DOI 10.1007/s11253-014-0934-7
《乌克兰数学杂志》，第66卷，第3期，2014年8月（乌克兰原版第66卷，第3期，2014年3月）

数字表示中某个数字的出现频率与数字的渐近平均值

S. O. Klymchuk,[1] O. P. Makarchuk,[2] 和 M. V. PRATS'OVYTYI[1,2]

UDC 511.72+517+519.21

我们研究三进制数中某个三进制数字的频率与数字的渐近平均值之间的关系。我们确定了三进制数中数字渐近平均值存在的条件。我们指出了一个无穷处处稠密集，其中的数没有数字频率，但具有数字的渐近平均值。

1. 引言

已知，对于任意实数 $x \in [0;\ 1]$, 存在一个序列 (α_n) 使得

$$\alpha_n \in \mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, s-1\}$$

and

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \ldots \equiv \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

最后一个关系称为s进制表示，而 $\alpha_k = \alpha_k(x)$ 称为数x 的第 k 个 s 进制数字。然而，一般来说，数的第k位数字作为函数并未定义良好，因为下列等式成立：

$$\Delta^s_{c_1\ldots c_{k-1}c_k(0)} = \Delta^s_{c_1\ldots c_{k-1}[c_k-1](s-1)},$$

其中 (i) 是该数表示中的循环节。这类数称为s进制有理数；它们恰有两种s进制表示。其他数只有一种表示；它们称为s进制无理数。要正确定义第k位数字，只需约定仅使用第一个s进制表示，即循环节为 (0) 的表示。因此，函数 $\alpha_k(x)$ 在 $[0;1]$ 上定义良好。

令$N_i(x,k)$表示数$x \in [0$的s进制表示 $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ 中，截至k位（含第k位）出现的数字$i \in \mathcal{A} = \{0, \ldots, s-1\}$ 的个数，即

$$N_i(x,k) = \#\{j\colon \alpha_j(x) = i,\ j \leqslant k\}.$$

数x.的s进制表示中，数字i 的相对频率为$\nu^{(n)}{}_i \equiv k^{-1}N_i(x,k)$。

定义 1. 数i 在数s进制表示中的频数（渐近频率）$x \in [0;\ 1]$ 定义为极限

[1]乌克兰国家科学院数学研究所，乌克兰基辅。[2]德拉霍马诺夫国立师范大学，乌克兰基辅。

译自《乌克兰数学杂志》第66卷第3期，第302–310页，2014年3月。原稿于2013年2月8日收到。

0041-5995/14/6603–0336 c◯ 2014 SpringerScience+BusinessMedia NewYork

$$\nu_i(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k}$$

如果它存在。

显然，对于数的 s 进表示，数字 i 的频率函数 $\nu_i(x)$ 在 $x \in [0$ 为 s 进无理数时定义良好；对于 s 进有理数，只有在采用上述约定、仅使用循环节为 (0) 的表示之后，这个函数才定义良好。1]

已知，数的一个 s 进数字的频率函数可取遍 $[0,1]$ 中的所有值；在 $[0,1],$ 中的有理点处，它有定义且取有理值；而在 $[0,1]$ 中一个处处稠密的连续统集上，它没有定义，该集合的勒贝格测度为零。这个概念有助于研究随机变量的纯分布，其中 s 进数字是随机的 [7, 8]。

数 $x.$ 的数字相对平均值称为数 $r_n \equiv 1\ n\ \mathrm{X}_{n\ i=1}{}^{\alpha_i}(x)$。由于

$$r_n(x) = \frac{N_1(x,k)}{k} + \frac{2N_2(x,k)}{k}, \qquad \text{we have} \qquad 0 \leqslant r_n(x) \leqslant 2.$$

定义 2. 如果存在极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) = r(x),$$

其中 α_i 是数 x 的 s 进制数字 $\in [0;\ 1],$ 那么它的值（数 $r(x)$）称为数 x 的数字的渐近平均值（或简称平均值）。

数字的渐近平均值是数的某个 s 进制数字频数的相应类比。此外，对于$s = 2,$ 等式$r(x) = \nu_1(x)$成立。

我们关注具有预先指定的数字的渐近平均值的数集的拓扑度量性质，即形如以下形式的集合

$$S_\theta = \left\{ x\colon \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) = \theta \geqslant 0 \right\},$$

其中常数θ 是从线段 $[0,s - 1]$中预先给定的参数*a priori* 。

注意，对于$\theta > s - 1,$ 集合S_θ 为空。

很容易看 出，集合S_θ 在某种程度上与 Besicovitch–Eggleston集相似

$$E\big[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{s-1}\big] = \big\{x\colon \nu_i(x) = \tau_i,\ i = \overline{0, s-1}\big\}.$$

接下来，我们将建立这些集合之间的关系。

2. 频数与数字平均值之间的关系

引理*1.* 如果数x 的s进制表示中所有数字$\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{s-1},$都有频率，那么它的数字渐近值为$r(x)$ ，此外，

$$r(x) = \nu_1(x) + 2\nu_2(x) + \ldots + (s-1)\nu_{s-1}(x).$$

证明。由于

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)=\frac{0\cdot N_0(x,n)}{n}+\frac{1\cdot N_1(x,n)}{n}+\ldots+\frac{(s-1)\cdot N_{s-1}(x,n)}{n}$$

$$=\frac{N_1(x,n)}{n}+2\cdot\frac{N_2(x,n)}{n}+\ldots+(s-1)\cdot\frac{N_{s-1}(x,n)}{n},$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{N_1(x,n)}{n}+2\cdot\frac{N_2(x,n)}{n}+\ldots+(s-1)\cdot\frac{N_{s-1}(x,n)}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{N_1(x,n)}{n}+2\lim_{n\to\infty}\frac{N_2(x,n)}{n}+\ldots+(s-1)\lim_{n\to\infty}\frac{N_{s-1}(x,n)}{n}$$

若上述极限存在。利用最后一个等式，我们得到

$$r(x)=\nu_1(x)+2\nu_2(x)+\ldots+(s-1)\nu_{s-1}(x).$$

推论*1*。 若 $\checkmark=\tau_1+2\tau_2+\ldots+(s-1)\tau_{s-1}$，则下列包含关系成立：

$$E[\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_{s-1}]\subset S_\theta.$$

定理 1。 数 $r(x)=s_2^{-1}$ 具有正规性，即线段 $[0;1]$ 中不具有此性质的实数组成的集合是勒贝格测度为零的集合。

证明。 根据著名的 Borel定理 [4], ，对于线段 $[0;1]$中几乎所有的数（按勒贝格测度的意义），其 s进制表示中所有数字的频率都存在且等于 s^{-1}， 也就是说，Besicovitch–Eggleston集 $E\left[s^{-1},s^{-1},\ldots,s^{-1}\right]$ 是一个完备勒贝格测度集。由于

$$\theta=\frac{1}{s}+\frac{2}{s}+\frac{3}{s}+\ldots+\frac{s-1}{s}=\frac{s-1}{2},$$

我们有 $E\left[s^{-1};s^{-1};\ldots;s^{-1}\right]\subset S_\theta$. 因此， $\lambda(S_\theta)=1$.

定理2. 若对于 $s=3$，数字的渐近平均值 $r(x)$ 以及频率 $\varkappa_0(x)$、$\varkappa_1(x)$ 和 $\varkappa_2(x)$ 中至少一个存在，那么数 x 的另外两个数字频率也存在。若频率 $\varkappa_j(x)$ $(j\in\{0,1,2\})$ 中至少有一个不存在，但 $r(x)$ 存在，那么数 x 的另外两个数字频率也不存在。

证明。 设$v^{(n)}{}_j=n^{-1}Nj(x,n)$ 是数x 中三进制数字j 的相对频数，并令$r_n(x)=1\,n\sum^{n}{}_{j=1}\alpha_j(x)$ 为数x的数字相对平均值。于是得到以下方程组：

$$v_0^{(n)}+v_1^{(n)}+v_2^{(n)}=1,$$

$$v_1^{(n)} + 2v_2^{(n)} = r_n.$$

如果极限 $\lim_{n\to\infty} r_n$ 和 $\lim_{n\to\infty} v^{(n)}{}_j$，$j \in \{1, 2\}$，存在，那么该方程组的第二个等式意味着 $\lim_{n\to\infty} v^{(n)}{}_i$，$i \in \{1, 2\}\backslash\{j\}$ 存在，而第一个等式则给出极限 $\lim_{n\to\infty} v_0^{(n)}$。由于该方程组可以改写为以下形式

$$v_2^{(n)} = r_n - 1 + v_0^{(n)},$$

$$v_1^{(n)} = 2 - 2v_0^{(n)} - r_n,$$

$\lim_{n\to\infty} v_0^{(n)}$ 和 $\lim_{n\to\infty} r_n$ 存在，意味着频率 $\nu_j(x) = \lim_{n\to\infty} v^{(n)}{}_j$，$j = 1, 2$。存在。

如果极限 $\lim_{n\to\infty} r_n$ 存在，但极限 $\lim_{n\to\infty} v_0^{(n)}$ 不存在，那么极限 $\lim_{n\to\infty} v_1^{(n)}$ 和 $\lim_{n\to\infty} v_2^{(n)}$ 都不存在，因此频率 $\nu_1(x)$ 和 $\nu_2(x)$ 也不存在。

推论 2。如果一个数的三进制表示的渐近平均值为 $r(x)$，那么频率 $\nu_i(x)\ i\ 2\ \{0, 1, 2\}$ 要么同时存在，要么同时不存在。

3. 具有预先指定数字渐近平均值的数

现在我们给出一种算法，用于构造三进制数字频率预先指定的数。

设 a 和 b 为正实数，满足 $a+b \leq 1$，且此外，$\nu_0(x) = a$ 且 $\nu_1(x) = b$。用 (c_n),表示满足 $c_n = [n \cdot a]$, $n \in \mathbb{N}$, 的整数值序列。考虑差

$$d_n = c_{n+1} - c_n = \big[(n+1)\cdot a\big] - [n\cdot a] = \big[[n\cdot a] + \{n\cdot a\} + a\big] - [n\cdot a] = \big[\{n\cdot a\} + a\big] \in \{0, 1\}.$$

于是 $x^* = \Delta^3_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots}$，其中

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} \beta_n & \text{if} \quad d_n = 0, \\ 0 & \text{if} \quad d_n = 1. \end{cases}$$

我们引入整数值序列 (c'_n), $c'_n = [n\cdot b]$, $n \in \mathbb{N}$, 并考虑差 $d'_n = c'_{n+1} - c'_n \in \{0, 1\}$。由此得到

$$\beta_n = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad d'_n = 0, \\ 2 & \text{for} \quad d'_n = 1. \end{cases}$$

由于

$$a - \frac{1}{n} = \frac{n\cdot a - 1}{n} < \frac{N_0(x_*, n)}{n} = \frac{[n\cdot a]}{n} \leqslant \frac{n\cdot a}{n} = a,$$

$$b-\frac{1}{n}=\frac{n\cdot b-1}{n}<\frac{N_1(x_*,n)}{n}=\frac{[n\cdot b]}{n}\leqslant\frac{n\cdot b}{n}=b,$$

我们得到

$$\nu_0(x_*)=\lim_{n\to\infty}\frac{N_0(x_*,n)}{n}=a,\qquad \nu_1(x_*)=\lim_{n\to\infty}\frac{N_1(x_*,n)}{n}=b.$$

4. 数字的渐近平均值存在但数字频率不存在的数

现在我们构造一个数，使其数字的渐近频率不存在，但数字的渐近平均值存在，且等于某个给定的数θ，即，$r(x)=\theta$。

首先，我们证明，对于$\theta=0$和$\theta=2$。，这是不可能做到的

设$\theta=0$，即$\lim_{n\to\infty}r_n=0$。由于$v_1^{(n)}+2v_2^{(n)}\geqslant v^{(n)}{}_i\geqslant 0$对于$i\in\{1,2\}$，我们有$\lim_{n\to\infty}v^{(n)}{}_i=0$。现在设$\theta=2$。由于

$$r_n=v_1^{(n)}+2v_2^{(n)}=v_1^{(n)}+v_2^{(n)}+v_2^{(n)}=1-v_0^{(n)}+v_2^{(n)},$$

我们得出结论：

$$1\geqslant v_2^{(n)}=r_n-1+v_0^{(n)}\geqslant r_n-1.$$

此外，由于$\lim_{n\to\infty}r_n=2$，我们得到$\lim_{n\to\infty}v_2^{(n)}=1$。因此，

$$0\leqslant v_i^{(n)}=1-v_2^{(n)}-v_{1-i}^{(n)}\leqslant 1-v_2^{(n)},$$

其中$i\in\{0,\ 1\}$。然而，$lim_{n\to\infty}1-v_2^{(n)}=0$，因此，$\lim_{n\to\infty}v^{(n)}{}_i=0$，$i\in\{0,\ 1\}$。

设θ为(0; 2)中的一个给定数。现在我们构造数x^*的一种表示，其数字的渐近平均值为θ，但不存在三进制数字的频数。为此，我们考虑x^*的如下表示：

$$x^*=\Delta^3_{\underbrace{\underbrace{0\ldots0}_{a_{11}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{12}}\underbrace{2\ldots2}_{a_{13}}}_{\text{第一块}}\underbrace{\underbrace{0\ldots0}_{a_{21}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{22}}\underbrace{2\ldots2}_{a_{23}}}_{\text{第 2 个块}}\ldots\underbrace{\underbrace{0\ldots0}_{a_{k1}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{k2}}\underbrace{2\ldots2}_{a_{k3}}}_{\text{第 }k\text{ 块}}\ldots},$$

其中$a_{ij}\in N$，并为矩阵$\|a^{ij}\|$建立使得极限

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{k1}}{a_{11}+a_{12}+a_{13}+\ldots+a_{k1}+a_{k2}+a_{k3}}$$

不存在，因此，$\nu_0(x)$也不存在，但

$$r(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{0\cdot(a_{11}+\ldots+a_{k1})+1\cdot(a_{12}+\ldots+a_{k2})+2\cdot\ (a_{13}+\ldots+a_{k3})}{a_{11}+a_{12}+a_{13}+\ldots+a_{k1}+a_{k2}+a_{k3}}=\theta$$

存在。

为此，我们证明两个辅助命题。

引理2。 对于任意自然数 k 和 n （$k < n$）以及任意实数 x，以下等式成立：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[kx] + \big[(k+1)x\big] + \ldots + [nx]}{\frac{n(n+1)}{2}} = x,$$

其中， $[kx]$ 是数kx的整数部分。

证明。根　　据数的整数部分的性质，我们得到 $y - 1 < [y] \leqslant y$。由此可得

(i)
$$\frac{[kx] + \big[(k+1)x\big] + \ldots + [nx]}{\frac{n(n+1)}{2}} \leqslant \frac{kx + (k+1)x + \ldots + nx}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \frac{x\big(1 + 2 + \ldots + n - (1 + 2 + \ldots + k - 1)\big)}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \frac{x\frac{n(n+1)}{2} - x\frac{(k-1)k}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} \to x \qquad \text{as} \quad n \to \infty;$$

(ii)
$$\frac{[kx] + \big[(k+1)x\big] + \ldots + [nx]}{\frac{n(n+1)}{2}} > \frac{kx - 1 + (k+1)x - 1 + \ldots + nx - 1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \frac{kx + (k+1)x + \ldots + nx - (n-k+1)}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \frac{x\frac{n(n+1)}{2} - x\frac{(k-1)k}{2} - (n-k+1)}{\frac{n(n+1)}{2}} \to x \qquad \text{as} \quad n \to \infty.$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[kx] + \big[(k+1)x\big] + \ldots + [nx]}{\frac{n(n+1)}{2}} = x.$$

我们任意选取两个实数 x_1 和 x_2，以及一个实数 $" > 0$，使得 $0 < \mathrm{x}_1 < \mathrm{x}_2$ 且 $" < \mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_2^{\,1}$。最后一个不等式等价于不等式 $\mathrm{x}_1 + " < \mathrm{x}_2 - "$。我们构造一个序列 (α_n) 也记作 $\tilde{\alpha}_n\{\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2\}$，其中每一项根据以下规则取两个可能值之一（$\mathrm{x}_1$ 或 x_2）：

设 n_1 为使下列不等式成立的最小自然数:

$$\frac{[1\cdot x_1]+[2\cdot\ x_1]+\ldots\ +[n_1\cdot x_1]}{\frac{n_1(n_1+1)}{2}}<x_1+\varepsilon$$

根据引理2，这个数存在。于是我们设定 $\alpha_1=\alpha_2=\ldots\ =\alpha_{n_1}=x_1$。

设 n_2 为满足不等式条件的最小自然数

$$\frac{[1\cdot x_1]+\ldots\ +[n_1\cdot x_1]+\left[(n_1+1)\cdot x_2\right]+\ldots+[n_2\cdot x_2]}{\frac{n_2(n_2+1)}{2}}>x_2-\varepsilon$$

成立。根据引理2，这个数存在。于是我们设定 $\alpha_{n_1+1}=\alpha_{n_1+2}=\ldots\ =\alpha_{n_2}=x_2$.

设 n_3 为满足不等式条件的最小自然数 y

$$\frac{[1\cdot x_1]+\ldots\ +[n_1x_1]+\left[(n_1+1)x_2\right]+\ldots+[n_2x_2]+\left[(n_2+1)x_1\right]+\ldots+[n_3x_1]}{\frac{n_3(n_3+1)}{2}}<x_1+\varepsilon$$

成立。根据引理2，这个数存在。于是我们令$\alpha_{n_2+1}=\alpha_{n_2+2}=$。 。 。 $=\alpha_{n_3}=x_1,$ et c.

因此，我们构造一个序列（w_n），其中

$$w_n=\frac{[1\cdot\alpha_1]+[2\cdot\ \alpha_2]+\ldots\ +[n\cdot\alpha_n]}{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

引理 3。序列（w_n）收敛，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[1\cdot\alpha_1]+[2\cdot\ \alpha_2]+\ldots\ +[n\cdot\alpha_n]}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

不存在。

证明。假设 $\lim_{n\to\infty}w_n$ 存在。那么存在 δ 使得 $0<\delta<x_2-x_1-2\varepsilon$。根据序列的柯西收敛准则，存在$n\in N$ 使得对于任意$m,l\ >\boldsymbol{n}$，不等式

$$|w_m-w_l|<\delta$$

成立。

根据序列（w_n），我们有 $w_{n_k}>x_2-\varepsilon$ 当 k 为奇数时，以及 $w_{n_k}<x_1+\varepsilon$ 当 k.为偶数时。照例，存在 $k\in N$ 使得 $n_k>n$. 然后

$$|w_{n_{k+1}}-w_{n_k}|>x_2-\varepsilon-(x_1+\varepsilon)=x_2-x_1-2\varepsilon>\delta,$$

即， $|w^{n_{k+1}}-w_{n_k}|>\delta$。我们得出矛盾。因此，极限 $\lim_{n\to\infty}w_n$ 不存在。

我们选择 x_1 和 x_2，使得 $0 < x_1 < x_2$ 并且

$$\theta - 1 < x_i < \frac{2-\theta}{2}, \quad i = 1, 2,$$

并设 $y_i = x_i - 1 + \theta > 0$ 和 $z_i = 2 - 2x_i - \theta$。于是 $x_i + y_i + z_i = 1$ 和

$$y_i + 2z_i = 2 - 2x_i - \theta + 2(2x_i - 1 + \theta) = \theta.$$

令 $\alpha_i = \tilde{\alpha}_i\{x_1, x_2\}$，$\beta_i = 2 - 2\alpha_i - \theta$，以及 $\gamma_i = \alpha_i - 1 + \theta$。我们分别用 x^* 中的数字“0”、“1”和“2”所组成序列的长度表示为$a_{i1} = [i\cdot\ \alpha_i]$，$a_{i2} = [i\cdot\ \beta_i]$，和$a_{i3} = [i\cdot\ \gamma_i]$，显然，

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1,$$

$$\beta_i + 2\gamma_i = \lambda.$$

我们按如下方式确定数x^* 中数字的平均值:

$$\frac{r_k}{k} = \frac{0\cdot(a_{11} + \ldots + a_{(k-1)1}) + 1\cdot(a_{12} + \ldots + a_{(k-1)2}) + 2\cdot(a_{13} + \ldots + a_{(k-1)3}) + u_k}{a_{11} + \ldots + a_{(k-1)1} + a_{12} + \ldots + a_{(k-1)2} + a_{13} + \ldots + a_{(k-1)3} + v_k}$$

$$= \frac{[1\cdot\beta_1] + \ldots + \big[(k-1)\cdot\beta_{k-1}\big] + 2[1\cdot\gamma_1] + \ldots + 2\big[(k-1)\cdot\gamma_{k-1}\big] + u_k}{[1\cdot\alpha_1] + [1\cdot\ \beta_1] + [1\cdot\ \gamma_1] + \ldots + \big[(k-1)\cdot\alpha_{k-1}\big] + \big[(k-1)\cdot\beta_{k-1}\big] + \big[(k-1)\cdot\gamma_{k-1}\big] + v_k},$$

其中$u_k = n_1 + 2n_2$, n_1 是数字“1”的个数，n_2 是第k块中数字“2”的个数，而v_k 是第k块的长度，即第k块中数字“1”、“1”和“2”的总数。

我们按如下方式估计 u_k 和 v_k：

$$0 \leqslant u_k \leqslant [k\cdot\beta_k] + 2[k\cdot\gamma_k] \leqslant k\cdot\beta_k + 2k\cdot\gamma_k = k(\beta_k + 2\gamma_k) = k\cdot\theta,$$

$$0 \leqslant v_k \leqslant [k\cdot\alpha_k] + [k\cdot\beta_k] + [k\cdot\gamma_k] \leqslant k\cdot\alpha_k + k\cdot\beta_k + k\cdot\gamma_k = k(\alpha_k + \beta_k + \gamma_k) = k$$

并引入以下记号

$$A_k \equiv [1\cdot\beta_1] + \ldots + \big[(k-1)\cdot\beta_{k-1}\big] + 2[1\cdot\gamma_1] + \ldots + 2\big[(k-1)\cdot\gamma_{k-1}\big],$$

$$B_k \equiv [1\cdot\alpha_1] + [1\cdot\ \beta_1] + [1\cdot\gamma_1] + \ldots + \big[(k-1)\cdot\alpha_{k-1}\big] + \big[(k-1)\cdot\beta_{k-1}\big] + \big[(k-1)\cdot\gamma_{k-1}\big].$$

根据数的整数部分的性质，我们得到

(i) $A_k \leqslant 1\cdot\beta_1 + \ldots + (k-1)\cdot\beta_{k-1} + 2\cdot 1\cdot\gamma_1 + \ldots + 2\cdot(k-1)\cdot\gamma_{k-1}$

$$= 1\cdot(\beta_1 + 2\gamma_1) + \ldots + (k-1)\cdot(\beta_{k-1} + 2\gamma_{k-1}) = \theta(1 + 2 + \ldots + k - 1) = \theta\cdot\frac{(k-1)k}{2},$$

$$A_k > 1\cdot\beta_1 - 1 + \ldots + (k-1)\cdot\beta_{k-1} - 1 + 2\cdot\ 1\cdot\gamma_1 - 2 + \ldots + 2\cdot(k-1)\cdot\gamma_{k-1} - 2$$

$$= 1\cdot(\beta_1 + 2\gamma_1) - 3 + \ldots + (k-1)\cdot(\beta_{k-1} + 2\gamma_{k-1}) - 3$$

$$= \theta(1 + 2 + \ldots + k - 1) - 3(k-1) = \theta\cdot\frac{(k-1)k}{2} - 3(k-1);$$

(ii) $$B_k \leqslant 1\cdot\ \alpha_1 + 1\cdot\ \beta_1 + 1\cdot\ \gamma_1 + \ldots + (k-1)\cdot\ \alpha_{k-1} + (k-1)\cdot\ \beta_{k-1} + (k-1)\cdot\ \gamma_{k-1}$$

$$= 1\cdot(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \ldots + (k-1)\cdot(\alpha_{k-1} + \beta_{k-1} + \gamma_{k-1}) = 1 + \ldots + k - 1 = \frac{(k-1)k}{2},$$

$$B_k > 1\cdot\alpha_1 - 1 + 1\cdot\ \beta_1 - 1 + 1\cdot\ \gamma_1$$

$$- 1 + \ldots + (k-1)\alpha_{k-1} - 1 + (k-1)\beta_{k-1} - 1 + (k-1)\gamma_{k-1} - 1$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) - 3 + \ldots + (k-1)(\alpha_{k-1} + \beta_{k-1} + \gamma_{k-1}) - 3$$

$$= 1 + \ldots + k - 1 - 3(k-1) = \frac{(k-1)k}{2} - 3(k-1).$$

由最后几个不等式可知

$$\frac{A_k}{\dfrac{(k-1)k}{2}} \to \theta \qquad \text{and} \qquad \frac{B_k}{\dfrac{(k-1)k}{2}} \to 1 \qquad \text{as} \quad k \to \infty.$$

那么，数x^* 的数码平均值等于

$$\frac{r_k}{k} = \frac{A_k + u_k}{B_k + v_k} = \frac{\dfrac{A}{\dfrac{(k-1)}{2}} + \dfrac{u_k}{\dfrac{(k-1)k}{2}}}{\dfrac{B_k}{\dfrac{(k-1)}{2}} + \dfrac{v_k}{\dfrac{(k-1)k}{2}}} \to \frac{\theta + 0}{1 + 0} = \theta \qquad \text{as} \quad k \to \infty.$$

现在证明零的频数$\nu_0(x^*)$不存在。事实上，如果所述频数存在，那么它应等于

$$\lim_{k\to\infty}\frac{[1\cdot\alpha_1] + \ldots + \big[(k-1)\cdot\alpha_{k-1}\big]}{B_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{[1\cdot\alpha_1] + \ldots + \big[(k-1)\cdot\alpha_{k-1}\big]}{\dfrac{(k-1)k}{2}}.$$

然而，根据引理3，最后这个极限不存在。因此，频数$\nu_0(x^*)$也不存在 .

定理3. 数字频率不存在且数字的渐近平均值等于*(0; 2)*中某一给定数的数集W 是线段 $[0; 1]$的一个连续统处处稠密子集。

证明。 连续性。现在我们证明，不同的数对x_1, x_2与x_1', x_2' $\forall i,j \in \{1,2\}$对应于不同的数x^*与x'^*。 假设相反，即设$x^* = x'^*$。 则数x^*与x'^*的第k串零相等，即

$$a_{k1} = [k \cdot \alpha_k] = a'_{k1} = [k \cdot \alpha'_k]$$

对于任意$k \in N$，因此，

$$|\alpha_k \cdot k - \alpha'_k \cdot k| < 1$$

对于所有$k \in N$，从而，

$$k \min_{i,j \in \{1,2\}} |x_i - x'_j| < 1$$

对于所有$k \in N$。然而，对于充分大的k，最后一个不等式并不成立。我们得到矛盾。

由于数对集合(x_1,x_2)的数$x_1, x_2 \in \left(\theta - 1;\ 2 - \theta 2\right)$，$0 < x_1 < x_2$，是连续的，因此数字频率不存在且数字的渐近平均值等于给定数（0;2）的数的集合是连续的。

现在我们证明集合W处处稠密。令

$$\left[\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}; \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(2)}\right] \subset [0;1],$$

是某个柱形线段，并设 $x^* = \Delta^3_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$ 是一个具有数字的渐近平均值、但不具有任何三进制数字频数的数，$\alpha_j, \beta_j \in \{0,1,2\}$. 由于数字的渐近平均值与一个数的三进制表示中任意有限个开头数字无关，数 $x'^* = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$ 同样具有数字的渐近平均值，但不具有任何三进制数字的频数。然而，$x'^* \in \left[\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}; \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(2)}\right]$. 这表明，数字的频率不存在、但数字的渐近平均值等于 (0;2) 中某一给定数的那些数所成的集合，在线段 $[0;\ 1]$ 中是处处稠密的.

定理4。 *The* 数的数字渐近平均值函数 *r* 具有以下性质 *s:*

1. 它在整个稠密的线段 $[0;\ 1]$ 上有定义。*2.* 它在整个稠密的线段 $[0\ ;\ 1]$ 的一个子集上无定义。*3.* 它取遍集合 $[0\ ;\ s\ -1]$ 中的所有值。*4.* 它仅有一个具有全勒贝格测度的水平集。

证明。 前两个性质由前面确立的事实即可得出。

事实上，由于数字的渐近平均值与数的三进制表示中的任意有限个首位数字无关，因此，频数函数有定义的点集在 $[0;1]$。 中稠密。

那里有一个 不具有数字渐近平均值的数。因此，例如，这个数

$$x^* = \Delta^s_{01001100001111\ldots\underbrace{0\ldots0}_{2^n}\underbrace{1\ldots1}_{2^n}\ldots}.$$

由于三进制数的数字渐近平均值不受其前面任意有限个数字的影响，因此频率函数未定义的点集也是 [0 中处处稠密的子集； 1]。

3. 由于

$$0 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x) \leqslant s-1,$$

函数 $r(x)$ 的取值不能高于 $s\ -1$ ，也不能低于 0。根据上述构造具有指定数字频率的数的算法，函数 $r(x)$ 可以取 $[0;\ s\ -1]$。

4. 根据定理 1，只有正规数才具有性质 $r(x)\ =s_{2}^{-1}$ 。因此，函数 r 取某个相同固定值 s_{2}^{-1} 的点集是一个具有满勒贝格测度的集合，即函数 r 只有一个满勒贝格测度的水平集。

参考文献

1. S. Albeverio、M. Pratsiovyti 和 G. Torbin，“由实数的渐近频率定义的实数集的奇异概率分布及分形性质”乌克兰数学杂志，**57**，第 9 期，1361–1370（2005）。2. S. Albeverio、M. Pratsiovyti 和 G. Torbin，“非正规实数的拓扑与分形性质”*Bull. Sci. Math.*，**129**，第 8 期，615–630（2005）。3. A. S. Besicovitch，“分数维数集。2. 关于用二进制系统表示的实数的数字和”*Math. Ann.*，**110**，第 3 期，321–330（1934）。4. ´E. Borel，“可数概率及其算术应用”*Rend. Circ. Mat. Palermo*，**27**，247–271（1909）。5. H. G. Eggleston，“由十进制性质定义的集合的分数维数”*Quart. J. Math.*，牛津系列 20，31–36（1949）。6. L. Olsen，“自相似集的正规点与非正规点，以及自相似测度的发散点”*J. LondonMath. Soc.*，**2(67)**，第 1 期，103–122（2003）。7. M. V. Prats'ovytyi，研究奇异分布的分形方法 [乌克兰语], 基辅国立师范大学（1998）。8. M. V. Prats' ovytyi 和 H. M. Torbin，“没有 n 进制数字频率的数集的超分形性及分形概率分布”乌克兰数学杂志，**47**，第 7 期，971–975（1995）；英文译本：乌克兰数学杂志，**47**，第 7 期，1113–1118（1995）。9. H. M. Torbin，“不同数制中正规数的频率特征”*Fract. Anal. Sumizh. Pyt.*，第 1 期，53–55（1998）。10. A. F. Turbin 和 N. V. Prats'ovytyi，分形集、函数与分布 [俄语版], Naukova Dumka，基辅（1992）。