$，其中 $r = \mathrm{reg}(G)$。 □

下面的定理是本节的主要结果。请注意，引理 5.3 实际上是该定理的一部分，只是为了便于读者阅读而单独列出。

定理 5.4。对于 *Cameron-Walker* 图这一类，我们有 $\mathcal{RV}_{CW}(n) = \varnothing$ 当$n < 5$时；而对于 $n \geq 5$，我们有

$$\mathcal{RV}_{CW}(n) = \left\{(r, v) \mid 2 \leq r \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \text{ and } 1 \leq v \leq \min\{r - 1, n - 2r\}\right\}.$$

证明。 根据 Cameron-Walker 图的定义可知，不存在具有 $n < 5$ 个顶点的 Cameron-Walker 图。因此，对于 $n < 5$，我们有 $\mathrm{RV}_{CW}(n) = \varnothing$。现在，我们假设 $n \geq 5$。根据引理 5.3，我们有

$$\mathcal{RV}_{CW}(n) \subseteq \left\{(r,v) \mid 2 \leq r \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \text{ and } 1 \leq v \leq \min\{r-1, n-2r\}\right\}.$$

对于反向包含，取满足 $2 \leq r \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ 且 $1 \leq v \leq \min\{r-1, n-2r\}$ 的两个整数 r, v。我们需要证明，存在一个 Cameron-Walker 图 G，其有 n 个顶点，且 $\mathrm{reg}(G) = r$，$\mathrm{v}(G) = v$。设 G 是一个有 $n \geq 5$ 个顶点的 Cameron-Walker 图，其顶点集为

$$V(G) = \{w_1, \ldots, w_{n-2r}, u_1, \ldots, u_r, x_1, \ldots, x_r\}$$

边集为

$$E(G) = \{\{w_1, u_i\} \mid i = 1, \ldots, r-v+1\} \bigcup \{\{w_i, u_{r-v+i}\} \mid i = 2, \ldots, v\}$$
$$\bigcup \{\{w_i, u_{r-v+1}\} \mid i = 2, \ldots, n-2r\} \bigcup \{\{u_i, x_i\} \mid i = 1, \ldots, r\}.$$

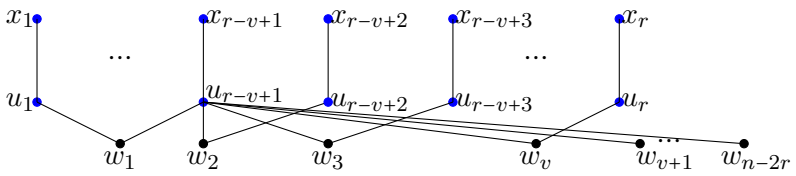


FIGURE 5. 一个 Cameron-Walker 图 G，满足 $(\mathrm{reg}(G), \mathrm{v}(G)) = (r, v)$

图 G 已在图 5 中给出。将图 G 的标记与图 4 所示一般 Cameron-Walker 图的标记进行比较。由图 G 的结构可知，G 中不存在三角形，因此对所有 $1 \leq j \leq n-2r$，都有 $t_j = 0$。于是，根据定理 5.2，可得 $\mathrm{reg}(G) = r$。现在，为了证明 $\mathrm{v}(G) = v$，我们先考虑独立集 $A = \{w_1, \ldots, w_v\}$。由于 $\{u_1, \ldots, u_r\} \subseteq N_G(A)$，且 $\{x_1, \ldots, x_r, w_{v+1}, \ldots, w_{n-2r}\}$ 是悬挂顶点集（即度为 1 的顶点），我们可知 $N_G(A)$ 是 G 的顶点覆盖。因此，根据 v-数的定义，可得 $\mathrm{v}(G) \leq |A| = v$。为证明反向不等式，考虑与 $\mathrm{v}(G)$ 对应的独立集 B，即 $N_G(B)$ 是 G 的极小顶点覆盖，且 $|B| = \mathrm{v}(G)$。现在考虑以下顶点集：当 $i = 2, \ldots, v$ 时，$B_1 = \{w_1, u_1, x_1\}$ 和 $B_i = \{w_i, u_{r-v+i}, x_{r-v+i}\}$。注意，根据引理 5.3，有 $r - v \geq 1$，从而 $u_1 \neq u_{r-v+1}$。因此可知，B_i 在 G 中诱导出一个 P_3，其中 $\deg u_i = 2$ 和 $\deg x_i = 1$，对每个 $i = 1, \ldots, v$ 均成立。于是，根据引理 3.4，对每个 $i \in [v]$，都有 $B_i \cap B \neq \phi$。由于当 $i \neq j$ 时 $B_i \cap B_j = \phi$，因此我们有

$$v \leq \sum_{i=1}^{v} |B \bigcap B_i| \leq |B| = \mathrm{v}(G).$$

因此，我们得到 $\mathrm{v}(G) = v$。 □

5.1. **未来方向**。 考虑定理 3.5 中定义的集合 $A(n)$。一个自然的问题是，对于 RV(n)，界 $A(n)$ 有多紧。请注意，在证明 $A(n) \subseteq$RV(n) 时，我们在定理 3.5 证明的两种情形中都用到了弦图。若 $\mathrm{RV}_{\mathrm{chordal}}(n)$ 表示将范围限制为连通弦图后得到的 RV(n) 的子集，那么由定理 3.5 的证明可知

$$A(n) = \{(r, v) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq r < \tfrac{n}{2},\ 1 \leq v \leq r - \left\lceil \tfrac{r}{n-2r} \right\rceil + 1\} \subseteq \mathcal{RV}_{\mathrm{chordal}}(n).$$

受这一观察启发，并得到实验结果的支持，我们提出以下猜想：

猜想 5.5. 对于具有 $n \geq 3$ 个顶点的连通弦图类，有

$$\mathcal{RV}_{chordal}(n) = \left\{(r, v) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq r < \frac{n}{2}, 1 \leq v \leq r - \left\lceil \frac{r}{n-2r} \right\rceil + 1\right\}.$$

作为未来研究的一个方向，令 $\mathrm{RV}^{\mathrm{bip}}(n)$ 表示具有 n 个顶点的连通二分图所对应的所有（正则性，v-数）对的集合。注意，已知 RV(n) 并不一定能确定集合 $\mathrm{RV}^{\mathrm{bip}}(n)$。受 Erey 和 Hibi [6]，的工作启发，明确确定集合 $\mathrm{RV}^{\mathrm{bip}}(n)$ 将是值得研究的问题。对这一情形有了更深入的理解后，还可以进一步研究更大的集合 RV(n)，这颇具挑战性。此外，计算一些著名的连通图类所对应的这些数对也会很有趣。

致谢。 Saha 感谢印度政府 Anusandhan 国家研究基金会（ANRF）通过 ARG-MATRICS 项目（编号 ANRF/ARGM/2025/002203/MTR）提供的支持。

数据可用性声明。 本文不适用数据共享，因为本研究未创建或分析任何新数据。

利益冲突。 作者声明，他们没有可能影响本文所报告工作的已知竞争性经济利益或个人关系。

References

[1] P. Biswas 和 M. Mandal. 若干单项式理想的 v-数研究。 *Collect. Math.*, 76(3):667–682, 2025年。[2] P. Biswas、M. Mandal 和 K. Saha. 分次理想 v-数的渐近行为与稳定性指标，arXiv:2402.16583, 2024。[3] K. Cameron 和 T. Walker. 诱导匹配与最大匹配大小相同的图。 *Discrete Math.*, 299(1-3):49–55, 2005。[4]Y. Civan. 图的 v-数与 Castelnuovo-Mumford 正则度。 *J. Algebraic Combin.*, 57(1):161–169, 2023。[5] H. Dao、C. Huneke 和 J. Schweig. 图关联理想的正则性和射影维数界。 *J. Algebraic Combin.*, 38(1):37–55, 2013。[6] N. Erey 和 T. Hibi. 二分图所产生的边理想 Betti 表的大小。 *Proc. Amer.Math. Soc.*, 150(12):5073–5083, 2022。

[7] A. Ficarra. Simon 猜想与单项式理想的 v-数。 *Collect. Math.*, 76(3):477–492, 2025年。[8] A. Ficarra 和 P. Macias Marques. 理想和的幂的 v-函数。 *J. Algebraic Combin.*, 62(1):论文编号 13, 21, 2025。[9] G. Grisalde、E. Reyes 和 R. H. Villarreal. 分次理想的诱导匹配与 v-数。*Mathematics*, 9(论文编号 22):2860, 2021。[10] H. T. H`a 和 T. Hibi. 最大最小顶点覆盖与 Betti 表的大小。 *Ann. Comb.*, 25(1):115–132, 2021。[11] H. T. H`a 和 A. Van Tuyl. 单项式理想、超图的边理想及其分次 Betti 数。 *J. Algebraic Combin.*, 27(2):215–245, 2008。[12] T. Hibi、A. Higashitani、K. Kimura 和 A. B. O' Keefe. Cameron-Walker 图的代数研究。*J. Algebra*, 422:257–269, 2015。[13] T. Hibi、H. Kanno、K. Kimura、K. Matsuda 和 A. Van Tuyl. Cameron-Walker 图的同调不变量。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 374(9):6559–6582, 2021。[14] T. Hibi、K. Kimura、K. Matsuda 和 A. Tsuchiya. Cameron-Walker 图的正则性与 a-不变量。 *J. Algebra*, 584:215–242, 2021。[15] T. Hibi、K. Kimura、K. Matsuda 和 A. Van Tuyl. Cameron-Walker 图的正则性与 h-多项式。 *Enumer. Comb. Appl.*, 2(3):论文编号 S2R17, 12, 2022。[16] T. Hibi 和 S. Saeedi Madani. 有限简单图的直径与连通性。 *Mediterr. J. Math.*, 20(6):论文编号 310, 11, 2023。[17] A. Higashitani、A. Kanno 和 R. Ueji. 边理想维数与深度对的行为。 *Comm. Algebra*, 51(8):3574–3584, 2023。[18] D. Jaramillo 和 R. H. Villarreal. 边理想的 v-数。 *J. Combin. Theory Ser. A*, 177:论文编号 105310, 35, 2021。[19] T. Kataoka、Y. Muta 和 N. Terai. 从 Alexander 对偶复形的视角研究 Stanley-Reisner 理想的 v-数。 *J. Algebra*, 684:589–611, 2025。[20] M. Katzman. 图理想 Betti 数的特征无关性。 *J. Combin. Theory Ser.A*, 113(3):435–454, 2006。[21] M. Kumar、R. Nanduri 和 K. Saha. v-函数斜率与 Waldschmidt 常数。 *J.Pure Appl. Algebra*, 229(2):论文编号 107881, 13, 2025。[22] M. Mahmoudi、A. Mousivand、M. Crupi、G. Rinaldo、N. Terai 和 S. Yassemi. 非常良覆盖图的顶点可分解性与正则性。 *J. Pure Appl. Algebra*, 215(10):2473–2480, 2011。[23] K. Saha. 图覆盖理想的 v-数与 Castelnuovo-Mumford 正则度。 *Int. Math.Res. Not. IMRN*, (11):9010–9019, 2024。[24] K. Saha. 二项式展开与 v-数，arXiv:2406.05567, 2024。[25] K. Saha 和 N. Kotal. Gorenstein 理想与 Frobenius 幂的 v-数。 *Bull. Malays.Math. Sci. Soc.*, 47(6):论文编号 167, 17, 2024。[26] K. Saha 和 I. Sengupta. 单项式理想的 v-数。 *J. Algebraic Combin.*, 56(3):903–927, 2022。[27] K. Saha 和 A. V. Tuyl. 比较边理想的 v-数与 h-多项式，arXiv:2507.05700, 2025。[28] R. H. Villarreal. Cohen-Macaulay 图。 *Manuscripta Math.*, 66(3):277–293, 1990年。[29] X. Zheng. 面理想的分解。 *Comm. Algebra*, 32(6):2301–2324, 2004。

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Kharagpur, 721302, India
Email address: prativabiswassnts@kgpian.iitkgp.ac.in

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Kharagpur, 721302, India
Email address: mousumi@maths.iitkgp.ac.in

Department of Mathematics, SRM University-AP, Amaravati 522240, Andhra Pradesh, India
Email address: kamalesh.saha44@gmail.com; kamalesh.s@srmap.edu.in