一种降低梳状抽取器通带下垂速率依赖性的方法

Ealwan Lee，GCT Semiconductor, Inc.,
韩国首尔 邮箱：ewlee@gctsemi.com

arXiv:2603.04906v1 [eess.SP] 5 Mar 2026

摘要—**本文提出一种方法，用于降低 N 阶梳状抽取器固有通带下垂对抽取因子 M 的依赖性。该方法通过在相应梳状抽取器的积分级中级联一个对称三抽头 FIR 滤波器实现，且系数仅根据阶数 N 选取。基于传统梳状抽取器推导出的所提降额方法，可直接应用于任何近期开发的梳状抽取器和下垂补偿滤波器设计方法。**

索引词—**级联积分梳状抽取器、降低对速率的依赖、通带下垂补偿滤波器**

I. 引言

在由一系列 FIR 滤波器和降采样器构成的多级多速率滤波器设计中，梳状抽取器通常用作第一级滤波器，主要是因为与其他插值滤波器相比，其实现代价较低 [1]–[3]。梳状抽取器的成本优势是以牺牲通带频谱平坦度为代价获得的，因此必须由后续的所谓下垂补偿滤波器进行补偿。

尽管梳状抽取器凭借其悠久的应用历史，在过采样模拟前端设计（例如 A/D 转换应用）中取得了成功 [3], [4], ，但随着滤波器阶数 N 增加、抽取因子 M 减小，通带下垂补偿滤波器的设计问题变得愈发复杂；这在近期的现代通信系统设计中十分常见。随着通信系统的信道带宽不断增大，抽取因子 M 持续减小；与此同时，为实现低功耗运行并满足技术限制，模拟前端的处理时钟频率则尽可能保持在较低水平。此外，为满足更严格的阻带混叠抑制水平，滤波器阶数 N 必须提高，部分原因是 M 减小，部分原因是模拟前端中噪声整形模块的阶数增加。

众所周知，随着 N 增大，梳状抽取器的通带平坦度会变差；随着 M 减小，阻带抑制能力会减弱。因此，若要使用高阶梳状抽取器来降低 M，就需要在后续级采用更复杂的滤波器，并在设计过程中格外谨慎。此外，近年来的通信系统必须支持多符号速率，因此需要其他级的滤波器具备可重构性，这使其硬件复杂度高于固定抽头系数的方案。相应地，已有许多前期研究致力于降低所需阶数 N，同时在相同的镜像混叠抑制水平下实现更好的通带平坦度 [5]–[7] ；也有研究提出简单的补偿滤波器，以覆盖更宽范围的 N 和 M [8]–[10]。

本文的主要思路并非解决补偿梳状抽取器整体通带下垂的问题。相反，我们指出，通带下垂可分解为两部分：一部分仅取决于 N，另一部分同时取决于 N 和 M。我们只关注降低第二部分（称为通带偏差）对每个 N中 M 的依赖性。需要说明的是，本文中的“降额”一词专指降低通带偏差对 M变化的依赖性，是“去敏”的简称；为清晰起见，对于整体通带下垂，本文仍使用广为接受的“补偿”或“校正”一词。任何历经多年发展、任意采用的多级多速率滤波器设计方法，包括 [8]–[14] 的相关工作，都可以利用本文的结果降低对 M的依赖，从而使这些方法在现代通信系统设计的最新发展中更具实用性。

本文其余部分安排如下。首先，在第 II 节中，我们讨论传统梳状抽取器的通带偏差（而非整体下垂），并将其从整体通带下垂中分解出来。随后，我们说明简单的对称三抽头 FIR 滤波器如何以一阶方式降低通带偏差对速率的依赖，并推导抽头系数的公式。第 III 节和第 IV 节中针对各种梳状抽取器和补偿器开展的全面仿真结果，总结并验证了第 II 节的数学推导，最后给出结论及其应用建议。

II. 降敏滤波器的推导

A. 通带偏差的分解

为研究抽取因子为 M的 N阶梳状抽取器的通带偏差，我们在通带内的输入频率 ω 处对其传递函数$H_{N,M}(z)$进行了评估，并将其近似为(ω/M)的一阶项，如式（1）所示。这里，我们假设输出采样率固定为 1 $Hz\ z = e^{j\omega/M}$ and $[0, \omega_C]$

©2018 IEEE。允许个人使用本材料。所有其他用途均须获得 IEEE 的许可，无论是在当前还是未来的任何媒体中，包括为广告或促销目的而重印/再版本材料、创作新的合集作品、转售或再分发至服务器或列表，或在其他作品中重复使用本作品的任何受版权保护部分。

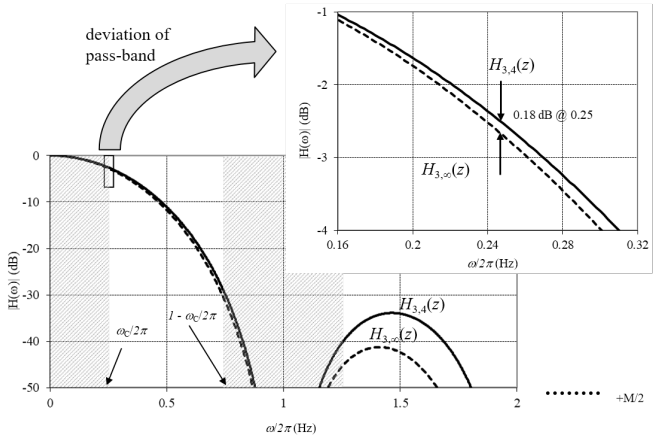


图1. 当 M 从 ∞ 变为 4 时，$H_{3,\ M}(z)$的变化。

与 M无关。因此，随着 M 增大，输入频率 $\frac{\omega}{2\pi}$按 M Hz 进行缩放。

$$\begin{aligned} H_{N,M}(e^{j\omega/M}) &= \left\{\frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{M\cdot\sin(\frac{\omega}{2M})}\right\}^N \\ &\approx \frac{\sin^N(\frac{\omega}{2})/(\frac{\omega}{2})^N}{\left\{1-\frac{1}{3!}\cdot(\frac{\omega}{2M})^2\right\}^N} \\ &\approx \frac{\sin^N(\frac{\omega}{2})/(\frac{\omega}{2})^N}{1-\frac{N}{3!}\cdot(\frac{\omega}{2M})^2+\Delta} \end{aligned} \tag{1}$$

按照这一约定，输入信号带宽（即抽取器的带宽） ω_C 也可以固定，如图1所示，对于 M的任意取值， $N=3$ 均如此。后续抽取滤波器的抽取因子 L通常选在 $[2,4]$范围内。因此，在大多数情况下，采用 $\omega_C=\pi/L\le\pi/2$ 的最坏情况假设是可以接受的。注意，只要$(\omega/M)\ll 1$，式(1)中使用的近似就成立。

泰勒级数展开得到的近似仅包含$(\omega/M)^{2n}$项，因为 $H(e^{j\omega})=H(e^{-j\omega})^*$。因此，式(1)可以分解为两部分：分子与 M无关，实际上是连续时间 sinc^N 函数的传递函数，可通过$M\to\infty$实现；分母则体现了对 M的所有依赖，即通带偏差。这种分解表明，当 N 增大时，即使 M 的变化相同，偏差也会变得更严重，这与分子中通带整体下垂的趋势相同。值得注意的是，即使是低 N阶梳状抽取器，例如 $N=1$ 或 2，其通带偏差也与 M^{-2} 成正比；除乘法因子不同外，这与其他高阶情况类似。

梳状抽取器传递函数中的分母表示由级联累加器构成的 sinc^N 滤波器的积分部分。这一事实为如图2所示，对积分部分串联的 FIR 滤波器进行降额提供了出发点。

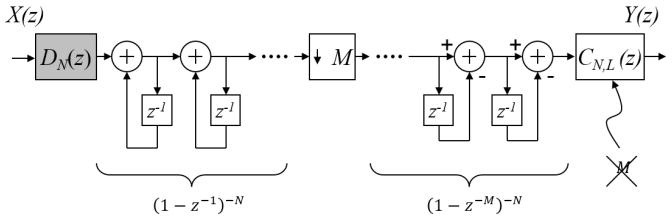


图2. 所提出的方法用于降低 N阶梳状抽取器对 M抽取因子变化的依赖性。

B. 使用三抽头 *FIR* 滤波器进行一阶降额

式（1）中分母对 M^{-2} 的一阶依赖关系可以通过以下对称三抽头 FIR 滤波器消除:

$$D_N(z)=\frac{1+b_N\cdot z^{-1}+z^{-2}}{2+b_N} \tag{2}$$

，其在 $z=e^{j\omega/M}$ 处的一阶近似为

$$\begin{aligned} D_N(e^{j\omega/M}) &= \frac{e^{-j\omega/M}}{2+b_N}\cdot(b_N+2\cdot\cos(\omega/M)) \\ &\approx \frac{e^{-j\omega/M}}{2+b_N}\cdot\left(b_N+2-\omega^2/M^2+\Delta\right) \end{aligned} \tag{3}$$

显然， N阶梳状抽取器与新提出的降额滤波器卷积后，会得到一个新的梳状型滤波器，其

$$\begin{aligned} G_{N,M}(z) &= H_{N,M}(z)\cdot D_N(z) \\ &= \left(\frac{1-z^{-M}}{1-z^{-1}}\right)^N\cdot\frac{1+b_N\cdot z^{-1}+z^{-2}}{2+b_N} \end{aligned} \tag{4}$$

，与传统滤波器相比，它对 M 的变化不太敏感，因为

$$G_{N,M}(e^{j\omega/M})=\frac{\sin^N(\frac{\omega}{2})}{(\frac{\omega}{2})^N}\cdot\frac{b_N}{2+b_N}\cdot e^{-j\omega/M}\cdot \left\{1-\left(\frac{N\omega^2}{24M^2}\right)^2+\Delta\right\} \tag{5}$$

如果 b_N 选为

$$b_N=24/N-2 \tag{6}$$

通过令式（1）和式（3）中 $(\omega/M)^2$ 项的系数相等，将其影响降低至一阶近似。

再次强调，降额滤波器 $D_N(z)$ 仅取决于阶数 N，而不取决于抽取因子 M。因此，对于 N 的每个阶数，都唯一对应一个三抽头FIR降额滤波器。相反，通常在梳状抽取器输出级中实现的下垂补偿滤波器 $C_{N,\ L}(z)$ 取决于 N 和 L。事实上，由于本文指出的通带偏差，补偿滤波器本应取决于 M，但通过将 $D_N(z)$ 引入积分部分，其对 M 的依赖性几乎被消除。

表I 降额滤波器整数运算实现的系数及附加字长。

N	b_N	A_N	W_b	N	b_N	A	W_b
1	22	1	5	7	10/7	7	5
2	10	1	4	8	1	1	2
3	6	1	3	9	2/3	3	3
4	4	1	3	10	2/5	5	4
5	14/5	5	5	11	2/11	11	5
6	2	1	2				

C. $D_N(z)$的有效性条件

上一节中采用的近似和假设限制了所提方法有效时 N 的取值范围。此外，为了使 $G_{N,\ M}(z)$ 的阻带抑制至少不劣于 $H_{N,\ M}(z)$，希望满足 $|D_N(z)|<1$，即

$$|G_{N,M}(e^{j\omega/M})| < |H_{N,M}(e^{j\omega/M})| \tag{7}$$

对于 $\omega > \omega_C$。若 $b_N > 0$，则(7)成立，换言之，由(6)可得$N < 12$ 。这意味着所提出的降额方法仅在采用3抽头有限冲激响应形式且不超过12时才有效。此外，对于更严格的单调递减性质条件，即除 $\omega = \pm\pi M$处外单位圆上无零点

$$|D_N(\omega)| = \frac{2\cdot\cos(\omega/M)+b_N}{2+b_N} \neq 0 \tag{8}$$

界为 $b_N \geq 2$，即 $N \leq 6$。然而，这一限制被认为是可接受的，能够覆盖大多数实际情形，仿真结果将对此加以例证。

D. 实现问题

梳状抽取器的主要优点在于其实现成本低，这源于著名递归形式中累加器的级联。然而，整数运算是采用模运算的级联累加器保持稳定性的必要条件。因此，研究降额滤波器能否以整数运算实现十分重要。

式（6）并不能保证对于所有$N \leq 11$， b_N 始终为整数，这可能会进一步增加三抽头FIR滤波器及后续梳状抽取器的实现代价。然而，式（6）至少能够保证 b_N 为有理数。因此，将其适当地缩放，乘以 A_N =N/GCD(24, N)，即可使其所有抽头系数均变为整数，从而最大限度地降低额外代价，具体总结见表I。值得注意的是，降额滤波器所需的额外输出字长受限于 $W_b = \lceil \log_2(A_N\cdot(2+b_N)) \rceil$，其不会随抽取因子 M成比例增长。

III. 仿真结果

A. 性能指标

上一节所述的分析以及所推导公式成立的条件表明，线性相位且通带中的单调下降特性仍然得以保持，因为降额滤波器是对称有限冲激响应滤波器。因此，只需在通带边缘 $\omega/\pi = 1/L$ 处评估 $G_{N,M}(z)$，而无需在整个通带内评估，就可以衡量 $G_{N,M}(z)$ 对 M 的依赖性。这意味着无需使用任何后续补偿滤波器 $C_{N,L}(z)$，即可进行公平比较。此外，对于每个 N，取大量 M 所得到的参考值，即可使该指标仅反映通带偏差，也就是说，

$$dG_{N,M} = ||G_{N,M}(e^{j\frac{\pi}{2M}})|| - ||G_{N,m}(e^{j\frac{\pi}{2m}})|_{m\to\infty}|| \tag{9a}$$

传统梳状抽取器也可以采用相同的方法得到，即

$$dH_{N,M} = ||H_{N,M}(e^{j\frac{\pi}{2M}})|| - ||H_{N,m}(e^{j\frac{\pi}{2m}})|_{m\to\infty}|| \tag{9b}$$

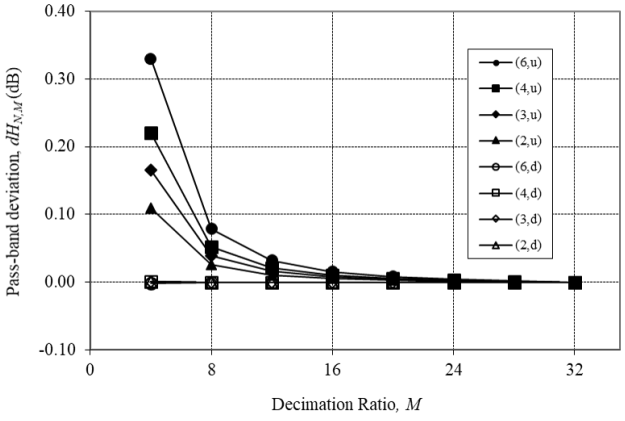


图3. 对于阶数为 $N=2$、3、4、6的传统梳状抽取器，通带偏差随 M变化的曲线。与相应曲线相比，所提出的降额方法使曲线变得平坦。

B. 传统梳状抽取器的情形

由 (1) 可推测，通带偏差始终为正值，即$dH_{N,\ M} > 0$ 如图 3 所示。为简洁起见，图 3 将仅针对 $N=\{2,3,4,6\}$ 的未降额和降额梳状抽取器曲线绘制在一起。

如 (1) 所预测，未降额的传统梳状抽取器的通带偏差对 M 的依赖性十分明显，并且会随着 N 的增大而增强。仿真中取用的 M 范围为 4 到 32，步长为 4；同时，为考察最坏情况，将 L 固定为 2，这预计涵盖了大多数实际情况。图中标记为 (N, d)、且 $N=\{2,3,4,6\}$ 的降额梳状抽取器优于标记为 (N, u) 的传统梳状抽取器。

IV. 对近期研究的扩展

尽管降额滤波器 $D_N(z)$ 是从传统梳状抽取器推导而来的，但其应用并不局限于此。它还可扩展到近期研究中发表的大多数改进型梳状抽取器和通带下垂补偿器，以下各小节将对此举例说明。

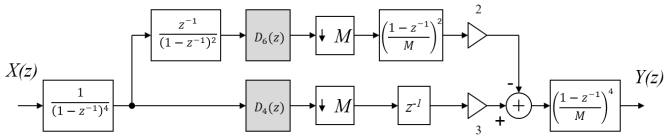


图4. 带降额滤波器的锐化梳状抽取器示例。

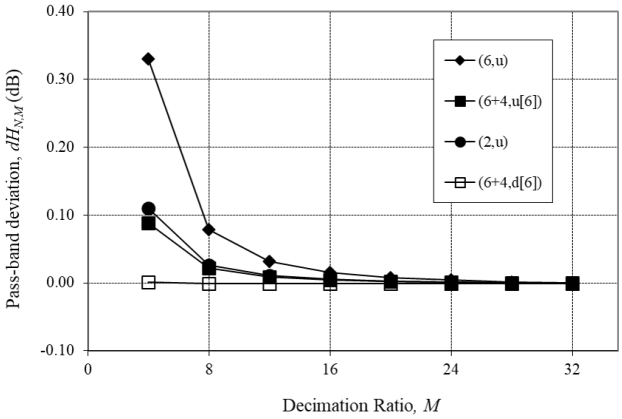


图5. 锐化梳状抽取器的通带偏差曲线。

A. 带滤波器锐化的梳状抽取器

滤波器锐化方法已用于改善传统梳状抽取器 [6], [7] 的通带下垂和阻带抑制。在大多数情况下，通常采用最低阶锐化方法，如

$$F_{N,M}(z) = 3 \cdot H^2_{N,M}(z) - 2 \cdot H^3_{N,M}(z). \tag{10}$$

基础梳状抽取器的阶数应为偶数，以使锐化两项的群时延对齐，从而将$H_{N,M}(z)$的最低阶限制为2，这意味着

$$H(z) = \left(\frac{1}{M} \cdot \frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}}\right)^2 \tag{11a}$$

$$F(z) = 3z^{-M} \cdot \left(\frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}}\right)^4 - \frac{2z^{-1}}{M^2} \cdot \left(\frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}}\right)^6 \tag{11b}$$

此处，引入 z^{-M} 或 z^{-1} 是为了在时域中对两个分量进行速率不变对齐。对于等效抑制水平，该滤波器锐化方法的通带下垂远小于相应传统梳状抽取器的通带下垂。因此，这对后续差分级中通带下垂补偿滤波器的设计非常有利。

$H(z)^2$ 和 $H(z)^3$ 中的每一项都可以分别通过 $D_4(z)$ 和 $D_6(z)$ 进行降额，如图5所示。降额滤波器可以置于积分部分的输入端或输出端。所得降额抽取器 $F(z)$ 对抽取因子 M 的变化表现出相当平坦的依赖关系，如图5所示。

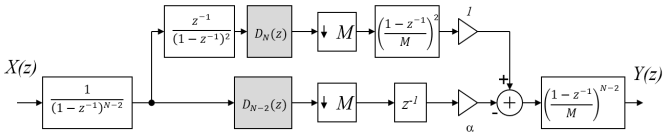


图6. 具有分岔零点的降额二阶（$N = 2$）和三阶（$N = 3$）梳状抽取器。

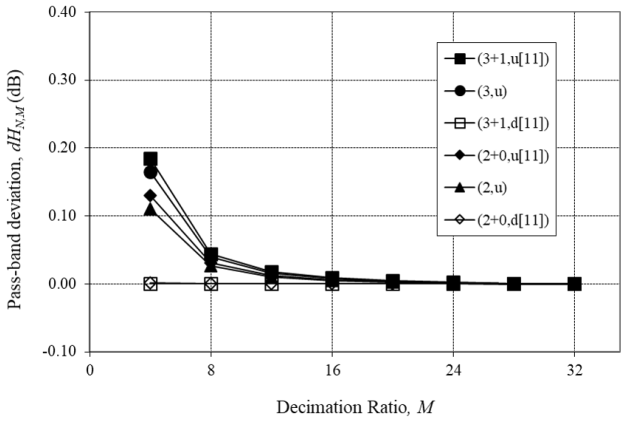


图7. 具有分叉零点的二阶和三阶梳状抽取器的通带偏差曲线。

B. 阻带分布零点的梳状抽取器

人们提出了许多结构，以提高阻带中的混叠抑制水平，尤其是抑制折叠到目标频带内的混叠。其中， [11] 清楚地解释了 $f = n\ Hz$ 在折叠频率处的多个零点如何分岔，尽管正如作者所承认的，该结构本身是 [11] 的一个退化情形。

图4和图6中的改进型梳状抽取器之间的差异可能不易辨别，但仔细研究二者可以发现以下几点：滤波器锐化技术针对给定的锐化阶数，确定高阶和低阶梳状抽取器之间唯一确定的系数和比率，并且不会像传统梳状抽取器那样，将折叠带中的零点移动并合并为多个零点。其他着重于提高折叠带混叠抑制水平的工作，则会如 [11]所述，移动、分布或分叉折叠带中的多个零点。摆脱这一约束后，外部梳状抽取器的阶数可以大幅降低，例如从4阶降至1阶，用于$N = 3$ 。因此， $D_3(z)$和 $D_1(z)$取代了 $D_6(z)$和 $D_4(z)$

如图7所示，我们提出的降额方法仍然有效。请注意，降额后的 [11], (3+1, u [11]) 曲线略高于 (3, u)，因为修改后的梳状抽取器与传统滤波器略有不同，而滤波器锐化则并非如此。

将 $D_3(z)$ 和 $D_1(z)$ 分别替换为 $D_2(z)$ 和 $D_0(z)$，即可轻松将此方法应用于二阶梳状抽取器。 $D_0(z) = z^{-1}$ ，这意味着 $b_0 \rightarrow \infty$ 尽管它

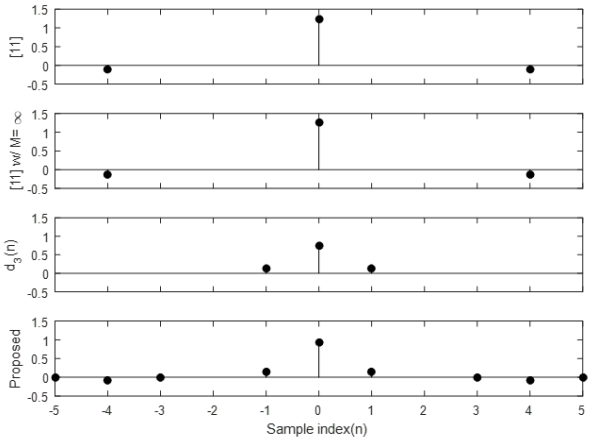


图8. 对比单级最大平坦三抽头FIR补偿器与采用所提出的降额滤波器的两级版本 $(N, M) = (3,4)$。

因其形式特殊，未列于表 I 中。

C. 对最大平坦下垂补偿器的影响

不同于其他计算机辅助设计方法，已有研究针对通带最大平坦性条件下的通带下垂补偿器，给出了其系数的闭式数学表达式 [13], [14]。尤其是，[13] 分别为适用于窄带或宽带的三抽头和五抽头FIR滤波器推导出了显式标量闭式公式，具体取决于 L。

值得注意的是，对于窄带情形下、满足 $L > 4$ 的三抽头FIR，我们提出的降额滤波器使该补偿滤波器的系数 $C_{N,L}(z^M) = c_0 + c_1 z^{-M} + c_2 z^{-2M}$ 不再依赖于 M，并可简化为

$$c_0 (= c_2) = -\frac{N}{32} \cdot \frac{1 - M^{-2}}{1 - 2^{-2}}\bigg|_{M\to\infty} \to -\frac{N}{24}$$
$$c_1 = 1 - (c_0 + c_2). \tag{12}$$

只需令 $M \to \infty$，即可将类似技术轻松应用于宽带情形下五抽头FIR滤波器的系数。

这一结果使我们能够获得一种硬件效率更高的两级无乘法器最大平坦补偿器实现，无需再考虑其对抽取因子的依赖关系，M；这与图8中比较的先前单级实现不同。

所有依赖于 M^{-2} 的脆弱项均通过差分级中的额外预加重从补偿器系数中去除。积分级中的降额滤波器本质上是一个低通滤波器，它消除了这些项，从而简化了整体滤波器（包括降额滤波器和通带下垂补偿器）的系数。同样显而易见的是，补偿器的字长不再依赖于抽取因子 M。

V. 结论

我们研究了N阶梳状抽取器中通带下垂对其抽取因子 M的依赖性，并提出了一种主动方法，采用额外的低复杂度FIR滤波器对其进行降额。梳状抽取器积分部分中的一组3抽头低通FIR滤波器已被证明能显著减小补偿后通带的偏差，同时几乎保持其他特性不变。需要指出的是，这不仅适用于传统梳状抽取器，也适用于任何近期研究的梳状抽取器及通带下垂补偿器。

此外，本文提出了一种相当精确的成本增加模型，同时保留模整数运算，用于定量分析采用降额滤波器所导致的额外实现代价。因此，如果需要最小化梳状抽取器以及其他尚未研究的梳状型抽取器的通带偏差随抽取因子 M 变化的程度，则所提出的方法可直接应用于迄今研究过的梳状抽取器以及其他尚未研究的梳状型抽取器。

参考文献

[1] S. Chu 和 C. S. Burrus，“使用梳状滤波器的多速率滤波器设计”，IEEE Trans. CAS.，第 CAS-31 卷，913–924 页，1984 年 11 月。[2] E. B. Hogenauer，“用于抽取和插值的一类经济型数字滤波器”，IEEE Trans. ASSP.，第 ASSP-29 卷，155–162 页，1981 年 4 月。[3] J. C. Candy，“ΣΔ 调制的抽取”，IEEE Trans. Comm.，第 COM-34 卷，第 1 期，72–76 页，1986 年 1 月。[4] S. R. Norsworth、R. Schreier 和 G. C. Temes，*ΔΣ*数据转换器：理论、设计与仿真，纽约：IEEE出版社，1997 年。[5] M. Laddomada，“面向 ΣΔ A/D转换器的广义梳状抽取滤波器：分析与设计”，IEEE Trans. CAS-I，第 54 卷，第 5 期，994–1005 页，2007 年 5 月。[6] A. Kwentus、Z. Jiang 和 A. Wilson Jr.，“滤波器锐化在级联积分梳状抽取滤波器中的应用”，IEEE Trans. Signal Process.，第 47 卷，第 11 期，1204–1213 页，2000 年 11 月。[7] G. J. Dolecek 和 S.K. Mitra，“一种新型两级锐化梳状抽取器”，IEEE Trans. CAS-I，第 52 卷，第 7 期；Signal Process.，第 52 卷，第 11 期，1414–1420 页，2005 年 7 月。[8] S. Kim、W. C. Lee、S. Alm 和 S. Choi，“W-CDMA数字接收机中的CIC滚降补偿滤波器设计”，Digital Signal Processing，第 16 卷，846–854 页，2006 年。[9] A. F. Vazquez 和 G. J. Dolecek，“GCF补偿滤波器的一般设计方法”，IEEE Trans. CAS-II，第 56 卷，第 5 期，409–413 页，2009 年 5 月。[10] G. J. Dolecek 和 M. Laddomada，“一类经济型下垂补偿广义梳状滤波器：分析与设计”，IEEE Trans. CAS-II，第 57 卷，275–279 页，2010 年 4 月。[11] F. J. Harris 和 G. J. Dolecek，“CIC滤波器重复阻带零点的分叉”，Proceedings of IEEE International Conference on Digital Signal Processing，365–369 页，2016 年。[12] T. Saramaki 和 T. Ritoniemi，“一种用于抽取的改进型梳状滤波器结构”，Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems，第 4 卷，2353–2356 页，1997 年。[13] A. Fernandez-Vazquez 和 G. J. Dolecek，“最大平坦CIC补偿滤波器：设计与无乘法器实现”，IEEE Trans. CAS-II，第 59 卷，第 2 期，113–117 页，2012 年 2 月。[14] G. Molnar、A. Dudarin 和 M. Vucic，“最大平坦锐化CIC补偿器的设计与无乘法器实现”，IEEE Trans. CAS-II，第 65 卷，第 1 期，51–55 页，2018 年 1 月。