Prepared for submission to JHEP

由温度梯度驱动的临界涨落模式与各向异性关联 s

Lijia Jiang[1,3,4,5] **Tao Yang**[2,3,4,5] **Jun-Hui Zheng**[2,3,4,5]

[1]西北大学物理系，西安，*710127*，中国[2]西北大学现代物理研究所，西安，*710127*，中国[3]陕西省理论物理前沿重点实验室，西安，*710127*，中国[4]彭桓武基础理论研究中心，西安 *710127*，中国[5]陕西省量子科学基础学科研究中心，西安 *710127*，中国

电子邮箱：lijiajiang@nwu.edu.cn

Abstract: 对 QCD 相变信号的研究通常在空间均匀温度条件下进行。然而，空间温度梯度对重离子碰撞产生的火球中相界面处信号的影响，至今尚未得到充分探索。基于类伊辛有效势，我们研究了存在温度梯度的局部平衡系统。在二维圆盘几何中，低能涨落谱被明确分解为径向和角动量模。奇异本征模的非局域关联表现出强烈的各向异性：沿等温线方向的关联范围较长，而由于系统的热几何特性，径向关联受到抑制。不同于由零动量模主导的均匀系统，这类非均匀系统中的关联来自一系列贡献相当的零角动量模与非零角动量模的叠加。我们提取了奇异角动量模，并确立了它们与实验可观测的各向异性流之间的联系。我们发现，方位角敏感观测量或可提供一条此前未曾探索的途径，用于探测 QCD 相变。

arXiv:2603.04923v1 [hep-ph] 5 Mar 2026

目录

1 引言 1

2 理论框架 2
2.1 配分函数 22.2 基础 σ 场 4

3 涨落与关联 6
3.1 本征模涨落 63.2 空间二点关联 9

4 各向异性关联 12
4.1 二点关联 124.2 三点和四点关联 134.3 与粒子数涨落的关系 16

5 总结与展望 17

1 引言

高能核物理的一个核心目标是理解不同温度和重子密度条件下的 QCD 相变 [1–4]。利用格点 QCD、有效模型和泛函方法，在绘制 QCD 相图方面已取得显著的理论进展 [5–29]。在实验上，相对论重离子碰撞产生的高温高密夸克-胶子等离子体（QGP），为通过其动力学演化探测 QCD 相结构提供了独特的实验室 [30–35]。人们借助临界信号来解释实验测量与非临界背景预期之间的偏差，例如净质子涨落 [36–40]、轻核产额比 [41, 42]、重子-奇异数关联 [43, 44]，以及带电强子分布中的间歇性 [45, 46]。

这些偏离信号的解释在很大程度上依赖于对临界涨落的理论建模。临界动力学由 QCD 序参量场（记为 σ 场）的慢模（即低能模）支配。这些模超出了标准流体动力学的适用范围，后者假定局域热平衡并伴随快速弛豫。在等温条件的假设下，对 σ 场零模的研究预言了高阶累积量 [36]的非单调行为。人们已通过朗之万方程和福克-普朗克方程 [47–54]等框架，投入大量努力来理解非平衡动力学和有限尺寸效应对涨落演化的影响。最近，现代流体动力学模型也纳入了等温临界

关联函数，以提供包含临界模贡献的更为现实的动力学描述 [55–58]。

然而，在局域有限系统的临界模研究中通常采用的等温近似，忽略了空间非均匀的流体力学背景对慢模及其相关信号的整体影响。在先前的研究中，我们证明了此类温度梯度能够定性地改变一维几何中的相变物理性质 [59]。在本文中，我们将研究扩展到更现实的情形，考察柱对称的非均匀热浴中的 σ 场的临界涨落。

在第2节中，我们使用类伊辛有效势和受 Gubser流启发的温度剖面，构建 σ 场的概率分布泛函，并推导出在静态非均匀温度背景下使概率分布达到最大值的基底序参量场。在第3节中，我们分析围绕该基底场的线性化涨落，并计算由此产生的激发模的谱和空间分布。这些低能模局域在相变界面附近，并且由于系统具有柱对称性，可按其角动量量子数进行分类。因此，系统呈现出内禀的各向异性空间关联，其特征是在等温线方向上具有长程相干性，而在径向上受到强烈抑制。对涨落进行分解，可以直接分析热几何如何在不同模之间重新分配涨落强度。与均匀系统不同，非均匀背景中的低能谱始终表现出非零谱隙。此外，具有不同角动量量子数的本征模叠加会减小关联长度。在第4节中，我们将 σ 场分解为不同的角动量本征模，并考察每个分量的关联结构。具有非零角动量的模与各向异性流谐波直接对应，而后者已成为重离子碰撞实验中广泛确立的可观测量。我们在第5节中总结主要结果，并展望未来工作。

2 理论框架

2.1 配分函数

为了定性地捕捉火球系统的关键特征并简化建模，采用以下假设：

首先，由于本文关注相变过程中的临界涨落，我们将 σ 场的慢模视为唯一相关的动力学自由度。其他所有自由度，例如夸克、胶子、强子以及 σ场的快模，均假设会迅速弛豫至局域热平衡，从而构成一个热浴，决定空间变化的温度和重子化学势分布。随后，支配 σ 场的有效哈密顿量密度可表示为

$$\mathcal{H}(\hat{\pi},\hat{\sigma}) = \hat{\pi}^2/2 + (\nabla\hat{\sigma})^2/2 + \mathcal{V}(\hat{\sigma},T,\mu), \tag{2.1}$$

其中，$\hat{}\pi(\boldsymbol{r})$ 是序参量场 $\hat{}\sigma(\boldsymbol{r})$ 的共轭动量，而有效势 $\mathcal{V}(\hat{}\sigma,\ T,\ \mu)$ 则包含了所有被积分消去的自由度所产生的贡献。

其次，火球的大部分位于临界区域之外（即远离相变界面），在那里临界慢化效应变得很弱。在这些非临界区域中，假定 σ 场迅速弛豫到局域热平衡。相比之下，在狭窄的临界区域内，σ 场应经历强烈的临界慢化，并受到非临界区域中周围已平衡的 σ 场所施加的边界约束。

第三，由于我们的主要目标是研究温度非均匀性如何影响临界涨落，我们假定背景化学势在空间上均匀，并且温度分布在相关时间尺度上近似保持静态。这使得我们可以忽略实时动力学演化，并将系统视为处于准稳态。在此假定下，认为 σ 场与给定的热力学背景处于瞬时热平衡。

最后，我们对 σ 场构型的统计权重采用局域平衡假设。给定构型的概率由基于局部温度构造的空间变化的玻尔兹曼因子决定。具体而言，以 $\boldsymbol{r}$ 为中心的小空间体积元 $\Delta\boldsymbol{r}$ 对配分函数的贡献近似为

$$\mathcal{Z}_{\Delta\boldsymbol{r}} = \mathrm{Tr}\exp\left\{-\int_{\Delta\boldsymbol{r}} d^3\boldsymbol{r}\frac{\mathcal{H}(\hat{\pi},\hat{\sigma})}{T(\boldsymbol{r})}\right\}, \tag{2.2}$$

其中，迹“Tr”表示对$\Delta\boldsymbol{r}$内所有场构型进行泛函积分，且全文始终采用 $\hbar = k_B = 1$。该表达式假设热背景静态，并忽略局部流体流动的影响，即背景四速度。若将系统置于纵向（即束流方向）共动系中，这一假设是合理的；这与 Bjorken 标度近似一致，在该近似下，横向膨胀和流速在主导阶均被忽略。因此，序参量场的完整配分函数可形式化地表示为对所有空间单元求积：

$$\mathcal{Z} = \prod_{\boldsymbol{r}} \mathcal{Z}_{\Delta\boldsymbol{r}} = \mathrm{Tr}\exp\left\{-\int d^3\boldsymbol{r}\frac{\mathcal{H}(\hat{\pi},\hat{\sigma})}{T(\boldsymbol{r})}\right\}. \tag{2.3}$$

由于温度 $T(\boldsymbol{r})$随空间变化，因此无法将其从积分中提出。相反，这一组合定义了有效哈密顿量密度 $\mathcal{H}_{\mathrm{eff}}(\pi,\ \sigma) = \mathcal{H}(\pi,\ \sigma)/T(\boldsymbol{r})$，以及相应的空间均匀有效温度$T_{\mathrm{eff}} = 1$ （无量纲）。

将配分函数写成路径积分形式

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\pi \int_{\mathrm{periodic}} \mathcal{D}\sigma \exp\left\{\int_0^1 d\tau \int d^3\boldsymbol{r}\left[i\pi\partial_\tau\sigma - \mathcal{H}_{\mathrm{eff}}(\pi,\sigma)\right]\right\}, \tag{2.4}$$

其中，“周期性”意味着 σ 场满足 $\sigma(\boldsymbol{r},\ \tau=0) = \sigma(\boldsymbol{r},\ \tau=1)$。对 π 场积分后得到

$$\mathcal{Z} = \int_{\mathrm{periodic}} \mathcal{D}\sigma e^{S[\sigma]}. \tag{2.5}$$

作用量的形式为

$$S[\sigma] = -\int_0^1 d\tau \int d^3\boldsymbol{r} \left[\frac{T(\partial_\tau\sigma)^2}{2} + \frac{(\nabla\sigma)^2}{2T} + \frac{\mathcal{V}(\sigma,T,\mu)}{T}\right]. \tag{2.6}$$

在配分函数中，使权重 e^S 最大的 σ 场称为基准 σ 场（即鞍点近似），记为 σ_c。σ_c 场满足极值条件

$$\left.\frac{\delta S}{\delta\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_c} = 0, \tag{2.7}$$

或明确地写为，

$$-T^2\partial_\tau^2\sigma - \nabla^2\sigma + \frac{\nabla\sigma\cdot\nabla T}{T} + \frac{\partial}{\partial\sigma}\mathcal{V}(\sigma,T,\mu) = 0. \tag{2.8}$$

2.2 基准 σ 场

基准构型 σ_c使有效作用量最小，必须满足 $\partial_\tau\sigma_c = 0$由方程（2.6）给出。原则上，有效势 $\mathcal{V}$（σ，T，μ）应由唯象模型推导得出。然而，由于 QCD相变与三维伊辛模型属于同一普适类，我们采用参数化的类伊辛势，以实现普适描述并便于计算。具体而言，我们采用与以下文献中相似的形式 [54, 59]

$$\mathcal{V}(\sigma,T,\mu) = \eta_1\sigma + \eta_2\sigma^2/2 + \eta_4\sigma^4/4. \tag{2.9}$$

势中的系数假定为以下形式：

$$\eta_1 = 0.5\mathrm{fm}^{-2}\times(T-T_c), \tag{2.10}$$
$$\eta_2 = -0.5\mathrm{fm}^{-1}\times(\mu-\mu_c), \tag{2.11}$$
$$\eta_4 = 14.4. \tag{2.12}$$

采用这些参数，随着温度降低，势可呈现不同的相变情景，例如，μ 较小时发生交叉，μ 较大时发生一级相变。临界点的位置也作为输入给定，并设为（T_c，μ_c）=(170，240)兆电子伏特。

在流体动力学分析中，假设系统具有纵向推动不变性，则可将系统有效简化为 2+1维。我们沿用这一假设，并进一步假定系统沿束流方向具有旋转对称性。因此，在任意固定的时空快度下，系统都可简化为一个厚度为 d_z 的圆盘，其纵向方向（束流方向）上的厚度为 $T(\boldsymbol{r}) = T(\rho)$，其中 ρ 表示到圆盘中心的径向距离。采用柱坐标（ρ，θ，z），并在 z 方向采用零动量模近似，上述方程（2.8）变为

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}\right) + \frac{\hat{L}_z^2}{\rho^2}\sigma + \frac{1}{T}\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}\frac{\partial T}{\partial\rho} + \eta_1 + \eta_2\sigma + \eta_4\sigma^3 = 0, \tag{2.13}$$

其中角动量算符为

$$\hat{L}_z = -i\frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{2.14}$$

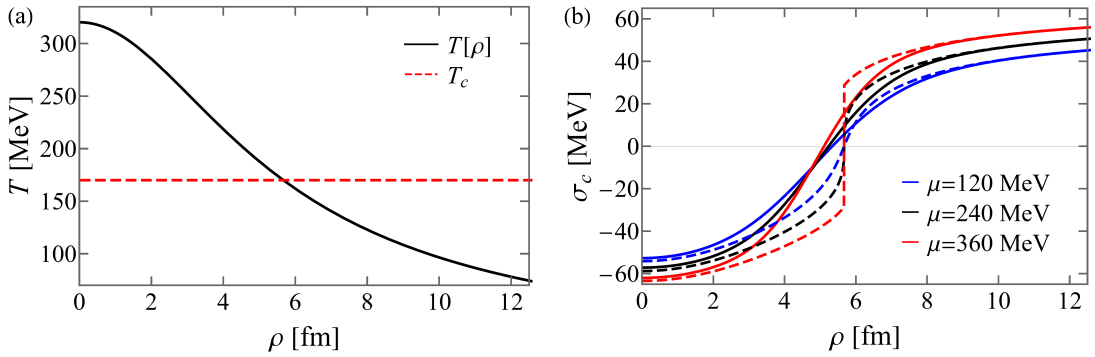

图 1。（a）空间温度分布随半径 ρ的变化。（b）基底场 σ_c 随 ρ的变化。实线（虚线）表示不同化学势下方程（2.15）的解；作为比较，虚线表示由 $\partial_\sigma \mathcal{V} = 0$确定的结果。

对于基底场，角动量为零。因此，极值条件变为

$$-\frac{\partial^2 \sigma_c}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_c}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_c}{\partial \rho}\frac{\partial \ln T}{\partial \rho} + \eta_1 + \eta_2 \sigma_c + \eta_4 \sigma_c^3 = 0. \tag{2.15}$$

假设系统的温度剖面为

$$T(\rho) = \frac{C}{t}\frac{(2qt)^{2/3}}{[1 + 2q^2(t^2+\rho^2) + q^4(t^2-\rho^2)^2]^{1/3}}, \tag{2.16}$$

其形式是在理想 Gubser 流的框架下推导得到的 [57, 60]。为简便起见，在以下分析中假设重子化学势在空间中均匀。由于本文主要关注 σ 场的瞬时稳态分布，因此我们选取某一特定时刻的温度剖面，令 $t = 1$ 飞米，其他参数为 $C = 2.8$，以及 $q = 1/4.3$ 飞米。空间依赖的温度绘于图 1（a）中。从图中可以清楚地看出，温度随 ρ的增加而降低，空间温度梯度约为 20 兆电子伏特/飞米。

为说明非均匀温度对基底场的影响，我们对方程（2.15）进行数值求解。所得基态场构型 σ_c（ρ）（实线）对应于 $\mu = 120$、240、360 兆电子伏特，结果如图 1（b）所示。作为比较，点线表示采用局域平衡近似所得的结果，该近似通过逐点最小化有效势得到，$\partial_\sigma \mathcal{V}$（$\sigma$、$T$（$\rho$） μ） $= 0$，忽略了空间梯度，因而忽略了方程（2.15）在整个空间中施加的非局域约束。在远离相变区域（或临界区域）时，基底场 σ_c 与局域平衡值重合，这表明临界区域中的 σ 场确实受到周围非临界区域中处于平衡状态的 σ_c 场的约束。

基底场符号的改变标志着相变 σ_c。在局域平衡近似下，由有效势的参数化形式（$T = 170$兆电子伏特（对应于 $\rho = 5.7$飞米）决定，三种情形下的相变都发生在相同温度 2.9）-（2.12）。然而，纳入空间梯度后， σ场在相变区域内变得平滑，即使在 $\mu = 360$

兆电子伏特。此外，符号改变的位置 σ_c （表示由 σ 场指示的有效相变点）会向半径较小、背景温度较高的区域移动。化学势越大，这种偏移越明显。

3 涨落与关联

3.1 本征模涨落

下面，我们将通过围绕基底场$\sigma(\boldsymbol{r},\tau) = \sigma_c(\boldsymbol{r})+\tilde{\sigma}(\boldsymbol{r},\tau)$微扰展开概率分布（2.5），推导此类非均匀系统的涨落与关联，其中 $\tilde{\sigma}(\boldsymbol{r},\tau)$表示涨落。注意，涨落项同时依赖于 ρ 和方位角 θ。作用量分为两部分： $S[\sigma_c(\boldsymbol{r})]$和涨落部分 $\Delta S[\tilde{\sigma}(\boldsymbol{r},\tau)]$,

$$\Delta S[\tilde{\sigma}(\boldsymbol{r},\tau)] = -\int_0^1 d\tau \int d^3\boldsymbol{r}\left(\frac{1}{2}\tilde{\sigma}\hat{\mathcal{O}}\tilde{\sigma} + \frac{\lambda_3}{3}\tilde{\sigma}^3 + \frac{\lambda_4}{4}\tilde{\sigma}^4\right), \tag{3.1}$$

其中

$$\hat{\mathcal{O}} = \overleftarrow{\partial_\tau} T \overrightarrow{\partial_\tau} + \overleftarrow{\nabla}\frac{1}{T}\cdot\overrightarrow{\nabla} + V_{\text{eff}}(\rho) \quad \text{with} \quad V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{(\eta_2 + 3\eta_4\sigma_c^2)}{T}, \tag{3.2}$$

$$\lambda_3 = \frac{3\eta_4\sigma_c}{T}, \qquad \lambda_4 = \frac{\eta_4}{T}. \tag{3.3}$$

带帽符号上的箭头表示算符作用的方向。

在微扰理论中，非高斯涨落被视为高阶项，将在后续章节中计算。对于高斯部分，涨落项$\tilde{\sigma}(\boldsymbol{r},\ \tau)$可以用厄米算符 $\mathcal{O}$的一组完备正交本征函数展开。可以验证， L_z 与 $\mathcal{O}$对易，因为 T、 $\eta_{1,\ 2,\ 4}$ 和σ_c 均沿 z轴具有旋转对称性。因此，在 z 方向采用零动量模近似时， $\tilde{\sigma}$ 展开为

$$\tilde{\sigma}\left(\boldsymbol{r},\tau\right) = \sum_{\lambda,l=-\infty}^{\infty}\sum_n c_{\lambda nl}R_{\lambda nl}\left(\rho\right)\Theta_l\left(\theta\right)e^{-i\omega_\lambda\tau}, \tag{3.4}$$

其中松原频率为 $\omega_\lambda = 2\pi\lambda$ ，且 $\lambda\in\mathbb{Z}$，这是由周期性条件$\sigma\left(\boldsymbol{r},\ 0\right) = \sigma\left(\boldsymbol{r},\ 1\right)$所决定的。 $\Theta_l(\theta) = e^{il\theta}/\sqrt{2\pi}$，其中 l表示角动量量子数。 n 是给定 λ 和 l时标记径向激发能级的整数指标。径向和角向本征函数分别正交归一化如下:

$$\int_0^\infty R^*_{\lambda n'l}\left(\rho\right)R_{\lambda nl}\left(\rho\right)\rho d\rho = \delta_{nn'}, \tag{3.5}$$

$$\int_0^{2\pi}\Theta^*_{l'}\left(\theta\right)\Theta_l\left(\theta\right)d\theta = \delta_{l'l}. \tag{3.6}$$

算符 $\hat{}\mathcal{O}$ 对本征函数 $R_{\lambda nl}(\rho)\ \Theta_l(\theta)\,e^{-i\omega_\lambda\tau}$ 的对应本征值记为 $E_{\lambda nl}$。由于 σ 为实数，$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^*$。因此，作用量的二次部分变为

$$\Delta S[\tilde{\sigma}] = -\frac{1}{2}\int_0^1 d\tau\int d^3\boldsymbol{r}\tilde{\sigma}^*\hat{\mathcal{O}}\tilde{\sigma} = -\frac{1}{2}d_z\sum_{\lambda nl}c^*_{\lambda nl}E_{\lambda nl}c_{\lambda nl}, \tag{3.7}$$

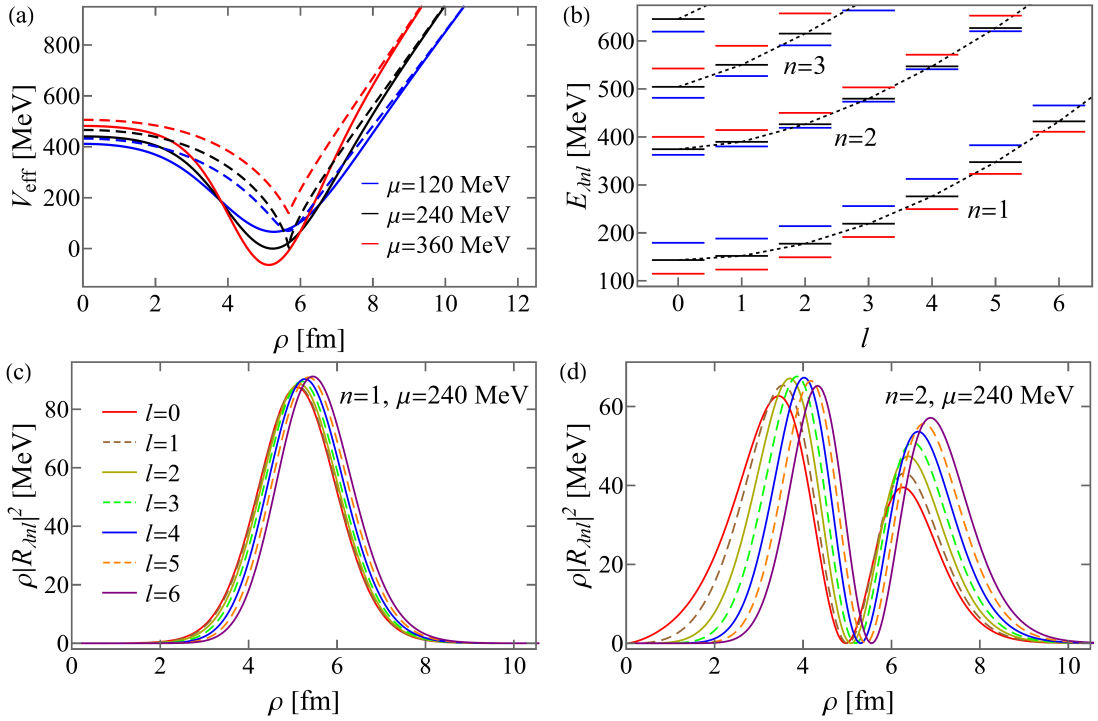

图2。（a）有效势的径向依赖 $V_{\rm eff}$。实线对应 σ_c在 $V_{\rm eff}$ 中由方程（2.15确定的结果，虚线则表示由条件 $\partial_\sigma \mathcal{V} = 0$得到的轮廓对应的结果。不同颜色表示三种化学势下的结果： $\mu = 120$兆电子伏特（蓝色）、240 兆电子伏特（黑色）和 360 兆电子伏特（红色）。（b）采用相同的配色方案表示 μ，不同径向（n）和角动量（l）模对应的涨落谱。（c）和（d）分别展示了第一（$n = 1$）和第二（$n = 2$）径向激发的径向概率密度，不同颜色表示不同的角动量模，化学势固定为 $\mu = 240$ 兆电子伏特。所有面板中的松原模均为 $\lambda = 0$。

其中 d_z 为圆盘的（常数）厚度。另一方面，直接计算可得，保留至二阶项时，

$$\Delta S[\tilde{\sigma}] = -\frac{1}{2}\int_0^1 d\tau \int d^3\boldsymbol{r}\tilde{\sigma}^*\hat{\mathcal{O}}\tilde{\sigma} = -\frac{1}{2}d_z \sum_{\lambda nn'l} c^*_{\lambda n'l}c_{\lambda nl}\int d\rho[\sqrt{\rho}R^*_{\lambda n'l}]\hat{\mathcal{O}}_{\lambda l}[\sqrt{\rho}R_{\lambda nl}], \quad (3.8)$$

其中

$$\hat{\mathcal{O}}_{\lambda l} = T(\rho)\omega_\lambda^2 + \overleftarrow{\partial}_\rho \frac{1}{T(\rho)}\overrightarrow{\partial}_\rho - \overleftarrow{\partial}_\rho \frac{1}{2\rho}\frac{1}{T(\rho)} - \frac{1}{2\rho}\frac{1}{T(\rho)}\overrightarrow{\partial}_\rho + \frac{1}{4\rho^2}\frac{1}{T(\rho)} + \frac{1}{T(\rho)}\frac{l^2}{\rho^2} + V_{\rm eff}(\rho). \quad (3.9)$$

ˆ 因此， $\sqrt{\rho}R_{\lambda nl}(\rho)$确实是厄米算符 $\mathcal{O}_{\lambda l}$ 的本征函数，其本征值为$E_{\lambda nl}$。

在图 2(a) 中，我们展示了涨落的有效势 $V_{\rm eff}(\rho)$，该有效势使用基准构型 σ_c 计算得到，该基准构型由极值条件（2.15）（实线）或局域平衡条件 $\partial_\sigma \mathcal{V} = 0$ （虚线）确定。在局域平衡条件下， $V_{\rm eff}(\rho)$ 对应于 σ 场的局域有效质量平方（以温度 T 为单位），其始终非负，且仅在临界点处为零。

相比之下，由极值条件得到的实线曲线在相变区域（$\rho \approx 4-7$ 飞米）内，对全部三个化学势 $\mu = 120$、240、360兆电子伏特均表现出显著的软化与展宽。值得注意的是， $V_{\rm eff}(\rho)$在一级相变区域（$\mu > 240$ 兆电子伏特）内可以为负。有效势的这一修正源于空间非均匀的温度剖面，它改变了基态场构型，进而重塑了临界界面附近的有效势。

将圆盘半径设为 20 飞米后，我们把径向坐标离散为 480 个网格点，并构造算符 $\mathcal{O}_{\lambda l}$（定义见方程 (3.9)）的有限差分矩阵表示。对该矩阵进行数值对角化，可得到由有效势支配的量子涨落的谱 $E_{\lambda nl}$ 及相应本征函数 $R_{\lambda nl}(\rho)$。图2 (b) 展示了零松原模 ($\lambda = 0$) 下的涨落谱 $E_{\lambda nl}$ 随径向量子数 (n) 和角动量量子数 (l) 变化的情况。所有本征值均严格为正，这证实了基准构型的稳定性，尽管在一级相变区域，有效势本身可能变为负值。值得注意的是，对于所有化学势取值，最低激发模都具有有限的能量值（能隙）；这与均匀系统在具有平移对称性的临界点处预期出现的零能戈德斯通模形成鲜明对比。具体而言，对于 $n = 1$ 和 $\lambda = 0$，谱近似具有形式 $E_{\lambda nl} = \Delta + \alpha l^2$，其中 Δ 为能隙， α 可通过拟合 $E_{\lambda nl} \sim l$ 曲线得到。对于当前参数设定， $\Delta = 181.85$、145.12、116.14 兆电子伏特，以及$\alpha = 7.97$、8.04、8.23 兆电子伏特分别对应 $\mu = 120$、240、360 兆电子伏特。一级相变区域的能隙甚至小于临界点处的能隙。

对于固定的径向量子数 n，本征值随角动量l增加。这一趋势源于算符中的离心势项 $l^2/(\rho^2 T)$（3.9），它在能量上抑制方位角涨落。由此得到的谱展示了温度非均匀性如何重构低能涨落模。值得注意的是，在 450 兆电子伏特附近施加能量截断后，只保留满足 $n = 1$、$l \lesssim 6$ 以及 n =2 的模，$l \lesssim 2$。将截断值降至 250 兆电子伏特后，谱进一步限于仅满足$n = 1$ 的模。这表明，在较低能标下径向激发受到抑制，临界点附近仅剩一系列方位角涨落成为主导的低能自由度。

图 2 （c）和（d）分别展示了在 $\rho|R_{\lambda nl}(\rho)|^2$ 下， $n = 1$ 和 $n = 2$ 径向激发的 $\mu = 240$ 兆电子伏特时的分布。不同颜色的曲线对应不同的角动量量子数 l。对于面板（c）中的 $n = 1$ 模，一个显著特征是所有涨落都强烈空间局域于相变区域（$4 \lesssim \rho \lesssim 7$ 飞米），该区域与面板（a）中有效势软化的区域相吻合。这证实了临界涨落并非均匀分布，而是局限在狭窄的界面区域内，此处局部温度跨越临界值 T_c。此外，增大 l 会使分布峰值略微向外移至更大的半径，这是离心势的直接结果。对于面板（d）中的 $n = 2$模，$\rho|R_{\lambda nl}(\rho)|^2$ 的分布如预期那样在 $R_{\lambda nl}(\rho)$中呈现一个径向节点。同样，较大的 l 会使本征函数略微向外移动。

ˆ 在上述分析中，我们关注的是 $\mathcal{O}_{\lambda l}$ 的本征值和本征函数

对应于 $\lambda = 0$ 的零松原模。原则上，计算关联函数及相关物理可观测量需要对所有松原频率求和。我们考察了非零模 $\lambda = \pm 1$、± 2、$\cdots$，发现 $\hat{\mathcal{O}}_{\lambda l}$ 的本征值随 $|\lambda|$ 迅速增大。此外，由于 $T(\rho)\omega_\lambda^2$ 项的作用（该项在温度最低的外边界处达到最小值），相应的本征函数主要局域在圆盘的外边界附近 $\hat{\mathcal{O}}_{\lambda l}$，因此远离临界涨落最显著的相变界面。因此，这些非零松原模对临界区域内关联的贡献可以忽略。基于这一观察，我们在后续所有计算中仅考虑零松原模。这相当于忽略涨落对 τ 的依赖。

综合来看，图2 所示结果表明，温度非均匀性会在相变界面附近产生空间局域的“临界带”。在该区域内，涨落并非由在均匀系统中占主导的零动量模所支配，而是由一族具有最低径向激发（$n = 1$）以及一系列有限方位量子数（l）的低能模所支配。这表明，非均匀系统中的临界涨落本质上是各向异性的，并且内热外冷的温度剖面会增强方位激发。此外，从维数角度看，低能涨落被限制在相变界面附近狭窄的过渡层内，表明相变的有效维数实际上降低了一维。

3.2 空间二点关联

在本部分中，我们研究由不同角动量通道产生的非局域二点关联的空间模式，以及它们叠加所形成的关联结构。由于$\sqrt{\rho}R_{\lambda nl}(\rho)$以及由此得到的 $R_{\lambda nl}$ 均为实函数，且算符$\hat{\mathcal{O}}_{\lambda l}$ 仅依赖于 λ^2 和 l^2，函数 $R_{\lambda nl}(\rho)$与 λ 和 l的符号无关。因此，$R_{\lambda nl}(\rho) = R_{-\lambda n-l}(\rho)$。利用 $\tilde{\sigma}$ 为实这一事实，$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^*$，我们得到

$$c^*_{-\lambda n-l} = c_{\lambda nl}. \tag{3.10}$$

$c_{\lambda nl}$ i 对于 $\lambda = l = 0$实数。从作用量 (3.7) 中，我们得到系数的关联 ts,

$$\langle c^*_{\lambda' n' l'} c_{\lambda nl}\rangle = \frac{1}{d_z E_{\lambda nl}} \delta_{\lambda'\lambda}\delta_{n'n}\delta_{l'l}. \tag{3.11}$$

因此，涨落的 $\tilde{\sigma}$ 关联变为

$$\langle \tilde{\sigma}(\boldsymbol{r},\tau)\tilde{\sigma}(\boldsymbol{r}',\tau)\rangle = \sum_{\lambda nl} \frac{R_{\lambda nl}(\rho)\, R_{\lambda nl}(\rho')\, \Theta_l(\theta)\, \Theta^*_l(\theta')}{d_z E_{\lambda nl}}. \tag{3.12}$$

图3 展示了非局域二点关联函数 $\langle \tilde{\sigma}(\boldsymbol{r},\tau)\tilde{\sigma}(\boldsymbol{r}',\tau)\rangle d_z$来自前几个低能本征模（$E_{\lambda nl} \lesssim 450$兆电子伏特）的各项贡献。前两行对应于最低径向激发（$n = 1$），角动量模逐渐增大，而第三行显示第二径向激发（$n = 2$）的模。

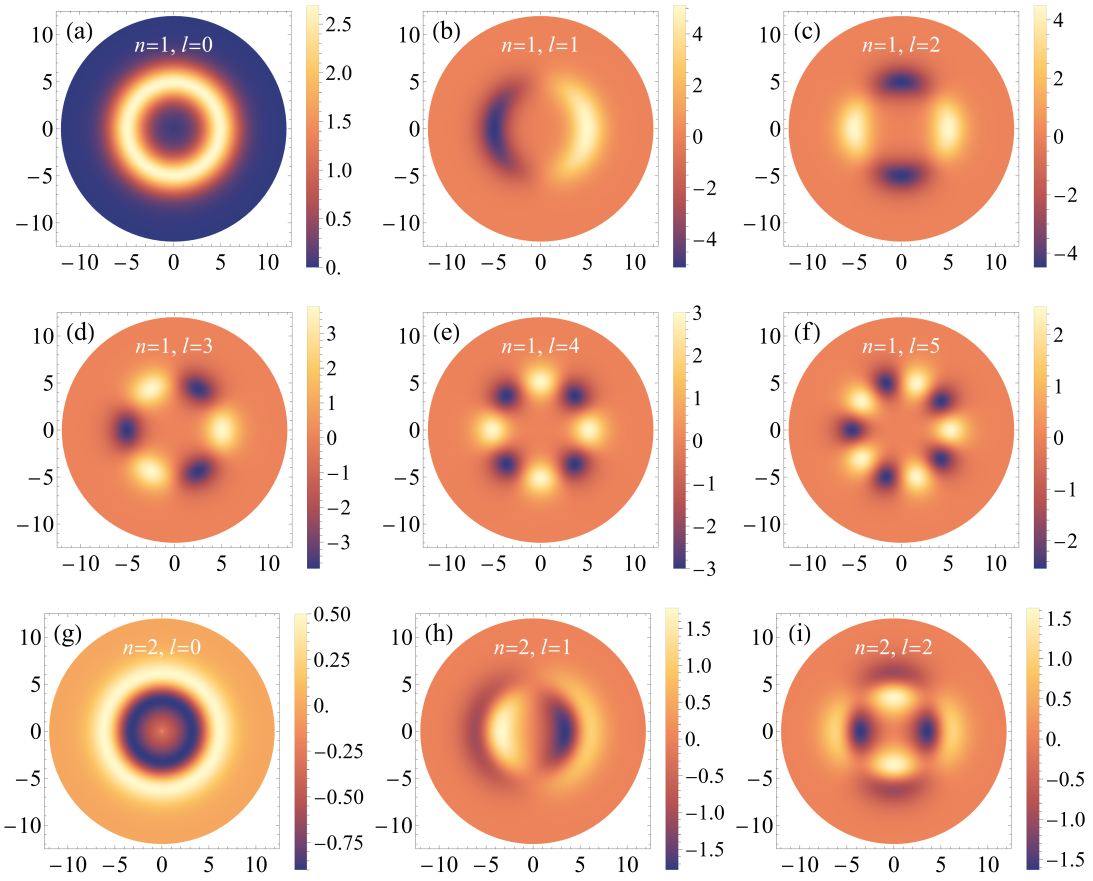

图 3。前几个低能涨落模对非局域两点关联函数 $\langle\tilde{\sigma}(\boldsymbol{r},\ \tau)\tilde{\sigma}(\boldsymbol{r}',\ \tau)\rangle d_z$（单位：兆电子伏特）的各项贡献。每个面板展示了由径向量子数（n）和角动量量子数（l）的特定组合所产生的关联图样（请注意，对于 $l>0$，结果对 $\pm l$ 模求和）。对于所有子图，锚点 $\boldsymbol{r}'$ 固定在 (5.83，0) 飞米处，松原模为 $\lambda=0$，化学势为 $\mu=240$ 兆电子伏特。空间坐标 x 和 y 以飞米为单位。

各面板中标出了具体的（n，l）取值。将一点 $\boldsymbol{r}'$（称为锚点）固定在相变区域（$\boldsymbol{r}'=$ (5.83，0)飞米）内的某一位置，并在圆盘上计算它与另一点的关联。所有结果均对应于化学势 $\mu=240$ 兆电子伏特和松原模 $\lambda=0$。对于非零的 l，所绘制的关联表示 $+l$ 模与 $-l$ 模之和。在数值计算中，系统定义在半径为20飞米的圆盘上；为清晰起见，仅显示至10飞米的内部区域，因为相关涨落局域在该范围内。

值得注意的是，对于 $l=0$ 模式，关联强度沿任意等温线都是均匀的，而与到锚点位置的距离无关，这反映了方位角（旋转）对称性的保持。更高阶的l 模式表现出与 $l=0$ 模式几乎相同的关联强度径向局域化，但引入了明显的角向调制。 l 每增加一次，都会产生相应数量的交替

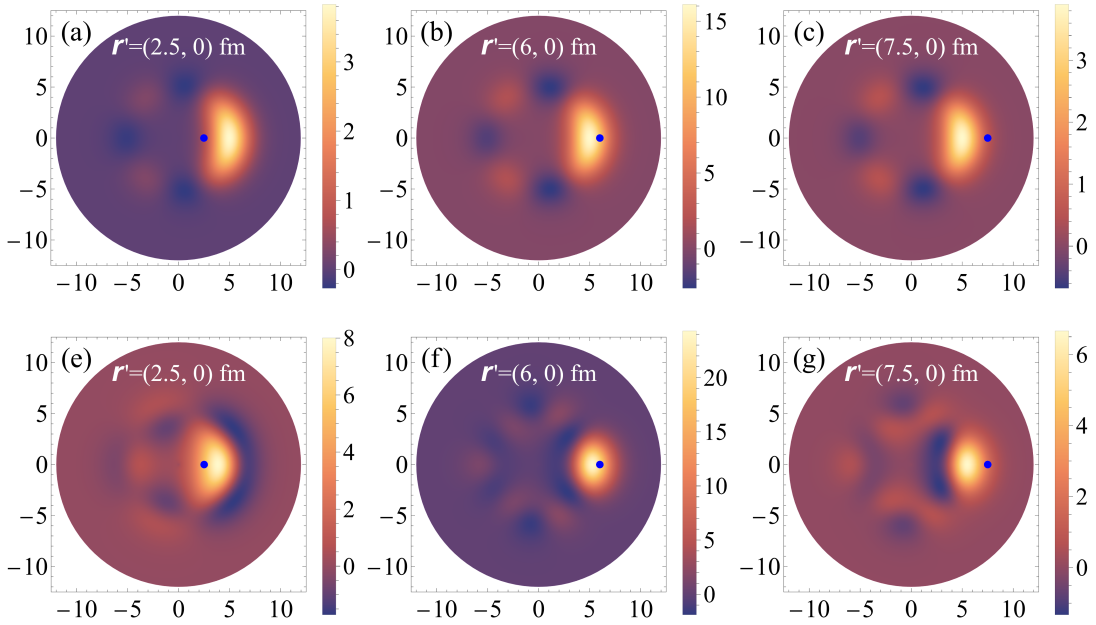

图4。对于每个面板中分别固定在 $\boldsymbol{r}' = (2.5, 0)$ 飞米、$(6, 0)$ 飞米和 $(7.5, 0)$ 飞米处的锚点（标记为蓝点），关联 $\langle\tilde{\sigma}(\boldsymbol{r}, \tau)\tilde{\sigma}(\boldsymbol{r}', \tau)\rangle d_z$ 的单位为兆电子伏特。第一行对低于 250 兆电子伏特的低能模求和，包括第一径向模 $n = 1$ 对应的角动量模$l \leq 3$ 。第二行对低于 450 兆电子伏特的低能模求和，包括 $n = 1$ 对应的角动量模 $l \leq 6$ ，以及 $n = 2$ 对应的角动量模 $l \leq 2$ 。所有子图中的化学势为 $\mu = 240$ 兆电子伏特，松原模为 $\lambda = 0$。

增强与抑制的关联扇区沿等温环分布，反映出系统性的角量子化。从第三行可以看出，随着 n 增大，会出现额外的径向节点，而增大 l 则会在角向引入更多节点。

与上一节相符的类似观察是，对于不同的模，非局域关联也局限在相变区域（$\rho \approx 4 - 7$ 飞米）周围。此外，对于给定的 n，不同 l 模的最大关联强度仍大致相当，这表明非零角动量涨落所占权重与各向同性 $l = 0$ 模相当。这些结果表明，全局热几何在构造空间非局域关联方面也发挥着重要作用。温度梯度不仅使涨落在径向上局域化，还将其组织成方位谐波，从而沿径向和方位方向形成各向异性关联。

在图4中，我们展示了这些不同本征模对二点关联的累积效应，其中锚点 $\boldsymbol{r}'$ （以蓝色标出）分别位于各列的$(2.5, 0)$ 飞米、$(6, 0)$ 飞米和$(7.5, 0)$ 飞米。这些点分别位于圆盘的高温区域、相变区域和低温区域内。上行显示仅对能量低于250兆电子伏特且量子数为 $n = 1$, $l \leq 3$的模求和所得的结果。下行包含能量低于450兆电子伏特且$n = 1, l \leq 6$ 以及 $n = 2$, $l \leq 2$的更广泛一组模。关联剖面最强出现在锚点

位于相变区域之内 [分图(b)和(e)]。当锚点位于该区域之外时，整体关联减弱，其最大值偏离锚点原来的等温线并移向相变区域。这一行为直接来自径向本征函数 $R_{\lambda nl}(\rho)$在方程（3.12）中的结构；对于低径向模，这些本征函数在相变区域内呈现尖锐峰值。

一个重要的观察结果是，对各模求和会使空间关联局域化。随着纳入具有非零角动量的模，$l = 0$ 模的长程方位相干性逐渐被打散，主导关联也逐渐局限于锚点附近的局域区域。同时，对比两行可以看出，纳入更多高能模后，锚点附近的关联强度显著增强。纳入更多模时，这一结论得到了进一步证实。然而，在实际中，我们假定高能模已在低能有效模型中被积分掉。因此，在接下来的计算中，我们只纳入最低分支（$n = 1$），它局域于相变区域。

4 各向异性关联

从以上各节可以看出，非零角动量模对关联的贡献相当。为了观察各角动量模的单独贡献，我们定义一个无量纲量，

$$\tilde{\sigma}_l(\rho,\tau) \equiv \int dz \int_0^{2\pi} d\theta \tilde{\sigma}(\boldsymbol{r},\tau)\, e^{-il\theta} = d_z\sqrt{2\pi} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \sum_n c_{\lambda nl} R_{\lambda nl}(\rho)\, e^{-i\omega_\lambda \tau}, \tag{4.1}$$

这与各向异性流的实验定义直接类似。由于 $\tilde{\sigma}$ 场为实数，根据上述定义可以验证，$\tilde{\sigma}_l^*(\rho,\tau) = \tilde{\sigma}_{-l}(\rho,\tau)$。

4.1 二点关联

不同 l 模之间的二点关联为

$$\left\langle \tilde{\sigma}_l^*(\rho,\tau)\, \tilde{\sigma}_{l'}(\rho',\tau') \right\rangle = 2\pi d_z \delta_{l'l} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} G_{\lambda l}(\rho,\rho') e^{i\omega_\lambda(\tau-\tau')}, \tag{4.2}$$

其中 $G_{\lambda l}(\rho,\rho') = \sum_n R_{\lambda nl}(\rho) R_{\lambda nl}(\rho')/E_{\lambda nl}$。由于系统具有旋转对称性，只有当 $l' = l$ 时，关联才非零。请注意，上式中的求和是对所有 λ 进行的。然而，在临界区域，绝对占主导地位的贡献来自 $\lambda = 0$ 项，因为所有其他项都可以忽略不计。此外，假设系统的有效能标，计算中仅考虑最低分支（$n = 1$）。

图 5 展示了局部二点关联函数的径向依赖$g_l(\rho) \equiv \rho^2\langle\tilde{\sigma}_l(\rho,\tau)\,\tilde{\sigma}_{-l}(\rho,\tau)\rangle/d_z$对于不同模 $l = 0,1,2,3$。不同面板分别给出了化学势为 $\mu = 120,240,$ 和 360 兆电子伏特时的结果。在不同角动量模的相变区域均观察到明显的关联增强。随着 $g_l(\rho)$ 的增大，峰值振幅降低 l,

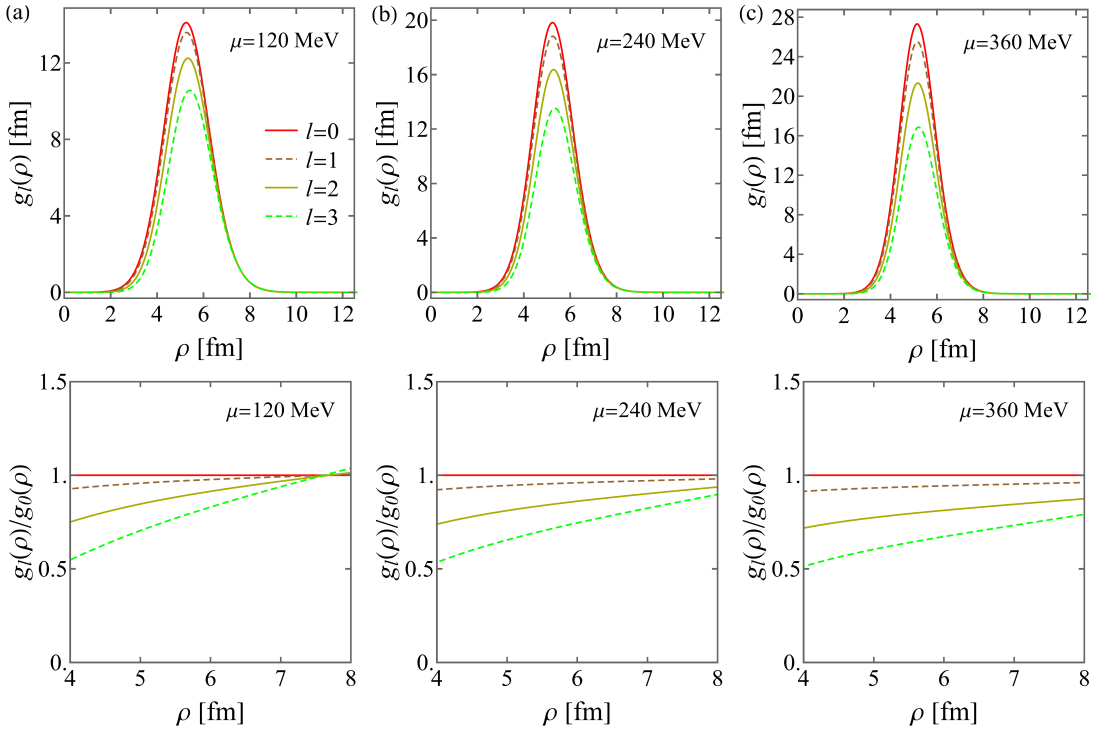

图5。二点关联 $g_l(\rho) = \rho^2\langle\tilde{\sigma}_l(\rho,\ \tau)\ \tilde{\sigma}_{-l}(\rho,\ \tau)\rangle/d_z$ 随 ρ 变化的比较，其中 $l = 0$，1，2，3分别对应 $\mu = 120$、240 和 360 兆电子伏特。

这与相应能级较高相一致。然而值得注意的是，不同模的各向异性涨落强度相近，这与均匀系统有显著差异；在均匀系统中，临界点附近只有零模占主导。这是空间温度梯度引起有限能隙的直接结果，它抑制了径向的长程相干性，并将涨落强度重新分配至有限角动量通道。

三种化学势下均出现相同的趋势，这表明这种涨落模式是具有温度梯度的系统的内在特征，与相变的具体阶数无关。在这种非均匀热背景中，涨落自然会分布于多个角动量通道。因此，临界附近的动力学会发生根本性改变；完整的理论框架，例如朗之万方程或福克-普朗克方程，在处理过程中必须纳入一系列有限-l 涨落模。

4.2 三点关联和四点关联

基于微扰理论，我们计算了这些非零角动量模的三点与四点关联。三点与四点关联的树图绘制于图 6。经过繁琐的约化，三点等时

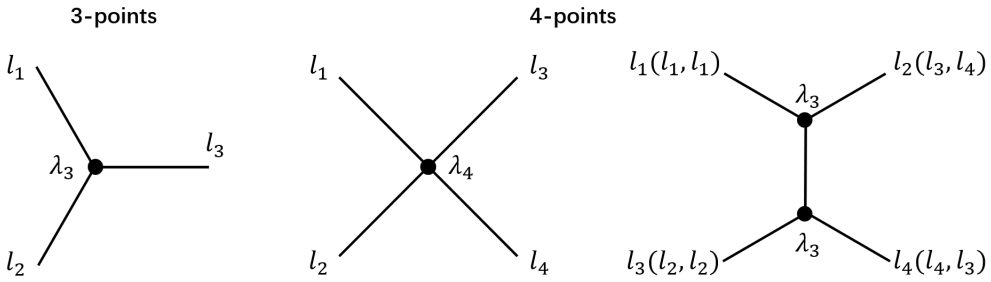

图 6。三点关联（左）以及四点关联（中和右）的费曼图。

不同角动量模的关联为

$$\Gamma^3_{l_1 l_2 l_3}(\rho) = \langle \tilde{\sigma}_{l_1}(\rho,\tau)\,\tilde{\sigma}_{l_2}(\rho,\tau)\,\tilde{\sigma}_{l_3}(\rho,\tau)\rangle = -12\pi d_z \eta_4 \delta_{l_1+l_2+l_3,0} \times \sum_{\lambda_1,\lambda_2}\int d\rho' \frac{\rho'\sigma_c(\rho')}{T(\rho')} G_{\lambda_1 l_1}(\rho,\rho') G_{\lambda_2 l_2}(\rho,\rho') G_{\lambda_1+\lambda_2, l_3}(\rho,\rho'), \tag{4.3}$$

四点等时关联为

$$\begin{aligned}\Gamma^4_{l_1 l_2 l_3 l_4}(\rho) = {} & \langle \tilde{\sigma}_{l_1}(\rho,\tau)\,\tilde{\sigma}_{l_2}(\rho,\tau)\,\tilde{\sigma}_{l_3}(\rho,\tau)\,\tilde{\sigma}_{l_4}(\rho,\tau)\rangle = -12\pi d_z \eta_4 \delta_{l_1+l_2+l_3+l_4,0} \\ & \times \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}\int d\rho' \frac{\rho'}{T(\rho')} G_{\lambda_1 l_1}(\rho,\rho') G_{\lambda_2 l_2}(\rho,\rho') G_{\lambda_3 l_3}(\rho,\rho') G_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, l_4}(\rho,\rho') \\ & + 72\pi d_z \eta_4^2 \delta_{l_1+l_2+l_3+l_4,0} \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}\int d\rho_1 \int d\rho_2 \frac{\rho_1\sigma_c(\rho_1)}{T(\rho_1)} \frac{\rho_2\sigma_c(\rho_2)}{T(\rho_2)} \\ & \times \Big[G_{\lambda_1 l_1}(\rho,\rho_1) G_{\lambda_2 l_2}(\rho,\rho_1) G_{\lambda_3 l_3}(\rho,\rho_2) G_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, l_4}(\rho,\rho_2) G_{\lambda_1+\lambda_2, l_1+l_2}(\rho_1,\rho_2) \\ & + G_{\lambda_1 l_1}(\rho,\rho_1) G_{\lambda_2 l_3}(\rho,\rho_1) G_{\lambda_3 l_2}(\rho,\rho_2) G_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, l_4}(\rho,\rho_2) G_{\lambda_1+\lambda_2, l_1+l_3}(\rho_1,\rho_2) \\ & + G_{\lambda_1 l_1}(\rho,\rho_1) G_{\lambda_2 l_4}(\rho,\rho_1) G_{\lambda_3 l_2}(\rho,\rho_2) G_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, l_3}(\rho,\rho_2) G_{\lambda_1+\lambda_2, l_1+l_4}(\rho_1,\rho_2) \Big].\end{aligned} \tag{4.4}$$

克罗内克δ符号因角动量守恒而同时出现在三点和四点关联中。它在不同的 l 模态之间起选择定则的作用，这意味着只有 l 值的特定组合才能产生非零关联。在低能标下，尽管求和应遍历所有 λ 和 n 值，但有效且占主导地位的贡献来自 $\lambda = 0$ 和 $n = 1$。

图 7 展示了非高斯涨落随径向坐标的变化ρ，涵盖了角动量模的若干种组合。所有情况下，相变区域内都观察到了明显增强。值得注意的是，非零角动量模的关联振幅达到与零模相当的量级，这与图5所示二点关联函数中的行为一致。二点、三点和四点关联之间的相似性可以

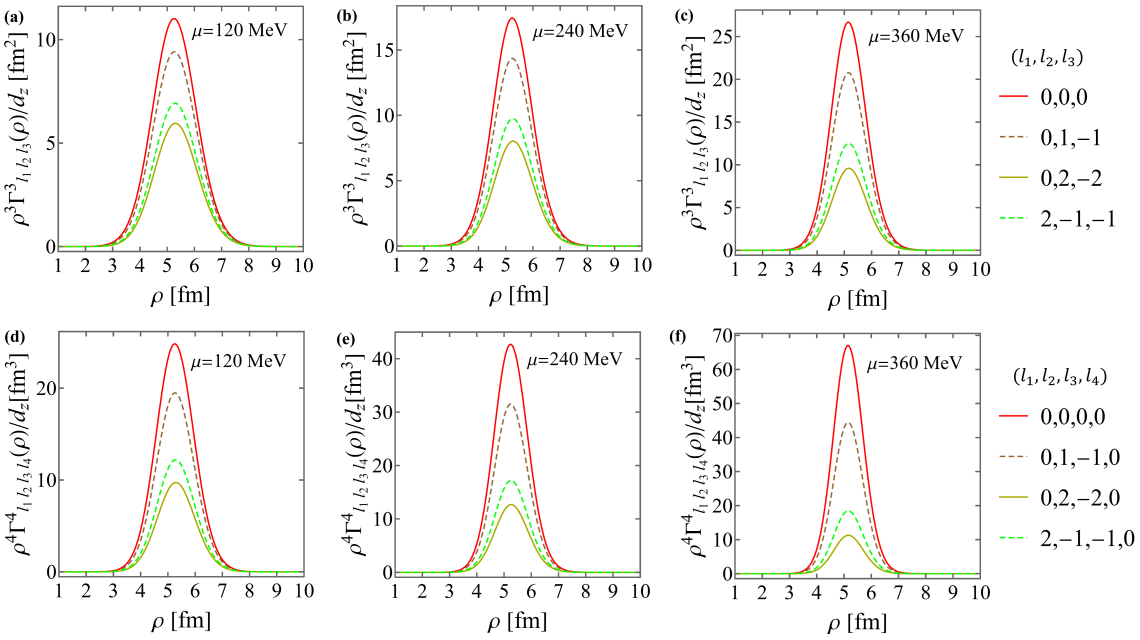

图 7。在 $\mu = 120$ 兆电子伏特、240 兆电子伏特和 360 兆电子伏特下，三点关联（上排）和四点关联（下排）随 ρ 的变化，分别对应不同的角动量模组合。

主要归因于本分析中施加的能量截断，它将贡献限制在最低径向模（$n = 1$）。如图2的子图 (c) 所示，概率密度的整体形状对 $n = 1$ 模的角动量模选择并不敏感。

根据上述对高斯和非高斯各向异性关联的分析，非零 l 模的显著性表明，温度梯度背景下的临界涨落具有明显的空间各向异性，这种各向异性体现在序参量场的方位角结构中。这种行为与两种广为人知的极限情形形成鲜明对比：（i）接近临界点的均匀系统中，涨落由零模主导，而非零模的贡献可以忽略；（ii）纯统计（高斯）涨落中，所有角模的权重相同，且涨落严格服从高斯分布；在这种情况下，高阶涨落消失。

在当前温度非均匀设置中，梯度诱导的有效势通过有限谱隙抑制原本会发散的关联函数，并将涨落强度重新分配到多个有限的l 通道中。因此，即使经过系综平均，涨落谱仍保留着可测量的各向异性印记，这是空间变化的背景所施加的对称性破缺的直接结果。原则上，这种结构化的涨落可以传递到末态粒子分布中，如下一小节所示。

4.3 与粒子数涨落的关系

在本部分，我们将理论预言与实验观测联系起来。 σ 场的涨落可以与末态质子的涨落相关联，而末态质子是寻找 QCD相变信号的主要观测量 [36]。在热平衡的假设下，冻结面上的质子分布被认为遵循玻尔兹曼分布

$$n\left(\boldsymbol{r}\right)=\int d\boldsymbol{p}\exp\left\{-\left[\sqrt{\boldsymbol{p}^{2}+g^{2}(\sigma_{0}+\sigma)^{2}}-\mu\right]/T(\boldsymbol{r})\right\}. \tag{4.5}$$

质子质量源于其通过 $\bar{p}p(\sigma+\sigma_0)$ g 与 σ 场的耦合，其中 g 为耦合强度。这里， σ_0 （常数）是伊辛参数化中所用的序参量位移，因此相变发生在 $\sigma=0$ [54]。将σ 场展开为 $\sigma=\sigma_c+\tilde{\sigma}$后， σ 中的涨落会转化为质子数涨落。在线性阶近似下，可得 [36]

$$n\left(\boldsymbol{r}\right)=n_{c}\left(\rho\right)+\delta n(\boldsymbol{r})=n_{c}\left(\rho\right)+\tilde{h}(\rho)\tilde{\sigma}(\boldsymbol{r}), \tag{4.6}$$

其中 n_c 由将 $\sigma=\sigma_c$ 代入方程（4.5）得到，并且

$$\tilde{h}(\rho)=-\int d\boldsymbol{p}\frac{g^{2}(\sigma_{0}+\sigma_{c})}{T\left(\rho\right)\sqrt{\boldsymbol{p}^{2}+g^{2}(\sigma_{0}+\sigma_{c})^{2}}}\exp\left[-\frac{\sqrt{\boldsymbol{p}^{2}+g^{2}(\sigma_{0}+\sigma_{c})^{2}}-\mu}{T\left(\rho\right)}\right]. \tag{4.7}$$

类似于上述对 σ奇异角动量模的定义，我们将特定角动量通道中窄（$\Delta\rho$）表面上的质子数涨落定义为

$$\delta N_{l}\left(\rho\right)\equiv\rho\Delta\rho\int dz\int_{0}^{2\pi}d\theta e^{-il\theta}\delta n\left(\boldsymbol{r}\right)=h(\rho)\tilde{\sigma}_{l}, \tag{4.8}$$

其中 $\tilde{h(\rho)}\equiv h(\rho)\rho\Delta\rho$。注意， δN_l 携带了质子多重数的各向异性信息。于是，涨落粒子数的二点、三点和四点关联可表示为

$$\left\langle \delta N_{l_{1}}\left(\rho\right)\delta N_{l_{2}}\left(\rho\right)\right\rangle =h^{2}(\rho)\left\langle \tilde{\sigma}_{l_{1}}\left(\rho,0\right)\tilde{\sigma}_{l_{2}}\left(\rho,0\right)\right\rangle , \tag{4.9}$$

$$\left\langle \delta N_{l_{1}}\left(\rho\right)\delta N_{l_{2}}\left(\rho\right)\delta N_{l_{3}}\left(\rho\right)\right\rangle =h^{3}(\rho)\left\langle \tilde{\sigma}_{l_{1}}\left(\rho,0\right)\tilde{\sigma}_{l_{2}}\left(\rho,0\right)\tilde{\sigma}_{l_{3}}\left(\rho,0\right)\right\rangle , \tag{4.10}$$

$$\left\langle \delta N_{l_{1}}\left(\rho\right)\delta N_{l_{2}}\left(\rho\right)\delta N_{l_{3}}\left(\rho\right)\delta N_{l_{4}}\left(\rho\right)\right\rangle =h^{4}(\rho)\left\langle \tilde{\sigma}_{l_{1}}\left(\rho,0\right)\tilde{\sigma}_{l_{2}}\left(\rho,0\right)\tilde{\sigma}_{l_{3}}\left(\rho,0\right)\tilde{\sigma}_{l_{4}}\left(\rho,0\right)\right\rangle \tag{4.11}$$

提取 h（ρ）中的 ρ ，并将其与 σ的关联相结合，质子与 σ 不同阶关联之间的关系一般可表示为

$$\left\langle \delta N_{l_{1}}\left(\rho\right)\delta N_{l_{2}}\left(\rho\right)\right\rangle \propto\rho^{2}\left\langle \tilde{\sigma}_{l_{1}}\left(\rho,0\right)\tilde{\sigma}_{l_{2}}\left(\rho,0\right)\right\rangle , \tag{4.12}$$

$$\left\langle \delta N_{l_{1}}\left(\rho\right)\delta N_{l_{2}}\left(\rho\right)\delta N_{l_{3}}\left(\rho\right)\right\rangle \propto\rho^{3}\Gamma_{l_{1}l_{2}l_{3}}^{3}(\rho), \tag{4.13}$$

$$\left\langle \delta N_{l_{1}}\left(\rho\right)\delta N_{l_{2}}\left(\rho\right)\delta N_{l_{3}}\left(\rho\right)\delta N_{l_{4}}\left(\rho\right)\right\rangle \propto\rho^{4}\Gamma_{l_{1}l_{2}l_{3}l_{4}}^{4}(\rho). \tag{4.14}$$

因此， σ 场的这些各向异性关联（具有有限的 l）原则上应在末态质子分布中留下自身的印记。除观测逐事件多重数涨落之外，相变信号还可自然地反映

在各向异性流的测量中。因此，方位角敏感观测量，尤其是高阶流系数及其关联，为探测QCD相变的印记提供了一条直接且互补的实验途径，恰好利用了此处所揭示的各向异性增强。

然而在实践中，从重离子数据中提取此类临界信号颇具挑战，因为它们与许多非临界效应相互叠加，包括初始涨落 [61,62], 体积涨落 [63], 动力学演化 [56–58], 以及冻结过程 [64, 65]。因此，在实验中，必须通过测量结果与精心建模的非临界背景预期之间的偏差来识别临界信号。在本研究中，我们仅关注 σ 场的临界关联，从而为潜在的临界涨落提供清晰的理论预测。

5 总结与展望

在本研究中，我们建立了一个量子统计框架，用于研究伊辛模型中手征序参量场的局域平衡涨落和空间关联；该系统具有空间非均匀的温度剖面，其设定依据是相对论重离子碰撞中的条件。通过在温度梯度背景下构造 σ 场的配分函数及相应的有效作用量，我们推导了基态场构型，并以微扰方法分析了二点涨落。此外，我们提取了单个角动量模，并将其与实验观测量联系起来。

这一形式体系的一个核心成果，是明确识别出系统可能存在的激发模。对于给定的能量截断，低能涨落的谱可以系统地分解为一组本征模，并由径向（n）和角动量（l）量子数表征。这种分解使我们能够逐模直接分析涨落贡献，并揭示临界区域主要激发了局域于相变界面附近的模。

我们的结果表明，涨落的空间模式从根本上受到系统热几何的影响。具体而言，非局域关联表现出显著的各向异性：对于具有特定 n 和 l 的单个模，它们沿等温线保持长程相干性；而由于温度梯度的存在，径向的涨落受到强烈抑制。值得注意的是，这些不同本征模的累积叠加会逐步破坏初始的长程方位相干性，使关联强度日益局域于一个固定锚点周围。从长程相干性向局域关联模式的这一转变，展现了模的叠加如何重塑系统整体的关联结构。

此外，我们提取并分析了非零角动量模各自的贡献，这些模表现出彼此相当的关联强度。从物理角度看，空间温度梯度通过其自身的梯度项引入了一个连续能标。这自然会改变涨落模的分布，使系统从均匀条件下由零动量模主导的状态转变为多个角动量通道以相近权重参与的非均匀状态

。通过构建与实验各向异性流系数类似的可观测量，我们将这些具有结构的有限-l 涨落直接关联到重离子碰撞中的可测量量，从而在我们的理论框架与潜在实验信号之间建立了具体的桥梁。

总之，本文提出的形式体系为理解温度梯度如何重塑相变非均匀系统中的涨落模式提供了新视角。我们的研究结果表明，方位角敏感观测量，尤其是各向异性流涨落，可能有助于提高对临界现象的探测灵敏度，并提供互补信息。高阶涨落将更易区分，相关计算结果将在近期公布。未来的研究应纳入实时动力学演化，并更明确地耦合流体力学背景，以便与能量扫描计划的实验数据进行定量比较。

致谢

感谢 Xiaofeng Luo、Nu Xu、Yi Yin、Huichao Song 和 Yu-xin Liu 的有益讨论和意见。L. Jiang 感谢国家自然科学基金委员会通过项目编号 12105223 和 12247103 提供的支持；T. Yang 获得国家自然科学基金委员会项目编号 12575029 和 12175180 的资助；J.-H. Zheng 感谢国家自然科学基金委员会项目编号 12575028 以及陕西省自然科学基础研究计划项目编号 2024JC-YBMS-022 的支持。

参考文献

[1] STAR合作组, M. M. Aggarwal 等, 量子色动力学相图的实验探索：寻找临界点与禁闭解除的起始, arXiv:1007.2613.[2] L. Adamczyk 等 [STAR],能量扫描计划中相对论重离子碰撞所产生介质的整体性质, Phys. Rev. C 96, 044904 (2017).[3] X. Luo 和 N. Xu, 通过相对论重离子碰撞中守恒量的涨落寻找量子色动力学临界点：概述, Nucl. Sci. Tech. 28, 112 (2017).[4] A. Bzdak, S. Esumi, V. Koch, J. Liao, M. Stephanov 和 N. Xu, 通过能量扫描绘制量子色动力学的相结构, Phys. Rept. 853, 1 (2020).[5] F. R. Brown 等, 三个轻夸克的量子色动力学是否存在相变, Phys. Rev. Lett. 65, 2491 (1990).[6] Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz 和 K. K. Szab´o, 粒子物理标准模型对量子色动力学相变阶数的预测, Nature 443, 675 (2006).

[7] Y. Aoki, S. Bors´anyi, S. D¨urr, Z. Fodor, S. D. Katz, S. Krieg 和 K. K. Szabo, 量子色动力学相变温度：连续极限下物理质量的结果 II, JHEP 0906, 088 (2009).[8] C. S. Fischer, 基于戴森–施温格方程研究有限温度和化学势下的量子色动力学, Prog. Part. Nucl. Phys. 105, 1 (2019).[9] C. D. Roberts 和 S. M. Schmidt, 戴森–施温格方程：密度、温度与连续极限下的强相互作用量子色动力学, Prog. Part. Nucl. Phys. 45, S1 (2000).[10] S. X. Qin, L. Chang, H. Chen, Y. X. Liu 和 C. D. Roberts, 强相互作用夸克的相图与临界终点, Phys. Rev. Lett. 106, 172301 (2011).[11] C. S. Fischer, J. Luecker 和 C. A. Welzbacher, 三味和四味量子色动力学的相结构, Phys. Rev. D 90, 034022 (2014).[12] P. J. Gunkel 和 C. S. Fischer, 确定量子色动力学临界端点的位置：介子反耦合效应, Phys. Rev. D 104, 054022 (2021).[13] F. Gao 和 J. M. Pawlowski, 基于泛函方法研究量子色动力学相结构, Phys. Rev. D 102, 034027 (2020).[14] F. Gao 和 J. M. Pawlowski, 量子色动力学中的手征相结构与临界终点, Phys. Lett. B 820, 136584 (2021).[15] J. Berges, N. Tetradis 和 C. Wetterich, 量子场论与统计物理中的非微扰重整化流, Phys. Rept. 363, 223 (2002).[16] N. Dupuis, L. Canet, A. Eichhorn, W. Metzner, J. M. Pawlowski, M. Tissier 和 N. Wschebor, 非微扰泛函重整化群及其应用, Phys. Rept. 910, 1 (2021).[17] W. j. Fu, 基于泛函重整化群方法研究有限温度和密度下的量子色动力学：概述, Commun. Theor. Phys. 74, 097304 (2022).[18] W. j. Fu, J. M. Pawlowski 和 F. Rennecke, 有限温度和密度下的量子色动力学相结构, Phys. Rev. D 101, 054032 (2020).[19] T. K. Herbst, J. M. Pawlowski 和 B.-J. Schaefer, 超越平均场的 Polyakov-夸克介子模型相结构, Phys. Lett. B 696, 58 (2011).[20] S. P. Klevansky, 量子色动力学的南部–约纳-拉西尼奥模型, Rev. Mod. Phys. 64, 649 (1992).[21] K. Fukushima, 含 Polyakov圈的手征有效模型, Phys. Lett. B 591, 277 (2004).[22] W. J. Fu, Z. Zhang 和 Y. X. Liu, $2+1$ 味 Polyakov-南部–约纳-拉西尼奥模型在有限温度和非零化学势下的研究, Phys. Rev. D 77, 014006 (2008).[23] L. J. Jiang, X. Y. Xin, K. L. Wang, S. X. Qin 和 Y. X. Liu, 重新审视南部–约纳-拉西尼奥模型中三味夸克系统的相图, Phys. Rev. D 88, 016008 (2013).[24] B.-J. Schaefer 和 J. Wambach, 夸克介子模型的相图, Nucl. Phys. A 757, 479 (2005).[25] B.-J. Schaefer, J. M. Pawlowski 和 J. Wambach, Polyakov-夸克介子模型的相结构, Phys. Rev. D 76, 074023 (2007).

[26] G. Y. Shao, M. Di Toro, V. Greco, M. Colonna, S. Plumari, B. Liu 和 Y. X. Liu, 《强子-PNJL模型中的相图》, Phys. Rev. D 84, 034028 (2011)。[27] S. He, S. Y. Wu, Y. Yang 和 P. H. Yuan, 《动力学软墙全息QCD模型中的相结构》, JHEP 04, 093 (2013)。[28] K. Chelabi, Z. Fang, M. Huang, D. Li 和 Y. L. Wu, 《AdS/QCD软墙模型中的手征相变》, JHEP 04, 036 (2016)。[29] X. Chen, L. Zhang, D. Li, D. Hou 和 M. Huang, 《全息理论中的旋转条件下胶子动力学与退禁闭相变》, JHEP 07, 132 (2021)。[30] T. D. Lee 和 G. Wick, 《自旋为0的场论中的真空稳定性与真空激发》, Phys. Rev. D 9, 2291 (1974)。[31] M. Gyulassy 和 L. McLerran, 《在RHIC发现的新型QCD物质》, Nucl. Phys. A 750, 30 (2005)。[32] I. Arsene 等 [BRAHMS], 《RHIC中的夸克胶子等离子体和色玻璃凝聚？来自BRAHMS实验的观点》, Nucl. Phys. A 757, 1 (2005)。[33] J. Adams 等 [STAR], 《寻找夸克胶子等离子体的实验与理论挑战：STAR合作组对RHIC碰撞证据的批判性评估》, Nucl. Phys. A 757, 102 (2005)。[34] H. Song, S. A. Bass, U. Heinz, T. Hirano 和 C. Shen, 《200 A GeV Au+Au碰撞形成近乎完美的夸克-胶子液体》, Phys. Rev. Lett. 106, 192301 (2011)。[35] W. Busza, K. Rajagopal 和 W. van der Schee, 《重离子碰撞：全景与重大问题》, 核与粒子科学年度评论 68, 339 (2018)。[36] M. A. Stephanov, 《QCD临界点附近的非高斯涨落》, Phys. Rev. Lett. 102, 032301 (2009)。[37] C. Athanasiou, K. Rajagopal 和 M. Stephanov, 《利用涨落的高阶矩及其比值寻找QCD临界点》, Phys. Rev. D 82, 074008 (2010)。[38] M. A. Stephanov, 《论QCD临界点附近峰度的符号》, Phys. Rev. Lett. 107, 052301 (2011)。[39] W. j. Fu, X. Luo, J. M. Pawlowski, F. Rennecke, R. Wen 和 S. Yin, 《有限温度和密度下的超高阶重子数涨落》, Phys. Rev. D 104, 094047 (2021)。[40] J. Adam 等 [STAR], 《净质子数涨落的非单调能量依赖》, Phys. Rev. Lett. 126, 092301 (2021)。[41] K. J. Sun, L. W. Chen, C. M. Ko, J. Pu 和 Z. Xu, 《作为QCD相图探针的轻核产生》, Phys. Lett. B 781, 499 (2018)。[42] M. Abdulhamid 等 [STAR], 《RHIC中Au_t ×Au碰撞的氚核产生及产额比（N_p/N_d^2N）的束流能量依赖》, Phys. Rev. Lett. 130, 202301 (2023)。[43] V. Koch, A. Majumder 和 J. Randrup, 《重子-奇异数关联：强相互作用物质的诊断工具》, Phys. Rev. Lett. 95, 182301 (2005)。[44] D. Bollweg, H. T. Ding, J. Goswami, F. Karsch, S. Mukherjee, P. Petreczky 和 C. Schmidt, 《（2+1）味QCD赝临界线上的奇异数关联》, Phys. Rev. D 110, 054519 (2024)。

[45] J. Wu, Y. Lin, Y. Wu 和 Z. Li, 《相对论重离子碰撞中通过间歇性分析探测QCD临界涨落》, Phys. Lett. B 801 (2020), 135186。[46] M. Abdulhamid 等 [STAR], 《RHIC中Au+Au碰撞带电强子间歇性的能量依赖》, Phys. Lett. B 845, 138165 (2023)。[47] B. Berdnikov 和 K. Rajagopal, 《QCD临界点附近偏离平衡的减速》, Phys. Rev. D 61, 105017 (2000)。[48] M. A. Stephanov, 《QCD临界点附近涨落的演化》, Phys. Rev. D 81, 054012 (2010)。[49] S. Mukherjee, R. Venugopalan 和 Y. Yin, 《QCD临界区中非高斯累积量的实时演化》, Phys. Rev. C 92, 034912 (2015)。[50] L. Jiang, S. Wu 和 H. Song, 《临界区及一级相变过程中的动力学涨落》, Nucl. Phys. A967, 441 (2017)。[51] L. Jiang 和 J. Chao, 《QCD临界点附近A 模型中的非平衡累积量》, Eur. Phys. J. A 59, 30 (2023)。[52] M. Sakaida, M. Asakawa, H. Fujii 和 M. Kitazawa, 《临界涨落的动力学演化及其在重离子碰撞中的观测》, Phys. Rev. C 95, 064905 (2017)。[53] M. Nahrgang, M. Bluhm, T. Schaefer 和 S. A. Bass, 《QCD临界点附近临界涨落的扩散动力学》, Phys. Rev. D 99, 116015 (2019)。[54] L. Jiang, H. St¨ocker 和 J. H. Zheng, 《具有参数化Landau自由能的QCD手征序参量的平衡与动力学累积量》, Eur. Phys. J. C 83, 117 (2023)。[55] M. Nahrgang, S. Leupold, C. Herold 和 M. Bleicher, 《包含耗散与噪声的非平衡手征流体动力学》, Phys. Rev. C84, 024912 (2011)。[56] M. Stephanov 和 Y. Yin, 《临界点附近具有参数化减速和涨落的流体动力学》, Phys. Rev. D 98, 036006 (2018)。[57] L. Du, U. Heinz, K. Rajagopal 和Y. Yin, 《QCD临界点附近的涨落动力学》, Phys. Rev. C 102, 054911 (2020)。[58] X. An, G. Basar, M. Stephanov 和 H. U. Yee, 《非高斯流体动力学涨落的演化》, Phys. Rev. Lett. 127, 072301 (2021)。[59] J.-H. Zheng 和 L. Jiang, 《类伊辛模型中非均匀温度对相变的影响》, Phys. Rev. D 104, 016031 (2021)。[60] S. S. Gubser, 《Bjorken 流推广形式的对称性约束》, Phys. Rev. D 82, 085027 (2010)。[61] L. Pang, Q. Wang 和 X. N. Wang, 《事件逐一（3+1）维流体动力学中初始流速涨落的影响》, Phys. Rev. C 86, 024911 (2012)。[62] C. Shen 和 B. Schenke, 《相对论重离子碰撞的动力学初态模型》, Phys. Rev. C 97, 024907 (2018)。[63] V. Skokov, B. Friman 和 K. Redlich, 《体积涨落与净重子数的高阶累积量》, Phys. Rev. C 88, 034911 (2013)。[64] M. S. Pradeep 和 M. Stephanov, 《流体动力学涨落的最大熵冻结》, Phys. Rev. Lett. 130, 162301 (2023)。

[65] M. Pradeep、K. Rajagopal、M. Stephanov 和 Y. Yin，《流体动力学中涨落的冻结》+，靠近量子色动力学临界点，Phys. Rev. D **106**，036017（2022年）。