arXiv:2603.04883v1 [quant-ph] 5 Mar 2026

# 基于层码的量子权重约简

Andrew C. Yuan,[1,2,*] Nou´edyn Baspin,[1,*] 和 Dominic J. Williamson[3]
[1] *Iceberg Quantum, Sydney*
[2] *Condensed Matter Theory Center and Joint Quantum Institute,Department of Physics, University of Maryland, College Park, Maryland 20742, USA*[3] *School of Physics, The University of Sydney, Sydney NSW 2006, Australia*（日期：2026年3月）

量子权重约化过程通过稀疏化量子码，使其具有低权重校验和低度量子比特，从而简化量子码的实现。然而，迄今为止，受到探索的量子权重约化方法仍然很少。在这项工作中，我们提出一种简单且通用的量子权重约化过程，可实现校验权重为 6、总量子比特度为 6；与现有过程相比，这一数值更低，但代价可能是更大的量子比特开销。我们的量子权重约化过程将任意 Calderbank-Shor-Steane码中的每个量子比特和校验算子替换为一个足够大的表面码片，再将这些补丁连接起来，形成几何上非局域的层码。这是对简单经典权重约减过程的量子类比：该过程将每个比特和校验算子替换为一个重复码。由于我们的权重约简过程十分简单，所得码的权重和度数界限可直接由层码构造推出，因此通过检查即可轻松验证。我们的过程非常适合在模块化架构中实现；这类架构由表面码片构成，并通过长程互连实现网络连接。

## I. 引言

量子纠错码对于在大规模存储和处理量子信息时抑制错误至关重要。近期的进展带来了能够高效存储大量量子信息、且具有很强噪声防护能力的量子码。然而，这些码在实际实现中仍面临一些挑战。其中一项挑战是寻找高效的量子码，其校验算符具有低权重，且在每个量子比特上的重叠程度较低。

量子低密度奇偶校验（LDPC）码是一种量子稳定子码，其中每个生成校验至多作用于 $\mathfrak{w} = O(1)$ 个量子比特，且每个量子比特至多参与 $\mathfrak{q} = O(1)$ 个校验算子 [1]。除了满足受物理直觉启发的局域性概念外，LDPC码对于确保渐近大规模码中的容错量子纠错也至关重要 [2]。具体而言，其局部结构保证了当错误率足够低（为一个足够小的常数），使错误簇不会渗流时，可以纠正彼此不连通的错误簇。因此，寻找具有最优渐近标度特性的LDPC码吸引了研究界的广泛关注，并最终迎来了突破性发现：存在渐近优良的LDPC码，其编码率和相对距离均为常数 [3]。此后，人们提出了若干替代构造 [4, 5]。

仅有良好的渐近参数，还不足以让 LDPC码在纯理论领域之外具有研究价值和实用性。例如，校验权重 $\mathfrak{w}$ 和量子比特度 $\mathfrak{q}$ 可能是大到难以接受的常数，导致无法在实际硬件上切实可行地实现。即使需要付出适度增加量子比特开销的代价，这类码仍可从权重和度数的降低中获益。

量子权重约化由 Hastings 在文献 [6, 7]，中率先提出，他引入了一种权重为 $\mathfrak{w}$，$\mathfrak{q}$ 的任意 Calderbank-Shor-Steane（CSS）码转换为常数权重 CSS 码的过程，其辅助量子比特开销为 $O(\mathrm{poly}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q}))$。尽管这种初始方法使码距缩短了 $\mathrm{poly}(\mathfrak{w}, \mathfrak{q})$ 倍，但后续研究表明，通过在构造中引入扩展图，可以将距离保持在相差 $\Omega(1)$ 常数的范围内——这一思想最早出现于低开销量子码手术的背景下 [8, 9]。随后，文献 [10] 提出了一种基于经典权重约简的简化权重约简过程，但该方法仅适用于超图乘积码 [11]。另一项工作 [12] 运用类似技术构造了一种量子权重约简过程，可生成一类称为线码的子系统码。最近，人们发现了一种权重约简方法，在将码距保持在相差一个通用常数的范围内的同时，将开销大幅降低至 $O(\mathfrak{w}\mathfrak{q}\log(\mathfrak{w}\mathfrak{q}))$ [13]。

量子权重约减技术与量子码手术有着根本的渊源 [8, 9, 14–17]。具体而言，将高权重逻辑算符视为大型稳定子校验，权重约简方案便可通过经过修改的低权重稳定子间接提取逻辑信息；反过来，高权重稳定子也可以视为通过码手术测量的逻辑算符。层码正是以这种方式构造的：在三维中堆叠表面码片，并通过局部测量来自优良 LDPC码的串接稳定子 [18]。在本文中，我们采用类似方法，寻找一种简单的量子权重约减流程，以便在局部实

* 前两位作者贡献相同。

现表面码片上的串接码，同时保持较低的校验权重和量子比特度。

### A. 主要结果的陈述

我们的主要结果是一种简单且明确的量子权重约化过程，它能将权重和度约减至个位数，且无需使用扩展图等复杂构造。其代价是辅助量子比特开销的渐近增长速度快于参考文献 [13] 中的结果。具体而言，对于任意最大校验权重为 $\mathfrak{w}$ 、量子比特度为 $\mathfrak{q}$ 的输入 CSS 码，都可以构造一个明确的输出 CSS 码，使其最大校验权重为 6、总量子比特度为 6、量子比特开销为 $O(\mathfrak{w}^4\mathfrak{q}^4)$，同时保持逻辑子空间不变，并使距离提高 $\Omega(\mathfrak{w}\mathfrak{q}^2)$ 倍。

**定理 I.1** (主要结果，定理II.2 的推论)。设 $D$ 是一个 $[\![n, k, d]\!]$ 最大权重为 $\mathfrak{w}$、量子比特度为 $\mathfrak{q}$ 的 *CSS* 码；则算法 *1* 输出一个参数为$D^{\mathrm{sparse}}$ 的 *CSS* 码 $[\![O(\mathfrak{w}^4\mathfrak{q}^4 n)\ k, \Omega(\mathfrak{w}\mathfrak{q}^2 d)]\!]$、最大权重为 6，且总量子比特度为 6。

该构造推广了层码 [18]，层码曾被用于将任意 LDPC CSS码嵌入三维欧几里得空间。层码的最大权重和总量子比特度为 6，见公式（52）或参考文献 [18]中的显式校验算子。这是因为层码包含三类层，分别对应于输入数据量子比特、 $X$-校验算子和 $Z$-校验算子；每一类层都承载一个经过修改的表面码，其中的校验算子（量子比特）在每一种不同的层类型中至多与一个额外的量子比特（校验算子）发生相互作用。重要的是，在权重约简的语境下，我们不受欧几里得局域性的限制。因此，相较于传统的层码，这里辅助量子比特的开销已大幅降低，同时约化权重和总量子比特度保持不变。

现在，我们将本文的构造与已有文献中的结果进行比较。尽管前文概述了诸多进展，但文献 [7, 13] 中针对一般 CSS稳定子码的权重约简过程仍存在重要局限，而我们的工作对此进行了改进。首先，这些工作的技术细节晦涩难懂，因此后续出现了深入研究，旨在阐明原始构造所涉及的细节[10, 19–21]。其次，由于以往构造复杂且有时表述隐晦，文献 [7, 13]中的错误和遗漏导致其保证弱于所宣称的结果。具体而言，文献 [7] 中的引理 8 在第 5 点存在一个小错误[1]，这意味着约化权重的上界仅为 $(\mathfrak{w}_X, \mathfrak{w}_Z, \mathfrak{q}_X, \mathfrak{q}_Z) \leq (42, 36, 4, 3)$，而非所声称的（5，5，3，5）。详细说明见附录（B）。同样，仔细分析文献 [13] 中的证明后发现，其中有些方面仍需进一步澄清。例如，参见文献 [21]中的注释（17）。就渐近标度界而言，这些问题微不足道，可能是相关构造在技术上难度较高所致。不过，这些问题导致的较弱保证，可能会影响这些结果在实际应用中的表现。第三，文献 [7, 13] 要求相应的扩展图将码距保持在 $\Omega(1)$ 常数范围内。众所周知，扩展图难以显式构造和验证，因此这给实际应用造成了重大障碍。

我们的结果建立了一种新的量子权重约化方法，该方法基于表面码补丁，以及由显式稳定子校验所描述的简单拓扑缺陷 [18]。我们预期，通过精细调整每个表面码层的维度选择，并将这些层划分为不相交集合，能够针对特定码实例实现比渐近结果所保证的更低开销的权重约简，见定理I.1。

### B. 展望

我们预期，我们简化的量子权重约化过程将在构造显式的权重约简码方面获得广泛应用。我们的构造是一种简单经典权重约简过程的自然量子推广，该过程将每个比特和校验替换为重复码。由于简单且易于使用，这一构造已获得广泛应用，我们的量子权重约化过程 [10, 12, 22] 同样具备这些优点。我们的过程所输出的码天然适合在如下架构中实现：该架构由经由稀疏长程互连联网在一起的表面码模块化补丁组成。我们的权重约简码配有一个解码器，如参考文献 [23, 24] 所述。与参考文献 [23, 24]类似的论证将表明，经过权重约简的良好量子 Tanner 码在该解码器下将实现自修正，因为能垒标度得以保持。

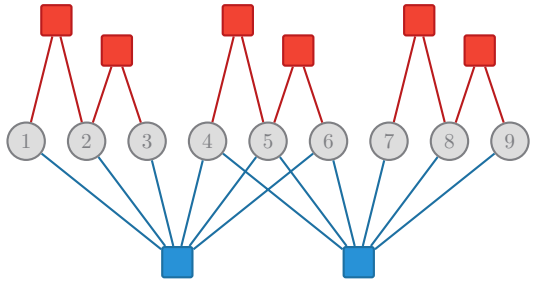
层码量子权重约化过程为未来研究提出了若干问题。首先，能否在保持基于表面码的权重约简过程简单结构的同时降低开销？能否通过分解构造中出现的每个拓扑缺陷，在增加辅助量子比特的代价下，将权重和总次数降至 5？我们能否将层码的目标空间扩展到高维欧氏空间乃至更广的范围？例如，在文献 [12, 22]，中，作者为任意欧氏维数获得了显式嵌入，并证明实际上仅凭扩展就足以保证存在到一

[1] 在证明中声称，约化锥码中的 $\mathcal{A}$ $X$-稳定子的权重由 $\mathfrak{w}_X$ 界定。然而，这未必正确，因为根据 [7]的定义2中的链映射，现在还引入了额外的量子比特。

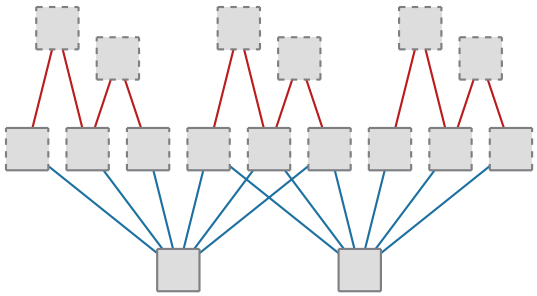
般图的嵌入。另一方面，我们的权重约简过程能否扩展到 CSS 码之外？能否设计所需的长程互连，以便在超导、中性原子或囚禁离子硬件上实现我们的权重约化码？我们的码能否作为基于表面码的容错架构中的存储器，从而比文献 [25] 中的技术进一步提升性能？

### C. 章节提纲

其余各节安排如下。在第II节中，仅假定读者具备稳定子子群与泡利子群的基本知识，我们以开创性的 ⟦9, 1, 3⟧ Shor码为例，概述我们的构造。在第III节中，我们给出理解层码稀疏化方法之技术构造所需的代数同调预备知识。在第IV节中，我们给出构造的细节，最终得到定理IV.1 与IV.2。在第V节中，我们证明定理IV.1 与IV.2。在附录A 中，我们证明一个技术条件：张量积保持我们构造中所用的等周不等式（相对扩张）。在附录B 中，我们回顾Hastings 的权重约简过程的细节 [7]。




(a) Shor码。



(b) 层拼接 Shor 码。

图 1. (a) 灰色圆圈表示量子比特。蓝色方框表示 $X$-校验算子，线条表示该校验算子作用于哪些量子比特；红色方框同理，表示 $Z$-校验算子。(b) $X$，$Z$-校验算子和量子比特被表面码取代。实线表示平滑边界，虚线表示粗糙边界。

## II. 构造概述

在本节中，我们给出量子权重约简构造的图示化高层概述。我们重点以 ⟦9, 1, 3⟧ Shor码作为建立直觉的示例，而完整算法见算法1。为简化表述，我们将部分细节的解释推迟到第IV 节；该节描述完整的代数构造，以及权重约简后输出层码在逻辑子空间与开销（定理IV.1）和码距（定理IV.2）方面的主要结果。

原始层码构造 [18] 以一个作用于 $n$ 个量子比特的CSS稳定子码作为输入。每个这样的 $n$ 个量子比特都映射为“数据层”，而其每个稳定子都映射为“校验层”。由于三维欧几里得空间的连通性约束，嵌入这些层需要占用大量空间和辅助量子比特，最终得到的新码相较于输入码，其参数有所降低。去除连通性约束后，也就不再需要辅助开销。由此，我们可以获得一种无几何层码，它能稀疏化原始码，同时更好地保留其参数。

放宽连通性约束，并从层码构造中移除周围的三维空间，带来了新的挑战。压缩层码规模的关键思路，是将其各层划分为若干集合，使每个集合中的层彼此无碰撞。这使我们能够使用补丁大小由此类无碰撞集合的数量决定的表面码；这些补丁远小于原始三维层码中的表面码补丁。

例如，输入码 $A$选为⟦9、1、3⟧ Shor码，如图1a所示。与传统的层码构造类似，我们首先将每个 $X$-校验、$Z$-校验和量子比特替换为一个表面码层，其具体尺寸将在下文确定。 $X$-校验层采用平滑边界条件， $Z$-校验层采用粗糙边界，而量子比特层采用标准平面码边界，这遵循了文献 [24]中的扩展层码构造。如图1b所示。随后，将邻接关系（红线和蓝线）替换为相应校验层与量子比特层之间的局域相互作用。具体而言，每个 $Z$-校验层沿相应量子比特层的类弦 $Z$型逻辑算符作用，如图2中的红色部分所示。为实现输出码的权重约简，不同的量子比特层必须与 $Z$-校验层的不同横截面相互作用。随后，我们对 $X$-校验层重复相同的步骤，如图2中的蓝色部分所示。然而，由于 $X$-型和 $Z$-型逻辑算符在每个量子比特层上有非平凡重叠，因此按照传统层码构造中的步骤引入绿色线缺陷，以确保输出码仍为稳定子码，即所有校验算子彼此对易。Shor码的最终输出码 $C$ $A$

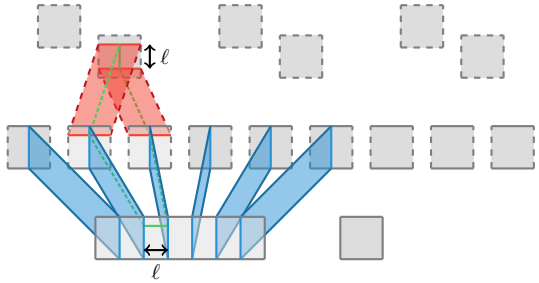



图2. 相互作用。 $X$-（蓝色）和 $Z$-校验层（红色）通过拓扑缺陷与相应的量子比特层连接，并沿着绿色弦缺陷彼此连接，以确保输出是有效的稳定子码，即所有校验算子彼此对易。所选的图着色确保绿色弦缺陷的长度 $\ell$ 一致。对于 $X$-和 $Z$-校验层，采用扩展边界条件 [24]。参见图3 ，了解 Shor 码的最终结果。

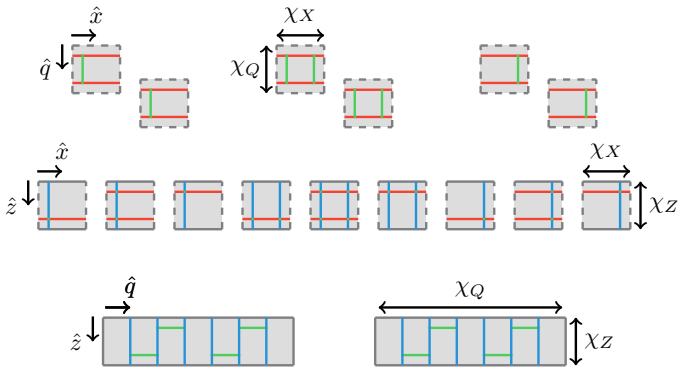



图 3. 权重约简层的尺寸。蓝色、红色和绿色线条表示拓扑缺陷，沿这些缺陷粘合层对，见图 2。层的大小由诱导图的色数决定。在此示例中，$\chi_X = \chi_Z = 2$，$\chi_Q = 6$。为简洁起见，$\chi_Q$ 方向未按比例绘制。

示意图见图3。

我们的构造需要确保与同一绿色线缺陷相互作用的不同 $X$-层和 $Z$-层的区域可以彼此对应。具体而言，它们必须具有相同的长度，这对缺陷的排列方式提出了严格要求。在传统层码的情形中，各层首先嵌入三维空间，其交点自然确定了这些缺陷的位置。然而，在当前构造中，由于缺少外围参考空间，我们需要一种替代坐标系来定位表面码片。为此，我们引入图$x$、$\hat{}q$、$\hat{}z$ 所示的坐标轴，见图3。具体而言，每个 $X$-校验层由图$q \wedge \hat{}z$索引，每个量子比特层由图$q \wedge \hat{}z$索引，而每个 $Z$-校验层由图$x \wedge \hat{}q$索引。请注意，与原始层码构造中采用的惯例相比，这里的图$x$ 和图$z$ 轴互换了 [18]

现在我们来描述这些坐标所取的值。我们引入三个整数 $\chi_X$、$\chi_Q$、$\chi_Z$，它们将在下文定义，用于指定各个方向上的最大坐标。这些量分别对应于对特定图进行着色时所用的颜色数；该图的定义确保我们得到一致的嵌入。沿$\hat{}x$ 方向的坐标取值范围为$[\chi_X] = \{1, 2, \ldots, \chi_X\}$，$\hat{}q$方向的坐标也类似，$\hat{}z$方向的坐标亦然，如图3所示。具体而言，令 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Q}$、$\mathcal{Z}$分别表示给定输入码的 $X$-校验算子、量子比特和 $Z$-校验算子集合$A$。它们对应的图结构定义如下。

**定义 II.1** （由 $A$ 诱导的图）。令$G_X = (\mathcal{X}, \mathcal{E}_X)$ 表示一个图，其顶点为 $\mathcal{X}$，边为 $xx' \in \mathcal{E}_X$；当 $x, x'$ 关于码 $A$ 的支撑重叠，或存在一个 $z \in \mathcal{Z}$，其支撑同时与 $x$ 和 $x'$ 的支撑重叠时，即有此定义。类似地，定义$G_Z = (\mathcal{Z}, \mathcal{E}_Z)$。令 $G_Q = (\mathcal{Q}, \mathcal{E}_Q)$ 表示一个图，其顶点为 $\mathcal{Q}$，边为 $qq' \in \mathcal{E}_Q$；若存在 $x$ 或 $z$ 校验，使得 $q, q'$ 都在其支撑中，即有此定义。令 $\chi_\alpha, \alpha = X, Q, Z$，使得 $G_\alpha$ 是 $\chi_\alpha$-可着色的，从而

$$\chi_X, \chi_Z = O(\mathfrak{w}_X \mathfrak{q}_X \mathfrak{w}_Z \mathfrak{q}_Z) \tag{1}$$
$$\chi_Q = O(\mathfrak{w}_X \mathfrak{q}_X + \mathfrak{w}_Z \mathfrak{q}_Z) \tag{2}$$

其中，$\mathfrak{w}_X$，$\mathfrak{w}_Z$分别是 $X$-、$Z$-校验算子的最大权重，而 $\mathfrak{q}_X$，$\mathfrak{q}_Z$ 分别是最大 $X$-、$Z$- 量子比特度（总量子比特度 $\mathfrak{q} \le \mathfrak{q}_X + \mathfrak{q}_Z$）。着色方案会诱导出一个映射 $\eta_X$：$\mathcal{X} \to [\chi_X]$，$Q$，$Z$同理。若上下文含义明确，下文可省略下标。

使用图着色的优势在于，它能自然地为稀疏图 $\eta$：$\mathcal{V} \to [\chi]$ 的顶点提供一种标记，并且这种标记在 $\mathcal{V}$ 上保持一致，尽管 $|\mathcal{V}|$ 可能远大于 $\chi$。定义 II.1 中对图的选择，专门用于确保连接各层的缺陷不会相互碰撞，并确保由每个缺陷配对的区域长度完全匹配。完整的量子权重约简算法见算法 1。由此引出我们的主要结果。

**定理 *II.2*（算法 *1*）。** 设 $D$ 是一个 $[\![n, k, d]\!]$ *CSS* 码，其最大权重为 $\mathfrak{w}$，总量子比特度为 $\mathfrak{q}$，且整数 $\chi_X$、$\chi_Q$、$\chi_Z \ge \chi$ 满足：定义 *II.1* 中的 $G_\alpha$ 是 $\chi_\alpha$-可着色的；那么算法 *1* 输出一个 *CSS* 码 $D^{\text{sparse}}$，其参数为 $[\![O(\mathfrak{w}^4\mathfrak{q}^4)n, k, \Omega(\chi/\mathfrak{w})d]\!]$，最大权重为 *6*，最大总量子比特度为 *6*。具体而言，最大 $X$ 量子比特度和 $Z$ 量子比特度均为 *4*。

**注 1.** 算法 1 适用于任意选取的整数 $\chi_X$，$\chi_Q$，$\chi_Z$，前提是这些整数至少与每个图对应的色数一样大。选取更大的整数，可以使距离任意增大，但可能需要付出额外量子比特开销。特别地，这意味着我们可以选择 $\chi_X$，$\chi_Q$，$\chi_Z = \Theta(\mathfrak{w}^2\mathfrak{q}^2)$，从而使稀疏化后的距离提升 $\Omega(\mathfrak{w}\mathfrak{q}^2)$ 倍

算法 1 CSS 码稀疏化 要求：一个 $[\![n,k,d]\!]$ CSS 码 $D$，其最大权重为$\mathfrak{w}$，总量子比特度为 $\mathfrak{q}$，以及整数 $\chi_X,\chi_Q,\chi_Z\geq\chi$，使得 $G_\alpha$ 是 $\chi_\alpha$-可着色 (II.1) 确保：一个 $[\![O(\mathfrak{w}^4\mathfrak{q}^4)n,k,\Omega(\chi/\mathfrak{w})d]\!]$ CSS 码 $D^{\text{sparse}}$，其最大权重为 6，总量子比特度为 6。具体而言，最大 $X$-和 $Z$-量子比特度为 4。对于每个校验 $x\in\mathcal{X}=\{1,\dots,n_Z\}$，执行 创建一个大小为 $\chi_Q\times\chi_Z$ 的表面码层 结束循环 对于每个量子比特 $q\in\mathcal{Q}=\{1,\dots,n\}$，执行 创建一个大小为 $\chi_X\times\chi_Z$ 的表面码层 结束循环 对于每个校验 $z\in\mathcal{Z}=\{1,\dots,n_Z\}$，执行 创建一个大小为 $\chi_X\times\chi_Q$ 的表面码层 结束循环 对于每个校验 $x\in\mathcal{X}$，执行

**对于每个**量子比特 $q$，位于 $x$ **的支撑中，执行**

将 $x$层中沿着 $(\eta(q),1)\to(\eta(q)\ \chi_Z)$ 的量子比特，与 $q$ 层中沿着 $(\eta(x),1)\to(\eta(x)\ \chi_Z)$ 的量子比特对应起来，并实施蓝色线缺陷，或实施第四节中的 $g^{QX}$。结束循环 结束循环 对每个校验 $z\in\mathcal{Z}$，执行

**对于每个**量子比特 $q$，位于 $z$ **的支撑中，执行**

将 $z$层中沿着 $(1,\eta(q))\to(\chi_X,\eta(q))$ 的量子比特，与 $q$ 层中沿着 $(1,\eta(z))\to(\chi_X,\eta(z))$ 的量子比特对应起来，并实施红色线缺陷，或实施第四节中的 $g^{ZQ}$。结束循环 结束循环 对每个校验 $x\in\mathcal{X}$，执行 对每个校验 $z\in\mathcal{Z}$，执行 令 $O\subseteq\mathcal{Q}$ 为 $x$ 与 $z$ 的支撑的重叠部分。令 $\eta(O)=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{2t})$ 为与 $O$ 相关联且按递增顺序排列的坐标。对每个 $i\in[1,\dots,t]$，执行 沿着 $x$ 层上的 $(\eta_{2i-1},\eta(z))\to(\eta_{2i},\eta(z))$，以及 $z$ 层上的 $(\eta_{2i-1},\eta(x))\to(\eta_{2i},\eta(x))$，添加绿色缺陷，或添加第四节中的 $p^{ZX}$。结束循环 结束循环 结束循环

开销为 $O(\mathfrak{w}^4\mathfrak{q}^4)$ 量子比特规模，从而得到定理I.1。然而，这种保守的选择或许并非必要，也可能是证明过程中的一个偶然结果（参见注释（3））。具体而言，我们预计，定理 $\chi$ 中的II.2 只需满足 $\chi_X,\ \chi_Z\geq\chi$。为强调色数与我们构造之间的关系，以下假设 $\chi_X,\ \chi_Q,\ \chi_Z$，分别表示相应图的色数。

证明。 应用算法1，通过将 $D$ 与 $A$对应，并将$D^{\text{sparse}}$ 与 $C$ 对应，可得到输出构造的参数，见定理 IV.1 和IV.2。 □

## III. 预备知识

本节将介绍编码理论和链复形中的概念，为我们的 LayerCode 量子权重约化过程奠定背景。

**定义 III.1。 A 复形** $C$ 是由一系列 $\mathbb{F}_2$- 维向量空间 $C_i$ 以及线性映射 $\partial_i:\ C_i\to C_{i-1}$构成的序列，称为 $C$的**微分**，满足 $\partial_i\partial_{i+1}=0$，其中下标通常省略。记作

$$C=\cdots\to C_i\xrightarrow{\partial_i}C_{i-1}\to\cdots \tag{3}$$

注意，对于所有 $i$，均有 $\operatorname{im}\partial_{i+1}\subseteq\ker\partial_i$，因此 $C$ 的 $i$**- 同调**定义为

$$H_i(C)\equiv\ker\partial_i/\operatorname{im}\partial_{i+1} \tag{4}$$

将 $\ell_i\in C_i$ 的等价类记为 $[\ell_i]\in H_i(C)$——反过来，我们也可以写作 $[\ell_i]\in H_i(C)$，而不指定表示 $\ell_i$。

**定义 III.2** （基）。 一个带有**基**的复形 $C$ 满足：每个 $C_i$ 都配备一个典范基，其元素称为 $i$**-胞腔**。这进一步导出了良定义的非退化双线性形式 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 和 **（汉明）权重** $|\cdot|$。若胞腔 $c_i$、 $c_{i-1}$ 满足 $\langle c_{i-1}|\partial c_i\rangle\neq0$，则称它们**相邻**，记作 $c_i\sim c_{i-1}$。

**例 III.1.** （重复码）定义在 $L$ 个量子比特上的**重复码**是一个奇偶校验为 $Z_iZ_{i+1}$ 的经典码，其中 $i=1,\ \dots,\ L-1$。其对应的复形定义为 $R\equiv R(L)$，微分为 $\partial^R$。对于 $i=1,\ \dots,\ L-1$，1-胞腔记作 $|i^+\rangle$，其中 $i^\pm=i\pm1/2$；对于 $i=1,\ \dots,\ L$，0-胞腔记作 $|i\rangle$，使得

$$\partial^R|i^+\rangle=|i\rangle+|i+1\rangle \tag{5}$$

我们默认假设 $|i\rangle,\ |i^\pm\rangle=0$ 如果标签不在前述参数范围内。

有必要定义经典重复码，因为表面码（可能带有边界条件）将是两个重复码 [11] 的同调乘积。

**引理 III.3** (重复码). 令 $R=R(L)$ 表示重复码。那么 $H_1(R)=0$ 和 $H_0(R)\cong\mathbb{F}_2$。$H_0(R)$ 的唯一基元素为 $[|i\rangle]$，对任意 $i=1,\dots,L$ 均成立；而 $H^0(R)$ 的唯一基元素为$[\mathcal{R}_0]$，其中

$$\mathcal{R}_0\equiv\sum_{i=1}^{L}|i\rangle \tag{6}$$

注意， $\mathcal{R}_0$ 可以视为所有 *0*-胞腔的集合。

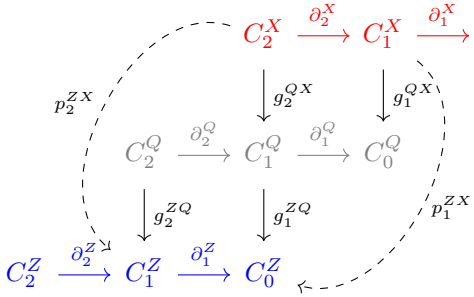
**定义 III.4** （CSS 码）。考虑一个 CSS 码作为复形 $C=C_2\to C_1\to C_0$ （带有基），并约定 $C_2,C_1,C_0$ 分别为 $X$-型校验算子、量子比特，

$Z$-型校验算子。令 $\mathfrak{w}_X, \mathfrak{w}_Z$ 分别表示 $X, Z$-校验算子的最大权重，并令 $\mathfrak{q}_X, \mathfrak{q}_Z$ 分别表示作用于任意量子比特的 $X, Z$-校验算子的最大数量。注意，$\mathfrak{w}_X, \mathfrak{q}_X$ 分别是 $\partial_2$, $\partial_1$ 的最大列权重 $\|\cdot\|_{\mathrm{col}}$，类似地，$\mathfrak{q}_Z, \mathfrak{w}_Z$ 也是如此。因此，我们通过以下图示表示这些权重

$$C_2 \underset{\mathfrak{q}_X}{\overset{\mathfrak{w}_X}{\rightleftharpoons}} C_1 \underset{\mathfrak{w}_Z}{\overset{\mathfrak{q}_Z}{\rightleftharpoons}} C_0 \tag{7}$$

此外，给定胞腔 $c_2$，$c_0$，我们将其**共有量子比特**（记为 $c_2 \wedge c_0$ ）称为 $c_2$，$c_0$支撑的交集，即满足条件 $c_2 \sim c_1 \sim c_0$ 的胞腔 $c_1$ 的集合。

**定义 III.5**（框架）。下图概述了参考文献 [26], 中定理 I.1 所引入的框架，但符号略有调整（为简洁起见，映射的下标可能省略）。




(8)

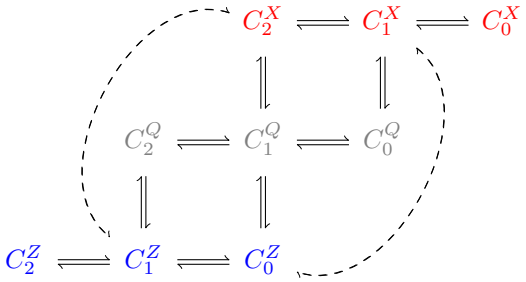
若 $g^{QX}$，$g^{ZQ}$，$p^{ZX}$ 与复形 $C^X$，$C^Q$，$C^Z$ 相容，则称

$$\partial^Q g^{QX} = g^{QX}\partial^X \tag{9}$$

$$\partial^Z g^{ZQ} = g^{ZQ}\partial^Q \tag{10}$$

$$g^{ZQ}g^{QX} = \partial^Z p^{ZX} + p^{ZX}\partial^X \tag{11}$$

由于我们还将关注构造复形 $C$ 的权重，因此使用下面的图在视觉上更为直观，其中每个箭头对应相应线性映射的最大列重量。




(12)

特别地，可以通过上述展开后的图，以直接（但符号处理繁琐）的方式，得到式（ $C$ ）中图的列重/行重的上界。7例如，参见式（24）和式（52）。

**定理 III.6** (参考文献 [26]中的定理 I.1)。如果方程(8) 中的映射相容，那么 $C = C_2 \to C_1 \to C_0$通过 $C_i = C_i^X \oplus C_i^Q \oplus C_i^Z$和微分构造

$$\partial_i = \begin{pmatrix} \partial_i^X & & \\ g_i^{QX} & \partial_i^Q & \\ p_i^{ZX} & g_i^{ZQ} & \partial_i^Z \end{pmatrix} \tag{13}$$

是一个定义良好的复形。此外，以下对象（称为嵌入式复形）也定义良好

$$C^{\mathbf{g}} = H_2(C^X) \xrightarrow{[g_2^{QX}]} H_1(C^Q) \xrightarrow{[g_1^{ZQ}]} H_0(C^Z) \tag{14}$$

其中 $[g^{QX}]$、$[g^{ZQ}]$ 通过取商定义。此外，若 $H_1(C^X) = H_1(C^Z) = 0$，则

$$H_1(C) \cong H_1(C^{\mathbf{g}}) \tag{15}$$

具体而言，同构 $H_1(C) \to H_1(C^{\mathbf{g}})$ 由下式给出

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ \ell^Q \\ \ell^Z \end{pmatrix}\right] \mapsto [\![\ell^Q]\!] \tag{16}$$

这表明，$C$ 的每个逻辑算符都有一个等价表示 $\ell = \ell^{\mathfrak{q}} \oplus \ell^Z$，其支撑不在 $C_1^X$ 上；该表示在 $\ell^Q \in C_1^Q$ 上的投影是 $C^Q$ 的逻辑算符，因此等价类 $[\ell^Q] \in H_1(C^Q)$ 是 $C^{\mathbf{g}}$ 的逻辑算符，进而 $[\![\ell^Q]\!] \in H_1(C^{\mathbf{g}})$。

下面给出一个具体示例，以说明定理 III.6 在实践中的应用。

示例 III.2（欧几里得层码）。考虑由输入码 $A$ 构造的欧几里得层码 $C$，它作用于 3 个量子比特，并具有奇偶校验 $XXI$ 和 $ZZZ$。如图 4a 所示，红色、灰色和蓝色层分别表示对应于 $X$-校验算子、量子比特和 $Z$-校验算子的层。我们声称，波浪线表示一种通用逻辑表示，对应于输入码 $A$ 的逻辑算符 $XIX$，其含义由定理 III.6 中的同构给出。具体而言，如图 4b 所示，给定一个通用逻辑表示（左上），总可以通过应用奇偶校验（例如对应于形状不规则红色区域的校验），将其化简为一个等价的逻辑表示 $\ell$ （右上），其支撑不在 $C_1^X$ 上。对 $\ell^Q \in C_1^Q$ 的限制（右下）是 $C^Q$ 的逻辑表示，因此其等价类（左下） $[\ell^Q] \in H_1(C^Q) = A_1$ 对应于逻辑表示 $XIX$，其进一步的等价类为 $[\![\ell^Q]\!] \in H_1(A)$。

## IV. 代数构造

本节将对我们的层码《Quantum》权重约简过程作代数描述。

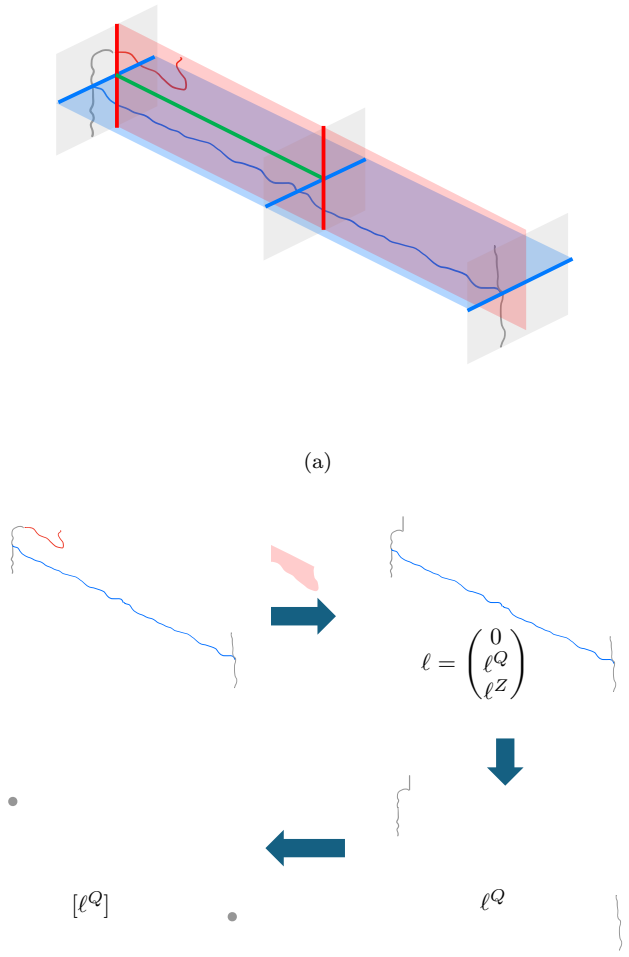



图 4. 层码示例。(a) 表示欧几里得层码 $C$，该码由输入码 $A$ 构造，其奇偶校验为$XXI$、$ZZZ$，其中波浪线表示一种可能的逻辑表示。(b) 说明定理 III.6 中的同构，并以 (a) 中的逻辑表示为例。具体而言，它对应于逻辑算符 $XIX$（属于输入码 $A$）。

首先，设有一个 CSS 码，其对应的复形为 $A = X \to Q \to Z$，胞腔分别为 $x \in \mathcal{X}$，$q \in \mathcal{Q}$，$z \in \mathcal{Z}$，其权重为

$$X \underset{\mathfrak{q}_X}{\overset{\mathfrak{w}_X}{\rightleftarrows}} Q \underset{\mathfrak{w}_Z}{\overset{\mathfrak{q}_Z}{\rightleftarrows}} Z \tag{17}$$

于是便有一个相关联的图结构，其定义见定义 II.1。

**注 2** (诱导图)。定义 II.1 中的诱导图和着色方案在以下意义上是必要的。假设给定一个映射 $\eta_X : \mathcal{X} \to \mathbb{Z}$，类似地，对于 $Q, Z$，映射的定义如式（21）-（23）所示，则只需找到$\eta$，使其在

1) $x \wedge z$ for any pair – so that $p^{ZX}$ in Eq. (23) is defined

2) $\{q : q \sim x\}$ for any $x$ and $\{q : q \sim z\}$ – so that $\|g^{QX}\|_{\text{col}}, \|g^{ZQ}\|_{\text{row}} \leq 1$ in Eq. (54)

3) $\{z : z \sim q\}$ and $\{x : x \sim q\}$ for any $q$ – so that $\|g^{ZQ}\|_{\text{col}}, \|g^{QX}\|_{\text{row}} \leq 1$ in Eq. (55)

4) $\{z : x \wedge z \neq \emptyset\}$ for any $x$ and $\{x : x \wedge z \neq \emptyset\}$ for any $z$ – so that $\|p^{ZX}\|_{\text{col/row}} \leq 1$ in Eq. (56)

如果 $\eta$ 满足上述条件，那么 $\eta$ 必然是诱导图的着色方案。

利用所诱导的着色方案 $\eta$，我们可以定义独立的 CSS 码，用以替换输入码 $A$ 的校验算子与量子比特。具体而言，将 $R_X = R(\chi_X)$ $R_Q = R(\chi_Q)$ $R_Z = R(\chi_Z)$ 定义为重复码，其 0-胞腔分别记为 $|i\rangle$、$|j\rangle$、$|k\rangle$。独立的 CSS 码定义为

$$C^X = X \otimes R_Q^\top \otimes R_Z^\top \tag{18}$$
$$C^Q = R_X \otimes Q \otimes R_Z^\top \tag{19}$$
$$C^Z = R_X \otimes R_Q \otimes Z \tag{20}$$

其中，我们将 $X$、$Q$、$Z$ 视为长度为 0 的复形，从而例如 $C^X$ 可看作长度为 2 的复形 $R_Q^\top \otimes R_Z^\top$ 的 $|\mathcal{X}|$ 个副本，其 2-胞腔为 $|x, j, k\rangle$，其中 $x \in \mathcal{X}$、$j \in [\chi_Q]$、$k \in [\chi_Z]$。对于 $C^Q$、$C^Z$，情形类似。

采用参考文献 [26], 中定义III.5概述的框架，定义如下

$$g^{QX}|x, j, k_s\rangle = \sum_q |\eta(x), q, k_s\rangle 1\{j = \eta(q), q \sim x\} \tag{21}$$
$$g^{ZQ}|i_s, q, k\rangle = \sum_z |i_s, \eta(q), z\rangle 1\{k = \eta(z), z \sim q\} \tag{22}$$

其中，$i_s$、$j_s$、$k_s$ 分别表示整数、半整数和 $s = 0$。

进一步定义 $p^{ZX}$ 如下。给定 $x$、$z$ 个校验算子，它们有偶数个公共量子比特，并且我们注意到 $q_1$、……、$q_{2t} \in x \wedge z$ 可以按照相对于 $\eta$严格递增的顺序排列，即 $\eta(q_1) < \cdots < \eta(q_{2t})$，因为 $q_1$、……、$q_{2t}$ 在诱导图 $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_Q)$ 中彼此相邻。于是，我们可以将弦缺陷$\Gamma(x \wedge z) \subseteq \mathbb{R}$ 定义为半开区间 $[\eta(q_{2i-1}), \eta(q_{2i}))$ 在 $i = 1$、……、$t$ 上的不交并。定义如下

$$p^{ZX}|x, j_s, k\rangle = \sum_z 1\{k = \eta(z)\}|\eta(x), j_s^+, z\rangle \times 1\{j_s \in \Gamma(x \wedge z)\} \tag{23}$$

定理 *IV.1*（逻辑子空间）。式 *(21)-(23)* 中定义的映射 $g^{QX}$、$g^{ZQ}$、$p^{ZX}$ 与式 *(18)-(20)* 中的复形 $C^X$、$C^Q$、$C^Z$ 相容。此外，构造复形 $C$ 中的嵌入复形恰好为 $= A$，从而 $H_1(C) \cong H_1(A)$，并且具有权重

$$C_2 \underset{4}{\overset{6}{\rightleftharpoons}} C_1 \underset{6}{\overset{4}{\rightleftharpoons}} C_0 \tag{24}$$

以及维数

$$\dim C_i = O\left(\sum_{\alpha=X,Q,Z} \dim \alpha |\chi_\beta||\chi_\zeta|\right) \tag{25}$$

其中 $\beta$、$\zeta$ 是除 $\alpha$之外的其余指标。特别地，作为 *CSS* 码， $C$ 的量子比特开销为 $O(\mathfrak{w}^4\mathfrak{q}^4)$，其中 $\mathfrak{w}$、$\mathfrak{q}$ 分别是 $\mathfrak{w}_X$、$\mathfrak{w}_Z$ 与 $\mathfrak{q}_X$、$\mathfrak{q}_Z$的最大值。

**定理 IV.2** (码距)。 定理 $C$ 中构造的复形*IV.1* 具有 $\alpha = X$， $Z$-型码距满足

$$d_\alpha(C) \geq \min(\chi_{\bar{\alpha}}, 2\chi_Q)\frac{1}{\mathfrak{w}_\alpha} d_\alpha(A) \tag{26}$$

其中 $\bar{\alpha}$ 是 $\alpha$ 的补指标，且 $d_\alpha(A)$ 是 $A$的$\alpha$-型距离。

**注释 3**。 如定义 II.1 中所述，通常预期

$$\chi_X, \chi_Z = \Theta(\mathfrak{w}_X\mathfrak{q}_X\mathfrak{w}_Z\mathfrak{q}_Z) \tag{27}$$
$$\chi_Q = \Theta(\mathfrak{w}_X\mathfrak{q}_X + \mathfrak{w}_Z\mathfrak{q}_Z) \tag{28}$$

因此，对于较大的权重 $\mathfrak{w}_X$， $\mathfrak{w}_Z = \Theta(\mathfrak{w})$ 以及量子比特度数 $\mathfrak{q}_X$， $\mathfrak{q}_Z = \Theta(\mathfrak{q})$，有 $\chi_Q \ll \chi_X$， $\chi_Z$，从而码距为

$$d(C) \geq \Theta(\mathfrak{q})d(A) \tag{29}$$

请注意，如注释 1 中所述，由于 $\chi_Q \ll \chi_X$， $\chi_Z$，这一关于码距的下界并不理想。

然而，这个下界可能只是我们证明中的一种假象。具体而言，当 $\chi_Q \ll \chi_X$， $\chi_Z$相对扩张系数 $\alpha \ll 1$ 如命题（A.3）所示。在这种情况下，参照 [26], 中的式（A26）—（A27）可知，清理引理中所用的不等式极不精确，尽管为了在 [26]中的式（A28）应用三角不等式，这一步又是必要的。

**注 4** （技术细节）。 在证明码距时，我们并未用到缺陷映射 $p^{ZX}$的详细结构。事实上，只要缺陷映射与粘合映射 $g^{ZQ}$相容， $g^{QX}$ 即满足式（11），定理 IV.1 和 IV.2 仍然成立，只是约化权重有所不同（不一定是式（24）中的 6 和 4）。直观而言，一致性条件足以确保 $p^{ZX}$ 不会引入新的（小）逻辑算符，而源自 $A$ 的逻辑算符则会因相对扩张而被“钉住”。

## V. 主要定理的证明

本节将详细证明我们的主要结果。

### A. 定理的证明(IV.1)

第一部分。我们首先校验拼接映射和缺陷映射是否满足相容性条件。事实上，

$$g^{QX}\partial^X|xjk\rangle = g^{QX}\sum_{s=\pm}|xjk^s\rangle \tag{30}$$
$$= \sum_{s=\pm}\sum_{q:q\sim x}|\eta(x)qk^s\rangle 1\{j=\eta(q)\} \tag{31}$$
$$= \partial^Q g^{QX}|x,j,k\rangle \tag{32}$$

因此， $g^{QX}$ 是一个链映射。对于 $g^{ZQ}$，情况类似。注意，

$$g^{ZQ}g^{QX}|xjk\rangle = g^{ZQ}\sum_{q:q\sim x}|\eta(x)qk\rangle 1\{j=\eta(q)\} \tag{33}$$
$$= \sum_{z,q:z\sim q\sim x}|\eta(x),\eta(q),z\rangle \times 1\{j=\eta(q),k=\eta(z)\} \tag{34}$$
$$= \sum_z |\eta(x),j,z\rangle 1\{k=\eta(z)\} \times \sum_q 1\{j=\eta(q), q\in x\wedge z\} \tag{35}$$

由诱导图（$\mathcal{Q}$， $\mathcal{E}_Q$），可见 $\eta$ 在 $x\wedge z$ 上是单射，因此

$$g^{ZQ}g^{QX}|x,j,k\rangle = \sum_z |\eta(x),j,z\rangle \tag{36}$$
$$1\{k=\eta(z)\}1\{j\in\eta(x\wedge z)\} \tag{37}$$

另外注意，

$$\partial^Z p^{ZX}|x,j,k\rangle = \sum_z 1\{k=\eta(z)\}1\{j\in\Gamma(x\wedge z)\} \times (|\eta(x),j,z\rangle + |\eta(x),j+1,z\rangle) \tag{38}$$

并且

$$p^{ZX}\partial^X|xjk\rangle = \sum_z 1\{k=\eta(z)\} (|\eta(x)jz\rangle 1\{j^-\in\Gamma(x\wedge z)\} + |\eta(x),j+1,z\rangle 1\{j^+\in\Gamma(x,z)\}) \tag{39}$$

注意，根据定义

$$1\{j\in\Gamma(x\wedge z)\} + 1\{j^-\in\Gamma(x\wedge z)\} = 1\{j\in\eta(x\wedge z)\}$$
$$1\{j\in\Gamma(x\wedge z)\} + 1\{j^+\in\Gamma(x\wedge z)\} = 0 \tag{40}$$

Therefore, $g^{ZQ}g^{QX} = \partial^Z p^{ZX} + p^{ZX}\partial^X$ □

第二部分。 接下来我们校验嵌入复形恰好是 $A$。根据 K¨unneth 公式与引理（III.3），$H_2(C^X) \cong X$并且具有基 $[|x\rangle]$， $x\in\mathcal{X}$具有唯一表示

$$|x\rangle = \sum_{j,k}|x,j,k\rangle \tag{41}$$

类似地， $H_1(C^Q) \cong Q$ 并且具有基 $[|y\rangle]$， $y \in \mathcal{Q}$ 具有可能的（但不全面的）表示

$$|q\rangle = \sum_k |i,q,k\rangle \tag{42}$$

其中 $i \in [\chi_X]$ 任意。类似地， $H_0(C^Z) \cong Z$，其基为 $[|z\rangle]$, $z \in \mathcal{Z}$，可能的表示为

$$|z\rangle = |i,j,z\rangle \tag{43}$$

其中 $i \in [\chi_X]$， $j \in [\chi_Q]$ 任意。注意

$$[g^{QX}][|x\rangle] = [g^{QX}|x\rangle] \tag{44}$$

$$= \left[\sum_{j,k,q} |\eta(x),q,k\rangle 1\{j = \eta(q), q \sim x\}\right] \tag{45}$$

$$= \sum_y 1\{q \sim x\}[|q\rangle] \tag{46}$$

并且

$$[g^{ZX}][|q\rangle] = \left[g^{QX}\sum_k |i,q,k\rangle\right] \tag{47}$$

$$= \left[\sum_{k,z} |i,\eta(q),z\rangle 1\{k = \eta(z), z \sim q\}\right] \tag{48}$$

$$= \sum_z [|i,\eta(q),z\rangle] 1\{z \sim q\} \tag{49}$$

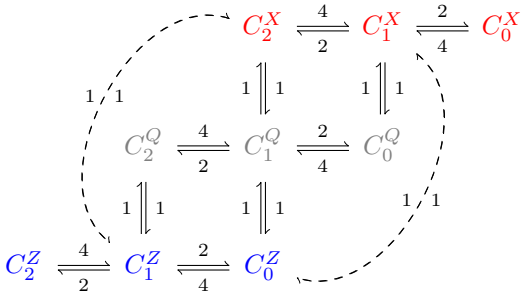
$$= \sum_z 1\{z \sim q\}[|z\rangle] \tag{50}$$

因此，嵌入复形（其自然诱导的基为 $[|x\rangle]$， $[|y\rangle]$， $[|z\rangle]$）恰好是 $= A$。由于 $C^X$， $C^Z$ 没有内部逻辑算子，即 $H_1(C^X) = H_1(C^Z)$，我们可知 $H_1(C) \cong H_1(A)$。 □

第三部分。 最后，让我们证明所构造复形 $C$ 的权重。根据定义（III.5）中概述的框架，我们考察微分的最大列权重和行权重

$$\partial = \begin{pmatrix} \partial^X & & \\ g^{QX} & \partial^Q & \\ p^{ZX} & g^{ZQ} & \partial^Z \end{pmatrix} \tag{51}$$

矩阵元的权重通过下图进行汇总




(52)

具体而言，对于任意 $\alpha = X, Q, Z$，我们有

$$\|\partial_2^\alpha\|_{\text{col}} \le 4, \quad \|\partial_1^\alpha\|_{\text{col}} \le 2 \tag{53}$$

注意

$$|g^{QX}|x,j,k_s\rangle| = \sum_q 1\{j = \eta(q), q \sim x\} \tag{54}$$

由诱导图 $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_Q)$ 可知， $\eta$ 在 $\{q$ 上是单射： $q \sim x\}$ 因此，对于 $i = 2, 1$，有 $\|g_i^{QX}\|_{\text{col}} \le 1$。类似地，注意到

$$|g^{ZQ}|i_s,q,k\rangle| = \sum_z 1\{k = \eta(z), z \sim q\} \tag{55}$$

由诱导图 $(\mathcal{Z}, \mathcal{E}_Z)$ 可知， $\eta$ 在 $\{z$ 上是单射： $z \sim y\}$ 因此，对于 $i = 2, 1$，有 $\|g_i^{ZQ}\|_{\text{col}} \le 1$。最后，注意到

$$|p^{ZX}|x,j_s,k\rangle| = \sum_z 1\{k = \eta(z)\}1\{j_s \in \Gamma(x \wedge z)\} \tag{56}$$

由诱导图 $(\mathcal{Z}, \mathcal{E}_Z)$ 可知，对于给定的$x$，着色映射 $\eta$ 在这样一组 $z$上是单射：它们的支撑与 $x$的支撑有非平凡交集，即 $x \wedge z \neq \emptyset$ 因此，对于 $i = 2, 1$，有 $\|p_i^{ZX}\|_{\text{col}} \le 1$。因此，

$$\|\partial_2\|_{\text{col}} \le 6, \quad \|\partial_1\|_{\text{col}} \le 4 \tag{57}$$

The maximum row weight is similarly derived. □

### B. 定理的证明(IV.2)

证明。类似于参考文献 [26]，中的定理 IV.2，可以通过修改参考文献 [26]中的清理引理的某些方面来证明该结论。然而，在本手稿中，我们提供了另一种途径，这一途径在定理 IV.2 之后曾被简要提及。具体而言，我们可以证明 $(\partial^X, g^{QX})$ 满足等周不等式/相对扩张性质[2], ，因而可以将清理引理作为黑箱应用。在参考文献 [26],中，选择前一种方法是为了优化距离下界中的 $\Theta(1)$ 因子，使其与传统层码构造中最初出现的因子相匹配 [18]。不过，由于它只是一个与 $\mathfrak{w}$， $\mathfrak{q}$无关的 $\Theta(1)$ 因子[3]，不妨看看替代方法如何与清理引理自然地衔接。

不失一般性，我们重点考虑 $d_X$，因为该构造关于 $X$ 和 $Z$对称。由命题（A.3），我们可知（$\partial^X$， $g^{QX}$）满足等周

[2] 另请参见参考文献 [27], ，其中该性质被称为系统扩张。[3] 事实上，前一种方法仅比后一种方法好 2 倍。

不等式/相对扩张，即对于每个 $s^X \in C_2^X$，都存在 $\hat{s}^X \in C_2^X$，使得 $\partial^X s^X = \partial^X \hat{s}^X$，从而

$$|\partial^X s^X| \geq \min\left(1, \frac{2\chi_Q}{\chi_Z}\right) \frac{1}{\mathfrak{w}_X} |g^{QX} s^X| \tag{58}$$

因此，根据文献 [26], 中的清理引理

$$d_X(C) \geq \min\left(1, \frac{2\chi_Q}{\chi_Z}\right) \frac{\chi_Z}{\mathfrak{w}_X} d_X(A) \tag{59}$$

$$= \min(\chi_Z, 2\chi_Q) \frac{1}{\mathfrak{w}_X} d_X(A) \tag{60}$$

其中，额外因子 $\chi_Z$ 利用了每个量子比特 layer $R_Q \otimes R_Z^\top$ has code distance $\geq \chi_Z$. □

**致谢**

ACY 受雇于 Iceberg Quantum，并获得马里兰州大学公园市 CMTC 物理科学实验室的支撑。DJW 获得澳大利亚研究理事会探索者早期职业研究奖（DE220100625）的支撑。本研究始于 NB 和 DJW 于 2024 年在贝纳斯克参加容错量子技术研讨会期间。

[1]D. Gottesman，在经典世界中作为量子计算机存续，教科书手稿预印本 **8**, 8 (2024). [2] D. Gottesman，具有恒定开销的容错量子计算，arXiv 预印本 arXiv:1310.2984 (2013). [3] P. Panteleev 和 G. Kalachev，渐近优良的量子码和局部可测试经典低密度奇偶校验码，载于 *Proceedings of the 55th Annual ACM SIGACT symposium on theory of computing* 2022 375 388 ( ) 第 – 页。[4] A. Leverrier 和 G. Z´emor，量子 Tanner 码，载于 *2022 IEEE 63rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)* 2022 872 883 (IEEE, ) 第 – 页。[5] I. Dinur、M.-H. Hsieh、T.-C. Lin 和 T. Vidick，具有线性时间解码器的优良量子低密度奇偶校验码，载于 *Proceedings of the 55th annual ACM symposium on theory of computing* 2023 905 918 ( ) 第 – 页。[6] M. B. Hastings，量子码的权重约简，arXiv 预印本 arXiv:1611.03790 (2016). [7] M. B. Hastings，论量子权重约简，arXiv 预印本 arXiv:2102.10030 (2021). [8] D. J. Williamson 和 T. J. Yoder，通过规范化逻辑算符实现低开销容错量子计算，arXiv 预印本 arXiv:2410.02213 (2024). [9] B. Ide、M. G. Gowda、P. J. Nadkarni 和 G. Dauphi- nais，通过同调测量实现容错逻辑测量，《物理评论X》**15**, 021088 (2025). [10] E. Sabo、L. G. Gunderman、B. Ide、M. Vasmer 和 G. Dauphinais，开销更低的权重约简稳定子码，《PRX Quantum》**5**, 040302 (2024). [11] J.-P. Tillich 和 G. Z´emor，具有正码率且最小距离与码长平方根成正比的量子低密度奇偶校验码，《IEEE 信息论汇刊》**60**, 1193 (2013). [12] N. Baspin 和 D. Williamson，线码，arXiv 预印本 arXiv:2410.10194 (2024). [13] M.-H. Hsieh、X. Li 和 T.-C. Lin，具有最优界的简化量子权重约简，arXiv 预印本 arXiv:2510.09601 (2025). [14] D. Horsman、A. G. Fowler、S. Devitt 和 R. Van Meter，通过晶格手术实现表面码量子计算，《新物理学杂志》**14**, 123011 (2012). [15] L. Z. Cohen、I. H. Kim、S. D. Bartlett 和 B. J. Brown，使用……实现低开销容错量子计算

长程连通性，《科学进展》8，eabn1717（2022年）。[16] A. Cross、Z. He、P. Rall 和 T. Yoder，《改进的 qLDPC 手术：逻辑测量与桥接码》，arXiv 预印本 arXiv:2407.18393（2024年）。[17] E. Swaroop、T. Jochym-O'Connor 和 T. J. Yoder，《量子低密度奇偶校验码之间的通用适配器》，《PRX Quantum》7，010324（2026年）。[18] D. J. Williamson 和 N. Baspin，《层码》，《自然·通讯》15，9528（2024年）。[19] A. Wills、T.-C. Lin 和 M.-H. Hsieh，《量子局部可检验码的权衡构造》，IEEE 信息论汇刊（2024年）。[20] S. J. S. Tan 和 L. Stambler，《高维 HGP 码及降权量子 LDPC 码的有效距离》，《Quantum》9，1897（2025年）。[21] A. C. Yuan、A. Cowtan、Z. He、T.-C. Lin 和 D. J. Williamson，《简约格点手术》（2026年）。[22] N. Baspin，《线性码中的组合结构》（2023年），arXiv:2309.16411 [cs.IT]。[23] S. Gu、L. Caha、S. H. Choe、Z. He、A. Kubica 和 E. Tang，《层码作为部分自修正量子存储器》，arXiv 预印本 arXiv:2510.06659（2025年）。[24] D. J. Williamson，《层码中的部分自修正》，arXiv 预印本 arXiv:2510.09218（2025年）。[25] C. Gidney、M. Newman、P. Brooks 和 C. Jones，《联结表面码》，《自然·通讯》16，4498（2025年）。[26] A. C. Yuan，《量子码嵌入的统一框架》，Phys. Rev. A 113，022438（2026年）。[27] N. Baspin、L. Berent 和 L. Z. Cohen，《量子 LDPC 码的快速手术》，arXiv 预印本 arXiv:2510.04521（2025年）。[28] T.-C. Lin、A. Wills 和 M.-H. Hsieh，《通过细分构造几何局域量子码和经典码》，arXiv 预印本 arXiv:2309.16104（2023年）。[29] M. Freedman 和 M. Hastings，《从量子码构造流形》，《几何与泛函分析》31，855（2021年）。

**附录 A：张量积保持相对扩张**

在本节中，我们将说明张量积保留了参考文献中清理引理所用的等周不等式/相对扩张 [26]（另见参考文献[27]）。论证基本遵循参考文献第5.4.1节中的相同步骤 [28],，并作了特定修改，以突出其与清理引理的联系。

**定义 A.1.** 设 $G = E \to V$ 表示一个带有（余）微分 $\delta = \partial^\top$的图复形。那么，如果对于任意 $s \in V$（顶点的子集），$G$是 $c$-**（余）扩张**的（次数0），

$$|\delta s| \geq \frac{2c}{|\mathcal{V}|}|s||\bar{s}| \tag{A1}$$

其中 $\bar{s}$ 是 $\mathcal{V}$中 $s$ 的补集（作为子集）。设 $V^\pi$是由顶点子集 $\mathcal{V}^\pi \subseteq \mathcal{V}$ 和$\iota$ 生成的空间：$V^\pi \to V$表示包含映射，$\pi = \iota^\top$ 表示投影。那么，如果对于任意 $s \in V$（顶点的子集），我们称 $G$ 是 $c^\pi$-**（余）扩张**的（次数0）**相对于** $\pi$

$$|\delta s| \geq \frac{c^\pi}{|\mathcal{V}^\pi|}(|\pi s||\bar{s}| + |s||\pi\bar{s}|) \tag{A2}$$

注意,$\overline{\pi s}(= \pi\bar{s})$是 $\mathcal{V}^\pi$中的补集（作为子集）。

**注5.** 注意 $\delta s = \delta\bar{s}$，并且由于 $\max(|s|, |\bar{s}|) \geq |\mathcal{V}|/2$，我们看到余扩张蕴含扩张性质，即存在$\hat{s}$，使得 $\delta s = \delta\hat{s}$

$$|\delta s| \geq c|\hat{s}| \tag{A3}$$

虽然相对余扩张蕴含相对扩张性质，即存在$\hat{s}$，且有 $\delta s = \delta\hat{s}$ 使得

$$|\delta s| \geq c^\pi \frac{|\mathcal{V}|}{|\mathcal{V}^\pi|}|\pi\hat{s}| \tag{A4}$$

证明。余扩张性质是显然的，因此我们将注意力限制于相对余扩张。注意存在$\hat{s} = s$ 或 $\bar{s}$，使得 $|\pi\hat{s}| \leq |\mathcal{V}^\pi|/2$。不失一般性，假设$\hat{s} = s$，从而我们有

$$\begin{aligned} |\pi s||\bar{s}| + |\overline{\pi s}||s| &= |\pi s|(|\mathcal{V}| - |s|) + (|\mathcal{V}^\pi| - |\pi s|)|s| && \text{(A5)} \\ &= |\pi s||\mathcal{V}| + (|\mathcal{V}^\pi| - 2|\pi s|)|s| && \text{(A6)} \\ &\geq |\mathcal{V}||\pi s| && \text{(A7)} \end{aligned}$$

□

**注6.** 将 $s \in V$ 视为映射 $s : \mathcal{V} \to \mathbb{F}_2$，注意到

$$|\delta s| = \sum_{e=xy\in\mathcal{E}} |s(x) - s(y)| \tag{A8}$$

$$2|s||\bar{s}| = \sum_{x,y\in\mathcal{V}} |s(x) - s(y)| \tag{A9}$$

$$|\pi s||\bar{s}| + |s||\pi\bar{s}| = \sum_{x\in V^\pi, y\in V} |s(x) - s(y)| \tag{A10}$$

**例A.1**（切格）. 设 $G$ 是一个切格常数为 $h$的图复形。那么 $G$是 $h/2$-余扩张的，并且相对于平凡投影 $\pi$: $V \to 0$， $\infty$-余扩张。

**例A.2**（重复）。令 $R = R(L)$表示 $L$ 比特上的重复码。则 $R$ 是 $2/L$-余扩张的，并且相对于到 $w$个顶点上的投影 $\pi$ 是 $1/L$-余扩张的，例如 $\{|1\rangle, ..., |w\rangle\} \subseteq R_0$

证明。若 $\delta s = 0$，则 $s$ 或 $\bar{s}$ 是平凡的 $= 0$，从而该不等式对（余）扩张和关系（余）扩张均成立。因此，考虑 $\delta s \neq 0$的情形。注意 $|s||\bar{s}| \leq (|s| + |\bar{s}|)^2/4 = L^2/4$，从而

$$|\delta s| \geq 1 \geq \frac{2}{L} \times \frac{2|s||\bar{s}|}{L} \tag{A11}$$

因此，重复码是 $2/L$-余扩张的。注意

$$\begin{aligned} |\pi s||\bar{s}| + |s||\pi\bar{s}| &\leq w(|\bar{s}| + |s|) && \text{(A12)} \\ &\leq wL && \text{(A13)} \end{aligned}$$

因此，

$$|\delta s| \geq 1 \geq \frac{1}{L} \times \frac{1}{w}(|\pi s||\bar{s}| + |s||\pi\bar{s}|) \tag{A14}$$

因此，重复码相对于 $\pi$ 是 $1/L$-余扩张的。

□

给定带有投影 $\pi^A, \pi^B$ 的图复形 $G^A, G^B$，这些投影映射到若干子集上，张量积 $C = G^A \otimes G^B = C_2 \to C_1 \to C_0$ 是一个胞腔复形，因此也诱导出一个图复形 $C_1 \to C_0$。投影 $\pi^A$, $\pi^B$ 也诱导出一个投影 $\pi = \pi^A + \pi^B$，映射到子空间 $\pi^A V^A \otimes V^B \oplus V^A \otimes \pi^B V^B$ 上。因此，我们可以讨论以下内容。

**引理 A.2** (张量的扩张). 设图复形$G^A$ 是 $a$-余扩张的，且相对于投影 $\pi^A : V \to V^A$ 是 $a^\pi$-余扩张的。设 $G^B$ 具有类似的 $b$-余扩张和 $b^\pi$-相对余扩张性质。那么 $G^A \otimes G^B$ 是$c$-余扩张的（次数0），并且相对于 $\pi = \pi^A + \pi^B$ 是 $c^\pi$-余扩张的，其中

$$\begin{aligned} c &= \min(a, b) && \text{(A15)} \\ c^\pi &= \min(a, b, a^\pi, b^\pi) && \text{(A16)} \end{aligned}$$

此外，假设 $\pi^B$： $V^B \to 0$ 是平凡的，那么

$$c^\pi = \min(a^\pi, b) \tag{A17}$$

证明。设 $C = G^A \otimes G^B = C_2 \to C_1 \to C_0$ 为具有诱导图复形 $G = C_1 \to C_0 = E \to V$的胞腔复形。为简化记号，除非另有说明，记 $x, x' \in V^A$和 $y, y' \in V^B$。上标也记作 $x^\pi, x'^\pi \in \pi^A\mathcal{V}^A$， $y^\pi, y'^\pi \in$同理

$\pi^B\mathcal{V}^B$。注意，将 $s \in V$视为映射 $s\colon \mathcal{V} \to \mathbb{F}_2$时，我们有

$$
\begin{aligned}
|\delta s| &= \sum_{\langle xy,x'y'\rangle\in E} |s(xy) - s(x'y')| && \text{(A18)}\\
&= \sum_{y\in V^B}\sum_{xx'\in E^A} |s(xy) - s(x'y)| \\
&\quad + \sum_{x'\in V^A}\sum_{yy'\in E^B} |s(x'y) - s(x'y')| && \text{(A19)}\\
&\geq \frac{a}{|\mathcal{V}^A|}\sum_{y,x,x'} |s(xy) - s(x'y)| \\
&\quad + \frac{b}{|\mathcal{V}^B|}\sum_{x',y,y'} |s(x'y) - s(x'y')| && \text{(A20)}\\
&\geq \frac{c}{|\mathcal{V}|}\sum_{x,x',y,y'} (|s(xy) - s(x'y)| \\
&\quad + |s(x'y) - s(x'y')|) && \text{(A21)}\\
&\geq \frac{c}{|\mathcal{V}|}\sum_{xy,x'y'} |s(xy) - s(x'y')| && \text{(A22)}\\
&= \frac{2c}{|\mathcal{V}|}|s||\bar{s}| && \text{(A23)}
\end{aligned}
$$

其中我们用到了 $V = V^A \otimes V^B$这一事实。因此，它是$c$余扩张的。

由于 $\pi s$ 是投影，我们可以用 $s(x^\pi y)$代替 $(\pi s)(x^\pi y)$，$xy^\pi$也同理。注意，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x^\pi y,x'y'} |s(x^\pi y) - s(x'y')| \\
&\leq \sum_{x^\pi yx'y'} (|s(x^\pi y) - s(x'y)| + |s(x'y) - s(x'y')|) && \text{(A24)}\\
&= |\mathcal{V}^B|\sum_{x^\pi x'y} |s(x^\pi y) - s(x'y)| \\
&\quad + |\pi^A\mathcal{V}^A|\sum_{x'yy'} |s(x'y) - s(x'y')| && \text{(A25)}\\
&\leq |\mathcal{V}^B|\frac{|\pi^A\mathcal{V}^A|}{a^\pi}\sum_{xx'\in E^A,y} |s(xy) - s(x'y)| \\
&\quad + |\pi^A\mathcal{V}^A|\frac{|\mathcal{V}^B|}{b}\sum_{x',yy'\in E^B} |s(x'y) - s(x'y')| && \text{(A26)}
\end{aligned}
$$

对于 $xy^\pi$ 的情形也类似，因此

$$
\begin{aligned}
&\sum_{xy^\pi,x'y'} |s(xy^\pi) - s(x'y')| && \text{(A27)}\\
&\leq |\mathcal{V}^A|\frac{|\pi^B\mathcal{V}^B|}{b^\pi}\sum_{x,yy'\in E^B} |s(xy) - s(xy')| \\
&\quad + |\pi^B\mathcal{V}^B|\frac{|\mathcal{V}^A|}{a}\sum_{xx'\in E^A,y'} |s(xy') - s(x'y') && \text{(A28)}\\
& && \text{(A29)}
\end{aligned}
$$

因此，

$$
|\pi s||\bar{s}| + |\pi\bar{s}||s| \leq \frac{|\pi\mathcal{V}|}{c^\pi}|\delta s| \qquad \text{(A30)}
$$

□

**命题 A.3** (正方形)。令 $R = R(L)$ 表示定义在 $L$比特上的重复码。那么，$R(L_1) \otimes R(L_2)$ 的诱导图是 $c$余扩张的，并且相对于投影 $\pi$： $R_0(L_1) \otimes R_0(L_2) \mapsto W \otimes R_0(L_2)$是 $c^\pi$余扩张的，其中 $W \subseteq R_0(L_1)$由 $w$ 个顶点张成，例如，$\{|1\rangle, ..., |w\rangle\}$ 和

$$
c = \frac{2}{\max(L_1, L_2)} \qquad \text{(A31)}
$$

$$
c^\pi = \frac{1}{L_1}\min\left(1, \frac{2L_1}{L_2}\right) \qquad \text{(A32)}
$$

特别地，对于任意 $s \in R_0 \otimes R_0$，存在 $\hat{s}$，使得$\delta s = \delta\hat{s}$，满足

$$
|\delta s| \geq \min\left(1, \frac{2L_1}{L_2}\right)\frac{1}{w}|\pi\hat{s}| \qquad \text{(A33)}
$$

证明。根据引理 A.2，可知 $c$，$c^\pi$ 成立。特别地，存在 $\hat{s}$，使得 $\delta s = \delta\hat{s}$ 满足

$$
\begin{aligned}
|\delta s| &\geq c^\pi\frac{|\mathcal{V}|}{2|\mathcal{V}^\pi|}|\pi\hat{s}| && \text{(A34)}\\
&\geq c^\pi\frac{L_1}{w}|\pi\hat{s}| && \text{(A35)}\\
&\geq \min\left(1, \frac{2L_1}{L_2}\right)\frac{1}{w}|\pi\hat{s}| && \text{(A36)}
\end{aligned}
$$

□

## 附录 B：Hastings 的量子权重约化

本节将利用参考文献 [7]中的框架，详细讨论 Hastings 关于量子权重约化的工作 [26]。粗略地说，Hastings 通过执行三个独立步骤来降低给定 CSS 码的权重： $X$-约化、 $Z$-加厚以及 Hastings 的锥化。前两个步骤相对直接，因此收录于命题 B.1 和 B.2中。Hastings 的锥化过程更为复杂，因此将单独讨论。我们还要指出，参考文献 [7] 中引理 8 的第 5 点存在一个小错误——请与命题 B47的公式（B.5）比较——这最终导致定理B.8中所述的约化权重高于 Hastings 最初声称的结果。

在本节中，为与 Hastings [7],的记号保持一致，我们采用如下约定：复形 $C = C_2 \to C_1 \to C_0$ 分别表示 $Z$-校验算子、量子比特和 $X$-校验算子——这与正文中的约定相反——并分别配备基 $\mathcal{C}_2$，$\mathcal{C}_1$，$\mathcal{C}_0$。我们还将带有图的码的权重记为

$$
C_2 \underset{\mathfrak{q}_Z}{\overset{\mathfrak{w}_Z}{\rightleftharpoons}} C_1 \underset{\mathfrak{w}_X}{\overset{\mathfrak{q}_X}{\rightleftharpoons}} C_0 \qquad \text{(B1)}
$$

### 1. 约化与加厚

**命题 B.1** （$X$-约简）。 设 $A$ 是一个权重为

$$Z \underset{\mathfrak{q}_Z}{\overset{\mathfrak{w}_Z}{\rightleftarrows}} Q \underset{\mathfrak{w}_X}{\overset{\mathfrak{q}_X}{\rightleftarrows}} X \tag{B2}$$

以及分别位于 $\mathcal{Z}$、$\mathcal{Q}$、$\mathcal{X}$ 中的基元素 $z$、$q$、$x$。令 $R(L) = E(L) \to V(L)$ 表示 $L$ 个顶点上的重复码。固定 $q$，并对每个 $x \sim q$，根据其顺序[4]，分配一个数 $1 \le i \le \mathfrak{q}_X$，从而定义一个单射映射 $x \mapsto (x; q)$。类似地，定义 $q \mapsto (q; x) \in \{1, , ..., \mathfrak{w}_X\}$。令 $C$ 通过以下粘合过程得到

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \swarrow^{p_2^{XZ}} & \downarrow g_2^{QZ} \\ & & V(\mathfrak{q}_X) \otimes Q \longrightarrow E(\mathfrak{q}_X) \otimes Q \\ & & \downarrow g_1^{XQ} \\ E(\mathfrak{w}_X) \otimes X & \longrightarrow & V(\mathfrak{w}_X) \otimes X \end{array} \tag{B3}$$

其中

$$g^{QZ}|z\rangle = \sum_{q \sim z} \mathcal{V}(\mathfrak{q}_X) \otimes |q\rangle, \quad \mathcal{V}(\mathfrak{q}_X) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{q}_X} |i\rangle \tag{B4}$$

$$g^{XQ}|i\rangle \otimes q = \sum_{x \sim q} 1\{i = (x; q)\} |(q; x)\rangle \otimes |x\rangle \tag{B5}$$

$$p^{XZ}|z\rangle = \sum_{z \sim x} \mathcal{E}(\mathfrak{w}_X)(z \wedge x; x) \otimes |x\rangle \tag{B6}$$

其中 $\mathcal{E}(\mathfrak{w}_X)(z \wedge x; x)$ 定义如下：注意，对于 $x \sim z$，公共量子比特 $x \wedge z$ 及其在 $q \mapsto (q; x)$ 中的像必须具有偶数基数，因而可以两两配对，使得 $\mathcal{E}(\mathfrak{w}_X)(z \wedge x; x)$ 表示每一对之间边的求和。于是，被称为 $A$ 的 $X$-约化码 的 $C$ 满足 $H_1(C) \cong H_1(A)$，其权重

$$C_2 \underset{\mathfrak{w}_Z \mathfrak{q}_X}{\overset{O(\mathfrak{w}_Z \mathfrak{w}_X \mathfrak{q}_X)}{\rightleftarrows}} C_1 \underset{3}{\overset{3}{\rightleftarrows}} C_0 \tag{B7}$$

证明。使用定义 III.5中的框架，我们可知

$$C^Z = Z \to 0 \to 0 \tag{B8}$$

$$C^Q = 0 \to R(\mathfrak{q}_X)^\top \otimes Q \tag{B9}$$

$$C^X = 0 \to R(\mathfrak{w}_X) \otimes X \tag{B10}$$

[4]例如，如果按照 $\mathcal{X}$ 中的顺序，$x < x'$ 与 $q$ 相邻，我们就将 $i = 1, 2$ 指派给 $x$，$x'$

注意，图（不包括虚线）显然是可交换的，因为其中没有正方形。因此，要证明 $C$ 是链复形，只需证明 $g^{XQ} g^{QZ} = \partial^X p^{XZ}$，其中我们用 $\partial^Z, \partial^Q, \partial^X$ 表示各层的微分。事实上，注意到

$$g^{XQ} g^{QZ} |z\rangle = \sum_{q \sim z} \sum_{x \sim q} |(q; x)\rangle \otimes |x\rangle \tag{B11}$$

$$= \sum_{x \sim z} \left( \sum_{q \in x \wedge z} |(q; x)\rangle \right) \otimes |x\rangle \tag{B12}$$

并且

$$\partial^X p^{XZ} |z\rangle = \sum_{x \sim x} \left( \partial^{R(\mathfrak{w}_X)} \mathcal{E}(\mathfrak{w}_X)(z \wedge x; x) \right) |x\rangle \tag{B13}$$

$$= g^{XQ} g^{QZ} |z\rangle \tag{B14}$$

其中我们利用了以下事实： 弦在 $\mathcal{E}(\mathfrak{w}_X)(z \wedge x;\ x)$ 的边界恰好是 $x \wedge z$ 在映射 $q \mapsto (q;\ x)$ 下的像。很容易验证，嵌入列码为 $A$，因此根据定理 III.6，我们可知 $H_1(C) \cong H_1(A)$。最后，所构造码的权重 $C$ 由下图给出

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \swarrow^{\mathfrak{w}_X \mathfrak{q}_Z} \quad \searrow^{\mathfrak{w}_Z \mathfrak{q}_X \mathfrak{w}_X} & \\ & & \mathfrak{q}_Z \Big\| \mathfrak{w}_Z \mathfrak{q}_X \\ & & V(\mathfrak{q}_X) \otimes Q \underset{2}{\overset{2}{\rightleftarrows}} E(\mathfrak{q}_X) \otimes Q \\ & & 1 \Big\| 1 \\ E(\mathfrak{w}_X) \otimes X & \underset{2}{\overset{2}{\rightleftarrows}} & V(\mathfrak{w}_X) \otimes X \end{array} \tag{B15}$$

具体而言，注意，如果 $g^{ZQ} = (g^{QZ})^\top$，对于 $g^{QX}$，$p^{ZX}$ 也同样成立，那么

$$g^{ZQ}|i\rangle|q\rangle = \sum_{z \sim q} |z\rangle \tag{B16}$$

$$g^{QX}|i\rangle|x\rangle = \sum_{q \sim x} 1\{i = (q; x)\} |(x; q)\rangle |q\rangle \tag{B17}$$

$$p^{ZX}|i^+\rangle|x\rangle = \sum_{z \sim x} 1\{|i^+\rangle \in \mathcal{E}(\mathfrak{w}_X)(z \wedge x; x)\} |z\rangle \tag{B18}$$

特别地，由于 $q \mapsto (q; x)$ 是单射，我们可知 $g^{QX}$ 的最大列重量为 1。

□

**命题 B.2** ($Z$-加厚，图 5)。 设 $A$ 是一个具有权重的 *CSS* 码

$$Z \underset{\mathfrak{q}_Z}{\overset{\mathfrak{w}_Z}{\rightleftarrows}} Q \underset{\mathfrak{w}_X}{\overset{\mathfrak{q}_X}{\rightleftarrows}} X \tag{B19}$$

以及基元素 $z$、$q$、$x$。设 $h\colon \mathcal{Z} \to \{1, ..., L\}$ 满足：对于任意固定的 $q$，它在 $\{z\colon\ z \sim q\}$ 上是单射，并令

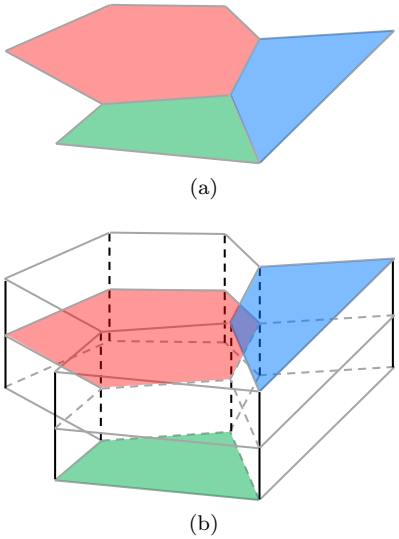



图 5. 加厚。(a) 描绘了一个胞腔复形 $G$，它对应于一个图，其生成简单环 $\mathcal{F}$ 已着色。(b) 描绘了针对 $L=3$ 加厚后的 $C$，其中原始环 $f\in\mathcal{F}$ 经由 $h$ 映射到不同高度。注意，在 (a) 中存在一条同时与红色和绿色面片相邻的边，而 (b) 中的任意边只能与红色或绿色面片之一相邻，因此通过巧妙选择高度函数降低了权重。

$C$ 可通过以下粘合过程得到

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \downarrow g_2^{QZ} \\ E(L)\otimes Q & \longrightarrow & V(L)\otimes Q \\ \downarrow g_2^{XQ} & & \downarrow g_1^{XQ} \\ E(L)\otimes X & \longrightarrow & V(L)\otimes X \end{array} \tag{B20}$$

其中 $g^{XQ}=\mathbb{I}\otimes\partial^A$ 且

$$g^{QZ}|z\rangle=\sum_{q\sim z}|h(z)\rangle\otimes|q\rangle \tag{B21}$$

则 $C$，称为 $A$ 的、具有高度 $h$ 的 $Z$-加厚码，满足 $H_1(C)\cong H_1(A)$ 并具有权重

$$C_2 \xleftarrow[\max(3,\mathfrak{w}_X)]{\max(\mathfrak{w}_Z,\mathfrak{q}_X+2)} C_1 \xleftarrow[\mathfrak{w}_X+2]{\max(\mathfrak{q}_X,2)} C_0 \tag{B22}$$

证明。使用定义中的框架III.5(其中 $Z\leftrightarrow X$ 已互换)，我们可知

$$C^Z=Z\to 0\to 0 \tag{B23}$$
$$C^Q=R(L)\otimes Q\to 0 \tag{B24}$$
$$C^X=0\to R(L)\otimes X \tag{B25}$$

注意

$$g^{XQ}g^{QZ}|z\rangle=g^{XQ}\sum_{q\sim z}|h(z)\rangle\otimes|q\rangle \tag{B26}$$
$$=\sum_x|h(z)\rangle\otimes|x\rangle\left[\sum_q 1\{z\sim q\sim x\}\right] \tag{B27}$$
$$=0 \tag{B28}$$

其中我们利用了如下事实：与 $x$、$z$ 相邻的公共量子比特必为偶数。容易校验 $A$ 是嵌入列码，因此由定理III.6，$C$ 是一个满足 $H_1(C)\cong H_1(A)$ 的复形。最后，权重由如下的图给出

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & {\scriptstyle 1}\Big\| \mathfrak{w}_Z \\ E(L)\otimes Q & \underset{2}{\rightleftharpoons} & V(L)\otimes Q \\ \mathfrak{w}_X\Big\| \mathfrak{q}_X & & \mathfrak{w}_X\Big\| \mathfrak{q}_X \\ E(L)\otimes X & \underset{2}{\rightleftharpoons} & V(L)\otimes X \end{array} \tag{B29}$$

具体而言，若 $g^{ZQ}=(g^{QZ})^\top$，则

$$g^{ZQ}|i\rangle\otimes|q\rangle=\sum_{z\sim q}1\{i=h(z)\}|z\rangle \tag{B30}$$

由于 $h$ 在 $\{z:z\sim q\}$ 上是单射，我们看到 $g^{ZQ}$ 的最大列重量为 1。□

**注 7**（高度的选择 $h$）。正如 Hastings[7], 所指出的，定义高度函数 $h$（以及厚度$L$）的一种方法是考虑由顶点 $\mathcal{Z}$ 和边 $zz'$ 构成的图[5]，其中若 $z$，$z'\sim q$ 则相连，对某个 $q$ 成立。令 $L$ 为色数，$h$ 为着色方案。那么 $L=O(\mathfrak{w}_Z\mathfrak{q}_Z)$，且对于任意 $q$，$h$ 在 $\{z:z\sim q\}$ 上是单射。

**注 8**（$\mathfrak{w}_Z$ 仍待证明）。设 $A$ 是一个权重为以下数值的 CSS 码

$$Z \underset{\mathfrak{q}_Z}{\overset{\mathfrak{w}_Z}{\rightleftharpoons}} Q \underset{\mathfrak{w}_X}{\overset{\mathfrak{q}_X}{\rightleftharpoons}} X \tag{B31}$$

应用 $X$-约化，方法如命题 B.1 所示，然后进行 $Z$-加厚，方法如命题B.2 所示。则所得复形 $C$ 的权重满足

$$C_2 \xleftarrow[3]{\max(O(\mathfrak{w}_Z\mathfrak{w}_X\mathfrak{q}_X),5)} C_1 \underset{5}{\overset{3}{\rightleftharpoons}} C_0 \tag{B32}$$

因此，下一步是对 $\mathfrak{w}_Z(C)$ 进行约化。注意，重复这一证明（参见图（B15）和（B29））

[5] 这与定义 II.1 中的情况不同

表明，基元素 $\mathcal{C}_2$ 可以划分为 $\mathcal{Z}$及其补集。补集中的基元素在 $C$中的权重 $\leq 5$较小，而 $\mathcal{Z}$ 中的基元素支撑大小 $O$较大（$\mathfrak{w}_Z\mathfrak{w}_X\mathfrak{q}_X$），因此目标是约化后者。

### 2. Hastings 的锥化

对于本小节，考虑任意 CSS 码 $A$及其权重（为简单起见，假设 $\geq 3$）

$$Z \underset{\mathfrak{q}_Z}{\overset{\mathfrak{w}_Z}{\rightleftharpoons}} Q \underset{\mathfrak{w}_X}{\overset{\mathfrak{q}_X}{\rightleftharpoons}} X \tag{B33}$$

受注记8启发，我们试图降低 $Z$型生成元的权重，因此考虑一个固定的 $z \in \mathcal{Z}$。

由于公共量子比特 $z \wedge x$ 具有偶数基数，可以将其分成若干对。令 $\mathcal{E}^{z\wedge x}$ 表示这些对的集合 $|p,\ x;\ z\rangle$ 其中 $p = 1, \ldots\ldots |x \wedge z|/2$ 与$x \sim z$，并令 $E^z$ 表示由 $\mathcal{E}^z := \bigcup_x \mathcal{E}^{z\wedge x}$生成的 $\mathbb{F}_2$ 向量空间。令 $\mathcal{V}^z$ 表示所有$q \sim z$ 的集合——记为 $|q;\ z\rangle$ ——并令 $V^z$ 表示由 $\mathcal{V}^z$生成的那个。通过邻接矩阵 $|q;\ z\rangle \sim |p,\ x;\ z\rangle$ 定义复形 $G^z = E^z \to V^z$，若量子比特 $q$属于对应于 $|p,\ x;\ z\rangle$的对。

注意，$\mathcal{E}^z$ 中的每个 1-胞腔恰好与两个 0-胞腔相邻，因此诱导出一个图 $\mathcal{G}^z$，其边为 $\mathcal{E}^z$，顶点为 $\mathcal{V}^z$。注意，若 $\Omega^z$ 表示图 $\mathcal{G}^z$ 的连通分支 $\omega \subseteq \mathcal{V}^z$ 的集合，则 $H^0(G^z)$ 的一个自然基以这些连通分支[6] 为标记，且由下式给出

$$[\omega] = \left[\sum_{v\in\omega} v\right], \quad \omega \in \Omega^z \tag{B34}$$

其中我们也将 $\omega$ 视为 $V^z$ 中的一个元素。

因此，目标是使用粘合构造，并将 $z$ 替换为与连通分支[7]相对应的 $H^0(G^z)$的基。更具体地说，一个支撑在与 $\mathcal{V}^z$相对应的量子比特上的 $Z$型泡利算符，被替换为多个 $Z$型泡利算符，每一个都支撑在与 $\mathcal{V}^z$的一个不同分支相对应的量子比特上，因此必然具有更小的支撑[8]。然而，请注意，$G^z$ 可能具有内部逻辑算符，即 $H^1(G^z) \cong H_1(G^z) \neq 0$，因为可能在图 $\mathcal{G}^z$中存在环，因此为了去除内部逻辑算符，我们通过纳入生成环的基来扩充复形 $G^z$。更具体地说，考虑以下引理

**引理 B.3** (去拥塞 [7, 29])。设 $\mathcal{G} = (\mathcal{E}, \mathcal{V})$ 是任意图。则存在一个由 $\mathcal{G}$ 中简单环组成的基 $\mathcal{F}$，其总权重——边数——为 $O(|\mathcal{V}|\log|\mathcal{V}|)$，并且每条边在该基中至多出现 $O(\log^2|\mathcal{V}|)$ 次。

使用前一个引理，为 $\mathcal{G}^z$ 选择简单环基 $\mathcal{F}^z$，并令 $F^z =$ 张成 $\mathcal{F}^z$。然后，邻接性质定义了一个不含非平凡环的胞腔复形 $C^z = F^z \to E^z \to V^z$，即 $H_1(C^z) = 0$，以及权重

$$F^z \underset{O(\log^2\mathfrak{w}_Z)}{\overset{O(\mathfrak{w}_Z\log\mathfrak{w}_Z)}{\rightleftharpoons}} E^z \underset{\mathfrak{q}_X}{\overset{2}{\rightleftharpoons}} V^z \tag{B35}$$

接下来，对胞腔复形应用命题 $Z$所述的 - 加厚后B.2，我们得到权重

$$\boldsymbol{F}^z \underset{\mathfrak{q}_X}{\overset{O(\mathfrak{w}_Z\log\mathfrak{w}_Z)}{\rightleftharpoons}} \boldsymbol{E}^z \underset{\mathfrak{q}_X+2}{\overset{2}{\rightleftharpoons}} V(L)\otimes V^z \tag{B36}$$

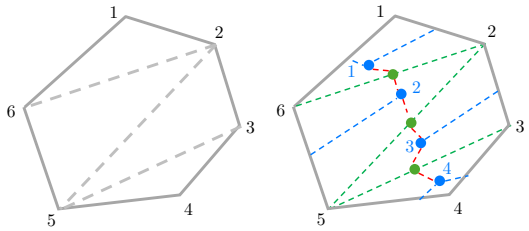
因此，我们剩下的工作是移除大权重环 $f$。如图6所示，这可以通过胞腔分解实现，具体形式化如下引理。

**引理 B.4** (胞腔分解，图 6)。设 $C = F \to E \to V$是一个带权重的胞腔复形

$$F \underset{\mathfrak{q}}{\overset{\mathfrak{w}}{\rightleftharpoons}} E \underset{\Delta(C)}{\overset{2}{\rightleftharpoons}} V \tag{B37}$$

那么，存在胞腔复形 $C' = F' \to E' \to V'$，使得 $H_s(C') \cong H_s(C)$ 对于 $s = 0$、1、2 和 $V' = V$均成立，且具有权重

$$F' \underset{\mathfrak{q}}{\overset{3}{\rightleftharpoons}} E' \underset{\Delta(C)(1+2\mathfrak{q})}{\overset{2}{\rightleftharpoons}} V' \tag{B38}$$




(a) (b)

图 6. 胞腔分解。(a) 灰线表示一个简单圈。虚线表示添加的边，这些边对简单圈进行胞腔分解。(b) 表示重复码的邻接关系 $R(f)$以及图中所描绘的原始圈，见式（B39）。

[6] 重复码 $R$ 也可以类似地视为一个图，因此可以与引理III.3进行比较。
[7] 在此过程中，一个连通分支可能会诱导出一个逻辑算符。然而，这样的逻辑算符的权重会小于校验权重。在 Hastings 的表述中，这种可能性被 *unreasonable*，因此一开始便被排除在外。我们还采取了额外措施来处理不合理的码 [7],；本附录不考虑这些码，因为主要目的是展示正确的约化权重。[8] 从技术上说，校验 $z$ 的支撑只有在给定微分、从而确定 $q \sim z$ 的数量时才有定义。因此，直观上，我们之后会给出一个微分，使得某个连通分支中的顶点构成 $H^0(G^z)$中相应基元素的支撑

证明。对于每个简单圈/面 $f \in \mathcal{F}$，通过 1，...， $N$标记顶点，并令 $R(f)$ 表示定义在 $n = \lceil (N+1)/2 \rceil$ 个顶点上的重复码，这些顶点由 $|j$标记； $f\rangle$ 和边$|j^+$； $f\rangle$，其中 $j^+ = j + 1/2$。令 $R(F) = E(F) \to V(F)$ 表示 $R(f)$ $f \in \mathcal{F}$的直和。如图 6 所示，考虑按如下方式构造一个胞腔复形。

$$\begin{array}{ccc} V(F) & \longrightarrow & E(F) \\ \downarrow{\scriptstyle g^{QZ}} & & \\ E & \overset{p^{XZ}}{\searrow} & \\ \downarrow{\scriptstyle g^{XQ}} & & \\ V & & \end{array} \tag{B39}$$

这里， $g^{XQ} = \partial^G$ 和 $g^{QZ}$ 定义为将 $|j;\ f\rangle \in V(f)$ 映射到 $f$ 中端点为（回想一下 $n = \lceil (N+1)/2 \rceil$）的边

- $N, 1$ and $1, 2$ for $j = 1$
- $\ell, \ell+1$ if $j = 2\ell - 1 \neq 1, n$
- $N-\ell+1, N-\ell$ if $j = 2\ell \neq n$
- $n-1, n$ and $n, n+1$ if $j = n$

并且 $p^{XZ}$ 将边 $|j^+;\ f\rangle$ 映射到 $f$ 中由$\lceil j/2 \rceil + 1$ 和 $n - \lfloor j/2 \rfloor$标记的顶点。很容易校验 $g^{QZ}$， $g^{XQ}$， $p^{XZ}$ 满足相容性条件。于是权重为

$$\begin{array}{ccc} V(F) & \overset{2}{\underset{2}{\rightleftharpoons}} & E(F) \\ \mathfrak{q}\,\Big\|\,2 & & \\ E & & \\ \Delta(C)\,\Big\|\,2 & \overset{2\mathfrak{q}\Delta(C)}{\searrow} & \overset{2}{\Big\|} \\ V & & \end{array} \tag{B40}$$

具体来说， $V \to E(F)$ 之间虚线所示的权重，源于相邻于顶点 $v$ 的面 $f$ 数量的上界 $\mathfrak{q}\Delta(G)$；对于每个相邻环 $f$，一个顶点可以像图 6 中所示的那样与两条新添加的边相邻。 □

按照引理 B.4 中的描述，对式 (B36) 中的每个面进行三角剖分/胞腔剖分，使所得复形具有权重

$$\hat{\boldsymbol{F}}^z \underset{\mathfrak{q}_X}{\overset{3}{\rightleftharpoons}} \hat{\boldsymbol{E}}^z \underset{(\mathfrak{q}_X+2)(1+2\mathfrak{q}_X)}{\overset{2}{\rightleftharpoons}} V(L) \otimes V^z \tag{B41}$$

其中，面和边经过了修改，但顶点保持不变。关键结果是，相关的胞腔复形 $\boldsymbol{C}^z$ 的权重上界仅依赖于 $\mathfrak{q}_X$，且没有内部逻辑算符，

即， $H_1(\hat{\boldsymbol{C}}^z) = 0$，并且具有以下$H^0(\hat{\boldsymbol{C}}^z)$ 的自然基[9]（这里我们稍微滥用了记号）

$$[\omega] \equiv [\mathcal{V}(L)] \otimes \left[\sum_{v \in \omega} v\right], \quad \omega \in \Omega^z \tag{B42}$$

**命题 B.5** (Hastings 的锥化)。 设 $A$ 为一个 *CSS* 码，其权重（为简单起见，假定为 $\geq 3$）

$$Z \underset{\mathfrak{q}_Z}{\overset{\mathfrak{w}_Z}{\rightleftharpoons}} Q \underset{\mathfrak{w}_X}{\overset{\mathfrak{q}_X}{\rightleftharpoons}} X \tag{B43}$$

设 $\hat{}\,\boldsymbol{C}^Z \equiv \bigoplus \hat{}\,\boldsymbol{C}^z$ 为相关 $\hat{}\,\boldsymbol{C}^z$的直和，其定义见式 (B41)。接着考虑 $C$ 通过以下粘合过程得到

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\boldsymbol{V}}^Z & \longrightarrow & \hat{\boldsymbol{E}}^Z & \longrightarrow & \hat{\boldsymbol{F}}^Z \\ \downarrow{\scriptstyle g^{QZ}} & & & & \\ Q & & \overset{p^{XZ}}{\searrow} & & \\ \downarrow{\scriptstyle g^{XQ}} & & & & \\ X & & & & \end{array} \tag{B44}$$

其中 $g^{XQ} = \partial^A$ 和

$$g^{QZ}|l\rangle \otimes |q; z\rangle = 1\{l = 1\}|q\rangle \tag{B45}$$

$$p^{XZ}|l\rangle \otimes |p, x; z\rangle = 1\{l = 1\}|x\rangle \tag{B46}$$

其中 $p^{XZ}$仅在 $V(L) \otimes E^Z$ 上非平凡作用（参见图 (B20) 和式(B36)）。于是 $C$ 是一个复形，满足 $H_1(C) \cong H_1(C^{\mathfrak{g}})$，其中 $C^{\mathfrak{g}}$ 是嵌入的列复形，其权重为

$$C_2 \underset{\mathfrak{q}_Z}{\overset{(\mathfrak{q}_X+2)(1+2\mathfrak{q}_X)+1}{\rightleftharpoons}} C_1 \underset{\mathfrak{w}_X + \mathfrak{w}_X^2 \mathfrak{q}_Z/2}{\overset{\mathfrak{q}_X+1}{\rightleftharpoons}} C_0 \tag{B47}$$

证明。利用定义 III.5中的框架，我们可知

$$C^Z = (\hat{\boldsymbol{C}}^Z)^\top \tag{B48}$$

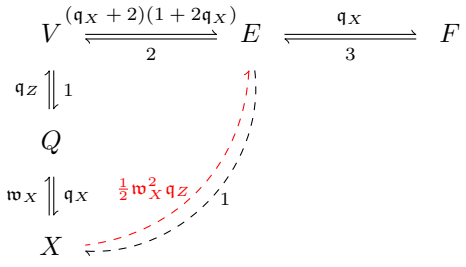
$$C^Q = 0 \to Q \to 0 \tag{B49}$$

$$C^X = 0 \to 0 \to X \tag{B50}$$

随后可以直接校验， $p^{XZ}\partial^Z = g^{XQ}g^{QZ}$，并且 $H_1(C) \cong H_1(C^{\mathfrak{g}})$。最后，权重

[9] 直观地说，这可从图 5看出：加厚只会通过 $\mathcal{V}(L)$ 改变连通分支，而细胞化不会改变连通性。

可由下图得出




(B51)

特别是，红色虚线表示，对于每个 $x \in \mathcal{X}$，最多有 $\mathfrak{w}_X \mathfrak{q}_Z$ 个 $z \sim x$，其中每个都有 $|x \wedge z|/2 \leq \min(\mathfrak{w}_X, \mathfrak{w}_Z)/2$ 对。由于我们预计 $\mathfrak{w}_Z$ 将如备注8中所述成为限制因素，因此记作 $|x \wedge z| \leq \mathfrak{w}_X/2$。Hastings 的引理 8 的第 5 点未考虑这一贡献 [7]。 □

请注意，与前面的命题不同，命题 B.5 中 $C$ 的嵌入列码并不完全等于 $A$。然而，如果我们比较前一个命题中的嵌入码 $C^{\mathfrak{g}}$ 与码 $A$，就会发现唯一的区别在于，基元素 $z \in \mathcal{Z}$ 被 $H^0(\hat{\boldsymbol{C}}^z) \cong H^0(C^z)$ 中的基元素取代，具体如公式 (B42) 所示。由于 $H^0(C^z)$ 的基元素与生成元 $z \in \mathcal{Z}$ 的连通分支相对应，因此很明显，经过适当的同构后，$H^0(C^z)$ 的基可以生成任意 $z$，所以剩下的问题是，$H^0(C^Z)$ 的每个基元素是否都能由 $\mathcal{Z}$ 生成。因此，Hastings 考虑了 [10] CSS 码，这些码是 $Z$ 型合理的，即不存在支撑包含于某个 $Z$ 型生成元支撑中的 $Z$ 型逻辑算符。因此，如果 $A$ 是合理的，那么 $H^0(C^z)$ 的基元素就不可能对应非平凡的逻辑 $Z$ 型算符。以下将更精确地概述这一讨论。

**命题 B.6**（合理码）。设 $A = Z \to Q \to X$ 是一个 *CSS* 码，且为 $Z$-型合理，即，若 $\ell^A$ 是一个非平凡的 $Z$-型逻辑算符，其属于 $A$，被视为 $Q$的子集，则 $\ell^A$ 不是 $\partial^A z$ 的子集，对任意$z \in \mathcal{Z}$。设 $C^{\mathfrak{g}}$ 是命题 *B.5* 中的嵌入码。则 $\operatorname{im} \partial_2^{\mathfrak{g}} = \operatorname{im} \partial_2^A$。特别地，

$$H_1(C^{\mathfrak{g}}) = H_1(A) \tag{B52}$$

证明。注意，对于分量 $\omega \in \Omega^z$

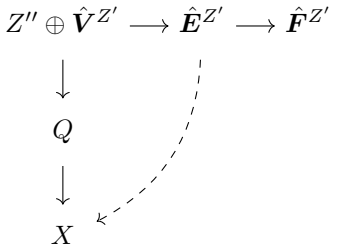
$$\partial^{\mathfrak{g}}[\omega] = \left[ g^{QZ} \mathcal{V}(L) \otimes \sum_q 1\{q \in \omega\} |q; z\rangle \right] \tag{B53}$$

$$= \sum_q 1\{q \in \omega\} |q\rangle \equiv \omega \tag{B54}$$

其中 $\omega$ 也通过自然同一化视为 $Q$ 中的一个元素。显然，若对所有连通分量 $\omega \in \Omega^z$求和，右端将是$\partial^A z$，因此 $\operatorname{im} \partial_2^A \subseteq \operatorname{im} \partial_2^{\mathfrak{g}}$。若 $\operatorname{im} \partial_2^A$是 $\operatorname{im} \partial_2^{\mathfrak{g}}$ 的真子集，则必存在某个 $\omega \in \Omega^z$ 以及某个 $z$，使得 $\omega \notin \operatorname{im} \partial_2^A$，因此 $\omega$ 是一个非平凡的 $Z$型逻辑算符（相对于 $A$），并且作为一个子集包含于 $\partial^A z$中。于是，我们得到了矛盾。

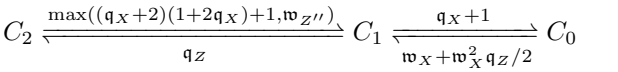
□

**注记 9**（部分 $Z$-型合理码）。也可以讨论这样的码 $A = Z \to Q \to X$，它们相对于某个子集是 $Z$-型合理，该子集为 $\mathcal{Z}' \subseteq \mathcal{Z}$。在此情形下，命题B.5中的构造应按如下方式修改。设 $\hat{\boldsymbol{C}}^{\mathcal{Z}'}$ 为相关联的 $\hat{\boldsymbol{C}}^z$（定义见式（B41））在所有 $z \in \mathcal{Z}'$上取的直和，并设 $Z'' =$ 张成 $\mathcal{Z}''$，其中 $\mathcal{Z}'' = \mathcal{Z} \backslash \mathcal{Z}$。然后考虑按如下方式构造的胞腔复形




(B55)

在这种情况下，$H_1(C) \cong H_1(A)$，而权重图由下式给出




(B56)

其中，$\mathfrak{w}_{Z''}$ 是相对于 $A$而言，$\mathcal{Z}''$ 中的校验算子的最大权重。

### 3. 最终结果

现在我们尝试结合命题B.1、B.2和B.5。首先注意到

**引理 B.7**。设 $A = Z \to Q \to X$ 是一个 $Z$型合理 *CSS* 码。

- 如果 $C$ 是 $A$的 $X$约化，那么 $C$ 是 $Z$型合理的。
- 如果 $C$ 是 $A$的 $Z$-加厚，那么 $C$ 相对于 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}_2$是 $Z$-型合理的。

证明。令 $C$ 为 $A$ 的 $X$-约化，使得 $\mathcal{C}_2 = \mathcal{Z}$ 通过图（B15）。假设 $C$ 不是 $Z$型合理的，因此存在非平凡的逻辑算符 $\ell^C \in C_1$，将其视为子集，则对于某个 $z \in \mathcal{Z}$，有 $\ell^C \subseteq \partial^C z$。注意，$\ell^C = \ell^Q \oplus \ell^X$ $\ell^Q \in V$ $\mathfrak{q}_X$ $\otimes Q$ $\ell^X \in$，其 $E$ $\mathfrak{w}_X$ $\otimes X$ $\partial^C \ell^C = 0$ $\delta^{R(\mathfrak{q}_X}$ $\ell^Q = 0$ 中（）和（）。由于，我们看到），

[10] Hastings 提出了另一种方法来规避这一问题，并去掉 $A$ 须为合理这一要求，但由于这并非本附录的主要目标，我们在此不作进一步详述。

因此 $\ell^Q$ 必定具有形式 $\mathcal{V}(\mathfrak{q}_X) \otimes \ell^A$，其中$\ell^A \in Q$。另请注意，

$$g^{XQ}\ell^Q = \sum_x \underbrace{\left( \sum_{\ell^A \ni q \sim x} |(q;x)\rangle \right)}_{} \otimes |x\rangle \tag{B57}$$

由于 $\partial^C \ell^C = 0$，我们看到，带下划线括号的项对于所有 $x \in \ell^A$ 都必须具有偶数基数。因此，$\partial^A \ell^A = 0$，从而 $\ell^A$ 是 $A$ 的 $Z$ 型逻辑算符。由于 $\ell^C \subseteq \partial^C z$ 对某个 $z$ 成立，我们看到 $\ell^A \subseteq \partial^A z$。由于 $\ell^C$ 是 $C$ 的非平凡逻辑算符，因此 $\ell^A$ 也是。这与 $A$ 是 $Z$ 型合理对象这一事实矛盾。

现在令 $C$ 为 $A$ 的 $Z$次加厚，使得 $\mathcal{Z}$ 通过图 $\mathcal{C}_2$ 自然地成为 B29 的子集。假设 $C$ 相对于 $\mathcal{Z}$并非$Z$型合理对象，因此存在非平凡逻辑算符 $\ell^C \in C_1$，将其视为子集时，$\ell \subseteq \partial^C z$ 对某个 $z \in \mathcal{Z}$成立。那么存在 $\ell^A \subseteq \partial^A z$ 使得

$$\ell^C = |h(z)\rangle \otimes \ell^A \tag{B58}$$

由于 $\partial^C \ell^C = 0$，我们可知 $\partial^A \ell^A = 0$，因此 $\ell^A$ 是一个 $Z$ 型逻辑算符。由于 $\ell^C$ 非平凡，$\ell^A$ 也非平凡，因此我们得到矛盾，因为 $A$ 是 $Z$ 型合理的。 □

**定理 B.8** (Hastings权重约化——修正版)。设 $A$ 是一个 $Z$ 型合理 *CSS* 码，其权重为

$$Z \underset{\mathfrak{q}_Z}{\overset{\mathfrak{w}_Z}{\rightleftharpoons}} Q \underset{\mathfrak{w}_X}{\overset{\mathfrak{q}_X}{\rightleftharpoons}} X \tag{B59}$$

令 $C$ 表示通过依次进行 $X$ 约化、$Z$ 加厚和 *Hastings* 锥化构造得到的链复形。则 $H_1(C) \cong H_1(A)$，并且 $C$ 的权重满足

$$Z \underset{3}{\overset{36}{\rightleftharpoons}} Q \underset{42}{\overset{4}{\rightleftharpoons}} X \tag{B60}$$

证明。根据注 8，从链复形 $D$ 经 $X$-约化和 $Z$-加厚开始，并采用注 7中所述的高度函数选择。如注 8所建议，将 $\mathcal{D}_2$ 划分为 $\mathcal{Z}$ 及其补集。由于$A$ 是 $Z$-型合理的，根据前一个引理可知，$D$ 相对于 $Z$也是 $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{D}_2$-型合理的。令 $C$ 为 Hastings锥，它由将每个 $z \in \mathcal{Z}$ 替换为其对应的胞腔复形 $\boldsymbol{C}^z$构造而成。由命题 B.5 和注 9 即可得证。

□