arXiv:2603.04888v1 [math.AG] 5 Mar 2026

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上循环覆盖的高阶 Chow 循环的构造，第二部分

YUSUKE NEMOTO 和 KEN SATO

ABSTRACT. 本文在一个与曲线积相关的曲面族上构造了 (2，1) 型高阶 Chow 循环。该曲面族是某些次数为 N 、在 $n+2$ 个点处分支的阿贝尔覆盖。我们通过计算这些循环在超越调节子映射下的像，证明对于非常一般的成员，这些循环生成不可分解部分中秩为 $\geq n \cdot \varphi(N)$ 的子群，其中 $\varphi(N)$ 是欧拉示性函数。

1. INTRODUCTION

在我们先前的工作中 [6], 我们在曲线积的超几何曲线商曲面的极小模型上构造了 (2，1) 型高阶 Chow 循环

$$y^N = x^A(1-x)^A(1-\lambda_1 x)^A \quad \text{and} \quad y^N = x^{N-A}(1-x)^{N-A}(1-\lambda_2 x)^{N-A}.$$

在某些条件下，我们用满足非齐次高斯超几何微分方程的特殊函数描述了这些循环在 Beilinson 调节子映射下的像。利用这些描述，我们证明，对于非常一般的 λ_1， λ_2，这些循环生成高阶 Chow 群不可分解部分中秩为$36 \cdot \varphi(N)$ 的子群，其中$\varphi(N)$ 是欧拉示性函数（同前文定理 7.5）。

本文旨在证明，对于由下列更一般形式的超几何曲线构造的曲面，也有类似的结果

$$y^N = (x-\lambda)^{a_0}(x-c_1)^{a_1}\cdots(x-c_n)^{a_n} \quad (\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \infty\}) \tag{1.1}$$

其中 c_1、c_2、……、$c_n \in \mathbb{C}$ 彼此不同。众所周知（参见 [1]），曲线（1.1）的周期可用 *Appell-Lauricella*超几何函数F_D（c_1，……，c_n，λ）来描述。由于 c_1，……，c_n是固定的，F_D（c_1，……，c_n，λ）作为 λ的函数，满足 *Jordan-Pochhammer*微分方程（见第 5.3节）。

本文考虑定义在（$\mathbb{P}^1\setminus\{c_1,\ldots,c_n,\infty\}$）^{2},的一个开子集 T_0 上的曲面族 S，其中纤维 S_t 在 $t =$ （λ_1， λ_2）$\in T_0$ 上是商曲面（（C_1）$_{\lambda_1}$ $\times$（C_2）$_{\lambda_2}$）$/\mu_N$的一个光滑模型，而（C_1）$_{\lambda_1}$，（C_2）$_{\lambda_2}$是由以下方程给出的超几何曲线的光滑模型

$$y_1^N = (x_1-\lambda_1)^A(x_1-c_1)^A\cdots(x_1-c_n)^A \quad \text{and}$$
$$y_2^N = (x_2-\lambda_2)^{N-A}(x_2-c_1)^{N-A}\cdots(x_2-c_n)^{N-A}.$$

N次单位根群 μ_N通过以下方式作用于 $C_1 \times C_2$

$$\zeta \cdot ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = ((x_1,\zeta^{-1}y_1),(x_2,\zeta y_2)), \quad \zeta \in \mu_N.$$

Date: 2026年3月6日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 14C25，19F27，33C65。
Key words and phrases. 高阶 Chow 循环；调节子映射；超几何曲线；Jordan-Pochhammer微分方程。

经过适当的 ´étale 基变换 $T \to T_0$后，我们可以用与 [6]类似的方法，在 S_t上构造一族 (2，1)-循环$\xi_{c_1}^{(i)}$，$\xi_{c_2}^{(i)}$，……，$\xi_{c_n}^{(i)}(i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$。在假设 gcd($N$，$A$) $=1$且 $(N+1)/(n+1) \leq A \leq (nN-1)/(n+1)$ 的条件下，我们证明以下定理。

THEOREM 1.1（定理 6.1）。对于非常一般的 $t \in T$，循环 $\xi_{c_1}^{(i)}$，$\xi_{c_2}^{(i)}$，……，$\xi_{c_n}^{(i)}$生成一个秩至少为 $n \cdot \varphi$（N） 的子群，该子群包含于 CH^2（S_t，1）$_{\mathrm{ind}}$中。特别地，我们有

$$\operatorname{rank} \mathrm{CH}^2(S_t, 1)_{\mathrm{ind}} \geq n \cdot \varphi(N).$$

这里，CH^2 （S_t，1）$_{\mathrm{ind}}$表示高阶 *Chow* 群CH^2（S_t，1）的不可分解部分 .

与以往的研究不同 [6] 和 [7], 本文不考虑该族的自同构，因为当 $\mathbb{P}^1 \setminus \{c_1, \ldots, c_n, \infty\}$且 $n \geq 3$和 c_1，……，c_n均为一般情形时，Aut($n=2$) 是平凡的。因此，在 [6], 这种情形下（这正是 定理 1.1 所主要考虑的情形），只能得到较弱的下界 rank CH^2（S_t，1）$_{\mathrm{ind}} \geq 2 \cdot \varphi$（$N$），低于 [6]中的主定理所得的下界。

证明思路与 [6] 中相同。我们使用超越调节子映射，它经由 $\mathrm{CH}^2(S_t, 1)_{\mathrm{ind}}$分解，因此只需计算由我们的循环在此映射下的像所生成的子群的秩。我们给出一个与 $(\xi_{c_j}^{(i)})_t$ 在超越调节子映射下的像相关联的正规函数 $\nu_{\mathrm{tr}}(\xi_{c_j}^{(i)})$ 的积分表示。随后，我们利用假设 $(N+1)/(n+1) \leq A \leq (nN-1)/(n+1)$，显式计算与典范相对2-形式 ω 的配对 $\langle \nu_{\mathrm{tr}}(\xi_{c_j}^{(i)}) \ \omega \rangle$ 。我们证明，该配对由一个局部全纯函数 $F_{i,\ j}$ 给出，该函数满足以下微分方程组

$$\begin{cases} \mathscr{D}_{\lambda_1}(F_{i,j}) = \dfrac{N(1-\zeta^A)\zeta^i}{(\lambda_2-\lambda_1)^{n-1}} \left(\dfrac{A}{N}\right)_{n-1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(2-n)_k}{(Nk+A)k!} \cdot \frac{(c_j-\lambda_2)^{\frac{Nk+A}{N}}}{(c_j-\lambda_1)^{\frac{Nk+A}{N}}} \\ \mathscr{D}_{\lambda_2}(F_{i,j}) = -\dfrac{N(1-\zeta^{-A})\zeta^i}{(\lambda_2-\lambda_1)^{n-1}} \left(\dfrac{N-A}{N}\right)_{n-1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(2-n)_k}{(Nk+N-A)k!} \cdot \frac{(c_j-\lambda_1)^{\frac{Nk+N-A}{N}}}{(c_j-\lambda_2)^{\frac{Nk+N-A}{N}}} \end{cases}$$

其中 $\mathscr{D}_{\lambda_i}$ 是 *Jordan-Pochhammer* 微分算子（见第 5.3 节）定义为

$$\mathscr{D}_{\lambda_i} = q_0(\lambda_i)\frac{\partial^n}{\partial \lambda_i^n} + p_{1,i}(\lambda_i)\frac{\partial^{n-1}}{\partial \lambda_i^{n-1}} + \cdots + p_{n,i}(\lambda_i)$$

而（α）$_k = \alpha$（$\alpha+1$）$\cdots$（$\alpha+k-1$）表示 Pochhammer 符号。由于关于 $S \to T$ 的族 ω 的周期函数均被 $\mathscr{D}_{\lambda_1}$，$\mathscr{D}_{\lambda_2}$所湮灭，因此局部全纯函数 $F_{i,\ j}$ 在模去周期后的全纯函数层中生成一个秩为 $n \cdot \varphi$（N）的子群。于是定理 1.1得证。

1.1. **本文概要**。在第2节中，我们定义曲面族 $S \to T$ 并固定一些记号。在第3节中，我们说明高阶 Chow 循环族$\xi_{c_j}^{(i)}$的构造，其针对 $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 以及 $j = 1$，……，n。在第4节中，我们说明用于计算调节子映射的拓扑 2-链的构造。在第5节中，我们回顾 Jordan-Pochhammer 微分算子，并证明该 Jordan-Pochhammer 微分算子是 $S \to T$的 Picard-Fuchs 微分算子。在第6节中，我们计算正规函数 ν_{tr}（$\xi_{c_j}^{(i)}$），并证明定理1.1。

1.2. **记号**。在本文中，我们固定整数 n, N，使其大于 1，并固定两两不同的复数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$。用 μ_N 表示 N 次单位根组成的群。

2. 曲面族

设 $R_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \infty\}$ 和 $A_0 = \mathbb{C}\left[\lambda, \underline{\frac{1}{\lambda - c_1}}, \underline{\frac{1}{\lambda - c_2}}, \ldots, \underline{\frac{1}{\lambda - c_n}}\right]$ 是 R_0 的坐标环。设 $f_i\colon C_i \to R_0 (i = 1, 2)$ 是一族光滑射影曲线，它是以下对象的光滑射影模型

$$y_1^N = (x_1 - \lambda)^{a_0}(x_1 - c_1)^{a_1} \cdots (x_1 - c_n)^{a_n} \quad \text{and}$$
$$y_2^N = (x_2 - \lambda)^{b_0}(x_2 - c_1)^{b_1} \cdots (x_2 - c_n)^{b_n}$$

其中 $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n \in \{1, \ldots, N-1\}$ 且 $\gcd(N, a_0, \ldots\ldots, a_n) = 1$。我们有由 $(x_i, y_i) \mapsto x_i$ 定义的自然态射 $C_i \to \mathbb{P}^1 \times R_0$。

令 T_0 为 $R_0 \times R_0$ 中由下式定义的 Zariski 开子集

$$T_0 = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in R_0 \times R_0 \mid \lambda_1 \neq \lambda_2\}$$

并令 B_0 为 T_0 的坐标环。我们有曲面族 $C_1 \times C_2 \to R_0 \times R_0$。对于它在 T_0 上的限制，我们仍使用相同的符号 $C_1 \times C_2$。

令 $\mathscr{L}$ 为 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times T_0$ 上由下式定义的线丛

$$\mathscr{L} = pr_1^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-k_1) \otimes pr_2^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-k_2)$$

其中，$pr_i\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times T_0 \to \mathbb{P}^1$ 是第 i个投影，而 k_1（分别为 k_2）是满足 $\sum_{i=0}^n a_i \leq k_1 N$（分别为 $\sum_{i=0}^n b_i \leq k_2 N$）的正整数。令 x_0, x_1（分别为 y_0, y_1）表示 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times T_0$的第一个（分别为第二个）$\mathbb{P}^1$因子的齐次坐标。令 h 为 $\mathscr{L}^{\otimes(-N)}$ 的整体截面，定义如下：

$$h = x_0^{a_\infty} y_0^{b_\infty} (x_1 - \lambda_1 x_0)^{a_0} (y_1 - \lambda_2 y_0)^{b_0} \prod_{j=1}^{n} (x_1 - c_j x_0)^{a_j} (y_1 - c_j y_0)^{b_j},$$

其中，$a_\infty = k_1 N - \sum_{i=0}^n a_i$ 且 $b_\infty = k_2 N - \sum_{i=0}^n b_i$。我们将$S$ 定义为与（$\mathscr{L}, h$）关联的次数为 N的循环覆盖，即 S是一个 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times T_0}$代数的相对谱$\bigoplus_{i=0}^{N-1} \mathscr{L}^{\otimes i}$。此处，环结构定义如下：

$$u \cdot v = \begin{cases} u \otimes v & (i + j < N) \\ u \otimes v \otimes h & (i + j \geq N) \end{cases}$$

其中，u 和 v 分别是 $\mathscr{L}^{\otimes i}$ 和 $\mathscr{L}^{\otimes j}$的局部截面。

令 $x = x_1/x_0$ 和 $y = y_1/y_0$ 表示 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times T_0$ 和$U =$上的非齐次坐标，并令 $\mathcal{B}_0[x, y] \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times T_0\,\mathrm{Spec}U =$为相应的仿射局部图。$S$ 的一个仿射模型由下式给出

$$z^N = (x - \lambda_1)^{a_0} (y - \lambda_2)^{b_0} \prod_{j=1}^{n} (x - c_j)^{a_j} (y - c_j)^{b_j} \tag{2.1}$$

并令 $S \to S$ 为奇点消解，使得对于每个 $t \in T$，$S_t \to S_t$ 都是S_t 的极小消解。群 μ_N 通过以下方式作用于 $C_1 \times C_2$：

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto ((x_1, \zeta^{-1} y_1), (x_2, \zeta y_2)), \quad \zeta \in \mu_N.$$

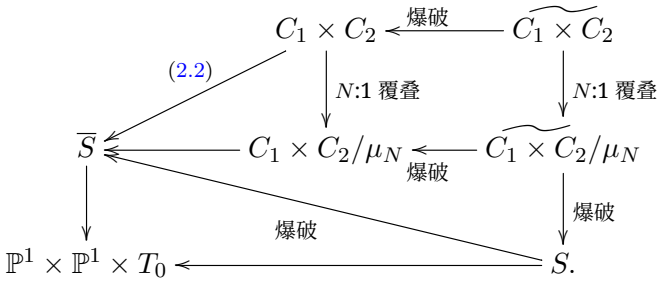
我们定义一个态射 $C_1 \times C_2 \to S$，如下：

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x, y, z) = (x_1, x_2, y_1 y_2). \tag{2.2}$$

于是，该态射下降为从商 $C_1 \times C_2/\mu_N$ 到$\widetilde{\qquad}$ $\widetilde{\qquad}S$ 的双有理态射。设 $C_1 \times C_2/\mu_N \to C_1 \times C_2/\mu_N$ 为一个奇点消解，$C_1 \times C_2$ 为纤维

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$在 $C_1 \times C_2/\mu_N$上的 $C_1 \times C_2$ 与 $C_1 \times C_2/\mu_N$的乘积。由于 $C_1 \times C_2/\mu_N$与$\widetilde{\quad}$$S$双有理，我们得到双有理映射 $C_1 \times C_2/\mu_N \dashrightarrow S$。此外，由于对每个 $t \in T$而言， $S_t \to S_t$ 都是极小的，该双有理映射是若干次爆破的复合。于是得到如下交换图：

(2.3)



在本文余下部分中，我们假设

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = A, \quad b_0 = b_1 = \cdots = b_n = N - A,$$

其中 A 是满足以下条件的正整数。

$$\gcd(N, A) = 1, \tag{2.4}$$

$$\frac{N+1}{n+1} \le A \le \frac{nN-1}{n+1}. \tag{2.5}$$

我们在 S 上定义局部图表。 $S \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times T_0$ 在 $U \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times T_0$ 下的逆像由两个开仿射子概形覆盖：

$$V = \operatorname{Spec} B_0[x, y, v]/(v^N f(x) - g(y)),$$
$$W = \operatorname{Spec} B_0[x, y, w]/(f(x) - w^N g(y)),$$

其中 $f(x) = (x - \lambda_1)(x - c_1) \cdots (x - c_n)$ 和 $g(y) = (y - \lambda_2)(y - c_1) \cdots (y - c_n)$。这两个子集通过关系 $v = 1/w$粘合。于是，从 $V \cup W$ 到2.1 的仿射模型S 的映射由下式给出：

$$V \to \overline{S}; \quad (x, y, v) \mapsto (x, y, z) = (x, y, v^{N-A}(x - \lambda_1)(x - c_1) \cdots (x - c_n)),$$
$$W \to \overline{S}; \quad (x, y, w) \mapsto (x, y, z) = (x, y, w^A(y - \lambda_2)(y - c_1) \cdots (y - c_n)).$$

根据这些方程，在 S上方的 x， y， $z = (c_i, c_j, 0) \in S (i = 1, \ldots, n)$ 上只有一条例外曲$\widetilde{\quad}$线，并将其记为 $Q_{(c_i,c_j)}$。

3. Construction of higher Chow cycles

3.1. 预备知识。设 X 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑簇，令 $\mathrm{CH}^2(X, 1)$ 为 Bloch [2] 定义的类型为 (2，1) 的高阶 Chow 群。众所周知（例如， [5, 推论 5.3]），$\mathrm{CH}^2(X, 1)$ 中的高阶 Chow 循环可表示为如下形式和

$$\sum_j (C_j, f_j) \tag{3.1}$$

其中 C_j 是 X 上的素除子， $f_j \in \mathbb{C}(C_j)^\times$ 是它们上的非零有理函数，并且 $\sum_j \operatorname{div}_{C_j}(f_j) = 0$ 作为余维二循环位于 X 上。

$\mathrm{CH}^2(X,1)$ 中的一个可分解循环是群同态的像中的一个元素

$$\mathrm{Pic}(X) \otimes \Gamma(X, \mathscr{O}_X^\times) = \mathrm{CH}^1(X) \otimes \mathrm{CH}^1(X, 1) \longrightarrow \mathrm{CH}^2(X, 1) \tag{3.2}$$

由交积所诱导。(3.2) 的余核记为 $\mathrm{CH}^2(X,1)_{\mathrm{ind}}$，称为 $\mathrm{CH}^2(X,1)$ 的不可分解部分。设 C 是 X 上的一个素除子，且 $[C] \in \mathrm{Pic}(X)$ 是对应于 C的类。 $[C] \otimes \alpha$ 的像在 (3.2) 下由 $(C, \alpha|_C)$ 表出，在表示 (3.1) 中。

3.2. **高阶 Chow 循环族的构造**。设

$$B = B_0 \left[\sqrt[N]{c_i - \lambda_1},\ \sqrt[N]{c_i - \lambda_2} \,\middle|\, i = 1, 2, \ldots, n \right]$$

和 $T \to T_0$ 是对应于 ′的有限 étale 覆盖 $B_0 \to B$。对于图式（2.3）中概形的基变换，我们使用相同的记号，其中基变换是沿着 $T \to T_0$进行的。设 $D \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times T$是由局部方程 $x = y$定义的不可约闭子概形。我们将 $Z \subset S$ 定义为 D在 $S \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times T$下的逆像的严格变换。在局部图表$V$上， $Z \hookrightarrow S$ 由以下环同态描述

$$B[x, y, v]/(v^N f(x) - g(y)) \to B[z, v]/(v^N (z - \lambda_1) - (z - \lambda_2)); \quad (x, y, v) \mapsto (z, z, v).$$

曲线 Z 和 $Q_{(c_j,c_j)}$ 在 N 点相交:

$$Q_{(c_j,c_j)} \cap Z = \{(x, y, v) = (c_j, c_j, \zeta^i \sqrt[N]{c_j - \lambda_2} / \sqrt[N]{c_j - \lambda_1}) \mid i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, j = 1, \ldots, n\}.$$

我们通过以下等式定义有理函数 $\psi_{c_j}^{(i)} \in \mathbb{C}(Z)$ 和 $\varphi_{c_j}^{(i)} \in \mathbb{C}(Q_{(c_j,c_j)})$（$i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$， $j = 1$，……，n）：

$$\psi_{c_j}^{(i)} = \left(v - \zeta^{i+1} \frac{\sqrt[N]{c_j - \lambda_2}}{\sqrt[N]{c_j - \lambda_1}} \right) \cdot \left(v - \zeta^i \frac{\sqrt[N]{c_j - \lambda_2}}{\sqrt[N]{c_j - \lambda_1}} \right)^{-1},$$

$$\varphi_{c_j}^{(i)} = \left(v - \zeta^{i} \frac{\sqrt[N]{c_j - \lambda_2}}{\sqrt[N]{c_j - \lambda_1}} \right) \cdot \left(v - \zeta^{i+1} \frac{\sqrt[N]{c_j - \lambda_2}}{\sqrt[N]{c_j - \lambda_1}} \right)^{-1}.$$

Definition 3.1. 对于 $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$和 $j = 1, \ldots, n$，我们定义高阶 Chow 循环 $(\xi_{c_j}^{(i)})_t \in \mathrm{CH}^2(S_t,1)$:

$$(\xi_{c_j}^{(i)})_t = (Z_t, \psi_{c_j}^{(i)}) + ((Q_{(c_j,c_j)})_t, \varphi_{c_j}^{(i)}),$$

其中 Z_t 和 $(Q_{(c_j,c_j)})_t$ 分别表示 Z 和 $Q_{(c_j,c_j)}$ 在 $t \in T$上的纤维。我们将高阶 Chow 循环族 $\{(\xi_{c_j}^{(i)})_t\}_{t \in T}$ 记为 $\xi_{c_j}^{(i)}$。

4. Computation of the regulator

本节中，我们计算这些循环在超越调节子映射下的像；该映射是 Beilinson 调节子映射的一种变体。

回忆一下，对于光滑射影簇 X，Beilinson 调节子是从 $\mathrm{CH}^2(X,1)$ 到 Deligne 上同调 $H^3_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{Q}(2))$ 的映射。超越调节子映射 是 Beilinson 调节子映射与由 $H^{2,0}(X) \hookrightarrow F^1H^2(X, \mathbb{C})$ 诱导的自然投影的复合。

$$r\colon \mathrm{CH}^2(X,1) \to H^3_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{Q}(2)) \simeq \frac{F^1H^2(X, \mathbb{C})^\vee}{H_2(X, \mathbb{Q})} \twoheadrightarrow \frac{H^{2,0}(X)^\vee}{H_2(X, \mathbb{Q})} \tag{4.1}$$

这里， $H^{2,0}(X)^\vee$ 表示 $H^{2,0}(X)$的对偶 $\mathbb{C}$-线性空间，并且通过积分，我们将 $H_2(X, \mathbb{Q})$视为 $F^1H^2(X, \mathbb{C})$的$\mathbb{Q}$-线性子空间$^\vee$。

4.1. **Levine 调节子公式**。 为了计算由形式和（3.1）表示的高阶 Chow 循环在超越调节子映射 r下的像，我们使用以下公式（参见 [4]）。为简单起见，我们假设 $H^1(X,\ \mathbb{Q})\ =0$。

令 $D_j \to C_j$ 为曲线 C_j 在 X 上的正规化。令 $\mu_j\colon\ D_j \to X$ 表示 $D_j \to C_j$ 与包含映射 $C_j \to X$ 的复合。我们将在 D_j 上定义一个拓扑 1-链 γ_j。若 f_j 为常数，则令 $\gamma_j = 0$。若 f_j 不是常数，则将 f_j 视为从 D_j 到 $\mathbb{P}^1$ 的有限态射。然后我们定义 $\gamma_j = f_j^{-1}([\infty,0])$，其中 $[\infty,0]$ 是 $\mathbb{P}^1$ 上沿正实轴从 ∞ 到 0 的一条路径。由条件 $\sum_j \mathrm{div}^{C_j}(f_j) = 0$，$\gamma = \sum_j (\mu_j)_*\gamma_j$ 满足 $\partial\gamma = 0$。本文将 γ 称为与 ξ 关联的 1-循环。由于 $H_1(X,\mathbb{Q}) = 0$，存在一个以 $\mathbb{Q}$ 为系数的 2-链 Γ，使得 $\partial\Gamma = \gamma$ 是以 $\mathbb{Q}$ 为系数的 1-循环。

于是，对于一个非零的全纯 2-形式 $\omega \in H^{2,\ 0}(X)$ 在 X上，我们可以计算$\xi = \sum_j (C_j,\ f_j)$ 在映射（ 4.1 ）下的像，结果为

$$\langle r(\xi), \omega\rangle \equiv \int_\Gamma \omega \mod \mathcal{P}(\omega), \tag{4.2}$$

其中 $\mathcal{P}(\omega)$ 是由下式定义的 $\mathbb{C}$ 的 $\mathbb{Q}$-线性子空间

$$\mathcal{P}(\omega) = \left\langle \int_\Gamma \omega \;\middle|\; \Gamma \text{ is a topological 2-cycles on } X \right\rangle_{\mathbb{Q}}, \tag{4.3}$$

也就是说，它是相对于 ω 的周期生成的 $\mathbb{Q}$-线性子空间。特别地，若 ξ 是可分解的，则 $r(\xi)$ $=0$。这推出以下结论。

Proposition 4.1. 超越调节子映射可经由 $\mathrm{CH}^2(X,1)_{\mathrm{ind}}$ 分解。

4.2. 拓扑链的构造。 在本节余下部分，我们固定一点 $t \in T$，也就是说，选取一点 $(\lambda_1,\ \lambda_2) \in T_0$，并固定一个分支

$$\sqrt[N]{c_j - \lambda_1},\quad \sqrt[N]{c_j - \lambda_2}\quad (j = 1,2,\dots,n). \tag{4.4}$$

我们将构造一个拓扑 2-链，用于计算我们的循环在超越调节子映射下的像。为了使用公式（4.2），我们应证明以下结论。

Proposition 4.2. 曲面 S_t 满足 $H^1(S_t,\mathbb{Q})\ =0$。

Proof. 我们有

$$H^1(S_t,\mathbb{Q}) = H^1(\widetilde{(C_1 \times C_2/\mu_N)_t},\mathbb{Q}) = H^1(\widetilde{(C_1 \times C_2)_t},\mathbb{Q})^{\mu_N} = H^1((C_1 \times C_2)_t,\mathbb{Q})^{\mu_N}.$$

这里我们用到以下事实：$(C_1 \times C_2)_t \to (C_1 \times C_2/\mu_N)_t$ 是商映射，且 H^1 在爆破下保持稳定。因此，只需证明 $H_1((C_1 \times C_2)_t,\mathbb{Q})^{\mu_N} = 0$。根据 K¨unneth 分解，只需验证在作用 $(x_i,y_i) \mapsto (x_i,\zeta y_i)$ 下，$H^1((C_i)_{\lambda_i},\mathbb{Q})$ 的不变部分为 0；这可由其在上同调上的作用的显式描述推出，详见 [1, 定理 6.2]。□

设 $j \in \{2,3,\dots,n\}$ 和 $l \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$。为构造一个拓扑 2-链，以计算 $(\xi_{c_j}^{(i+l)})_t - (\xi_{c_1}^{(i)})_t$ 在超越调节子映射下的像，我们固定一条光滑路径 γ_j^l：从 c_1 到 c_j 的 $[0,1] \to \mathbb{C}$（可能有自交点），并满足以下条件。

(i) γ_j^l除起点和终点外，不经过 λ_1、λ_2、c_1、..... c_n。(ii) 存在 $\varepsilon > 0$，使得对所有 $s < \varepsilon$，$\gamma_j^l(s) = c_1 + s$ 和 $\gamma_j^l(1-s) = c_j - s$ 均成立。

(iii) 沿着$z-\lambda_1$的 arg(/N的总变化 γ_j^l 与 arg($\sqrt[N]{c_j-\lambda_1}/\sqrt[N]{c_1-\lambda_1}$) 相同，其中 $\sqrt[N]{c_1-\lambda_1}$ 和 $\sqrt[N]{c_j-\lambda_1}$ 是(4.4)中的选定复数。换言之，函数 $\sqrt[N]{z-\lambda_1}$ 沿着γ_j^l 存在解析延拓，使得

$$\sqrt[N]{\gamma_j^l(0)-\lambda_1}=\sqrt[N]{c_1-\lambda_1}\quad\text{and}\quad\sqrt[N]{\gamma_j^l(1)-\lambda_1}=\sqrt[N]{c_j-\lambda_1}.$$

(iv) arg($z-\lambda_2$)/N沿 γ_j^l 的总变化与 arg($\zeta^l\cdot\sqrt[N]{c_j-\lambda_2}/\sqrt[N]{c_1-\lambda_2}$) 相同，其中 $\sqrt[N]{c_1-\lambda_2}$ 和 $\sqrt[N]{c_j-\lambda_2}$ 是在 (4.4) 中选取的复数。换言之，函数 $\sqrt[N]{z-\lambda_2}$ 沿 γ_j^l 存在解析延拓，使得

$$\sqrt[N]{\gamma_j^l(0)-\lambda_2}=\sqrt[N]{c_1-\lambda_2}\quad\text{and}\quad\sqrt[N]{\gamma_j^l(1)-\lambda_2}=\zeta^l\cdot\sqrt[N]{c_j-\lambda_2}.$$

我们固定函数 $\sqrt[N]{z-\lambda_1}$ 和 $\sqrt[N]{z-\lambda_2}$ 沿 γ_j^l 的分支，如条件 (iii) 和(iv)中所述。我们也固定函数 $\sqrt[N]{z-c_k}$沿 γ_j^l的分支，其中 $k=1$、2、.....、 n。

Let $\triangle=\{(s_1,\ s_2)\in\mathbb{R}^2\mid 0<s_2\le s_1<1\}$。对于 $i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，我们将映射 μ_j^l 定义为

$$\mu_j^l\colon\triangle\to V(\subset S_t);(s_1,s_2)\mapsto(x,y,v)=\left(\gamma_j^l(s_1),\gamma_j^l(s_2),\frac{\sqrt[N]{g(\gamma_j^l(s_2))}}{\sqrt[N]{f(\gamma_j^l(s_1))}}\right)$$

其中函数

$$\begin{aligned}\sqrt[N]{f(\gamma_j^l(s_1))}&=\sqrt[N]{\gamma_j^l(s_1)-\lambda_1}\cdot\sqrt[N]{\gamma_j^l(s_1)-c_1}\cdot\cdots\cdot\sqrt[N]{\gamma_j^l(s_1)-c_n},\\ \sqrt[N]{g(\gamma_j^l(s_2))}&=\sqrt[N]{\gamma_j^l(s_2)-\lambda_2}\cdot\sqrt[N]{\gamma_j^l(s_2)-c_1}\cdot\cdots\cdot\sqrt[N]{\gamma_j^l(s_2)-c_n}\end{aligned}\tag{4.5}$$

的定义 使用函数 $\sqrt[N]{z-c_k}$, $\sqrt[N]{z-\lambda_1}$ 和 $\sqrt[N]{z-\lambda}$的选定分支 $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }_2$.

对于 $i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，令 $\sigma^i\in\mathrm{Aut}(S_t)$ 为由 $(x,y,v)\mapsto(x,y,\zeta^i v)$ 定义的自同构。接着，我们将 $(K_j^l)^{(i)}$ 定义为 S_t 的紧子集，它是 $(\sigma^i\circ\mu_j^l)(\triangle)$的闭包。由于 $(K_j^l)^{(i)}$具有由 $\triangle$诱导的自然定向，我们将 $(K_j^l)^{(i)}$ 视为 S_t上的一个 2-链。通过考察 $\triangle$上对角线上的极限，我们看到

$$\left(c_1,c_1,\zeta^i\frac{\sqrt[N]{c_1-\lambda_2}}{\sqrt[N]{c_1-\lambda_1}}\right),\left(c_j,c_j,\zeta^{i+l}\frac{\sqrt[N]{c_j-\lambda_2}}{\sqrt[N]{c_j-\lambda_1}}\right)\in(K_j^l)^{(i)}.$$

于是我们得到如下结论。

Proposition 4.3. 对于每个 $\eta\in H^{2,0}(S_t)$，我们有

$$\langle r((\xi_{c_j}^{(i+l)})_t-(\xi_{c_1}^{(i)})_t),\eta\rangle\equiv\int_{(K_j^l)^{(i)}}\eta-\int_{(K_j^l)^{(i+1)}}\eta\mod\mathcal{P}(\eta).$$

Proof。 (K_j^l) 的边界由以下路径组成。参见图1。

(a) 路径 γ_x （相应地，γ_y）是$(K_j^l)^{(i)}$ 与由 $y=c_1$和 $v=0$ （相应地，$x=c_j$ 和 $w=0$）所定义的曲线的交。由于 γ_x 和γ_y 包含于 $S_t\to\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$的分歧轨迹中，它们不依赖于 $i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$。

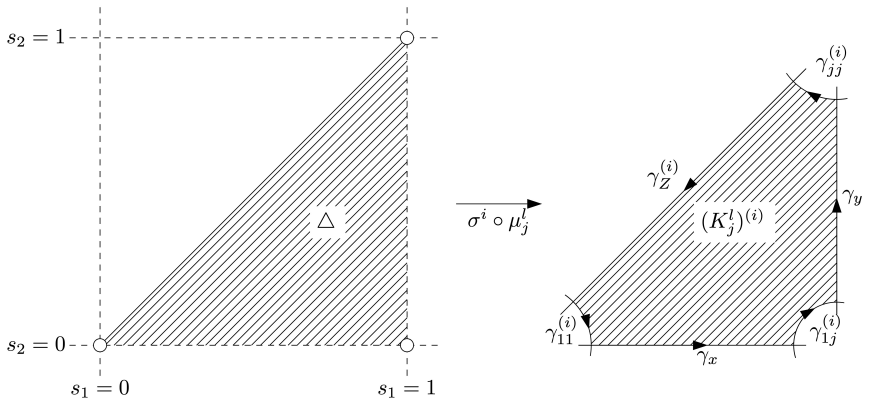


FIGURE 1. 拓扑 2-链 $(K_j^l)^{(i)}$

(b) 路径 $\gamma_Z^{(i)}$ 是 $\triangle$ 上的对角线在 $\sigma^i \circ \mu_j^l$ 下的像的闭包。它包含于曲线 Z_t 中，并且是从 $(x,y,v) = \left(c_j, c_j, \zeta^{i+l} \sqrt[N]{c_j - \lambda_2}\right)$ 到 $(x,y,v) = \left(c_1, c_1, \zeta^{i} \sqrt[N]{c_1 - \lambda_2}\right)$ 的一条路径。(c) 路径 $\gamma_{11}^{(i)}$（相应地，$\gamma_{jj}^{(i)}$，$\gamma_{1j}^{(i)}$）是 $(K_j^l)^{(i)}$ 与例外曲线 $(Q_{(c_1,c_1)})_t$（相应地，$(Q_{(c_j,c_j)})_t$，$(Q_{(c_j,c_1)})_t$）的交。

由于 $\gamma_{1j}^{(i)}$ 的起点和终点对于所有 $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 都相同，因此我们有 $\partial(\gamma_{1j}^{(i+1)} - \gamma_{1j}^{(i)}) = 0$。例外曲线 $(Q_{(c_j,c_1)})_t$ 同构于 $\mathbb{P}^1$，且 $H_1(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}) = 0$，因此存在一个 2-链 $\Gamma_{1j}^{(i)}$，位于 $(Q_{(c_j,c_1)})_t$ 上，使得 $\partial\Gamma_{1j}^{(i)} = \gamma_{1j}^{(i+1)} - \gamma_{1j}^{(i)}$。

令 $\widetilde{\gamma}_Z^{(i)}$（分别为 $\widetilde{\gamma}_{11}^{(i)}, \widetilde{\gamma}_{jj}^{(i+l)}$）为 Z_t 上（分别为 $(Q_{(c_1,c_1)})_t$，$(Q_{(c_j,c_j)})_t$ 上的 1-链，它是有理函数 $\psi_{c_j}^{(i+l)}$ 的 $(\psi_{c_1}^{(i)})^{-1} \in \mathbb{C}(Z_t)^\times$（分别为 $\left(\varphi_{c_1}^{(i)}\right)^{-1} \in \mathbb{C}((Q_{(c_1,c_1)})_t)^\times$，$\varphi_{c_j}^{(i+l)} \in \mathbb{C}((Q_{(c_j,c_j)})_t)^\times$ 将 $[\infty, 0]$ 拉回至 $\mathbb{P}^1$ 所得。于是 $\widetilde{\gamma}_Z^{(i)} + \widetilde{\gamma}_{11}^{(i)} + \widetilde{\gamma}_{jj}^{(i+l)}$ 是关联于 $(\xi_{c_j}^{(i+l)})_t - (\xi_{c_1}^{(i)})_t$ 的 1-循环。考察它们的起点和终点，我们有

$$\partial(\gamma_Z^{(i+1)} + \widetilde{\gamma}_Z^{(i)} - \gamma_Z^{(i)}) = 0,\ \partial(\gamma_{11}^{(i+1)} + \widetilde{\gamma}_{11}^{(i)} - \gamma_{11}^{(i)}) = 0 \text{ and } \partial(\gamma_{jj}^{(i+1)} + \widetilde{\gamma}_{jj}^{(i+l)} - \gamma_{jj}^{(i)}) = 0.$$

由于 Z_t，$(Q_{(0,0)})_t$ 和 $(Q_{(1,1)})_t$ 同构于 $\mathbb{P}^1$，因此我们分别在曲线 Z_t，$(Q_{(c_1,c_1)})_t$ 和 $(Q_{(c_j,c_j)})_t$ 上有 2-链 $\Gamma_Z^{(i)}$，$\Gamma_{11}^{(i)}$ 和 $\Gamma_{jj}^{(i)}$，使得

$$\partial\Gamma_Z^{(i)} = \gamma_Z^{(i+1)} + \widetilde{\gamma}_Z^{(i)} - \gamma_Z^{(i)},\ \partial\Gamma_{11}^{(i)} = \gamma_{11}^{(i+1)} + \widetilde{\gamma}_{11}^{(i)} - \widetilde{\gamma}_{11}^{(i)} \text{ and } \partial\Gamma_{jj}^{(i)} = \gamma_{jj}^{(i+1)} + \widetilde{\gamma}_{jj}^{(i+l)} - \gamma_{jj}^{(i)}.$$

由上述关系可得

$$\partial((K_j^l)^{(i)} - (K_j^l)^{(i+1)} + \Gamma_Z^{(i)} + \Gamma_{11}^{(i)} + \Gamma_{1j}^{(i)} + \Gamma_{jj}^{(i)}) = \widetilde{\gamma}_Z^{(i)} + \widetilde{\gamma}_{11}^{(i)} + \widetilde{\gamma}_{jj}^{(i+l)}.$$

因此，由公式（4.2），我们有

$$\langle r((\xi_{c_j}^{(i+l)})_t - (\xi_{c_1}^{(i)})), \eta\rangle = \int_{(K_j^l)^{(i)}} \eta - \int_{(K_j^l)^{(i+1)}} \eta + \int_{\Gamma_Z^{(i)}} \eta + \int_{\Gamma_{11}^{(i)}} \eta + \int_{\Gamma_{1j}^{(i)}} \eta + \int_{\Gamma_{jj}^{(i)}} \eta \tag{4.6}$$

对于每个 $\eta \in H^{2,0}(S_t)$。由于 η 是一个全纯 2-形式，它在 $(Q_{(c_1,c_1)})_t$、$(Q_{(c_j,c_j)})_t$、$(Q_{(c_j,c_1)})_t$ 以及 Z_t 上的限制均为零。因此，方程（4.6）中第三项之后的各项均为零。由此命题得证。□

5. Picard-Fuchs differential operator

本节中，我们固定 $S \to T$ 上的一个相对2-形式 ω，并求出一个*Picard-Fuchs* 微分算子 $\mathscr{D}$，也就是说，一个能够湮灭关于ω的周期函数的微分算子。正如引言中所述，Jordan-Pochhammer 微分算子成为 Picard-Fuchs 微分算子。

5.1. 周期函数层。设 T 是一个光滑簇，且 $\pi\colon X \to T$ 是一个相对维数为 d 的代数簇光滑射影族。对于 $p \geq 1$，我们固定一个相对代数 p-形式 $\eta \in \Gamma(X, \Omega^p_{X/T})$。对于 $t \in T$，$\eta_t \in H^0(X_t, \Omega^p_{X_t}) = H^{p,0}(X_t)$ 表示其在纤维 X_t 上的限制。

以下我们将 X 和 T 视为具有经典拓扑的复流形。设 $\mathscr{O}_T^{\mathrm{an}}$为 T 上的全纯函数层，且 $\mathbb{Q}(d)_X$ 为 X 上取值于 $\mathbb{Q}(d) = (2\pi i)^{-d}\mathbb{Q}$ 的常值层。那么，$R^{2d-p}\pi_*\mathbb{Q}(d)_X$ 是一个有限维 $\mathbb{Q}$-向量空间的局部系，其在 $U \subset T$ 上的局部截面对应于一族上同调类，这些上同调类属于 $H^{2d-p}(X_t, \mathbb{Q}(d))$，其中 $t \in U$。根据庞加莱对偶 $H^{2d-p}(X_t, \mathbb{Q}(d)) \simeq H_p(X_t, \mathbb{Q})$，$R^{2d-p}\pi_*\mathbb{Q}(d)_X$ 的局部截面可以用一族带有 $\mathbb{Q}$ 系数的 p-循环 $\{\Gamma_t\}_{t\in U}$ 来描述。于是我们可以定义一个层态射

$$R^{2d-p}\pi_*\mathbb{Q}(d)_X \to \mathscr{O}_T^{\mathrm{an}}; \quad \{\Gamma_t\}_{t\in U} \mapsto \left(t \mapsto \int_{\Gamma_t} \eta_t\right).$$

我们将此映射的像层记为 $\mathcal{P}(\eta)$，它由关于 η 的周期函数组成。

对于 $t \in T$ 以及 t 的一个开邻域 U，有一个自然的求值映射 $\Gamma(U, \mathscr{O}_T^{\mathrm{an}}) \to \mathbb{C}$; $f \mapsto f(t)$。这诱导出 $\mathbb{Q}$-线性映射 $\Gamma(U, \mathcal{P}(\eta)) \to \mathcal{P}(\eta_t)$，其中 $\mathcal{P}(\eta_t)$ 是第4.3节中定义的一个 $\mathbb{Q}$-线性子空间。因此，我们有求值映射

$$\Gamma(U, \mathscr{O}_T^{\mathrm{an}}/\mathcal{P}(\eta)) \to \mathbb{C}/\mathcal{P}(\eta_t) \tag{5.1}$$

对于 t 的任意开邻域 U。

5.2. 一个相对2-形式 ω 在 S 上。设 ω_1（分别为 ω_2）是 T 上 C_1（分别为 C_2）的相对 1-形式，定义如下：

$$\omega_1 = \frac{dx_1}{y_1} \quad \left(\text{resp. } \omega_2 = \frac{dx_2}{y_2}\right). \tag{5.2}$$

根据假设（2.5）（参见 [1, 第6节。1]），它们确实是 C_1 和 C_2 在 T 上的正则1-形式。我们有 T-态射

$$C_1 \times C_2 \xleftarrow{\text{blowing-up}} \widetilde{C_1 \times C_2} \xrightarrow{\text{generically } N:1} S.$$

令 $pr_i\colon C_1 \times C_2 \to C_i$ 为第 i 个投影。我们在 $C_1 \times C_2 \to T$ 上有相对2-形式 $pr_1^*(\omega_1) \wedge pr_2^*(\omega_2)$⌒。随后，其拉回到 $C_1 \times C_2$ 后在 $C_1 \times C_2 \to S$ 的覆盖变换⌒下保持不变，因此下降到 S。我们将由此得到的 S 上的相对2-形式记为 ω，其描述如下

$$\omega = \frac{dx \wedge dy}{v^{N-A} f(x)} = \frac{dx \wedge dy}{w^A g(y)} \tag{5.3}$$

分别在局部图表 V 和 W 上。

5.3. 微分算子 $\mathscr{D}$。我们将求出一个微分算子 $\mathscr{D}\colon \mathscr{O}_T^{\mathrm{an}} \to (\mathscr{O}_T^{\mathrm{an}})^{\oplus 2}$，它会消去 $\mathcal{P}(\omega)$ 的所有截面。我们的曲面族 S 的周期对应于超几何曲线族的直积 $C_1 \times C_2$。由于我们固定参数c_1，c_2，……，c_n，Jordan-Pochhammer 微分算子就是超几何曲线 $C_i \to R$的 Picard-Fuchs 微分算子。

对于复参数 r_0，r_1，……，$r_n \in \mathbb{C}$，*Jordan-Pochhammer* 微分算子L_λ关于变量 $\lambda \in R_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{c_1, \dots, c_n, \infty\}$的定义为（参见 [3, 18。4]）

$$L_\lambda = q_0(\lambda)\frac{d^n}{d\lambda^n} + p_1(\lambda)\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(\lambda)\frac{d}{d\lambda} + p_n(\lambda).$$

这里，多项式 $q_0(\lambda)$ 和 $p_k(\lambda)$（$k = 1$，2，……，n）定义如下：

$$\begin{aligned} q_0(\lambda) &= \prod_{j=1}^{n}(\lambda - c_j), \quad q_1(\lambda) = q_0(\lambda)\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j}{\lambda - c_j}, \\ p_k(\lambda) &= \binom{n + r_0 - 2}{k} q_0^{(k)}(\lambda) + \binom{n + r_0 - 2}{k - 1} q_1^{(k-1)}(\lambda) \quad (k = 1, \dots, n). \end{aligned} \tag{5.4}$$

其中，$\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ 表示 $\alpha \in \mathbb{C}$ 和$q^{(k)}(\lambda) = \dfrac{d^k q}{d\lambda^k}(\lambda)$ 的二项式系数。

以下引理不仅有助于计算 $C_i \to R_0$ 的周期，也有助于计算正规函数的微分。

LEMMA 5.1. 令 $H(\lambda, x)$ 为如下定义的多值函数：

$$H(\lambda, x) = -(r_0)_{n-1}(x - \lambda)^{-n+1-r_0}(x - c_1)^{1-r_1}\cdots(x - c_n)^{1-r_n}$$

其中，$(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1)\cdots(\alpha + n - 1)$ 表示 *Pochhammer* 符号。于是有

$$L_\lambda\left(\frac{1}{(x-\lambda)^{r_0}(x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_n)^{r_n}}\right) = \frac{\partial H(\lambda, x)}{\partial x}.$$

PROOF. 只需证明

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n}(r_0)_{n-k}\left\{\binom{n + r_0 - 2}{k} q_0^{(k)}(\lambda) + \binom{n + r_0 - 2}{k - 1} q_1^{(k-1)}(\lambda)\right\}(x - \lambda)^k \\ &\quad = (r_0)_{n-1}\left(\frac{n + r_0 - 1}{x - \lambda} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1 - r_j}{x - c_j}\right)(x - \lambda)(x - c_1)\cdots(x - c_n) \end{aligned} \tag{5.5}$$

其中我们视 $\binom{n + r_0 - 2}{-1} = 0$。由于 (5.5) 的两边都是关于 x、λ 的、次数至多为 n 的多项式，我们可以将它们唯一地展开为 $\sum_{k=0}^{n} h_k(\lambda)\, k!\, (x - \lambda)^k$ 的形式，其中每个 $h_k(\lambda)$ 都是关于 λ 的多项式。由于 $h_k(\lambda) = \dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\sum_{k=0}^{n} h_k(\lambda)(x - \lambda)^k\right)\Big|_{x=\lambda}$，我们将比较第 k 阶

偏导数关于 x 在 $x=\lambda$ 处，即两边 (5.5) 的。我们有

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\text{LHS of (5.5)})\Big|_{x=\lambda} = (r_0)_{n-k}\left\{\binom{n+r_0-2}{k} q_0^{(k)}(\lambda) + \binom{n+r_0-2}{k-1} q_1^{(k-1)}(\lambda)\right\} k!.$$

另一方面，由于（5.5）的右端为

$$(r_0)_{n-1}\left\{(n+r_0-1)q_0(x) + (x-\lambda)q_1(x) - (x-\lambda)q_0^{(1)}(x)\right\},$$

我们有

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\text{RHS of (5.5)})\Big|_{x=\lambda} = (r_0)_{n-1}\left\{(n+r_0-1)q_0^{(k)}(\lambda) + kq_1^{(k-1)}(\lambda) - kq_0^{(k)}(\lambda)\right\}.$$

比较两者，即得该引理。 □

利用 Jordan-Pochhammer 微分算子，我们将求出关于 ω 的 Picard-Fuchs 微分算子 $\mathscr{D}$，如下所示。

PROPOSITION 5.2. 设 ω 为（5.2）中的相对2-形式。设 $\mathscr{D}_{\lambda_1}$，$\mathscr{D}_{\lambda_2}$：$\mathscr{O}_T^{\mathrm{an}} \to \mathscr{O}_T^{\mathrm{an}}$为如下定义的微分算子

$$\mathscr{D}_{\lambda_1} = q_0(\lambda_1)\frac{\partial^n}{\partial\lambda_1^n} + p_{1,1}(\lambda_1)\frac{\partial^{n-1}}{\partial\lambda_1^{n-1}} + p_{2,1}(\lambda_1)\frac{\partial^{n-2}}{\partial\lambda_1^{n-2}} + \cdots + p_{n,1}(\lambda_1) \ \ and$$
$$\mathscr{D}_{\lambda_2} = q_0(\lambda_2)\frac{\partial^n}{\partial\lambda_2^n} + p_{1,2}(\lambda_2)\frac{\partial^{n-1}}{\partial\lambda_2^{n-1}} + p_{2,2}(\lambda_2)\frac{\partial^{n-2}}{\partial\lambda_2^{n-2}} + \cdots + p_{n,2}(\lambda_2),$$

其中，$p_{k,1}(\lambda)$（分别为 $p_{k,2}(\lambda)$）是 (5.4) 中针对 $r_0=r_1=\cdots=r_n=A$（分别为 $N-A$）的多项式 $p_k(\lambda)$。令 $\mathscr{D}=\begin{pmatrix}\mathscr{D}_{\lambda_1}\\ \mathscr{D}_{\lambda_2}\end{pmatrix}: \mathscr{O}_T^{\mathrm{an}} \to (\mathscr{O}_T^{\mathrm{an}})^{\oplus 2}$。那么，对于 $\mathcal{P}(\omega) \subset \mathscr{O}_T^{\mathrm{an}}$ 的任意局部截面 f，我们有 $\mathscr{D}(f)=0$。特别地，$\mathscr{D}$ 导出了态射 $\mathscr{O}_T^{\mathrm{an}}/\mathcal{P}(\omega) \to (\mathscr{O}_T^{\mathrm{an}})^{\oplus 2}$。

PROOF。根据引理 5.1，$\mathscr{D}_{\lambda_1}(\omega_1)$ 和 $\mathscr{D}_{\lambda_2}(\omega_2)$ 是 C_1 和 C_2上的恰当形式，即这些微分形式在 de Rham上同调中等于零。因此，对于 $i=1,2$，$\mathscr{D}_{\lambda_i}$消去 $\mathcal{P}(\omega_i)$（$\subset \mathscr{O}_T^{\mathrm{an}}$中相对于 ω_i生成的周期函数的局部截面。

根据 K¨unneth 分解，作为 $\mathscr{O}_T^{\mathrm{an}}$ 的子层，我们有

$$\mathcal{P}(\omega) = \mathcal{P}(\omega_1)\mathcal{P}(\omega_2)$$

其中右端是由 $\mathcal{P}(\omega_1)$ 与 $\mathcal{P}(\omega_2)$ 中函数的乘积所生成的 $\mathbb{Q}$-线性子层。因此该命题得证。

□

6. PROOF OF THE MAIN THEOREM

在本节中，我们证明如下定理。

THEOREM 6.1. 对于非常一般的 $t \in T$，高阶 *Chow* 循环$(\xi_{c_j}^{(i)})_t$在$\mathrm{CH}^2(S_t,1)_{\mathrm{ind}}$中生成一个秩为 $n\cdot\varphi(N)$ 的子群。特别地，我们有

$$\operatorname{rank}\mathrm{CH}^2(S_t,1)_{\mathrm{ind}} \geq n\cdot\varphi(N).$$

此处，φ（N）表示欧拉函数。

证明的关键在于计算闭链族 $\xi_{c_j}^{(i)}$ 在超越调节子映射下的像所关联的正规函数，并利用微分算子 $\mathscr{D}$ 在第5节中证明它们不恒为零。

6.1. 某些正规函数。 设 $X \to T$ 是一个代数曲面的光滑射影族。令 $\mathcal{Q}$ 为下列映射的余核。

$$R^2\pi_*\mathbb{Q}(2)_X \to \mathscr{H}om(\pi_*\Omega^2_{X/T}, \mathscr{O}_T^{\mathrm{an}}); \quad \{\Gamma_t\}_{t\in U} \mapsto \left(\eta \mapsto \left(t \mapsto \int_{\Gamma_t} \eta_t\right)\right)$$

注意，$\mathcal{Q}$ 是局部自由层除以一个由 $\mathbb{Q}$-向量空间构成的局部系所得的商。对于相对2-形式 $\eta \in \Gamma(X, \Omega^2_{X/T})$，有一个 $\mathbb{Q}$-线性层映射

$$\langle -, \eta\rangle \colon \mathcal{Q} \to \mathscr{O}_T^{\mathrm{an}}/\mathcal{P}(\eta).$$

由自然映射 $\mathscr{H}om(\pi_*\Omega^2_{X/T}, \mathscr{O}_T^{\mathrm{an}}) \to \mathscr{O}_T^{\mathrm{an}}$诱导。此外，对于 $t \in U$的一个开子集U，有求值映射 $\mathrm{ev}_t\colon \Gamma(U, \mathcal{Q}) \to H^{2,0}(X_t)^\vee/H_2(X_t, \mathbb{Q})$，它适合于下图。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U,\mathcal{Q}) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_t} & H^{2,0}(X_t)^\vee/H_2(X_t,\mathbb{Q}) \\ \downarrow{\scriptstyle \langle -,\eta\rangle} & & \downarrow{\scriptstyle \langle -,\eta_t\rangle} \\ \Gamma(U,\mathscr{O}_T^{\mathrm{an}}/\mathcal{P}(\eta)) & \xrightarrow{(5.1)} & \mathbb{C}/\mathcal{P}(\eta_t) \end{array}$$

下面这个初等引理对我们很重要。

LEMMA 6.2 ([6, 引理 2。4])。 对于非零元素 $\nu \in \Gamma(T, \mathcal{Q})$，有$\mathrm{ev}_t(\nu) \neq 0$，对非常一般的 $t \in T$ 成立。

设我们有 C_j 上的不可约除子 X，它们在 T 上光滑；以及 C_j 上的非零有理函数 f_j，其零点和极点在 T 上也光滑。假设它们满足条件 $\sum_j \mathrm{div}^{C_j}(f_j) = 0$。那么我们有一族高阶 Chow 循环$\xi = \{\xi_t\}_{t\in S}$，使得 $\xi_t \in \mathrm{CH}^2(X_t, 1)$ 可由形式和 $\sum_j((C_j)_t, (f_j)_t)$ 表示。在这种情况下，存在一个元素 $\nu_{\mathrm{tr}}(\xi) \in \Gamma(T, \mathcal{Q})$，使得

$$\mathrm{ev}_t(\nu_{\mathrm{tr}}(\xi)) = r(\xi_t) \tag{6.1}$$

其中 $r\colon \mathrm{CH}^2(X_t, 1) \to H^{2,0}(X_t)/H_2(X, \mathbb{Q})$ 是超越调节子映射（参见第4 节或 [6, 第2节。3]，详见论证）。元素 $\nu_{\mathrm{tr}}(\xi)$ 可视为循环族 ξ对应的一种正规函数。本文将明确计算满足条件（6.1）的 $\nu_{\mathrm{tr}}(\xi_{c_j}^{(i)})$。

6.2. 正规函数的计算。令 $t \in T$、$j \in \{2, 3, \ldots, n\}$和 $l \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$。取一条从 c_1 到 c_j、位于 $\mathbb{C}$ 上的路径 γ_j^l，使其满足第 4 节中的条件 (i)-(iv)。存在 t 的一个开邻域 U，使得对于任意 $t' \in U$，γ_j^l 都满足条件 (i)-(iv)。利用路径 γ_j^l，对于每个 $t' \in U$，我们可以在 $S_{t'}$上构造一个2-链 $(K_j^l)^{(i)}$。由于 γ_j^l在 U中是公共的，函数

$$U \ni t' \mapsto \int_{(K_j^l)^{(i)}} \eta_{t'} = \int_{\triangle} (\sigma^i \circ \mu_j^l)^* \eta_{t'}$$

对于每个相对2-形式 η，都定义了 U 上的一个全纯函数。因此，$\mathscr{O}_T^{\mathrm{an}}$-线性映射

$$\eta \mapsto \left(t' \mapsto \int_{(K_j^l)^{(i)}} \eta_{t'} - \int_{(K_j^l)^{(i+1)}} \eta_{t'} \right) \tag{6.2}$$

定义一个截面 $\nu_U \in \Gamma(U, \mathcal{Q})$。根据命题 4.3，我们有

$$\mathrm{ev}_{t'}(\nu_U) = r((\xi_{c_j}^{(i+l)})_{t'} - (\xi_{c_1}^{(i)})_{t'}) = \mathrm{ev}_{t'}\left(\nu_{\mathrm{tr}}(\xi_{c_j}^{(i+l)} - \xi_{c_1}^{(i)})\right)$$

对所有 $t' \in U$。于是根据引理 6.2，我们有 $\nu_U = \nu_{\mathrm{tr}}(\xi_{c_j}^{(i+l)} - \xi_{c_1}^{(i)})|_U$。因此，(6.2) 是 $\nu_{\mathrm{tr}}(\xi_{c_j}^{(i)} - \xi_{c_1}^{(i)})$ 的局部描述。

我们可以通过 $\nu_{\mathrm{tr}}(\xi_{c_j}^{(i)})$ 的式 (6.2) 来计算它们。为证明它们的非平凡性，我们考虑它们与第 ω 节中的相对2-形式 5.2的配对。根据命题 5.2，微分算子 $\mathscr{D}\colon \mathscr{O}_T^{\mathrm{an}} \to (\mathscr{O}_T^{\mathrm{an}})^{\oplus 2}$ 湮灭 $\mathcal{P}(\omega)$ 的所有局部截面。因此，$\mathscr{D}$ 诱导出 $\mathbb{Q}$-线性映射

$$\mathscr{D}\colon \mathscr{O}_T^{\mathrm{an}}/\mathcal{P}(\omega) \to (\mathscr{O}_T^{\mathrm{an}})^{\oplus 2} \tag{6.3}$$

我们将计算 $\langle \nu_{\mathrm{tr}}(\xi_{c_j}^{(i+l)} - \xi_{c_1}^{(i)})\ \omega\rangle$ 在映射 (6.3) 下的像。

LEMMA 6.3. 设 $t \in T$ 和 $(K_j^l)^{(i)}$ 是第 4.2 节中的拓扑 2-链。对于 $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，我们有

$$\int_{(K_j^l)^{(i)}} \omega_t = \zeta^{Ai} \int_{(K_j^l)^{(0)}} \omega_t.$$

PROOF。拓扑 2-链 $(K_j^l)^{(i)}$ 满足 $\sigma^i(K_j^l)^{(0)} = (K_j^l)^{(i)}$，其中 $\sigma^i \in \mathrm{Aut}(S_t)$ 是由 $(x, y, v) \mapsto (x, y, \zeta^i v)$ 定义的自同构。根据 (5.3) 中对 ω 的局部描述，我们有 $(\sigma^i)^*\omega = \zeta^{Ai}\omega$。因此，等式可写为

$$\int_{(K_j^l)^{(i)}} \omega_t = \int_{\sigma^i((K_j^l)^{(0)})} \omega_t = \int_{(K_j^l)^{(0)}} (\sigma^i)^*\omega_t = \zeta^{Ai} \int_{(K_j^l)^{(0)}} \omega_t.$$

□

利用引理 6.3，$\langle \nu_{\mathrm{tr}}(\xi_{c_j}^{(i+l)} - \xi_{c_1}^{(i)})\ \omega\rangle \in \Gamma(T, \mathscr{O}_T^{\mathrm{an}}/\mathcal{P}(\omega))$ 由局部全纯函数表示为

$$t \mapsto \zeta^{Ai}(1 - \zeta^A) \int_{(K_j^l)^{(0)}} \omega_t. \tag{6.4}$$

利用这个积分表达式，我们如下计算 $\mathscr{D}(\langle \nu_{\mathrm{tr}}(\xi_{c_j}^{(i)})\ \omega\rangle)$。

THEOREM 6.4. 对于 $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，$\nu_{\mathrm{tr}}(\xi_{c_j}^{(i)})\ (j = 1, \ldots, n)$ 在 *Picard-Fuchs* 微分算子 $\mathscr{D}$ 下的像如下：

$$\mathscr{D}(\nu_{\mathrm{tr}}(\langle \xi_{c_j}^{(i)}), \omega\rangle) = \frac{N(1-\zeta^A)\zeta^{Ai}}{(\lambda_2 - \lambda_1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(2-n)_k}{k!} \begin{pmatrix} \frac{\left(\frac{A}{N}\right)_{n-1}}{(Nk+A)} \cdot \frac{(c_j - \lambda_2)^{\frac{Nk+A}{N}}}{(c_j - \lambda_1)^{\frac{Nk+A}{N}}} \\ -\frac{\left(\frac{N-A}{N}\right)_{n-1}}{(Nk+N-A)} \cdot \frac{(c_j - \lambda_1)^{\frac{Nk+N-A}{N}}}{(c_j - \lambda_2)^{\frac{Nk+N-A}{N}}} \end{pmatrix}.$$

PROOF。只需计算微分算子 $\mathscr{D}$ 作用于 (6.4) 中的局部全纯函数所得的像。注意，该像是一对全局全纯函数，

尽管（6.4）本身是一个多值函数。我们只计算第一个分量，因为对第二个分量的计算是类似的。

首先，我们证明

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}_{\lambda_1}(\langle\nu_{\mathrm{tr}}(\xi_{c_j}^{(i+l)}-\xi_{c_1}^{(i)}),\omega\rangle)\\&=\frac{N(1-\zeta^A)\zeta^{Ai}}{(\lambda_2-\lambda_1)^{n-1}}\left(\frac{A}{N}\right)_{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(2-n)_k}{(Nk+A)k!}\cdot\left(\zeta^{Al}\frac{(c_j-\lambda_2)^{\frac{Nk+A}{N}}}{(c_j-\lambda_1)^{\frac{Nk+A}{N}}}-\frac{(c_1-\lambda_2)^{\frac{Nk+A}{N}}}{(c_1-\lambda_1)^{\frac{Nk+A}{N}}}\right).\end{aligned}\tag{6.5}$$

根据 ω_t 的局部描述，我们有

$$\mathscr{D}_{\lambda_1}\left(\int_{(K_j^l)^{(0)}}\omega_t\right)=\mathscr{D}_{\lambda_1}\left(\int_{\triangle}(\mu_j^l)^*\left(\frac{dx\wedge dy}{v^{N-A}f(x)}\right)\right)=\mathscr{D}_{\lambda_1}\left(\int_{\triangle}\frac{(\gamma_j^l(s_1))'(\gamma_j^l(s_2))'ds_1\wedge ds_2}{\sqrt[N]{f(\gamma_j^l(s_1))}^{A}\sqrt[N]{g(\gamma_j^l(s_2))}^{N-A}}\right)$$

函数分支 $\sqrt[N]{f(\gamma_j^l(s_1))}$ 和 $\sqrt[N]{g(\gamma_j^l(s_2))}$ 如 (4.5) 中所确定

其中 .

对于 $\varepsilon>0$，设 $\triangle_\varepsilon=\{(s_1,s_2)\in\mathbb{R}^2\mid\varepsilon\le s_2\le s_1\le 1-\varepsilon\}$。那么，利用勒贝格控制收敛定理进行标准的解析论证，可得

$$=\mathscr{D}_{\lambda_1}\left(\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\triangle_\varepsilon}\frac{(\gamma_j^l(s_1))'(\gamma_j^l(s_2))'ds_1\wedge ds_2}{\sqrt[N]{f(\gamma_j^l(s_1))}^{A}\sqrt[N]{g(\gamma_j^l(s_2))}^{N-A}}\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\triangle_\varepsilon}\mathscr{D}_{\lambda_1}\left(\frac{(\gamma_j^l(s_1))'(\gamma_j^l(s_2))'ds_1\wedge ds_2}{\sqrt[N]{f(\gamma_j^l(s_1))}^{A}\sqrt[N]{g(\gamma_j^l(s_2))}^{N-A}}\right).$$

设 $H(\lambda_1,x)=-\binom{A}{N}_{n-1}(x-\lambda_1)^{-n+1-\frac{A}{N}}(x-c_1)^{1-\frac{A}{N}}\cdots(x-c_n)^{1-\frac{A}{N}}$ 为引理 5.1 中定义的多值函数。由于函数分支 $\sqrt[N]{x-\lambda_1}$ 和 $\sqrt[N]{x-c_i}$ 已沿 γ_j^l 选定，因此 $H(\lambda_1,x)$ 沿 γ_j^l 的分支也已确定。由引理 5.1，$\mathscr{D}_{\lambda_1}\left(1/\sqrt[N]{f(x)}^{A}\right)=\frac{\partial}{\partial x}H(x,\lambda_1)$，因此我们有

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\triangle_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{H(\lambda_1,\gamma_j^l(s_1))\cdot(\gamma_j^l(s_2))'}{\sqrt[N]{g(\gamma_j^l(s_2))}^{N-A}}\right)ds_1\wedge ds_2=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\triangle_\varepsilon}d\left(\frac{H(\lambda_1,\gamma_j^l(s_1))\cdot(\gamma_j^l(s_2))'ds_2}{\sqrt[N]{g(\gamma_j^l(s_2))}^{N-A}}\right)$$

接下来使用斯托克斯定理。注意，沿 $\partial\triangle_\varepsilon$ 的积分除对角线 $s_1=s_2$ 外均收敛于 0，因此我们有

$$\begin{aligned}&=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\partial\triangle_\epsilon}\frac{H(\lambda_1,\gamma_j^l(s_1))\cdot(\gamma_j^l(s_2))'ds_2}{\sqrt[N]{g(\gamma_j^l(s_2))}^{N-A}}=\int_{s=1}^{s=0}\frac{H(\lambda_1,\gamma_j^l(s))\cdot(\gamma_j^l(s))'ds}{\sqrt[N]{g(\gamma_j^l(s))}^{N-A}}\\&=\left(\frac{A}{N}\right)_{n-1}\int_{s=0}^{s=1}\frac{(\gamma_j^l(s))'ds}{(\gamma_j^l(s)-\lambda_1)^{n-1}\cdot\sqrt[N]{\gamma_j^l(s)-\lambda_1}^{A}\cdot\sqrt[N]{\gamma_j^l(s)-\lambda_2}^{N-A}}\end{aligned}$$

令 u 为 $\mathbb{C}$ 上的新路径，其定义为 $u(s)=\sqrt[N]{\gamma_j^l(s)-\lambda_2}/\sqrt[N]{\gamma_j^l(s)-\lambda_1}$。根据条件 (iii) 以及关于 (iv) 的条件 γ_j^l，u 是从 $\sqrt[N]{c_1-\lambda_2}/\sqrt[N]{c_1-\lambda_1}$ 到 $\zeta^l\sqrt[N]{c_j-\lambda_2}/\sqrt[N]{c_j-\lambda_1}$ 的路径。因此我们有

$$=\frac{-N}{(\lambda_1-\lambda_2)^{n-1}}\left(\frac{A}{N}\right)_{n-1}\int_{s=0}^{s=1}(u(s)^N-1)^{n-2}u(s)^{A-1}u'(s)ds$$

$$= \frac{-N}{(\lambda_1-\lambda_2)^{n-1}}\left(\frac{A}{N}\right)_{n-1}\int_{\frac{\sqrt[N]{c_1-\lambda_2}}{\sqrt[N]{c_1-\lambda_1}}}^{\zeta^l\frac{\sqrt[N]{c_j-\lambda_2}}{\sqrt[N]{c_j-\lambda_1}}}(u^N-1)^{n-2}u^{A-1}du$$

$$= \frac{N}{(\lambda_2-\lambda_1)^{n-1}}\left(\frac{A}{N}\right)_{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(2-n)_k}{(Nk+A)k!}\left(\zeta^{Al}\frac{(c_j-\lambda_2)^{\frac{Nk+A}{N}}}{(c_j-\lambda_1)^{\frac{Nk+A}{N}}}-\frac{(c_1-\lambda_2)^{\frac{Nk+A}{N}}}{(c_1-\lambda_1)^{\frac{Nk+A}{N}}}\right).$$

在最后一个等式中，我们使用了二项式展开和关系式 $\binom{a}{k}=\frac{(-1)^k(-a)_k}{k!}$。因此，我们有 (6.5)。

其次，我们将证明该定理。根据 $\xi_{c_j}^{(i)}$ 的定义，我们有 $\sum_{l\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}\xi_{c_j}^{(i+l)}=0$。因此，我们有

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}\mathscr{D}(\langle\nu_{\mathrm{tr}}(\xi_{c_j}^{(i+l)}-\xi_{c_1}^{(i)}),\omega\rangle)=-N\mathscr{D}(\langle\nu_{\mathrm{tr}}(\xi_{c_1}^{(i)}),\omega\rangle).$$

由于 $\gcd(N,\ A)=1$，该结论由（6.5）得出。 □

6.3. **定理 6.1 的证明**。令 Ξ 为 $\Gamma(T,\mathcal{Q})$ 由以下元素生成的子群

$$\nu_{\mathrm{tr}}(\xi_{c_j}^{(i)})\quad(i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,n).$$

首先，我们计算 Ξ 的秩。根据定理 6.4，有理函数 $\mathscr{D}(\nu_{\mathrm{tr}}(\langle\xi_{c_j}^{(0)})\ \omega\rangle)$ $(j=1,\dots,n)$ 在 $\mathbb{C}$ 上线性无关，特别是在 $\mathbb{Q}(\zeta)$ 上线性无关。此外，对于每个 $j=1,\ 2,\dots,n,\ \mathscr{D}(\nu_{\mathrm{tr}}(\langle\xi_{c_j}^{(0)})\ \omega\rangle)$ 都是非挠的；$\mathscr{D}(\nu_{\mathrm{tr}}(\langle\xi_{c_j}^{(i)})\ \omega\rangle)$ $(i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ 生成一个秩为 1 的自由 $\mathbb{Z}[\zeta]$-模，其作为阿贝尔群的秩等于$\varphi(N)$。因此，Ξ 的秩大于或等于 $n\cdot\varphi(N)$。

由引理 6.2，我们有 $\operatorname{rank}\mathrm{ev}_t(\Xi)=\operatorname{rank}\Xi$对非常一般的 $t\in T$。此外，由（6.1），我们有

$$\mathrm{ev}_t(\Xi)=\langle r((\xi_{c_j}^{(i)})_t)\mid i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,n\rangle.$$

因此，由命题 4.1，这些循环 $(\xi_{c_j}^{(i)})_t$ 在 CH $n\cdot\varphi(N)$ 中生成一个秩至少为 $^2(S_t,\ 1)_{\mathrm{ind}}$的子群。

Acknowledgment

第一作者获得早稻田大学青年研究者科研资助（项目编号：2025E-041）。第二作者获得日本学术振兴会科研费 21H00971 资助。

References

[1] N. Archinard, *Hypergeometric abelian varieties*, 加拿大数学杂志**55** (2003)，第 5 期，897–932。[2] S. Bloch, *Algebraic cycles and higher K-theory* 数学进展**61** (1986)，第 3 期，267–304。[3] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover 出版社，纽约，1944。[4] M. Levine, *Localization on singular varieties*, 数学发明**91** (1988)，第 3 期，423–464。[5] S. M¨uller-Stach, *Algebraic cycle complexes: basic properties*, 北约科学丛书 C 辑：数学与物理科学，**548** Kluwer 学术出版社，多德雷赫特，2000，285–305。

[6] *Construction of Higher Chow cycles on cyclic coverings of* $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 2509 05569 Y. Nemoto, K.

[7] *Higher Chow cycles on a family of Kummer surfaces* **78**,

Sato, , arXiv: 。K. Sato, , 加拿大数学杂志第 1 期（2026）：1–34。https://doi.org/10.4153/S0008414X24000415。

Graduate School of Science, Chiba University, Yayoicho 1-33, Inage, Chiba, 263-8522 Japan.*Email address*: y-nemoto@waseda.jp

Department of Mathematics Institute of Science Tokyo 2-12-1 Ookayama Meguro-ku Tokyo , , , , 152-8551 Japan.
Email address: sato.k.da@m.titech.ac.jp