arXiv:2603.04929v1 [math.RT] 5 Mar 2026

2026年3月5日

$\mathfrak{g}$ 的球面分裂及 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ 的相关泊松交换子代数

DMITRI I. PANYUSHEV 和 OKSANA S. YAKIMOVA

摘要。设李代数 $\mathfrak{q}$ 是两个互补子代数 $\mathfrak{h}$ 和$\mathfrak{r}$的线性和。我们继续开展始于（《*J. London Math. Soc.*》**103**（2021），1577–1595）的研究；该研究探讨了与分裂 $\mathfrak{q}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{r}$ 相关的相容泊松括号，以及对称代数 $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$的相关泊松交换子代数。本文进一步发展一般理论，并更详细地研究约化李代数的分裂，其中 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{r}$ 均为可解极限球面子代数。我们还运用这一方法推导出 Adler–Kostant–Symes理论的一些结果。

1. 引言

基域 $\Bbbk$ 是代数闭的，且 特征$\Bbbk=0$。假定所有李代数都是代数的。一个 分裂 （对李代数 $\mathfrak{q}$）是向量空间分解 $\mathfrak{q}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{r}$，其中$\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{r}$ 均为李子代数。尽管这一设定类似于 Adler–科斯坦特–Symes 定理 [1, 4.4], 我们走的是另一条路径。本文是 [21], 的续篇，我们在其中定义了与分裂相关联的相容 Poisson 括号（在[21]中称为 2-分裂），并研究了对称代数 $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ 中相关的 泊松交换 (=PC) 子代数 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$ 。我们的目标是详细阐述那些良好情形，其中 $\operatorname{tr.deg}\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$ 达到最大，且 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$ 是多项式环。由此得到若干新的完全可积系统。关于 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$ 的基本构造与结果对任意 $\mathfrak{q}$ 均成立，但实质性应用是针对约化代数群及其李代数得到的。因此，在引言的其余部分，我们仅讨论约化情形。

设 G 是一个连通约化群，其李代数为 $G=\mathfrak{g}$。若 $\mathcal{A}$ 是$\mathcal{S}(\mathfrak{g})$的 PC 子代数，则 $\operatorname{tr.deg}\mathcal{A}\leqslant b(\mathfrak{g}):=\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g}+\operatorname{rk}\mathfrak{g})$，见 [28, 0.2]。若 $\operatorname{tr.deg}\mathcal{A}=b(\mathfrak{g})$，则称 $\mathcal{A}$ 是大的。 $\mathfrak{g}$的对称不变量代数记为 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ 或 $\mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{g})$，它是李–泊松代数 $(\mathcal{S}(\mathfrak{g})\ \{\ ,\ \})$的中心。它是一个由 $\ell=\operatorname{rk}\mathfrak{g}$个变量构成的分次多项式环，我们用它来构造 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$的 PC 子代数。 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ 的任意一组代数独立齐次生成元称为希尔伯特基。若 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{r}$，则存在李代数压缩，将 $\mathfrak{g}$ 压缩为半直积 $\mathfrak{g}^{(0)}:=\mathfrak{h}\ltimes\mathfrak{r}^{\mathrm{ab}}$ 和$\mathfrak{g}^{(\infty)}:=\mathfrak{r}\ltimes\mathfrak{h}^{\mathrm{ab}}$，其中第二个因子是阿贝尔理想。这里，$\mathfrak{r}^{\mathrm{ab}}$（分别为 $\mathfrak{h}^{\mathrm{ab}}$）自然地视为 $\mathfrak{h}$-模 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ （分别为 $\mathfrak{r}$-模 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$）。设 $\{\ ,\ \}_0$ 和 $\{\ ,\ \}_\infty$ 是李–泊松

2020 数学主题分类。17B63, 14L30, 17B08, 17B20, 22E46.关键词和短语。分裂，余伴随表示，对称不变量。1

括号，分别属于 $\mathfrak{g}_{(0)}$ 和 $\mathfrak{g}_{(\infty)}$。那么 $\{\ ,\ \}_0+\{\ ,\ \}_\infty$ 是 的李–泊松括号（参见第 3）。因此这些括号是相容的。子代数 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$ 由这些相容泊松括号通过使用 *Lenard–Magri*方案 得到（参见第 2.1节），关键在于确定 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$ 是否大，并具有其他良好性质。

令 $\operatorname{ind}\mathfrak{q}$ 表示 $\mathfrak{q}$ 的指数。根据李代数压缩的标准性质，$\operatorname{ind}\ \mathfrak{g}_{(0)}\geqslant\operatorname{ind}\ \mathfrak{g}=\operatorname{rk}\ \mathfrak{g}$ 且 $\operatorname{ind}\ \mathfrak{g}_{(\infty)}\geqslant\operatorname{rk}\mathfrak{g}$。于是有以下结论。

(i) $\operatorname{ind}^{\mathfrak{g}_{(0)}}=\operatorname{rk}\ \mathfrak{g}$ 当且仅当 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的球面子代数 $\mathfrak{g}$ (对于 $\mathfrak{g}_{(\infty)}$ 和$\mathfrak{r}$亦然)，参见 [21, 第 2] 节和 [27]。(ii) 若 $\operatorname{ind}^{\mathfrak{g}_{(0)}}=\operatorname{ind}\ \mathfrak{g}_{(\infty)}=\operatorname{rk}\ \mathfrak{g}$，则 $\operatorname{tr.deg}\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}=b(\mathfrak{g})$ [21, 定理 3.2]。(iii) 若 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ 的任意大 PC 子代数，则根据引理 1.1]，它在**一般的**正则 G-轨道上是完备的。

若 $\mathfrak{g}$ 的分裂满足 $\operatorname{ind}\mathfrak{g}_{(0)}=\operatorname{ind}^{\mathfrak{g}_{(\infty)}}=\operatorname{rk}\ \mathfrak{g}$，则称其为非退化。在 [21, 第 4-6], 节中，我们找到了若干具有大型**多项式** 环 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\mathfrak{r}\rangle}$的重要情形。例如，

- 如果 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{b}_-$ 是 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{u}_-=[\mathfrak{b}_-,\mathfrak{b}_-]$的相反 Borel 子代数，那么 $\mathfrak{g}=\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{u}_-$ 是一个非退化分裂。这里，$\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{b},\ \mathfrak{u}_-\rangle}$ 也是 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$的一个最大PC 子代数，它在 G的**所有**正则余伴随轨道上都是完备的。
- 设 $\vartheta_{\max}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个最大秩对合，即其 (-1)-特征子空间包含一个 Cartan 子代数。若 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\vartheta_{\max}$的不动点子代数，则存在一个 Borel 子代数$\mathfrak{b}$，使得 $\mathfrak{g}=\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{g}_0$。该分裂是非退化的，并且至少对于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$，$\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{b},\ \mathfrak{g}_0\rangle}$ 也是一个最大PC 子代数。

和 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{r}$ 为每个齐次$F\in\mathcal{S}(\mathfrak{g})$提供了一个双齐次分解。设 F_1、……、F_ℓ 是 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ 的希尔伯特基。根据 [21]，$\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h}}$由所有 $\{F_j\}$ 的双齐次分量以及 $\mathcal{ZS}(\mathfrak{g}_{(0)})$和 $\mathcal{ZS}(\mathfrak{g}_{(\infty)})$的生成元生成。记 $F^\bullet$（分别为 $F_\bullet$）为 F 中具有最小 $\mathfrak{h}$次数（分别为 $\mathfrak{r}$次数）的非零双齐次分量。于是，$F^\bullet\in\mathcal{Z}_0:=\mathcal{ZS}(\mathfrak{g}_{(0)})$，且 $F_\bullet\in\mathcal{Z}_\infty:=\mathcal{ZS}(\mathfrak{g}_{(\infty)})$。沿用 [20, 21],的说法，若 $F_1^\bullet$、……、$F_\ell^\bullet$代数独立（$\mathfrak{r}$和 $\{F_j{}_\bullet\}$也同样如此），则称 $\{F_j\}_{j=1}^\ell$是 $\mathfrak{h}$的良好生成系（= g.g.s.）。证明 $\mathcal{Z}_0$、$\mathcal{Z}_\infty$以及 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h}、\ \mathfrak{r}\rangle}$ 是多项式环时，通常需要存在良好生成系。

本文进一步发展了一般理论，并介绍了新的非退化分裂实例，其多项式环很大 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$。

1) 设 H 与 R 分别为 G 的连通子群，其李代数分别为 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{r}$。对于分裂 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{r}$，令 $s_0:=$ 超越次数 $\Bbbk((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^H$ 以及 $s_\infty:=$ 超越次数 $\Bbbk((\mathfrak{g}/\mathfrak{r})^*)^R$。我们证明 $s_0+s_\infty\geqslant\ell$，并且若 $s_0+s_\infty=\ell$，则该分裂是非退化的（定理 3.4）。对于非退化分裂，可以证明：若 $\mathcal{Z}_0$ 与 $\mathcal{Z}_\infty$ 是多项式环，且 $\mathfrak{h}$与 $\mathfrak{r}$存在公共 g.g.s.，则$\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\mathfrak{r}\rangle}$ 是多项式环（定理 3.11）。另一结果是：若 $\mathcal{Z}_0$ 与 $\mathcal{Z}_\infty$ 是多项式环且 $s_0+s_\infty=\ell$，则$\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\mathfrak{r}\rangle}$ 是多项式环

（定理 3.14）。我们还将和 $s_0 + s_\infty$ 与表示的某些性质联系起来$(H : (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)$ 与 $(R : (\mathfrak{g}/\mathfrak{r})^*)$，参见第3.2节。

2) 设 $\mathfrak{h}_+$ 是 $\mathfrak{g}$ 的可解极限球面子代数，即对某个 Borel$\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ 有 $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{h}_+ \subset \mathfrak{b}$。那么它有一个互补球面子代数 $\mathfrak{h}_- \subset \mathfrak{b}_-$。由此得到的非退化分裂 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_+ \oplus \mathfrak{h}_-$ 称为 horospherical 分解。我们给出了 $\mathfrak{h}_+$ 存在广义生成系的判据，并证明若存在广义生成系，则 $\mathcal{ZS}(\mathfrak{h}_+ \ltimes \mathfrak{h}_-^{ab})$ 是一个多项式环。因此，若 $\mathfrak{h}_+$ 和 $\mathfrak{h}_-$ （不一定是同一个！）各自存在广义生成系，那么 $\mathcal{Z}_{\langle \mathfrak{h}_+, \mathfrak{h}_- \rangle}$ 是一个（大）多项式环，见第 4 节。利用 $\mathfrak{h}_+$ 的环面部分以及 Richardson 的经典结果 [24], ，我们还给出了存在广义生成系的一个有用必要条件。

3）当 $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数且 $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \dotplus \tilde{\mathfrak{t}}$. 时，会出现一个良好的 horosphere 型分解。此时，$\tilde{\mathfrak{g}}$ 可以写成两个齐性子代数 $\mathfrak{h}$ 和 $\tilde{\mathfrak{r}}$ 的直和，其中任意一个都同构于 $\mathfrak{g}$ 的一个 Borel 子代数。因此，收缩 $\tilde{\mathfrak{g}}_{(0)}$ 和 $\tilde{\mathfrak{g}}_{(\infty)}$ 同构。我们为 $\tilde{\mathfrak{h}}$ 和 $\tilde{\mathfrak{r}}$ 指出某些广义生成系，这意味着 $\mathcal{ZS}(\tilde{\mathfrak{g}}_{(0)})$ 是一个多项式环，而 $\mathcal{Z}_{\langle \tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{r}} \rangle}$ 是 $\mathcal{S}(\tilde{\mathfrak{g}})$ 的一个（较大的）多项式 PC 子代数（定理 5.4）。此外，如果 F_1、……、F_ℓ 的次数都是偶数，那么我们就得到 $\tilde{\mathfrak{h}}$ 和 $\tilde{\mathfrak{r}}$ 的一个公共广义生成系。

4) 最大秩对合的 (-1)-特征子空间包含$\mathfrak{g}$的正则元。若 $\mathfrak{g}$ 为单代数，则仅有少数其他情形具有此性质。相应的对 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ 为：具有 $|n-2m| \leqslant 1$ 的 $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_m \dotplus \mathfrak{sl}_{n-m} \dotplus \Bbbk)$；$(\mathfrak{so}_{2n}, \mathfrak{so}_{n+1} \dotplus \mathfrak{so}_{n-1})$；$(\mathcal{E}_6, \mathcal{A}_5 \dotplus \mathcal{A}_1)$。对于这些 $\mathfrak{g}_0$，存在一个互补可解类抛物子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$。此外，$\mathfrak{g}_0$ 具有一个广义生成系，且 $\mathcal{ZS}(\mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{h}^{ab})$ 是一个多项式环 [17, 30]。我们证明，$\mathfrak{h}$ 具有广义生成系，当且仅当 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n}$ 或 $\mathfrak{so}_{2n}$。这意味着在这些情形下，$\mathcal{Z}_{\langle \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_0 \rangle}$ 是一个大多项式环，见第 6 节。

5）在第7节中，我们展示了这些方法能够推导出一些与 Adler–Kostant–Symes 理论相关的经典结果，并指出了进一步研究的方向。

一些记号。
– 李代数的直和记为‘$\dotplus$’；– ind $\mathfrak{q}$ 表示李代数 $\mathfrak{q}$ 的指数，且 $b(\mathfrak{q}) = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{q} + \operatorname{ind} \mathfrak{q})$；– $\mathcal{ZS}(\mathfrak{q})$ 或 $\mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}}$ 表示李-泊松代数（$\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ -{ , }）的中心；– $\Bbbk[X]$ 表示代数簇 X上的正则函数代数；– $\Bbbk(X)$表示不可约代数簇 X上的有理函数域。

2. 泊松括号与收缩预备知识

设 Q 是一个李代数为 $\mathfrak{q}$的仿射代数群。记 $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ 为 $\mathfrak{q}$ 在 $\Bbbk$上的对称代数。它自然地可视为$\mathfrak{q}^*$ 上的多项式函数分次代数，也记作 $\Bbbk[\mathfrak{q}^*]$。在 $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ 上的李–泊松括号定义在次数为1 的元素（即 $\mathfrak{q}$）上，定义如下 $\{x, y\} := [x, y]$。由此 $\mathfrak{q}^*$ 成为一个泊松簇，而 π 表示相应的泊松张量，参见例如 [5, 第 1 章。2]。

对于 $\xi \in \mathfrak{q}^*$，令 $Q\xi$ 表示其余伴随轨道。则 Q^ξ 是 ξ 在 Q中的稳定子，且 $\mathfrak{q}^\xi$ =李 $(Q^\xi) \subset \mathfrak{q}$。 $\mathfrak{q}$的指数记作 $\operatorname{ind}\mathfrak{q}$，是 $\mathfrak{q}^*$中 Q-轨道的极小余维数，即 $\operatorname{ind}\ \mathfrak{q} = \min_{\xi\in\mathfrak{q}^*} \dim\ \mathfrak{q}^\xi$。根据 Rosenlicht 定理 [29, § 2.3]，还有 $\operatorname{ind}\ \mathfrak{q} = \operatorname{tr.deg}\ \Bbbk(\mathfrak{q}^*)^Q$。 $\mathfrak{q}^*$ 中的 Q-正则元集合为

$$\mathfrak{q}^*_{\mathsf{reg}} = \{\eta \in \mathfrak{q}^* \mid \dim \mathfrak{q}^\eta = \operatorname{ind}\mathfrak{q}\} \tag{2·1}$$

以及 $\mathfrak{q}^*_{\mathsf{sing}} = \mathfrak{q}^* \setminus \mathfrak{q}^*_{\mathsf{reg}}$。若 $\mathfrak{q}$ 具有 余维–2 性质，则 $\operatorname{codim} \mathfrak{q}^*_{\mathsf{sing}} \geqslant 2$。 $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ 的泊松中心 为

$$\mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{q}) := \{F \in \mathcal{S}(\mathfrak{q}) \mid \{F, x\} = 0 \ \ \forall x \in \mathfrak{q}\}.$$

由此可知， $\mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ 与 $\mathfrak{q}$ 的对称不变量代数 相同，也记作 $\mathcal{S}(\mathfrak{q})^\mathfrak{q}$。若 Q 连通，则 $\mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = \mathcal{S}(\mathfrak{q})^\mathfrak{q} = \Bbbk[\mathfrak{q}^*]^Q$，且 $\mathfrak{q}^*$ 中的辛叶是余伴随 Q-轨道。对于任意 $\xi \in \mathfrak{q}^*$， $\pi(\xi)$ 是定义在 $T^*_\xi(\mathfrak{q}^*) \simeq \mathfrak{q}$ 上的斜对称双线性形式，其定义为：对于 $x,\ y \in \mathfrak{q}$， $\pi(\xi)(x,\ y) = \xi([x, y])$。容易看出，$\ker\ \pi(\xi) = \mathfrak{q}^\xi$。因此，将 $\pi(\xi)$ 限制在 $T^*_\xi(Q\xi) \simeq \mathfrak{q}/\mathfrak{q}^\xi$ 上后，该形式是非退化的。

如果 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ 的 PC 子代数，那么 $\{\mathcal{A}|_{Q\xi}, \mathcal{A}|_{Q\xi}\} = 0$。因此 $\operatorname{tr.deg}\ (\mathcal{A}|_{Q\xi}) \leqslant \frac{1}{2}\dim Q\xi$。如果 $\operatorname{tr.deg}\ (\mathcal{A}|_{Q\xi}) = \frac{1}{2}\dim Q\xi$，则称 $\mathcal{A}$ 在 $Q\xi$-上是完备的。从 $\mathfrak{q}^*$ 到$Q\xi$ 的过渡表明，$\operatorname{tr.deg}\ \mathcal{A} \leqslant b(\mathfrak{q}) := \frac{1}{2}(\dim\ \mathfrak{g} + \operatorname{ind}\ \mathfrak{q})$。由于余伴随轨道都是偶维的， $b(\mathfrak{q})$ 是一个整数。如果 $\mathfrak{q}$ 是约化的，则 $\operatorname{ind}\mathfrak{q} = \operatorname{rk}\mathfrak{q}$，且 $b(\mathfrak{q})$ 等于 $\mathfrak{q}$的 Borel 子代数的维数。

2.1. **Lenard–Magri方案**。 设 $\{\ ,\ \}'$ 和 $\{\ ,\ \}''$ 是$\mathfrak{q}^*$ [5, 1.8.3]上的相容 Poisson 括号。这给出一个 2 参数的泊松括号族 $a\{\ ,\ \}' + b\{\ ,\ \}''$, $a,\ b \in \Bbbk$，我们假设该族包含初始的李–泊松括号。由于我们主要关注相应的泊松中心，因此将其按缩放归并为 1 参数族 $\{\ ,\ \}_t = \{\ ,\ \}' + t\{\ ,\ \}''$, $t \in \mathbb{P} := \Bbbk \cup \{\infty\}$ 更为方便，其中 $t = \infty$对应于 $\{\ ,\ \}''$。记 $\mathfrak{q}^*_{(t)}$ 为对应于 $t \in \mathbb{P}$的泊松簇。令 $\operatorname{ind}\{\ ,\ \}_t$ 表示 $\mathfrak{q}^*_{(t)}$中辛叶的极小余维数。对于几乎所有 $t \in \mathbb{P}$，$\operatorname{ind}\{\ ,\ \}_t$ 都具有同一个（极小）值。令

$$\mathbb{P}_{\mathsf{reg}} = \{t \in \mathbb{P} \mid \operatorname{ind}\{\ ,\ \}_t \text{ is minimal}\} \ \text{ and } \ \mathbb{P}_{\mathsf{sing}} = \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_{\mathsf{reg}}.$$

设 $\mathcal{Z}_t$ 表示泊松代数 $(\mathcal{S}(\mathfrak{q})\ \{\ ,\ \}_t)$ 的中心。关键事实是，由 $\{\mathcal{Z}_t \mid t \in \mathbb{P}_{\mathsf{reg}}\}$ 生成的代数 $\mathcal{Z}$ 关于该族中的**任意**括号都是泊松交换的。在许多情形下，这一过程给出 $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ 的一个具有极大超越次数的 PC 子代数。一个显然的第一步是取初始李–泊松括号 $\{\ ,\ \}$ 作为 $\{\ ,\ \}'$。其余则取决于对 $\{\ ,\ \}''$ 的巧妙选取。

若 $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}$ 是约化的，则该方案的一个著名实现是 自变量平移法，其可追溯至 [13]。此处 $\{\ ,\ \}'' = \{\ ,\ \}_\gamma$ 是与 $\gamma \in \mathfrak{g}^*$ 相关联的零次 Poisson 括号，其中 $\{\xi, \eta\}_\gamma := \gamma([\xi, \eta])$ 对于 $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$。PC 子代数 $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_\gamma$

以这种方式出现的被称为 *Mishchenko–Fomenko* 子代数。在此设定下，“巧妙”的选择意味着 γ 应为 $\mathfrak{g}^*$ 的正则元。

本文仅考虑由**线性** 泊松括号组成的族，即括号 $\{\ ,\ \}_t$ $(t \in \mathbb{P})$ 在底层向量空间 $\mathfrak{q}$上给出各种李代数结构。与 t 对应的李代数记为 $\mathfrak{q}_{(t)}$，于是记作 $\operatorname{ind}\mathfrak{q}_{(t)} = \operatorname{ind}\{\ ,\ \}_t$。

2.2. **收缩与不变量**。设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{q}$的子代数。考虑半直积 $\mathfrak{q}_{(0)} = \mathfrak{h} \ltimes (\mathfrak{q}/\mathfrak{h})^{\mathrm{ab}}$，其中上标“ab”表示 $\mathfrak{h}$-模 $\mathfrak{q}/\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{q}_{(0)}$中的阿贝尔理想。若 $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{h}$的任意补子空间，则还可以写成 $\mathfrak{q}_{(0)} = \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{m}^{\mathrm{ab}}$，其中向量空间 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{(0)}$ 上的新李括号 $[\ ,\ ]_0$ 定义为

$$[h_1 + m_1, h_2 + m_2]_0 = [h_1, h_2] + \mathsf{pr}_{\mathfrak{m}}([h_1, m_2] - [h_2, m_1]),$$

其中 $h_i \in \mathfrak{h}$，$m_i \in \mathfrak{m}$，并且 $\mathsf{pr}_{\mathfrak{m}}\colon\ \mathfrak{q} \to \mathfrak{m}$ 是平行于 $\mathfrak{h}$的投影。李代数$\mathfrak{q}_{(0)}$ 由 $\mathfrak{q}$ 通过收缩得到，称为 *In¨on¨u–Wigner* 收缩 的$\mathfrak{q}$，参见例如 [7, 第 7 章第 2 节。5],[19],[27]。关于 In¨on ¨u–Wigner 收缩的对称不变量的大量信息见 [17, 18, 30, 31]。

和式 $\mathfrak{q} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ 给出了任意齐次多项式 $F \in \mathcal{S}(\mathfrak{q})$的双齐次分解：

$$F = \textstyle\sum_{i=0}^{d} F_{i,d-i}\ .$$

这里 $d = \deg F$和 $F_{i,d-i} \in \mathcal{S}^i(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{S}^{d-i}(\mathfrak{m}) \subset \mathcal{S}^d(\mathfrak{q})$。于是，$(i, d-i)$ 是 $F_{i,d-i}$的双次数。我们还设 $\deg_{\mathfrak{h}} F_{i,d-i} = i$ 和 $\deg_{\mathfrak{m}} F_{i,d-i} = d - i$。令 $F^\bullet$（分别为 $F_\bullet$）表示 F 中具有最大 $\mathfrak{m}$-次数（分别为 $\mathfrak{h}$-次数）的非零双齐次分量。于是我们设 $\deg_{\mathfrak{m}} F := \deg_{\mathfrak{m}} F^\bullet$和 $\deg_{\mathfrak{h}} F := \deg_{\mathfrak{h}} F_\bullet$。若 $F \in \mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}}$，则 $F^\bullet$是$\mathfrak{q}_{(0)}$的对称不变量，即 $F^\bullet \in \mathcal{S}(\mathfrak{q}_{(0)})^{\mathfrak{q}_{(0)}}$ [17, 命题 3.1]。

下面的观察表明，最高分量的性质实质上不依赖于补子空间 $\mathfrak{m}$的选取。暂且用 $F^\bullet_{\mathfrak{m}}$表示相对于 $\mathfrak{m}$的 F 的最高分量。

引理 2.1. 设 $\mathfrak{m}$ 和 $\tilde{\mathfrak{m}}$ 是 $\mathfrak{h}$的两个不同补子空间。则存在一个线性算子 $\mathcal{L}\colon \mathfrak{q} \to \mathfrak{q}$，使得 $\mathcal{L}|_{\mathfrak{h}} = \mathrm{id}$，$\mathcal{L}(\mathfrak{m}) = \tilde{\mathfrak{m}}$，且 $\mathcal{L}(F^\bullet_{\mathfrak{m}}) = F^\bullet_{\tilde{\mathfrak{m}}}$对所有 $F \in \mathcal{S}(\mathfrak{q})$均成立。(此处我们使用了 $\mathcal{L}$到 $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ 的自然扩张。)

证明. 设 $(y_j)_{j\in J}$ 是 $\mathfrak{m}$的一组基。对每个 $j \in J$，有 $y_j = \tilde{y}_j + z_j$，其中 $\tilde{y}_j \in \tilde{\mathfrak{m}}$ 和 $z_j \in \mathfrak{h}$。于是 $(\tilde{y}_j)_{j\in J}$ 是 $\tilde{\mathfrak{m}}$的一组基，并令 $\mathcal{L}(y_j) = \tilde{y}_j$。为证明最后一个关系，只需考虑 F 是单项式的情形。设$F = x_1^{a_1} \dots x_s^{a_s} \cdot y_1^{b_1} \dots y_t^{b_t}$，其中 $\{x_i\}$ 是 $\mathfrak{h}$的一组基。则 $F = F^\bullet_{\mathfrak{m}}$。用 $\tilde{\mathfrak{m}}$表示，我们有$F = x_1^{a_1} \dots x_s^{a_s} \cdot (\tilde{y}_1 + z_j)^{b_1} \dots (\tilde{y}_t + z_t)^{b_t}$，因此 $F^\bullet_{\tilde{\mathfrak{m}}} = x_1^{a_1} \dots x_s^{a_s} \cdot \tilde{y}_1^{b_1} \dots \tilde{y}_t^{b_t} = \mathcal{L}(F^\bullet_{\mathfrak{m}})$。□

$\mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}}$的商域 $Q(\mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}})$ 包含于 $\Bbbk(\mathfrak{q}^*)^{\mathfrak{q}}$中。因此，$\operatorname{tr.deg} \mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}} \leqslant \operatorname{ind}\mathfrak{q}$。

定义 1. 设 $\mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}}$ 是一个分次多项式环。 $\mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}}$ 中的希尔伯特基 $F_1,\dots,F_\ell$称为 $\mathfrak{h}$的良好生成系 （=广义生成系），如果 $\ell=\operatorname{ind}\mathfrak{q}$且 $F_1^\bullet,\dots,F_\ell^\bullet$代数独立。我们还称 $\mathfrak{h}$ 有一个 广义生成系。

若 $\mathfrak{q}$ 是约化的，则满足此定义的假设。根据引理 2.1，广义生成系g.g.s.的概念是良定义的。

例 2.2. 1. “良好”这一性质取决于生成系（即希尔伯特基）。对于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_N$，在 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}\simeq\Bbbk[\mathfrak{gl}_N]^{GL_N}$ 中有两个众所周知的希尔伯特基。第一个基由矩阵 $A\in\mathfrak{gl}_N$ 的特征多项式的系数组成。第二个基由 A 的幂的迹构成，即 $F_i(A)=\operatorname{tr}(A^i)$, $i=1,\dots,N$。根据 [17, 定理 4.5]，，第一个基是 $\mathfrak{h}=\mathfrak{gl}_{N-m}\dotplus\mathfrak{gl}_m$ 的广义生成系。但除非 $|N-2m|\leqslant 1$，第二个基并非广义生成系。可直接验证这一点，也可利用定理 2.3(ii) 验证。

2. 另外，对于给定的 $\mathfrak{h}$，也可能根本不存在 广义生成系 ，参见 [17, 注 4。3] 以及第 6.2 节和第 6.4节中的例子。

下面这个重要结果表明，对于一大类李代数，**(1)** 存在一种有效方法，可以验证希尔伯特基（$F_1,\dots,F_\ell$）是 $\mathfrak{h}$ 的广义生成系；**(2)** 广义生成系的存在有助于描述 In¨on ¨u–Wigner 收缩 $\mathfrak{q}_{(0)}=\mathfrak{h}\ltimes\mathfrak{m}^{\mathrm{ab}}$ 的泊松中心。

定理 *2.3*（[30, 定理 *3*.8]）。设 $\mathfrak{q}$ 满足以下性质：*(a)* $\mathfrak{q}$ 具有余维 *2* 性质；*(b)* $\mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}}$ 是一个关于 $\ell=\mathit{ind}\,\mathfrak{q}$ 个变量的多项式环；*(c)* 对于 $\mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}}$ 的某个（=任意）希尔伯特基，有 $\sum_{i=1}^{\ell}\mathit{deg}\,F_i=\mathit{b}(\mathfrak{q})$。那么

(i) $\sum_{j=1}^{\ell}\deg_{\mathfrak{m}}F_j\geqslant\dim\mathfrak{m}$; (ii) $F_1,\dots,F_\ell$ 是 $\mathfrak{h}$ 的广义生成系，当且仅当 $\sum_{j=1}^{\ell}\deg_{\mathfrak{m}}F_j=\dim\mathfrak{m}$; (iii) 若$\mathfrak{q}_{(0)}$ 具有余维–2 性质，$\operatorname{ind}\mathfrak{q}_{(0)}=\ell$，且 $F_1,\dots,F_\ell$ 是 $\mathfrak{h}$的广义生成系，则$\mathcal{ZS}(\mathfrak{q}_{(0)})$ 是由$F_1^\bullet,\dots,F_\ell^\bullet$自由生成的多项式环。

注 2.4. 1) 假设*(a),(b),(c)* 对约化李代数 $\mathfrak{g}$成立，其中 $\operatorname{ind}\mathfrak{g}=\operatorname{rk}\mathfrak{g}$，且 $\mathit{b}(\mathfrak{g})=\dim\mathfrak{b}$。

2) 由于$\mathfrak{q}_{(0)}$ 是 $\mathfrak{q}$的收缩，$\operatorname{ind}\mathfrak{q}_{(0)}\geqslant\operatorname{ind}\mathfrak{q}=\ell$。因此，(iii) 中的条件意味着 $\operatorname{ind}\mathfrak{q}_{(0)}$ 尽可能小。

3）如果 余维–2 性质在 (iii) 中不成立，那么可能出现 $\Bbbk[F_1^\bullet,\dots,F_\ell^\bullet]$ 是 $\mathcal{ZS}(\mathfrak{q}_{(0)})$的真子代数的情况。另一方面，等式 $\Bbbk[F_1^\bullet,\dots,F_\ell^\bullet]=\mathcal{ZS}(\mathfrak{q}_{(0)})$可能成立，而 余维–2 性质对于$\mathfrak{q}_{(0)}$ 并不成立，参见第 5 节中的例子。

令 $\mathcal{ZS}(\mathfrak{q})^\bullet$ 表示由所有 $F^\bullet$ 生成的 $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ 子代数，其中 $F\in\mathcal{ZS}(\mathfrak{q})$ 是齐次的。等价地，若 $\mathcal{ZS}(\mathfrak{q})_p$ 是次数为 p 的对称不变量向量空间，且 $\mathcal{ZS}(\mathfrak{q})^\bullet_p=\{F^\bullet\mid F\in\mathcal{ZS}(\mathfrak{q})_p\}$，则 $\mathcal{ZS}(\mathfrak{q})^\bullet=\bigoplus_{p\geqslant 0}\mathcal{ZS}(\mathfrak{q})^\bullet_p$。

引理 2。 5. 无论是否存在 广义生成系，我们都有 tr.次数 $\mathcal{ZS}(\mathfrak{q})^\bullet = \text{tr.次数}\ \mathcal{ZS}(\mathfrak{q}\quad)$.

证明。利用 Gröbner 基技术的基本方法，可以为 $\mathcal{ZS}(\mathfrak{q})_p$ 构造一个基 $(H_1, \dots, H_n)$，使得 $H_1^\bullet, \dots, H_n^\bullet$ 是 $\mathcal{ZS}(\mathfrak{q})_p^\bullet$的基，参见 [19, 引理 1。3]。因此，分次代数 $\mathcal{ZS}(\mathfrak{q})$ 和 $\mathcal{ZS}(\mathfrak{q})^\bullet$ 的 Poincaré 级数相同。由此，根据 [2, Satz 4。5]，它们具有相同的超越次数。□

3. 与分裂相关的泊松交换子代数

设 $\mathfrak{q} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{r}$ 是 $\mathfrak{q}$的一个分裂。置 $\mathfrak{q}^{(0)} := \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{r}^{\mathrm{ab}}$ 和 $\mathfrak{q}^{(\infty)} := \mathfrak{r} \ltimes \mathfrak{h}^{\mathrm{ab}}$。我们将 $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^{(0)},$以及 $\mathfrak{q}^{(\infty)}$ 视为向量空间。令 $x_\mathfrak{r} \in \mathfrak{r}$ 和 $x_\mathfrak{h} \in \mathfrak{h}$ 表示 $x \in \mathfrak{q}$的分量。$\mathfrak{q}^{(0)}$ 和 $\mathfrak{q}^{(\infty)}$ 的半直结构表明，相应的泊松括号在 $\mathfrak{q} = \mathcal{S}^1(\mathfrak{q})$上定义如下：

$$\{x,y\}_0 = \begin{cases} [x,y] & \text{if } x,y \in \mathfrak{h}, \\ [x,y]_\mathfrak{r} & \text{if } x \in \mathfrak{h}, y \in \mathfrak{r}, \\ 0 & \text{if } x,y \in \mathfrak{r}, \end{cases} \quad \& \quad \{x,y\}_\infty = \begin{cases} 0 & \text{if } x,y \in \mathfrak{h}, \\ [x,y]_\mathfrak{h} & \text{if } x \in \mathfrak{h}, y \in \mathfrak{r}, \\ [x,y] & \text{if } x,y \in \mathfrak{r}. \end{cases} \tag{3·1}$$

于是 $\{\ ,\ \}_0 + \{\ ,\ \}_\infty$ 是 $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$中的初始李–泊松括号。因此这些括号是相容的。在此设定下，由Lenard–Magri给出的 $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$的PC 子代数记为$\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\mathfrak{r}\rangle}$。此处所有满足 $t \in \Bbbk \setminus \{0\}$ 的括号 $\{\ ,\ \}_t = \{\ ,\ \}_0 + t\{\ ,\ \}_\infty$ 都同构于 [21]。因此对于族 $\{\ ,\ \}_t (t \in \mathbb{P})$，我们有 $\mathbb{P}_{\mathsf{reg}} \supset \Bbbk \setminus \{0\}$。若$\operatorname{ind} \mathfrak{q}^{(0)}, \operatorname{ind} \mathfrak{q}^{(\infty)} > \operatorname{ind}\ \mathfrak{q}$，则 $\mathbb{P}_{\mathsf{sing}} = \{0, \infty\}$ 与$\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\mathfrak{r}\rangle}$ 由满足 $t \neq 0, \infty$的 $\mathcal{Z}_t$ 生成。一般可以证明，若 $\mathbb{P}_{\mathsf{sing}} \neq \varnothing$，则$\operatorname{tr.deg}^{\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\mathfrak{r}\rangle}} < b(\mathfrak{q})$。因此，我们主要关注满足 $\mathbb{P}_{\mathsf{reg}} = \mathbb{P}$的分裂。由 [27]（亦参见 [21, 第 2]节），对于约化的 $\mathfrak{q}$，该性质等价于 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{r}$ 均为 $\mathfrak{q}$的球形子代数。

令 $\mathcal{Z}_\times$ 表示由泊松中心 $\mathcal{Z}_t\ (t \neq 0,\ \infty)$ 生成的子代数。由上一段可知，无论 $\mathfrak{q}^{(0)}$ 和 $\mathfrak{q}^{(\infty)}$ 具有什么性质，我们都有 $\mathcal{Z}_\times \subset \mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$。以下结果隐含于 [21, 定理 3.2] 中。它展示了在分裂的情形下，不变量的双齐次分量所具有的作用。

命题 3.1. </style}代数 $(\mathfrak{q})$ 等于由所有齐次 $F \in \mathcal{S}(\mathfrak{q})^\mathfrak{q}$ 的双齐次分量生成的代数。特别地，若 $F_1, \dots, F_m$ 是 $\mathcal{S}(\mathfrak{q})^\mathfrak{q}$ 的生成集，则 $\mathcal{Z}_\times$ 由 $F_1, \dots, F_m$ 的双齐次分量生成。

证明. </style}在约化李代数 $\mathfrak{g}$ 的情形下于 [21] 使用的范德蒙行列式论证，无需任何改动即可推广到任意李代数。□

推论 3.2. $\mathfrak{q}$ 的所有对称不变量的双齐次分量相对于族 $\{\ ,\ \}_t (t \in \mathbb{P})$中的任意括号都彼此对易。

注 3.3. 对于给定的 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{q}$，可能存在不同的补子代数 $\mathfrak{r}$ 和 $\mathfrak{r}'$。此时，$F \in \mathcal{S}(\mathfrak{q})$的双齐次分量与收缩$\mathfrak{r} \ltimes \mathfrak{h}^{ab}$、$\mathfrak{r}' \ltimes \mathfrak{h}^{ab}$ 可能有本质上的不同。这会产生不同的 PC 子代数$\mathcal{Z}_{\langle \mathfrak{h},\mathfrak{r}\rangle}$ 和$\mathcal{Z}_{\langle \mathfrak{h},\mathfrak{r}'\rangle}$。例如，若 $\mathfrak{h} = \mathfrak{b}$ 属于一个约化 $\mathfrak{g}$，则可以取 $\mathfrak{u}_-$ 或 $\mathfrak{g}_0$ 作为 $\mathfrak{b}$的补子代数（参见引言）。

3.1. 关于数 s_0 和 s_∞。 从现在起，我们讨论约化李代数 $\mathfrak{g}$ 的分裂。设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{r}$ 是任意分裂，即 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{r}$ 不一定是球面的。回顾一下，$\mathfrak{h} =$李 H 和 $\mathfrak{r} =$李 R。对于 $\mathfrak{g}^*$，我们得到诱导直和分解 $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{h}^* \oplus \mathfrak{r}^*$，其中$\mathfrak{h}^* = \mathrm{Ann}(\mathfrak{r})$ 且 $\mathfrak{r}^* = \mathrm{Ann}(\mathfrak{h})$。因此，若考虑 $\mathfrak{g}_{(0)}$，则将 $\mathfrak{r}^* \subset \mathfrak{g}^*_{(0)}$ 视为H-模（$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$）*。同样，将 $\mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{g}^*_{(\infty)}$ 视为 R-模（$\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$）*。

令 $s_0 := \mathrm{tr.deg}\, \Bbbk((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^H$，且 $s_\infty := \mathrm{tr.deg}\ \Bbbk((\mathfrak{g}/\mathfrak{r})^*)^R$。

定理 3.4。 （i）对于任意分裂 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{r}$，有 $s_0 + s_\infty \geqslant \ell$。
（ii）若 $s_0 + s_\infty = \ell$，则

- 所讨论的分裂是非退化的（即，$\mathfrak{h}$和 $\mathfrak{r}$ 是球面的）；
- $\mathfrak{r}^* \cap \mathfrak{g}^*_{\text{正则}} \neq \varnothing$ 与 $\mathfrak{h}^* \cap \mathfrak{g}^*_{\text{正则}} \neq \varnothing$;
- $s_0 =$维 $\mathfrak{r} -$维 $\mathfrak{u}$ 且 $s_\infty =$维 $\mathfrak{h} -$维 $\mathfrak{u}$。

证明。（i）设 π_0 为 $\mathfrak{g}^*_{(0)}$的泊松张量。对于 $\xi \in \mathfrak{r}^* \in \mathfrak{g}^*_{(0)}$，考虑 $\mathfrak{g}_{(0)}$ 上的双线性 2-形式 $\pi_0(\xi)$。根据定义，

$$\pi_0(\xi)(x,y) = \xi([x,y]_0) \ \text{ for } \ x,y \in \mathfrak{g}_{(0)}.$$

由于 $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]_0 \subset \mathfrak{h}$ 和 $[\mathfrak{r},\mathfrak{r}]_0 = 0$，双线性形式 $\pi_0(\xi)$ 在 $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}$上消失。因此，它在 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{r}$之间给出一个配对。取一个适配于和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{r}$的 $\mathfrak{g}$ 的基，则 $\pi_0(\xi)$ 的矩阵具有分块结构 $\pi_0(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^t & 0 \end{pmatrix}$，其中矩形矩阵 A对应于 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{r}$的配对。这里 $\mathrm{rk}\, A =$ $\dim H{\cdot}\xi$，故 $\mathrm{rk}\ \pi_0(\xi) = 2\dim H{\cdot}\xi$。根据 Rosenlicht 定理 [29, § 2.3]，，若 ξ为一般的，则 $s_0 = \dim \mathfrak{r} - \dim H\xi = \dim \mathfrak{r} - \frac{1}{2}\mathrm{rk}\ \pi_0(\xi)$。类似地，利用 $\mathfrak{g}^*_{(\infty)}$和泊松张量 π_∞，对于一般点 $\eta \in \mathfrak{h}^*$，可得 $s_\infty = \dim\ \mathfrak{h} - \frac{1}{2}\mathrm{rk}\ \pi_\infty(\eta)$。

令 π 为 $\mathfrak{g}^*$ 的泊松张量。由于 $\mathfrak{g}_{(0)}$ 和 $\mathfrak{g}_{(\infty)}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的收缩，我们有 $\mathrm{rk}\ \pi_0 \leqslant \mathrm{rk}\ \pi$ 且 $\mathrm{rk}\ \pi_\infty \leqslant \mathrm{rk}\, \pi$。因此，对于一般点 ξ 和 η，我们得到

$$s_0 + s_\infty = \dim \mathfrak{g} - \frac{1}{2}(\mathrm{rk}\, \pi_0(\xi) + \mathrm{rk}\, \pi_\infty(\eta)) \geqslant \tag{3·2}$$

$$\dim \mathfrak{g} - \frac{1}{2}(\mathrm{rk}\, \pi_0 + \mathrm{rk}\, \pi_\infty) \geqslant \dim \mathfrak{g} - \mathrm{rk}\, \pi = \ell.$$

(ii) 假设 $s_0+s_\infty=\ell$。根据式 (3·2)，此等式等价于 $\mathrm{rk}\,\pi_0(\xi)=\mathrm{rk}\,\pi_\infty(\eta)=\dim\mathfrak{g}-\ell$。特别地，$\mathrm{rk}\,\pi_0=\mathrm{rk}\,\pi_\infty=\mathrm{rk}\,\pi$，即 $\mathrm{ind}^{\mathfrak{g}_{(0)}}=\mathrm{ind}\,\mathfrak{g}_{(\infty)}=\mathrm{ind}\,\mathfrak{g}$，且子代数 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{r}$ 是球面的，见 [21, 第 2] 节。

现在，将 $\xi\in\mathfrak{r}^*$ 视为 $\mathfrak{g}^*$的元素。对于上述 $\mathfrak{g}$ 的同一适配基，$\pi(\xi)$的矩阵为 $\begin{pmatrix}0 & A\\ -A^t & C\end{pmatrix}$，

其中 C 是 $\pi(\xi)|_{\mathfrak{r}\times\mathfrak{r}}$的矩阵。注意，若 $x\in\mathfrak{h}$、$y\in\mathfrak{r}$且$\xi\in\mathfrak{r}^*$，则 $\xi([x,y]_0)=\xi([x,y])$。因此，子矩阵 A 在 $\pi_0(\xi)$和 $\pi(\xi)$中相同，即$\pi_0(\xi)$可由 $\pi(\xi)$将 C 替换为零得到。因此，$\mathrm{rk}\,\pi(\xi)\geqslant 2\mathrm{rk}\,A=\mathrm{rk}\,\pi_0(\xi)$。这意味着$\mathrm{rk}\,\pi(\xi)=\mathrm{rk}\,\pi_0(\xi)=\dim\mathfrak{g}-\ell$，从而 $\xi\in\mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}$。同理，$\eta\in\mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}$。

由于 $s_0=\dim\mathfrak{r}-\frac{1}{2}\mathrm{rk}\,\pi_0(\xi)$ 且 $\mathrm{rk}\,\pi_0(\xi)=\dim\mathfrak{g}-\ell=2\dim\mathfrak{u}$ 对于 $\xi\in\mathfrak{r}^*\cap\mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}$，因此 s_0 的最后一个断言成立（s_∞的情形也同样如此）。□

3.2. **关于 s_0 和 s_∞的更多结果。**对于任意齐性空间 G/H，$\mathrm{Ann}(\mathfrak{h})$ 上的线性 H-作用 $=\mathfrak{h}^\perp\subset\mathfrak{g}^*$ 称为 H的各向同性表示。分别用 $c(G/H)$ 和 $r(G/H)$ 表示 G/H 这一 G-簇的复杂度和秩。关于 $c(\cdot)$ 和 $r(\cdot)$ 的一般性论述，参见 [16]。众所周知，

$$\mathrm{tr.deg}\,\Bbbk(\mathfrak{h}^\perp)^H=2c(G/H)+r(G/H),$$

见 [10, 15, 27]。特别地，若 H 是球面的，则 $\mathrm{tr.deg}\,\Bbbk(\mathfrak{h}^\perp)^H=r(G/H)$。存在一个稠密开子集 $\Omega_H\subset\mathfrak{h}^\perp$，使得函数

$$(x\in\Omega_H)\mapsto(\dim\mathfrak{h}^x,\mathrm{ind}\,\mathfrak{h}^x)\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

为常数。关于 $\dim\mathfrak{h}^x$ 的断言是一个标准的不变量论结果（例如参见 [29,§ 1.4],），而关于 $\mathrm{ind}\ \mathfrak{h}^x$ 的事实则在 [23] 中得到证明。令 $\mathfrak{h}_\star$ 表示满足 $y\in\Omega_H$ 的任意稳定子 $\mathfrak{h}^y$。那么 $\dim\mathfrak{h}_\star=\min_{x\in\mathfrak{h}^\perp}\dim\mathfrak{h}^x$。利用 Raïs 关于半直积指标的公式 [23] 以及关于复杂度与秩的已知结果，我们可以在 $\mathfrak{g}$ 的分裂情形下推导出关于 s_0+s_∞ 的更多性质。与之前一样，$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{r}$、$\mathfrak{g}_{(0)}=\mathfrak{h}\ltimes\mathfrak{r}^{\mathsf{ab}}$ 和 $\mathfrak{g}_{(\infty)}=\mathfrak{r}\ltimes\mathfrak{h}^{\mathsf{ab}}$。由于 $\mathfrak{h}^\perp\simeq(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ 且 $\mathfrak{r}^\perp=(\mathfrak{g}/\mathfrak{r})^*$，我们有

$$s_0=2c(G/H)+r(G/H)\ \ \&\ \ s_\infty=2c(G/R)+r(G/R). \tag{3·3}$$

定理 3.5. 令 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{r}$ 为任意分裂。那么

(i) $\dim\mathfrak{h}_\star+\dim\mathfrak{r}_\star=s_0+s_\infty\geqslant\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$; (ii) $\mathrm{ind}\,\mathfrak{h}_\star=\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}-r(G/H)$ 和 $\mathrm{ind}\,\mathfrak{r}_\star=\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}-r(G/R)$; (iii) $\boldsymbol{b}(\mathfrak{h}_\star)+\boldsymbol{b}(\mathfrak{r}_\star)=\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}+c(G/H)+c(G/R)$。

证明. (i) 根据 Rosenlicht 定理 [29, § 2.3],

$$s_0=\dim\mathfrak{h}^\perp-\dim\mathfrak{h}+\dim\mathfrak{h}_\star\ \text{ and }\ s_\infty=\dim\mathfrak{r}^\perp-\dim\mathfrak{r}+\dim\mathfrak{r}_\star.$$

根据定理 3.4(i)，对各项求和即可得到结论。

(ii) 根据 Ra¨ıs 公式 [23]，有 $\operatorname{ind}\mathfrak{g}_{(0)}=$超越次数 $\Bbbk(\mathfrak{h}^{\perp})^{H}+\operatorname{ind}\mathfrak{h}_{\star}=s_0+\operatorname{ind}\mathfrak{h}_{\star}$。另一方面，$\operatorname{ind}\mathfrak{g}_{(0)}=\operatorname{rk}\mathfrak{g}+2c(G/H)$ [21, 27]。比较 $\operatorname{ind}\mathfrak{g}_{(0)}$ 的两个表达式，并利用公式（3·3），可得 $\operatorname{ind}\mathfrak{h}_{\star}=\operatorname{rk}\mathfrak{g}-r(G/H)$。关于 $\operatorname{ind}\mathfrak{r}_{\star}$ 的论证相同。

(iii) 回忆一下，$\boldsymbol{b}(\mathfrak{q})=\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{q}+\operatorname{ind}\mathfrak{q})$。结合 (i) 和 (ii)，我们得到

$$\boldsymbol{b}(\mathfrak{h}_{\star})+\boldsymbol{b}(\mathfrak{r}_{\star})=\operatorname{rk}\mathfrak{g}+\frac{1}{2}(s_0-r(G/H))+\frac{1}{2}(s_0-r(G/R)),$$

这正是所需的结论。 □

推论 3.6. 对于 $\mathfrak{g}$的非退化分裂，以下条件等价：

(1) $s_0+s_\infty=\operatorname{rk}\mathfrak{g}$;(2) $r(G/H)+r(G/R)=\operatorname{rk}\mathfrak{g}$;(3) $\mathfrak{h}_{\star}$ 和 $\mathfrak{r}_{\star}$ 是阿贝尔李代数。

证明。在非退化情形下，有 $\boldsymbol{b}(\mathfrak{h}_{\star})+\boldsymbol{b}(\mathfrak{r}_{\star})=\operatorname{rk}\mathfrak{g}$。由于 $\dim\mathfrak{h}_{\star}+\dim\mathfrak{r}_{\star}\geqslant\operatorname{rk}\mathfrak{g}$，我们得到 $\operatorname{ind}\mathfrak{h}_{\star}+\operatorname{ind}\mathfrak{r}_{\star}\leqslant\operatorname{rk}\mathfrak{g}$。只需注意，$\operatorname{ind}\mathfrak{h}_{\star}\leqslant\dim\mathfrak{h}_{\star}$，而该等式恰好意味着 $\mathfrak{h}_{\star}$ 是阿贝尔的。□

注记 3.7。很可能 $s_0+s_\infty=\ell$ 对于 $\mathfrak{g}$的所有非退化分裂均成立。至少，对于 [21] 中的所有例子以及下文第4-6 节中讨论的例子，确实如此。如果 G/H 和 G/R 都是拟仿射的，我们也可以证明这一点。

3.3. **非退化情形**。现在假设子代数 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{r}$都是球面的。因此 $\operatorname{ind}\mathfrak{g}_{(0)}=\operatorname{ind}\mathfrak{g}_{(\infty)}=\ell$ 且 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$ 是由所有中心 $\mathcal{Z}_t$、$t\in\mathbb{P}$生成的代数。假定和式 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{r}$ 中各项的顺序固定。也就是说，如果 $F\in\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ 是齐次的，那么 $F_{\bullet}$（分别地，$F^{\bullet}$）是 F 中关于第一个（分别地，第二个）加项次数最高的双齐次分量。

定理 3.8 ([21, 节 3])。对于一个非退化分裂，$\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$ 由 $\mathcal{Z}_0$、$\mathcal{Z}_\infty$ 以及 F_1，…，F_ℓ 的所有双齐次分量生成，即

$$\{(F_j)_{i,d_j-i}\mid j=1,\dots,\ell\ \&\ i=0,1,\dots,d_j\}. \tag{3·4}$$

此外，$\operatorname{tr.deg}\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}=\boldsymbol{b}(\mathfrak{g})$。

尽管 $\mathcal{Z}_\times$ 可能是 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$ 的一个真子代数，但它似乎已经足够大。

引理 3.9。有 $\operatorname{tr}_{\circ}\operatorname{deg}\mathcal{Z}_\times=\boldsymbol{b}(\mathfrak{g})$。

证明。由于每个 $F\in\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ 都是 $F_1,\dots,F_\ell$ 的多项式，因此 F 的任意双齐次分量$F_{s,t}$ 都是生成元 (3·4) 的多项式，即 $F_{s,t}\in\mathcal{Z}_{\times\circ}$。特别地，$\mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\bullet}\subset\mathcal{Z}_{\times\circ}$。我们还有 $\mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\bullet}\subset\mathcal{Z}_0$ 以及 $\operatorname{ind}\mathfrak{g}_{(0)}=\ell$。利用引理 2.5，我们便得到

$$\ell=\operatorname{tr.deg}\mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\bullet}\leqslant\operatorname{tr.deg}\mathcal{Z}_0\leqslant\operatorname{ind}\mathfrak{g}_{(0)}=\ell.$$

因此，扩张 $\mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{g})^\bullet \subset \mathcal{Z}_0$ 是代数扩张，且 $\mathcal{Z}_0$ 中的每个元素都是 $\mathcal{Z}_\times$ 的分式域上的代数元。交换 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{r}$ 的角色，我们对 $\mathcal{Z}_\infty$ 也得到相同的结论。因此，$\mathrm{tr。deg}\,\mathcal{Z}_\times = \mathrm{tr。deg}\,\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle} = \boldsymbol{b}(\mathfrak{g})$。□

一般而言，$\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{r}$的广义生成系可能相当不同（如果存在的话）。但在 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{r}$共享同一广义生成系的幸运情形下，我们会得到若干良好性质。

命题 3.1. 设 F_1，……，F_ℓ 同时是 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{r}$的广义生成系。则 $\mathcal{Z}_\times$ 是一个多项式环，由满足 $d_j - \deg_{\mathfrak{h}} F_j^\bullet \leqslant i \leqslant \deg_{\mathfrak{r}}(F_j)_\bullet$的双齐次分量$(F_j)_{i,\ d_j-i}$ $(1 \leqslant j \leqslant \ell)$自由生成。此类分量的总数等于 $\boldsymbol{b}(\mathfrak{g})$。

证明。由于 F_1，……，F_ℓ是一个广义生成系，同时对 $\mathfrak{h}$与 $\mathfrak{r}$均成立，利用定理 2.3(ii) 并取 $\mathfrak{m} = \mathfrak{r}$或 $\mathfrak{h}$，我们得到

$$\sum_{j=1}^{\ell} \deg_{\mathfrak{r}} F_j^\bullet = \dim \mathfrak{r} \quad \& \quad \sum_{j=1}^{\ell} \deg_{\mathfrak{h}}(F_j)_\bullet = \dim \mathfrak{h}.$$

对任意 j，F_j 的非零双齐次分量的 $\mathfrak{r}$-次数属于区间 $[\deg_{\mathfrak{r}}(F_j)_\bullet,\ \deg_{\mathfrak{r}} F_j^\bullet]$。因此它们至多有 $\deg_{\mathfrak{r}} F_j^\bullet - \deg_{\mathfrak{r}}(F_j)_\bullet + 1$ 个。由于$\deg_{\mathfrak{r}}(F_j)_\bullet = d_j - \deg_{\mathfrak{h}}(F_j)_\bullet$，非零双齐次分量$\{(F_j)_{i,\ d_j-i}\}$的总数不超过

$$\sum_{j=1}^{\ell} (\deg_{\mathfrak{r}} F_j^\bullet + \deg_{\mathfrak{h}}(F_j)_\bullet - d_j + 1) = \dim \mathfrak{r} + \dim \mathfrak{h} - \boldsymbol{b}(\mathfrak{g}) + \ell = \boldsymbol{b}(\mathfrak{g}).$$

由于 $\mathrm{tr.deg}\,\mathcal{Z}_\times = \boldsymbol{b}(\mathfrak{g})$（引理 3.9），所有这些分量均非零且代数独立。□

定理 3.11. 设代数 $\mathcal{Z}_0$ 与 $\mathcal{Z}_\infty$ 均具有代数独立的生成元，且 $F_1, \ldots, F_\ell$ 是 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{r}$的公共广义生成系。则 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\mathfrak{r}\rangle}$ 是一个多项式环。

证明。由命题 3.10，代数 $\mathcal{Z}_\times$ 由 se 自由生成 t

$$\mathcal{M} = \{(F_j)_{i,d_j-i} \mid 1 \leqslant j \leqslant \ell,\ d_j - \deg_{\mathfrak{h}} F_j^\bullet \leqslant i \leqslant \deg_{\mathfrak{r}}(F_j)_\bullet\}.$$

以及 $\#\mathcal{M} = \boldsymbol{b}(\mathfrak{g})$。现在，我们可以将 $F_1^\bullet, \ldots, F_\ell^\bullet \in \mathcal{Z}_0 \cap \mathcal{M}$ 替换为 $\mathcal{Z}_0$的一个希尔伯特基，并将 $(F_1)_\bullet, \ldots, (F_\ell)_\bullet \in \mathcal{Z}_\infty \cap \mathcal{M}$ 替换为 $\mathcal{Z}_\infty$的一个希尔伯特基。由定理 3.8，所得多项式集合生成 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\mathfrak{r}\rangle}$，且它仍然包含 $\boldsymbol{b}(\mathfrak{g})$ 个元素。□

注记 3.12. (i) 如果不存在共同的广义生成系 使得 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{r}$，则上述论证不适用。不过，在某些情况下，$\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$ 可以是一个多项式环，参见定理 3.14 和 5.4。

(ii) 在第 5 节中，我们遇到一个有趣的情形：$\mathcal{Z}_0$ 和 $\mathcal{Z}_\infty$ 都是多项式环，而且确实存在一个共同的广义生成系 适用于 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{r}$。

回想一下， H 和 R 是 G 的连通子群（它们现在是球面群）， $s_0 :=\mathrm{tr.deg}\ \Bbbk((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^H$，而 $s_\infty := \mathrm{tr.deg}\ \Bbbk((\mathfrak{g}/\mathfrak{r})^*)^R$。下面我们为非退化情形下的不等式 $s_0 + s_\infty \geqslant \ell$ 给出一个更简单的证明，并推导出关于 $\mathcal{Z}_{\langle \mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$的更多性质。

命题 3.13。 我们有 $s_0 + s_\infty \geqslant \ell$。如果 $s_0 + s_\infty = \ell$，那么所有分量 $(F_j)_{i,\ d_j-i}$ （其中 $1 \leqslant j \leqslant \ell$ 且 $0 < i < d_j$ ）均非零且代数独立。

证明。 所有分量 $(F_j)_{i,\ d_j-i}$ （其中 $1 \leqslant j \leqslant \ell$ 且 $0 < i < d_j$ ）的数量等于$\sum_{j=1}^{\ell}(d_j - 1)$ $= \boldsymbol{b}(g) - \ell$。 （先验地说，其中一些分量可能等于 0。）注意，这里排除了极端值 $i = 0$ 和 $i = d_j$。

如果 $i = 0$ 且 $(F_j)_{0,d_j} \neq 0$，那么 $(F_j)_{0,d_j} = F_j^\bullet \in \mathcal{S}(\mathfrak{r}^{\mathrm{ab}})^{\mathfrak{h}}$，即 $(F_j)_{0,d_j} \in \mathcal{Z}_0$。在自然同一 $\mathfrak{r}^* \simeq \mathrm{Ann}(\mathfrak{h}) \simeq (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ 下，我们有 $\mathcal{S}(\mathfrak{r})^{\mathfrak{h}} \simeq \Bbbk[(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*]^H$。因此，在 $\{(F_j)_{0,\ d_j} \mid j = 1, \dots, \ell\}$ 中至多有 s_0 个元素代数独立。类似的论证适用于 s_∞、 $i = d_j$ 和 $(F_j)_{d_j,0}$。然后取所有双齐次分量可得，$\mathrm{tr.deg}\ \mathcal{Z}_\times \leqslant \boldsymbol{b}(\mathfrak{g}) - \ell + s_0 + s_\infty$。另一方面，由引理 3.9，有 $\mathrm{tr.deg}\,\mathcal{Z}_\times = \boldsymbol{b}(\mathfrak{g})$。因此 $s_0 + s_\infty \geqslant \ell$。

若 $s_0 + s_\infty = \ell$，则前一段表明，在 $\{(F_j)_{0,\ d_j},\ (F_j)_{d_j,\ 0} \mid 1 \leqslant j \leqslant \ell\}$中，代数独立的元素至多有 ℓ 个。因此，所有带有 $0 < i < d_j$ 的分量都必须非零且代数独立。□

以下有用的结果与3.11定理类似。区别在于，我们不再要求存在共同的广义生成系，而是要求 $s_0 + s_\infty = \ell$。

定理 3.14。假设代数 $\mathcal{Z}_0$ 和 $\mathcal{Z}_\infty$ 都具有代数独立的生成元 $\widetilde{\ }$ 和 $s_0 + s_\infty = \ell$。那么 $\mathcal{Z}_{\langle \mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$ 是一个多项式环，由集合 $\mathcal{M}$ 自由生成；该集合由 $\{(F_j)_{i,\ d_j-i} \mid 1 \leqslant j \leqslant \ell、\ 0 < i < d_j\}$、$\mathcal{Z}_0$ 的一个希尔伯特基以及 $\mathcal{Z}_\infty$ 的一个希尔伯特基组成。

证明。 *</style>*形如 $()_{0,\ d_j}$ 和 $(F_j)_{d_j,\ 0}$ 且$\sim 1 \leqslant j \leqslant \ell$ 的非零双齐次分量分别属于 $\mathcal{Z}_0$ 和 $\mathcal{Z}_\infty$。因此，由 $\mathcal{M}$生成的代数包含所有中心 $\mathcal{Z}_t$、 $t \in \mathbb{P}$，也就是说，它与 $\mathcal{Z}_{\langle \mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$相同。此外，

$$\#\widetilde{\mathcal{M}} = \boldsymbol{b}(\mathfrak{g}) - \ell + s_0 + s_\infty = \boldsymbol{b}(\mathfrak{g}) = \mathrm{tr.deg}\,\mathcal{Z}_{\langle \mathfrak{h},\mathfrak{r}\rangle}.$$

因此，{v1}的元 $\widetilde{\ }$和 $\mathcal{M}$ 代数独立，且$\mathcal{Z}_{\langle \mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$ 是一个多项式环 . □

备注 3.15。严格来说，定理 广义生成系 对于 $\mathfrak{h}$ 或 $\mathfrak{r}$ 并非必需。3.14然而，为了证明 广义生成系对于 $\mathfrak{h}$(分别对于 $\mathfrak{r}$) 是 $\mathcal{Z}_0$ (分别是 $\mathcal{Z}_\infty$) 多项式环，我们往往需要一个广义生成系，参见定理 4.6。但是，在这种情形下，广义生成系 对于 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{r}$ 可能不同。

4. 齐性空间收缩与分裂

设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_+ \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}_-$ 是一个固定的三角分解，且 $\mathfrak{b}_\pm = \mathfrak{u}_\pm \oplus \mathfrak{t}$。设 $(\,,\,)$ 是 G-不变的 $\mathfrak{g}$ 上的非退化对称双线性形式。那么，双线性形式 $\langle\,,\,\rangle := (\,,\,)|_{\mathfrak{t}}$ 在 $\mathfrak{t}$ 上也是非退化的。

设 $\mathfrak{h}_+$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个含于 $\mathfrak{b}_+$ 的齐性子代数，即 $\mathfrak{u}_+ \subset \mathfrak{h}_+ \subset \mathfrak{b}_+$。则 $\mathfrak{h}_+ = \mathfrak{u}_+ \oplus \mathfrak{t}_1$，其中 $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{h}_+ \cap \mathfrak{t}$。注意 $\mathfrak{h}_+$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个球面子代数，且 $\langle\,,\,\rangle$ 在 $\mathfrak{t}_1$ 上非退化。设 $\mathfrak{t}_0 \subset \mathfrak{t}$ 为一个代数子代数，使得 $\mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}$。例如，可取 $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{t}_1^{\perp} \subset \mathfrak{t}$，即关于 $\langle\,,\,\rangle$ 的正交补。令 $\mathfrak{h}_- = \mathfrak{u}_- \oplus \mathfrak{t}_0$。则 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_+ \oplus \mathfrak{h}_-$ 是一个非退化分裂，我们称之为 *horospherical* 分解。由于此处的直和项起对称作用，我们集中讨论 $\mathfrak{q} := \mathfrak{h}_+ \ltimes \mathfrak{h}_-^{\mathrm{ab}}$ 以及 $\mathfrak{h}_+$ 的广义生成系。我们还称 $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 齐性收缩 。回顾 $F^\bullet$ 表示 $F \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ 中具有最小 $\mathfrak{h}_+$-次数（= 最大 $\mathfrak{h}_-$-次数）的双齐次分量。

定理 4.1. 设 $F_1, \dots, F_\ell$ 是 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ 的任意希尔伯特基。令 $A = \{j \mid F_j^\bullet \in \mathcal{S}(\mathfrak{t}_0)\}$ 和 $a = \#A$。则

(1) 维数 $\mathfrak{t}_0 \leqslant a$;(2) $F_1, \dots, F_\ell$ 是 $\mathfrak{h}_+$ 的一个 广义生成系 当且仅当 维数 $\mathfrak{t}_0 = a$;(3) 若 (1) 中的等式成立，则对于所有满足 $F_j^\bullet \notin \mathcal{S}(\mathfrak{t}_0)$ 的 F_j，有 $F_j^\bullet \in \mathfrak{h}_+ \otimes \mathcal{S}(\mathfrak{h}_-)$。也就是说，此类 $F_j^\bullet$ 的双次数为 $(1, d_j - 1)$，且 次数$_{\mathfrak{h}_-}(F_j) = d_j - 1$。

证明。 (1) 由于 $\mathfrak{t}$ 同时正规化 $\mathfrak{h}_+$ 和 $\mathfrak{h}_-$，任意$F \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ 的双齐次分量都是 $\mathfrak{t}$-稳定的。因此，若 $F_i^\bullet \in \mathcal{S}(\mathfrak{h}_-)$，则 $F_i^\bullet \in \mathcal{S}(\mathfrak{t}_0)$。于是得到

$$F_i^\bullet \in \mathcal{S}(\mathfrak{t}_0) \iff F_i^\bullet \in \mathcal{S}(\mathfrak{h}_-) \iff \deg_{\mathfrak{h}_-}(F_i) = \deg F_i.$$

另一方面，如果 $F_i^\bullet \notin \mathcal{S}(\mathfrak{h}_-)$，那么显然 $\deg_{\mathfrak{h}_-}(F_i) \leqslant \deg F_i - 1$。因此

$$\sum_{i=1}^{\ell} \deg_{\mathfrak{h}_-}(F_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\ell} \deg F_i - (\ell - a) = \dim \mathfrak{b} - \ell + a = \dim \mathfrak{u} + a. \tag{4·1}$$

根据定理 2.3(i)，有 维数 $\mathfrak{u}_-$ + 维数 $\mathfrak{t}_0$ = 维数 $\mathfrak{h}_- \leqslant \sum_{i=1}^{\ell}$ 次数$_{\mathfrak{h}_-}(F_i)$，即 维数 $\mathfrak{t}_0 \leqslant a$.

(2) 若 F_1, ..., F_ℓ 是一个 广义生成系，则 $\{F_j^\bullet \mid j \in A\}$ 代数独立。因此，$a = \#A \leqslant$ 维数 $\mathfrak{t}_0$ ，从而 $a =$ 维数 $\mathfrak{t}_0$。逆命题由定理 2.3(ii) 和 (4·1) 得出。

(3) 如果 $a =$ 维数 $\mathfrak{t}_0$，那么 (4·1) 中的等式必然成立，这意味着对于每个满足 $F_j^\bullet \notin \mathcal{S}(\mathfrak{t}_0)$ 的 F_j，都有 $\deg_{\mathfrak{h}_-}(F_j) = \deg F_j - 1$。□

注记 4.2. 若 $F_1, \dots, F_\ell$ 是 $\mathfrak{h}_+$的广义生成系，则 $F_1^\bullet, \dots, F_l^\bullet$代数独立，且tr.deg $\mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = \ell$。然而，这并不必然意味着 $\mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{q})$由 $\{F_i^\bullet\}$生成。 $\mathfrak{q}$ 的定义表明 $\mathfrak{t}_0$ 是 $\mathfrak{q}$的中心，故 $\mathfrak{t}_0 \subset \mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{q})$。因此，多项式 $\{F_i^\bullet\}$ 能够生成 $\mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{q})$，仅当 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ 的一个希尔伯特基包含dim $\mathfrak{t}_0$

次数 1 的元素，即 $\dim \mathfrak{t}_0 = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，其中 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的中心。特别地，若 $\mathfrak{g}$ 是半单的，则等式 $\mathcal{ZS}(\mathfrak{q}) = \Bbbk[F_1^\bullet, \dots, F_\ell^\bullet]$ 仅当 $\mathfrak{h}_+ = \mathfrak{b}$ 且 $\mathfrak{h}_- = \mathfrak{u}_-$ 时才能成立。（并且由 [19, 定理 3.3] 可知，情况确实如此。）

4.1. 我们的下一个目标是证明：只要 $\mathfrak{h}_+$ 容许一个广义生成系，$\mathfrak{q} = \mathfrak{h}_+ \ltimes \mathfrak{h}_-^{\mathsf{ab}}$ 便具有多项式环 $\mathcal{ZS}(\mathfrak{q})$。为了证明 $\mathcal{ZS}(\mathfrak{q}) = \Bbbk[\mathfrak{q}^*]^Q$ 中的某些元素生成整个不变量环，我们使用 Igusa 判据 [8, 引理 4]。该结果的其他证明可见于 [29, 定理 4.12] 或 [18, 引理 6.1]。

引理 4.3 (Igusa). 设代数群 L 正则地作用在不可约仿射簇 X 上，并设 C 是 $\Bbbk[X]^L$ 的一个整闭有限生成子代数。假设态射 $\psi\colon X \to \text{谱}\, C =: Y$ 具有如下性质：

(i) $\operatorname{Im}\psi$ 包含一个开子集 $\Omega \subset Y$，使得 $\operatorname{codim}(Y \setminus \Omega) \geqslant 2$；(ii) 存在一个稠密开子集 $\Xi \subset Y$，使得对所有 $y \in \Xi$，$\psi^{-1}(y)$ 都包含一条稠密的 L-轨道。

于是 $C = \Bbbk[X]^L$。 [特别地，L-不变量代数是有限生成的。]

与前面一样，若 $\mathfrak{v}$ 是 $\mathfrak{t}$ 的子空间，则 $\mathfrak{v}^\perp \subset \mathfrak{t}$ 是关于 $\langle\ ,\ \rangle$ 的正交补。若 $\mathfrak{g}^x = \mathfrak{g}^{\mathfrak{v}}$，我们就称 $x \in \mathfrak{v}$ 为一般的。

引理 4.4。 设 $\mathfrak{t}_1 \subset \mathfrak{t}$ 是一个子空间，$x \in \mathfrak{t}_1^\perp$ 是一个一般点。令 $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}^x, \mathfrak{g}^x]$，则有 $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{s} \subset \mathfrak{t}_1$，且 $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{s}$ 的 *Cartan* 子代数。

证明。 写作 $\mathfrak{g}^x = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{s}$，其中 $\mathfrak{z}$ 是 $\mathfrak{g}^x$ 的中心。于是 $(\mathfrak{z},\ \mathfrak{s}) = 0$。由于 $x \in \mathfrak{t}_1^\perp$ 是一般的，我们有 $\mathfrak{t}_1^\perp \subset \mathfrak{z}$。因此，$\mathfrak{z}^\perp = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{t}$ 包含于 $\mathfrak{t}_1$。 □

设 Q 是一个李代数为 $\operatorname{Lie} Q = \mathfrak{q}$ 的连通代数群。它是连通子群 $H_+ \subset G$ 与交换幺幂群 $\exp(\mathfrak{h}_-^{\mathsf{ab}})$ 的半直积。由于 $\mathfrak{h}_+$ 是球面的，我们有 $\operatorname{ind}\mathfrak{q} = \ell$ 且 $\operatorname{tr.deg}\ \Bbbk(\mathfrak{q}^*)^Q = \ell$。

引理 4.5。 (i) 对于任意 $x \in \mathfrak{t}_1^\perp$，仿射空间 $x + \mathfrak{u}_+$ 是 H_+-稳定的。此外，若 $x \in \mathfrak{t}_1^\perp$ 是一般的，则 H_+ 在 $x + \mathfrak{u}_+$ 中有一个稠密轨道；
(ii) 有 $\max_\xi(\text{维数}\ H_+{\cdot}\xi) = \text{维数}\,\mathfrak{u}$，其中 ξ 遍历 $\mathfrak{t}_1^\perp \oplus \mathfrak{u}$。

证明. (i) 由于 $H_+{\cdot}x \subset x + \mathfrak{u}_+$ 和 $H_+{\cdot}\mathfrak{u}_+ \subset \mathfrak{u}_+$，子簇 $x + \mathfrak{u}_+ \subset \mathfrak{g}$ 是 H_+-稳定的。对于 $x \in \mathfrak{t}_1^\perp$，列维子代数 $\mathfrak{g}^x$ 继承了来自 $\mathfrak{g}$ 的三角分解。令 $e \in \mathfrak{g}^x \cap \mathfrak{u}_+$ 为 $\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}^x, \mathfrak{g}^x]$ 的一个正则幂零元。于是 $x + e \in \mathfrak{g}_{\mathsf{reg}}$ 且 $\mathfrak{g}^{x+e} = \mathfrak{g}^x \cap \mathfrak{g}^e = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{s}^e$。因此 $\mathfrak{h}_+^{x+e} = (\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{z}) \oplus \mathfrak{s}^e$ 且 $\dim\ \mathfrak{s}^e = \operatorname{rk}\mathfrak{s}$。根据引理 4.4，若 x 是一般的，则 $\dim(\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{z}) = \dim\ \mathfrak{t}_1 - \operatorname{rk}\ \mathfrak{s}$。因此 $\dim \mathfrak{h}_+^{x+e} = \dim \mathfrak{t}_1$ 且 $\dim\ H_+{\cdot}(x + e) = \dim \mathfrak{u}_+$。

(ii) 令 $\Omega \subset \mathfrak{t}_1^\perp$ 为一般元素的集合。那么 $\Omega \times \mathfrak{u}$ 是 $\mathfrak{h}_+^\perp = \mathfrak{t}_1^\perp \oplus \mathfrak{u}$ 的稠密开子集，并且对所有 $\xi \in \Omega \times \mathfrak{u}$，$\dim\ H_+{\cdot}\xi = \dim \mathfrak{u}$。 □

定理 4.6。 如果 $\mathfrak{h}_+$存在一个广义生成系，那么 $\mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ 是一个多项式环。更确切地说，如果$F_1,\dots,F_\ell$是一个广义生成系，那么 $\mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ 由 $\mathfrak{t}_0$ 的一个基以及不包含在 $\mathcal{S}(\mathfrak{t}_0)$中的多项式 $\{F_j^\bullet\}$自由生成。

证明。 我们将应用引理4.3 于 $X=\mathfrak{q}^*$， $L=Q$，以及由 $C\subset\mathcal{S}(\mathfrak{q})^Q$的一组基和 $\mathfrak{t}_0$ 中不属于 $\{F_i^\bullet\}$ 的最高分量 $\mathcal{S}(\mathfrak{t}_0)$生成的代数。于是得到态射 $\psi:\ \mathfrak{q}^*\to$ 谱 C。

• 由于 $F_1,\dots,F_\ell$是广义生成系，其对应于 $\mathfrak{h}_+$，因此 C的生成元代数独立。特别地，C是整闭的，且 谱 $C\simeq\mathbb{A}^\ell$是一个仿射空间。令 $a=$维数 $\mathfrak{t}_0$。由定理 4.1，我们可以假设 $F_i^\bullet\in\mathcal{S}(\mathfrak{t}_0)$若 $i\leqslant a$，而 $F_i^\bullet\in\mathfrak{h}_+\otimes\mathcal{S}(\mathfrak{h}_-)$若 $i\geqslant a+1$。

• 我们来证明ψ是满射。记为 $\mathfrak{q}^*=\mathfrak{h}_+^*\oplus\mathfrak{h}_-^*$，其中 $\mathfrak{h}_-^*$ 与 $\mathrm{Ann}(\mathfrak{h}_+)\ \simeq\mathfrak{h}_+^\perp=\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{t}_1^\perp$相对应。 C 中构成 $\mathfrak{t}_0$ 的一组基的元素给出了从 $\mathfrak{h}_-^*$ 到$\mathbb{A}^a\simeq\mathfrak{t}_0^*$的满射。

任取一个 $x\in\mathfrak{t}_1^\perp\subset\mathfrak{h}_-^*$，并考虑仿射子空间 $x+\mathfrak{u}\subset\mathfrak{h}_-^*$。存在$y\in x+\mathfrak{u}$，它是 $\mathfrak{g}\simeq\mathfrak{g}^*$的正则元。

对于 $F\in\mathcal{S}^d(\mathfrak{g})$的双齐次分量$F_j$、$_{d-j}$，若 $j\geqslant 2$，则有 $\mathrm{d}_yF_{j,d-j}=0$。假设 $i>a$。那么 $F_i^\bullet\in\mathfrak{h}_+\otimes\mathcal{S}(\mathfrak{h}_-)$，并且 $\eta:=\mathrm{d}_yF_i=\mathrm{d}_yF_i^\bullet$。此外，$\eta\in\mathfrak{h}_+$作为 $\mathfrak{h}_+^*$ 上的线性函数，与 $F_i^\bullet$ 在 $y+\mathfrak{h}_+^*\subset\mathfrak{q}^*$上的限制相一致。根据科斯坦特的一个结果 [11, 定理 9]，，有 $\langle\mathrm{d}_yF_j\mid 1\leqslant j\leqslant\ell\rangle_{\Bbbk}=\mathfrak{g}^y$。特别地，限制$F_i^\bullet|_{y+\mathfrak{h}_+^*}$ （其中 $a+1\leqslant i\leqslant\ell$）线性无关。因此，它们定义了一个从 $y+\mathfrak{h}_+^*$ 到 $\mathbb{A}^{\ell-a}$的满射。于是，ψ 确实是满射。

• 我们的下一个任务是研究 ψ的 $x\in\mathfrak{t}_1^\perp$一般纤维。对于任意$x+\mathfrak{u}\subset\mathfrak{h}_-^*$，仿射子空间 H_+是 $x\in\mathfrak{t}_1^\perp$-稳定的。设 $x\in$是一般的，即Ω。由引理4.5，有一个稠密轨道()满足。注意，不依赖于。

由于 C包含 $\mathfrak{t}_0$和 $\mathfrak{t}_1^\perp\simeq\mathfrak{t}_0^*$的一组基，因此只要 $\tilde{x}\in\mathfrak{t}_1^\perp$不等于 x，就有 $\psi(x+\mathfrak{u}+\mathfrak{h}_+^*)\cap\psi(\tilde{x}+\mathfrak{u}+\mathfrak{h}_+^*)=\varnothing$。存在一个稠密开子集 $V\subset$谱C，使得对每个 $v\in V$，纤维 $\psi^{-1}(v)$ 都包含一点 $\xi=u+t+e$，其中 $u\in\mathfrak{h}_+^*$ 且 $t\in\Omega$，也就是说，此处 $H_+{\cdot}(t+e)$ 在 $t+\mathfrak{u}$中稠密。令 $y=t+e$。那么，对每个 $v\in V$， $\psi^{-1}(v)\cap(\mathfrak{h}_+^*\times H_+{\cdot}y)$ 都是 $\psi^{-1}(v)$ 的非空开子集。

如果 $\psi^{-1}(v)$ 的一个不可约分支 Ψ_v （其具有 $v\in V$）满足：对于 X_0，$=\mathfrak{h}_+^*\times H_+{\cdot}y$，则称其适宜；如果$\Psi_v\cap X_0=\varnothing$。若 $\psi^{-1}(v)$ 含有不适宜分支，则 v 也不适宜。令 $D_{\mathsf{ns}}\subset\mathfrak{q}^*$ 为所有不适宜分支的并集。我们有

$$D_{\mathsf{ns}}\subset\mathfrak{h}_+^*\times\left(\bigcup_{x\in\Omega}(x+\mathfrak{u})\setminus H_+{\cdot}\tilde{y}\right)=\mathfrak{h}_+^*\times\left((\Omega\times\mathfrak{u})\setminus H_+{\cdot}(\Omega\times\Bbbk e)\right),$$

其中 $\tilde{y}=x+e$ 和 $H_+{\cdot}\tilde{y}$ 在每个 x中都稠密于 $x+\mathfrak{u}$。注意，每个不可约分支 Ψ_v的维数至少为 $\dim\mathfrak{g}-\ell$。由于 $\dim D_{\mathsf{ns}}\leqslant\dim\ \mathfrak{g}-1$，且 $\psi:D_{\mathsf{ns}}\to\psi(D_{\mathsf{ns}})$ 的一般纤维维数至少为 $\dim\mathfrak{g}-\ell$，因此像 $\psi(D_{\mathsf{ns}})$ 包含于

谱 C的一个真闭子集中。因此，我们可以用由适当点组成的非空开子集替换 V。现在，对每个 $v \in V$， $\psi^{-1}(v) \cap X_0$ 在 $\psi^{-1}(v)$ 中稠密。

我们来证明 $Q{\cdot}\xi = \psi^{-1}(v)$。这一断言可由以下事实推出： X_0 上的 Q-轨道由不变量 $F_i^\bullet$（满足 $i > a$）区分。下文将描述这些轨道并证明该断言。

显然， $\mathfrak{h}_+^*$ 和 $\mathfrak{h}_-^*$ 是 H_+-稳定的。此外，对于满足 $\tilde{u} \in \mathfrak{h}_+^*$ 和 $z \in \mathfrak{h}_-^\perp$的 $\tilde{u} + z \in \mathfrak{q}^*$ ，有

$$H_-{\cdot}(\tilde{u}+z) = \exp(\mathfrak{h}_-){\cdot}(\tilde{u}+z) = \tilde{u} + z + \mathrm{ad}^*(\mathfrak{h}_-)(\tilde{u}+z) = \tilde{u} + z + \mathrm{ad}^*(\mathfrak{h}_-)z$$

由于 $[\mathfrak{h}_-, \mathfrak{h}_-]_0 = 0$ 和 $[\mathfrak{h}_-, \mathfrak{h}_+]_0 \subset \mathfrak{h}_-$， 有 $\mathrm{ad}^*(\mathfrak{h}_-)z \subset \mathfrak{h}_+^*$。根据定义， $\mathrm{ad}^*(\mathfrak{h}_-)z$ 在 $\mathfrak{h}_+^z$上为零。因此，由维数理由， $\mathrm{ad}^*(\mathfrak{h}_-)z = \mathrm{Ann}(\mathfrak{h}_+^z) \subset \mathfrak{h}^*$。

我们需要证明每个 $\xi_2 \in \psi^{-1}(v) \cap X_0$ 都属于 $Q{\cdot}\xi$。不妨假设 $\xi_2 = u_2 + y$满足 $u_2 \in \mathfrak{h}_+^*$ ， 且 $y = t + e$ 如上所述。那么， 当且仅当 $\xi_2 \in Q{\cdot}\xi$

$$u_2 \in H_+^y{\cdot}u + \mathrm{ad}^*(\mathfrak{h}_-)y = \{g{\cdot}u + \mathrm{ad}^*(h)y \mid g \in H_+^y,\, h \in \mathfrak{h}_-\} = H_+^y{\cdot}u + \mathrm{Ann}(\mathfrak{h}_+^y).$$

当且仅当 u 和 u_2 在 $\mathfrak{h}_+^y$ 上的限制属于 H_+^y 的同一个轨道时，情况才是如此。

各向同性群 G^y 是阿贝尔群且 $H_+^y \subset G^y$。因此， H_+^y 在 $(\mathfrak{h}_+^y)^*$ 上平凡作用。于是， $\xi_2 \in Q{\cdot}\xi$ 当且仅当限制 $u|_{\mathfrak{h}_+^y}$ 和 $u_2|_{\mathfrak{h}_+^y}$ 相同。由于 $F_i^\bullet|_{y+\mathfrak{h}_+^y}$ 与 $i > a$构成 $\mathfrak{h}_+^{t+e}$的一组基，等式 $F_i^\bullet(\xi) = F_i^\bullet(\xi_2)$ 且 $i >$维数为 a 意味着 $u|_{\mathfrak{h}_+^y} = u_2|_{\mathfrak{h}_+^y}$。 由此 $\xi_2 \in Q{\cdot}\xi$。

因此，引理 4.3的所有条件均已满足，故 $\Bbbk[\mathfrak{q}^*]^Q = C$。 □

注 4.7。定理 4.6 中 $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}$ 或 $\{0\}$ 的情形此前已有研究。若 $\mathfrak{h}_+ = \mathfrak{b}$， 则对于任意希尔伯特基 $(F_1, \dots, F_\ell)$， $\mathcal{ZS}(\mathfrak{b} \ltimes \mathfrak{u}_-^{\mathrm{ab}}) = \Bbbk[F_1^\bullet, \dots, F_\ell^\bullet]$， 参见 [19, 定理 3.3]。若 $\mathfrak{h}_+ = \mathfrak{u}$， 则 $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{t}$ 且 $\mathcal{ZS}(\mathfrak{u} \ltimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^{\mathrm{ab}}) = \mathcal{S}(\mathfrak{t})$， 参见 [21, 命题 4.2]。

Recall from Section 3 that $s_0 = \mathrm{tr.deg}\, \Bbbk((\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_+)^*)^{H_+} = \mathrm{tr.deg}\, \Bbbk(\mathfrak{h}_+^\perp)^{H_+}$.

命题 4.8。 对于可解极限球面子代数 $\mathfrak{h}_+ = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{t}_1$， 有 $s_0 = \ell -$ 维数 $\mathfrak{t}_1$。

证明。回顾一下， H_+-模 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_+)^*$ 与 $\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{t}_1^\perp \subset \mathfrak{g}$ 同构。由 Rosenlicht 定理 [29, § 2.3]， $s_0 = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_+) - \max_\xi(\dim H_+{\cdot}\xi)$， 其中 $\xi \in \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{t}_1^\perp$。由引理 4.5(ii)， 我们有 $\max_\xi(\dim H_+{\cdot}\xi) = \dim \mathfrak{u}$。因此 $s_0 = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}_+ - \dim \mathfrak{u} = \ell - \dim \mathfrak{t}_1$。 □

推论 4.9. 对于任意 *horosphere* 型分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_+ \oplus \mathfrak{h}_-$， 都有 $s_0 + s_\infty = \ell$。

4.2. 广义生成系存在的必要条件。我们将定理 4.1 转化为关于 $\mathfrak{g}$ 上函数的表述。利用 (,), 我们将 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ 与 $\Bbbk[\mathfrak{g}]$等同。特别地，我们将 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ 中的元素视为 G 在 $\mathfrak{g}$ 上的不变多项式。Chevalley 的著名定理指出，限制同态 $\Bbbk[\mathfrak{g}] \to \Bbbk[\mathfrak{t}], F \mapsto F|_{\mathfrak{t}}$ 诱导出一个同构$\Bbbk[\mathfrak{g}]^G \simeq \Bbbk[\mathfrak{t}]^W$, 其中 W 是 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 的 Weyl 群。

约定。 在本节余下部分，我们假设 $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{t}_1^{\perp}$，即 $\mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}$ 是正交直和。于是，对于 $F \in \mathcal{S}$，条件 $F_j^{\bullet} \in \mathcal{S}(\mathfrak{t}_0)$等价于：若将 F 视为 $\Bbbk[\mathfrak{g}]^G$中的元素，则 $F_j|_{\mathfrak{t}_0} \neq 0$。

因此，定理 (i),(ii) 的第 4.1部分可改述如下。

命题 4.10。 $\Bbbk[\mathfrak{g}]^G$ 的希尔伯特基 $F_1, \dots, F_\ell$ 是 $\mathfrak{h}_+ = \mathfrak{u}_+ \oplus \mathfrak{t}_1$ 的广义生成系，当且仅当恰有维数 $\mathfrak{t}_0$ 个指标 $j \in \{1, \dots, \ell\}$ 满足$F_j|_{\mathfrak{t}_0} \neq 0$。

利用上述 Chevalley 同构，可以在 $\Bbbk[\mathfrak{t}]^W$ 中进行讨论，并给出命题 4.10 的一个不涉及“指标”的版本。显然，复合

$$\mathfrak{t}_1^{\perp} = \mathfrak{t}_0 \hookrightarrow \mathfrak{t} \xrightarrow{\tau} \mathfrak{t}/W = \mathsf{Spec}(\Bbbk[\mathfrak{t}]^W) \simeq \mathbb{A}^{\ell}$$

是一个有限态射。因此，

- $\tau(\mathfrak{t}_0)$ 是 $\mathfrak{t}/W$的闭子簇，且 $\dim\ \tau(\mathfrak{t}_0) = \dim\ \mathfrak{t}_0$;
- $\mathsf{res}_0(\Bbbk[\mathfrak{t}]^W) := \Bbbk[\mathfrak{t}]^W|_{\mathfrak{t}_0}$是一个 Krull 维数为 $\dim\ \mathfrak{t}_0$ 的 $\Bbbk$-代数;
- $\tau(\mathfrak{t}_0) =$谱$(\mathsf{res}_0(\Bbbk[\mathfrak{t}]^W)$.

命题 4.11。 假设 $\mathfrak{h}_+ = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{u}_+ \subset \mathfrak{b}_+$ 和 $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{t}_1^{\perp} \subset \mathfrak{t}$。 n

$$\textit{there is a g.g.s. for } \mathfrak{h}_+ \iff \mathsf{res}_0(\Bbbk[\mathfrak{t}]^W) \textit{ is a graded polynomial ring.}$$

证明。“$\Leftarrow$”。这里 $p:\ \Bbbk[\mathfrak{t}]^W \to \mathsf{res}_0(\Bbbk[\mathfrak{t}]^W)$ 是分次多项式环之间的一个零次满同态。根据引理 4.1],，存在 $\Bbbk[\mathfrak{t}]^W$的一个希尔伯特基 $F_1, \dots, F_\ell$，使得 $p(F_1) \dots, p(F_a)$ 是 $\mathsf{res}_0($ $\Bbbk[\mathfrak{t}]^W)$ 的一个希尔伯特基，且 $p(F_j) = 0$ 对于 $j > a$成立。由此得到所需的广义生成系。

“$\Rightarrow$”。这可直接由命题4.10推出。 □

利用 Richardson 的一个结果，我们给出一个实用的必要条件，以判定可解极限球面子代数广义生成系 $\mathfrak{h}_+$的存在性。根据命题 4.11，若 $\mathfrak{h}_+$ 存在一个广义生成系，则 $\mathsf{res}_0(\Bbbk[\mathfrak{t}]^W)$ 是一个多项式环（含有 $\dim\ \mathfrak{t}_0$ 个变量），即 $\tau(\mathfrak{t}_0)$ 是一个仿射空间。特别地，$\tau(\mathfrak{t}_0)$ 是正规的。令

$$N_W(\mathfrak{t}_0) = \{w \in W \mid w(\mathfrak{t}_0) \subset \mathfrak{t}_0\}\ \&\ Z_W(\mathfrak{t}_0) = \{w \in W \mid w(t) = t \text{ for all } t \in \mathfrak{t}_0\}.$$

有限群 $W_0 = N_W(\mathfrak{t}_0)/Z_W(\mathfrak{t}_0)$ 作用于 $\mathfrak{t}_0$，显然，$\mathsf{res}_0(\Bbbk[\mathfrak{t}]^W) \subset \Bbbk[\mathfrak{t}_0]^{W_0}$。由于 $\mathfrak{t}_0$是正规子群，以下是 [24, §3] 中定理 A 的一个特例。

命题 4.12 (R.W. RICHARDSON)。 在上述记号下，有

$$\tau(\mathfrak{t}_0) \textit{ is normal } \iff \mathsf{res}_0(\Bbbk[\mathfrak{t}]^W) = \Bbbk[\mathfrak{t}_0]^{W_0}.$$

一个与我们相关的推论是

推论 4.13. 若 $\mathsf{res}_0(\Bbbk[\mathfrak{t}]^W) \subsetneqq \Bbbk[\mathfrak{t}_0]^{W_0}$，则不存在适用于 $\mathfrak{h}_+$ 的广义生成系。

5. A HOROSPHERICAL SPLITTING OF $\mathfrak{g} \dotplus \mathfrak{t}$.

与前面一样， $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_+ \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}_-$ 是 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{b}_\pm = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}_\pm$的一个固定三角分解。考虑约化李代数 $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \dotplus \mathfrak{t}$，其中第二个直和项是 $\mathfrak{g}$的 Cartan 子代数的另一个副本。于是 $b(\tilde{\mathfrak{g}}) = b(\mathfrak{g}) + \ell$，且 $\mathbf{rk}\,\tilde{\mathfrak{g}} = 2\ell$。这里， $\mathfrak{t} \dotplus \mathfrak{t} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ 分解为 $\mathfrak{t}_0 = \{(t,t) \mid t \in \mathfrak{t}\}$ 与 $\mathfrak{t}_1 := \{(t,-t) \mid t \in \mathfrak{t}\}$ 之和。我们在 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 上赋予不变双线性形式 $(\,,\,) \dotplus \langle\,,\,\rangle$。于是， $\mathfrak{t}_0$ 和 $\mathfrak{t}_1$ 关于此形式正交。为区分 $\mathfrak{t}$的两个副本，下文将 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 中的直和项记为 $\mathfrak{t}_{\mathsf{dir}}$。

令 $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{u}_+ \oplus \mathfrak{t}_1$与 $\tilde{\mathfrak{r}} = \mathfrak{u}_- \oplus \mathfrak{t}_0$。则这两个子代数在 $\tilde{\mathfrak{g}}$中均为球面，且同构于 $\mathfrak{g}$ 的一个 Borel 子代数，并且也 $\mathfrak{h} \cap \tilde{\mathfrak{r}} = \{0\}$。因此 $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{r}}$ 是一个 horospherical 分解。按照我们的一般方案，我们令 $\tilde{\mathfrak{g}}_{(0)} = \tilde{\mathfrak{h}} \ltimes \tilde{\mathfrak{r}}^{\mathsf{ab}}$ 与 $\tilde{\mathfrak{g}}_{(\infty)} = \tilde{\mathfrak{r}} \ltimes \tilde{\mathfrak{h}}^{\mathsf{ab}}$。则 $\tilde{\mathcal{Z}}_0$ 与 $\tilde{\mathcal{Z}}_\infty$是相应的泊松中心。

注记 5.1. 容易看出，若 $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Borel 子代数，则 $\mathfrak{h} \simeq \tilde{\mathfrak{r}} \simeq \mathfrak{b}$ 与

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{(0)} \simeq \tilde{\mathfrak{g}}_{(\infty)} \simeq \mathfrak{b} \ltimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{u})^{\mathsf{ab}} = \mathfrak{b} \ltimes (\mathfrak{b}^*)^{\mathsf{ab}}.$$

在 [3], 中，李代数 $\mathcal{I}(\mathfrak{b}) := \mathfrak{b} \ltimes (\mathfrak{b}^*)^{\mathsf{ab}}$ 称为 ***Drinfeld*** 双（对应于 $\mathfrak{b}$）。我们将 $\mathcal{I}(\mathfrak{b})$ 解释为 $\mathfrak{g} \dotplus \mathfrak{t}_{\mathsf{dir}}$ 的收缩，这一解释是新的。这可以推广到 $\mathfrak{g}$ 的任意抛物子代数。我们希望在即将发表的论文中详细阐述这一主题。

设 $F_1, \ldots\ldots, F_\ell$ 是 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ 的希尔伯特基，而 $\xi_1, \ldots\ldots, \xi_\ell$ 是 $\mathfrak{t}_{\mathsf{dir}}$ 的基。它们合在一起构成 $\mathcal{S}(\tilde{\mathfrak{g}})^{\tilde{\mathfrak{g}}}$ 的希尔伯特基。为了得到 $\tilde{\mathfrak{h}}$ 或 $\tilde{\mathfrak{r}}$ 的广义生成系，需要对这个希尔伯特基作某些修改。这里，$\xi_i^\bullet$ 和 $(\xi_i)_\bullet$（其中 $1 \leqslant i \leqslant \ell$）分别构成 $\mathfrak{t}_0$ 和 $\mathfrak{t}_1$ 的基。和之前一样，我们将 $\mathfrak{t}$ 视为 $\mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$。对于任意 $F \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$，令 $f = F|_{\mathfrak{t}}$，并令 $\boldsymbol{f}$ 为 $\mathcal{S}(\mathfrak{t}_{\mathsf{dir}})$ 中 f 的一个副本。

命题 5.2。 使用上述记号，有

(i) $\xi_1, \ldots, \xi_\ell, F_1 - \boldsymbol{f}_1, \ldots, F_\ell - \boldsymbol{f}_\ell$ *is a* g.g.s. *for* $\tilde{\mathfrak{h}}$;
(ii) $\xi_1, \ldots, \xi_\ell, F_1 - (-1)^{d_1}\boldsymbol{f}_1, \ldots, F_\ell - (-1)^{d_\ell}\boldsymbol{f}_\ell$ *is a* g.g.s. *for* $\tilde{\mathfrak{r}}$.

证明。 设 $\{h_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell\}$ 为 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ 的一组基。我们假设 $\mathfrak{t}$ 与 $\mathfrak{t}_{\mathsf{dir}}$ 的识别由 $h_i \mapsto \xi_i$ 给出。那么 $\{h_i + \xi_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell\}$ 是 $\mathfrak{t}_0$ 的一组基，而 $\{h_i - \xi_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell\}$ 是 $\mathfrak{t}_1$ 的一组基。由此得到双齐次分解

$$h_i = \frac{1}{2}\big((h_i + \xi_i) + (h_i - \xi_i)\big) \quad \& \quad \xi_i = \frac{1}{2}\big((h_i + \xi_i) + (-h_i + \xi_i)\big). \tag{5·1}$$

对于每个 F_j，限制 $f_j = F_j|_{\mathfrak{t}} \in \mathcal{S}(\mathfrak{t})$ 都是 $h_1, \dots, h_\ell$ 中一个非零的 W-不变多项式。于是，将每个 h_i 替换为 ξ_i，即可由 f_j 得到 $\boldsymbol{f}_j \in \mathcal{S}(\mathfrak{t}_{\mathrm{dir}})$。

（i）由（5·1）可知，具有最大 $\tilde{\mathfrak{r}}$次数的双齐次分量 $\boldsymbol{f}_j^{\bullet}$，可由 $\boldsymbol{f}_j$中每个 ξ_i都替换为其 $\tilde{\mathfrak{r}}$分量得到，即 $\mathbf{1}\,\mathbf{2}(h_i+\xi_i)$。同理，双齐次分量 $F_j^{\bullet}$可由 f_j 中每个 h_i 都替换为其 $\tilde{\mathfrak{r}}$分量得到，即 $\mathbf{1}\,\mathbf{2}(h_i+\xi_i)$。因此，$F_j^{\bullet}$和 $\boldsymbol{f}_j^{\bullet}$属于 $\mathcal{S}(\mathfrak{t}_0) \subset \mathcal{S}(\tilde{\mathfrak{r}})$，且二者相等。取 $F_j - \boldsymbol{f}_j$ 即可消去这个最高分量，这意味着 $(F_j - \boldsymbol{f}_j)^{\bullet} \notin \mathcal{S}(\mathfrak{t}_0)$，从而对于 $j = 1, \dots, \ell$，有 $\deg_{\tilde{\mathfrak{r}}}(F_j - \boldsymbol{f}_j)^{\bullet} \leqslant d_j - 1$。由于 $\dim \mathfrak{t}_0 = \ell$，（i）由定理 4.1 得证。

(ii) 类似的想法适用于 $(F_j)_{\bullet}$ 与 $(\boldsymbol{f}_j)_{\bullet}$，即具有 $\tilde{\mathfrak{h}}$极大 $\mathfrak{h}$-次数的双齐次分量。为得到 $(\boldsymbol{f}_j)_{\bullet}$，我们将 $\boldsymbol{f}_j$ 中的每个 ξ_i 替换为其 $\mathfrak{h}$-分量，即 $\mathbf{1}\,\mathbf{2}(-h_i+\xi_i)$。类似地，为得到 $(F_j)_{\bullet}$，我们将 f_j 中的每个 h_i 替换为其 $\tilde{\mathfrak{h}}$-分量，即 $\mathbf{1}\,\mathbf{2}(h_i-\xi_i)$。因此 $F_j^{\bullet}$ 与 $\boldsymbol{f}_j^{\bullet}$ 属于 $\mathcal{S}(\mathfrak{t}_1) \subset \mathcal{S}(\tilde{\mathfrak{h}})$，并且它们至多相差一个符号。取$F_j - (-1)^{d_j}\boldsymbol{f}_j$会消去这些分量，从而对$j = 1, \dots, \ell$ 有 $\deg_{\tilde{\mathfrak{h}}}(F_j - (-1)^{d_j}\boldsymbol{f}_j)^{\bullet} \leqslant d_j - 1$。由于 $\dim \mathfrak{t}_1 = \ell$，由定理 4.1 可得第 (i) 部分。□

由于存在 广义生成系 对于 $\tilde{\mathfrak{h}}$ 和 $\tilde{\mathfrak{r}}$，定理 4.6 蕴含泊松中心 $\tilde{\mathcal{Z}}_0$ 和$\tilde{\mathcal{Z}}_\infty$ 是多项式环，即我们得到

推论 5.3. 对于 *Drinfeld* 双 $I(\mathfrak{b})$，泊松中心 $\mathcal{ZS}(\mathcal{I}(\mathfrak{b}))$ 是一个多项式环。

注意，这里 $\mathcal{Z}_0$ 与 $\mathcal{Z}_\infty$ 由相关的最高分量生成，因为 $\{\xi_i^{\bullet} \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell\}$ 与 $\{(\xi_i)_{\bullet} \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell\}$分别是 $\mathfrak{t}_0$ 与 $\mathfrak{t}_1$的基。这与注记 4.2 一致，因为这里 $\dim \mathfrak{t}_0 = \dim \mathfrak{t}_1 = \dim \mathfrak{z}(\tilde{\mathfrak{g}}) = \ell$。然而值得一提的是，$I(\mathfrak{b})$并不总是具有余维二性质。因为 $\mathfrak{t}$ 在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}$ 中的像是 $I(\mathfrak{b})$的中心，从而 $I(\mathfrak{b}) \simeq \left(\mathfrak{b} \ltimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^{\mathrm{ab}}\right) \dotplus \mathfrak{t}$。由 [19, 定理 4.2], 李代数$\mathfrak{b} \ltimes \mathfrak{u}^{\mathrm{ab}}$仅对 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ 具有余维二性质。

若所有次数 $\{d_j\}$ 均为偶数，则命题 5.2 给出了一个共同的 广义生成系，适用于 $\tilde{\mathfrak{h}}$ 和$\tilde{\mathfrak{r}}$。因此，定理 3.11 已保证 $\mathcal{Z}_{\langle \tilde{\mathfrak{h}},\, \tilde{\mathfrak{r}} \rangle}$ 是一个多项式环。（若 $\mathfrak{g}$ 是单的，则奇数次只会出现在类型为 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathcal{A}_n\,(n \geqslant 2)$ 中，$\mathcal{D}_{2n+1}$以及 $\mathcal{E}_6$。）尽管如此，$\mathcal{Z}_{\langle \tilde{\mathfrak{h}},\, \tilde{\mathfrak{r}} \rangle}$ 是多项式环这一结论，一般可由第 3节的其他结果推出。关于 horosphere 型分解 $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{r}}$ 的主要结果可概括如下。

定理 5.4。 该PC 子代数 $\mathcal{Z}_{\langle \tilde{\mathfrak{h}},\, \tilde{\mathfrak{r}} \rangle} \subset \mathcal{S}(\mathfrak{g} \dotplus \mathfrak{t})$ 是一个多项式环。它由以下元素自由生成：$\{\xi_i^{\bullet},\ (\xi_i)_{\bullet} \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell\}$，以及双齐次分量 $\{(F_i)_{j,\ d_i - j} \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ \ 0 < j < d_i\}$。

证明。 根据命题 4.8，我们有 $s_0 = s_\infty = \ell$。因此 $s_0 + s_\infty = 2\ell = \mathrm{rk}\,\tilde{\mathfrak{g}}$。由于 $\tilde{\mathfrak{h}}$ 和 $\tilde{\mathfrak{r}}$ 均存在广义生成系（命题 5.2），代数 $\tilde{\mathcal{Z}}_0$ 和 $\tilde{\mathcal{Z}}_\infty$ 是多项式环，参见定理4.6。于是，定理3.14 适用于此处，并给出了$\mathcal{Z}_{\langle \tilde{\mathfrak{h}},\tilde{\mathfrak{r}} \rangle}$的自由生成元的所需描述。□

6. 半 horosphere 分裂与对合

如果分裂 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{r}$ 满足以下条件之一： $\mathfrak{h}$ 或 $\mathfrak{r}$ 是可解的且为 horosphere 型，则称其为半水平分解。设 σ 是单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个对合， $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ 是相应的 $\mathbb{Z}_2$-分次。记 G_0 为 G 中李代数为 $G_0 = \mathfrak{g}_0$的连通子群。若σ 是 S-正则的，即 $\mathfrak{g}_1$ 包含 $\mathfrak{g}$的正则半单元素，则称其为 S-正则。我们的首要目标是将一个半水平分解与 S-正则对合 σ联系起来。这种可能性在 [21, 注 6.3]中作了简要讨论。然后我们考察相关的 PC 子代数。关于与 $\mathbb{Z}_2$-分次相关的基本概念和不变量论结果，参见 [12]。

令 $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{g}_1$ 为一个嘉当子空间。由于 $\mathfrak{c}$包含正则半单元素， $\mathfrak{t} := \mathfrak{g}^{\mathfrak{c}}$ 是 $\mathfrak{g}$和 $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0 \dotplus \mathfrak{c}$的 Cartan 子代数，其中 $\mathfrak{t}_0 := \mathfrak{g}^{\mathfrak{c}} \cap \mathfrak{g}_0$。注意， $\langle \mathfrak{c}, \mathfrak{t}_0 \rangle = 0$。由于 $\sigma(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$，对合 σ 作用于根系 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$，因而也作用于标准的 $\mathbb{Q}$-形式$\mathfrak{t}_{\mathbb{Q}} \subset \mathfrak{t}$。于是 $\mathfrak{t}_{\mathbb{Q}} = (\mathfrak{t}_0)_{\mathbb{Q}} \oplus \mathfrak{c}_{\mathbb{Q}}$，其中 $\mathfrak{c}_{\mathbb{Q}} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{t}_{\mathbb{Q}}$。由于 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{t}$，没有根 $\alpha \in \Delta$ 在 $\mathfrak{c}$上消失。选取一般的 $\xi \in \mathfrak{c}_{\mathbb{Q}}$，使得对所有 $\alpha \in \Delta$ 都有 $\alpha(\xi) \neq 0$，并令 $\Delta^+ := \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(\xi) > 0\}$。令 $\mathfrak{b}$ 为与 Δ^+ 和 $\mathfrak{u} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$相关联的 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数。

引理 6.1. 我们有 $\mathfrak{b} + \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}_0$。

证明。 由于 $\sigma(\xi) = -\xi$，对每个 $\alpha \in \Delta^+$，我们有 $\sigma(\alpha) \in \Delta^-$。于是 $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_0$，从而 $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}_0$。对每个 $x \in \mathfrak{u}_- = [\mathfrak{b}_-, \mathfrak{b}_-]$，我们有 $\sigma(x) \in \mathfrak{u}$ 以及 $x + \sigma(x) \in \mathfrak{g}_0$。因此， $x = (x + \sigma(x)) - \sigma(x) \in \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{b}$。 □

令 $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ 为 Δ^+ 中简单根的集合。由于 $\sigma(\Delta^+) = -\Delta^+$，我们有$\sigma(\Pi) = -\Pi$。这使我们能够描述 σ 的***Satake*** 图St(σ)，用于 S-正则对合。这里，St(σ) 就是 $\mathfrak{g}$ 的 Dynkin 图，并附加了连接某些节点对的箭头。具体而言，若 $\sigma(\alpha_i) = -\alpha_j$ 且 $i \neq j$，则我们画一条连接 α_i 和 α_j 的箭头。若 $\sigma(\alpha_i) = -\alpha_i$，则不在 α_i 上附加箭头。因此，连接 α_i 和 α_j 的箭头对应于元素 $\alpha_i - \alpha_j \in \mathfrak{t}_0 \subset \mathfrak{t} \simeq \mathfrak{t}^*$，且 dim $\mathfrak{t}_0$ 等于 St(σ) 中箭头的数量。

注6.2. 在实半单李代数的背景下，Satake 图的一般描述可见于 [7, 第 4 章第 4 节3]。此外， $\mathfrak{g}$ [7, 第 4 章第 1 节3] 中的实形式与对合之间存在双射，因此可为任意对合附上相应的 Satake 图。文献 [4, 1.1-1.4] 通过 σ 给出了 St(σ) 的直接构造（尽管其中并未使用“Satake 图”这一术语）。

令 $\mathfrak{h} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{u}$。那么 $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 = \{0\}$ 和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$的非退化半 horosphere 分裂。若 $\sigma = \vartheta^{\max}$，则 $\mathfrak{c} = \mathfrak{t}$、 $\mathfrak{h} = \mathfrak{b}$以及多项式环 $\mathcal{Z}_{\langle \mathfrak{b},\ \mathfrak{g}_0 \rangle}$ 在 [21, 第 4]节中有描述。下面，我们考虑其余的 S-正则对合 σ，即满足$\mathfrak{t}_0 \neq \{0\}$的对合。相关对 $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}_0)$ 的列表见引言。不过，在 $\mathfrak{sl}_n$-情形下，区分 n的奇偶性会比较方便。

	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_0$	维 $\mathfrak{c}$	维 $\mathfrak{t}_0$	
1	$\mathfrak{sl}_{2n}$	$\mathfrak{sl}_n \dotplus \mathfrak{sl}_n \dotplus \Bbbk$	n	$n-1$	$n \geqslant 2$
2	$\mathfrak{sl}_{2n+1}$	$\mathfrak{sl}_n \dotplus \mathfrak{sl}_{n+1} \dotplus \Bbbk$	n	n	$n \geqslant 1$
3	$\mathfrak{so}_{2n}$	$\mathfrak{so}_{n+1} \dotplus \mathfrak{so}_{n-1}$	$n-1$	1	$n \geqslant 4$
4	$\mathcal{E}_6$	$\mathfrak{sl}_6 \dotplus \mathfrak{sl}_2$	4	2	

表 1. 非最大秩的单 $\mathfrak{g}$ 中， S-正则对合

我们希望将定理 3.14 应用于与 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_0$ 相关的 σ 表 1中的半 horosphere 分裂。这里 $\mathfrak{g}_{(0)} = \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{g}_0^{\mathsf{ab}}$和 $\mathfrak{g}_{(\infty)} = \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{h}^{\mathsf{ab}}$。我们希望证明 $s_0 + s_\infty = \ell$ 以及 $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{(0)})$ 和 $\mathcal{Z}_\infty = \mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{(\infty)})$ 都是多项式环。

- 这一计划的第一部分是

引理6.3. 对于所有与 σ 表1相关的半 *horosphere* 分裂，我们有 $s_0 =$ 维 $\mathfrak{t}_0$， $s_\infty =$ 维 $\mathfrak{c}$，因此 $s_0 + s_\infty = \ell$。

证明。 1. 由于 $\mathfrak{g}_1$ 是一个正交 G_0-模，我们有$(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0)^* \simeq \mathfrak{g}_1$ 且 $\Bbbk(\mathfrak{g}_1)^{G_0}$ 是 $\Bbbk[\mathfrak{g}_1]^{G_0}$的分式域。各向同性表示的一个基本性质 $G_0 \to SO(\mathfrak{g}_1)$是 $\Bbbk[\mathfrak{g}_1]^{G_0}$ 是一个含有维 $\mathfrak{c}$ 个变量的多项式环 [12]。因此 $s_\infty =$ 维 $\mathfrak{c}$。

2. 由于 $\mathfrak{h}$ 是可解且为 horosphere 型，命题 4.8 表明 $s_0 = \ell -$ 维数 $\mathfrak{c}$。 □

- 在 [17, 第5], 节中证明了，对于表 $\mathcal{Z}_\infty$ 1中的所有项，
  - 根据定理 4.6，若 $\mathfrak{h}$ 存在一个 广义生成系，则 $\mathcal{Z}_0$ 是一个多项式环。因此，我们的任务是确定表 1中第 1–4 项对应的 $\mathfrak{h} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{u}$ 是否存在一个 广义生成系。这里，我们可以不考虑 $\mathfrak{g}_0$ ，而处理与 $\mathfrak{h}$ 相补的齐性子代数$\mathfrak{h}_- = \mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{u}_-$，其中 $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{c}$。

与命题 4.10一样，我们将 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ 中的元素视为$\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$上的多项式函数。回顾一下，条件 $F^\bullet \in \mathcal{S}(\mathfrak{t}_0)$ 正转化为性质 $F|_{\mathfrak{t}_0} \neq 0$。这意味着，对于固定的 Cartan 子代数 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$，必须知道嵌入 $\mathfrak{t}_0 \subset \mathfrak{t}$，然后描述 $\Bbbk[\mathfrak{t}]^W$ 在 $\mathfrak{t}_0$上的限制，见命题 4.11。如上所述，显式嵌入 $\mathfrak{t}_0 \subset \mathfrak{t}$ 由 $\mathsf{St}(\sigma)$得到。

6.1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n}$. 对于 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_n \dotplus \mathfrak{sl}_n \dotplus \Bbbk$，Satake 图如图 1所示。我们假设 $n \geqslant 2$，因此该图有箭头，且 $\mathfrak{t}_0 \neq \{0\}$。

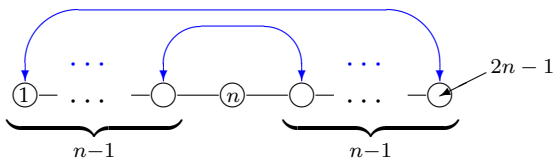


图 *1.* $(\mathfrak{sl}_{2n},\ \mathfrak{sl}_n \dotplus \mathfrak{sl}_n \dotplus \Bbbk)$ 的 Satake 图

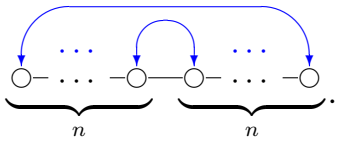
箭头连接节点对 $(1,\ 2n-1)$、$(2,\ 2n-2)$.....、$(n-1,\ n+1)$。因此$\mathfrak{t}_0$ 是由满足 $1\leqslant i\leqslant n-1$的 $\alpha_i-\alpha_{2n-i}$ 所张成的 $\Bbbk$-线性空间。于是

$$\mathfrak{t}_0=\{\mathsf{diag}(c_1,\dots,c_n,c_n,\dots,c_1)\mid \sum_{i=1}^{n}c_i=0\}. \tag{6·1}$$

设 $\mathtt{P}_2,\dots,\mathtt{P}_{2n}$ 为 $\Bbbk[\mathfrak{sl}_{2n}]^{SL_{2n}}$ 的一个希尔伯特基，使得对 $A\in\mathfrak{g}\simeq\mathfrak{g}^*$ 有 $\mathtt{P}_k(A)=\mathrm{tr}\,(A^k)$。于是 $\boldsymbol{p}_k:=\mathtt{P}_k|_{\mathfrak{t}}$ 是一个幂和，即 $\boldsymbol{p}_k(A)$ 是 A 对角元的第 k 次幂之和。此处 $W=\mathbb{S}_{2n}$，$N_W(\mathfrak{t}_0)/Z_W(\mathfrak{t}_0)\ \simeq\ \mathbb{S}_n$，并且 $\mathbb{S}_n$ 通过置换元素 $\{c_i\}$ 作用于 $\mathfrak{t}_0$。由 (6·1) 可知，对每个 k 都有 $\mathtt{P}_k|_{\mathfrak{t}_0}\in\Bbbk[\mathfrak{t}_0]^{\mathbb{S}_n}$，且满足 $2\leqslant k\leqslant n$ 的多项式 $\mathtt{P}_k|_{\mathfrak{t}_0}$ 生成环 $\Bbbk[\mathfrak{t}_0]^{\mathbb{S}_n}$。因此，若 $k>n$，则存在 $n-1$ 个变量上的多项式 $\mathcal{F}^{\sim}$，使得 $\mathtt{P}_k=\mathtt{P}_k-\mathcal{F}(\mathtt{P}_2,\dots,\mathtt{P}_n)$ 在 $\mathfrak{t}_0$ 上为零。由定理 4.1，这意味着 $\mathtt{P}_2,\dots,\mathtt{P}_n,\widetilde{\mathtt{P}}_{n+1},\dots,\widetilde{\mathtt{P}}_{2n}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一个广义生成系。

因此，定理3.14 在此适用，故$\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\mathfrak{g}_0\rangle}$ 是一个多项式环。

6.2. $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_{2n+1}$. 对于 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{sl}_n\dotplus\mathfrak{sl}_{n+1}\dotplus\Bbbk$，Satake 图为



这些箭头连　接节点对 $(1,2n),(2,2n-1)\dots,(n,n+1)$。因此此处

$$\mathfrak{t}_0=\{\mathsf{diag}(c_n,\dots,c_1,c_0,c_1,\dots,c_n)\mid c_0+2\sum_{i=1}^{n}c_i=0\}. \tag{6·2}$$

首先，考虑 $n=1$的情形。此处 $\mathfrak{t}_0=\{\mathsf{diag}(c,-2c,c)\}\subset\mathfrak{sl}_3$，且次数为 2 和 3 的 SL_3-不变量是唯一确定的（至多相差一个标量倍数）。对于 $\xi\in\mathfrak{t}_0$，我们有

$$\mathtt{P}_2(\xi)=6c^2,\quad \mathtt{P}_3(\xi)=-6c^3.$$

因此，总有 $a=2>1=\dim\mathfrak{t}_0$ （按定理 4.1 的记号）。因此不存在 广义生成系 对于 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{sl}_3$。下面，我们基于第 4.2 节的结果给出一个一般性论证。

利用等式（6·2），我们将 $\mathfrak{t}_0$ 视为一个维数为 n、坐标为 $c_1,\dots,c_n$的线性空间。这里 $W=\mathbb{S}_{2n+1}$，由（6·2）可直接推出 $N_W(\mathfrak{t}_0)/Z_W(\mathfrak{t}_0)\ \simeq\ \mathbb{S}_n$。对称群 $W_0=\mathbb{S}_n$ 通过置换条目 $c_1,\dots,c_n$作用于 $\mathfrak{t}_0$，即 $\mathfrak{t}_0$ 是标准置换 $\mathbb{S}_n$-模。特别地，$\Bbbk[\mathfrak{t}_0]^{\mathbb{S}_n}$ 含有一个次数 1 的元素。因此，限制同态 $p:\ \Bbbk[\mathfrak{t}]^W\to\Bbbk[\mathfrak{t}_0]^{W_0}$ 不是满射。利用推论 4.13，可得 $\mathfrak{h}$ 不允许存在广义生成系。

6.3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ 和 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}_{n+1} \oplus \mathfrak{so}_{n-1}$。若 $n = 2$，则 $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}_2 \dotplus \mathfrak{sl}_2$，且 σ 置换这些直和项。这是 [21, 第 7] 节中讨论的对称对的一个特例。若 $n = 3$，则 $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}_4$ 和 $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{sl}_2 \dotplus \mathfrak{sl}_2 \dotplus \Bbbk$，这是第 6.1 节中讨论的 σ 的一个特例。因此，我们可以假设 $n \geqslant 4$。那么 St(σ) 如图 2 所示。这里 $\dim \mathfrak{c} = n-1$，且 $\dim \mathfrak{t}_0 = 1$。

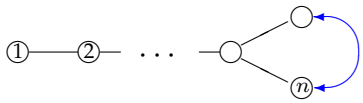


图 2. $(\mathfrak{so}_{2n},\ \mathfrak{so}_{n+1} \dotplus \mathfrak{so}_{n-1})$ 的 Satake 图

唯一的箭头连接节点 $n-1$ 与 n，即 $\mathfrak{t}_0 = \Bbbk(\alpha_{n-1} - \alpha_n)$。对于通常选取的简单根，其中 $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ $(i < n)$ 且 $\alpha_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$，$\mathfrak{t}_0$ 是由 ε_n 生成的直线。设 $\mathfrak{so}_{2n}$ 为关于反对角线的反对称矩阵集合。则 $\mathfrak{u}$（相应地，$\mathfrak{t}$）是此类严格上三角（相应地，对角）矩阵的集合，并且

$$\mathfrak{t}_0 = \{\mathrm{diag}(0, \dots, 0, \varepsilon_n, -\varepsilon_n, 0, \dots, 0)\}.$$

对于 $A \in \mathfrak{so}_{2n}$ 与 $k \leqslant n$，令 $\Delta_{2k}(A)$ 为 A 的全部主 $2k$-子式之和。考虑 $\Bbbk[\mathfrak{so}_{2n}]^{SO_{2n}}$ 的希尔伯特基 F_1, ..., F_n，使得对 $k < n$ 有 $F_k(A) = \Delta_{2k}(A)$，且 $F_n(A) = \mathrm{Pf}(A)$，即 A 的 *Pfaffian*。显然，$\Delta_{2k}|_{\mathfrak{t}_0} \neq 0$ 当且仅当 $k = 1$。由于 $\mathrm{Pf}(A)^2 = \Delta_{2n}(A)$，可见 $\Delta_2|_{\mathfrak{t}_0}$ 是唯一的非零限制，因此 Δ_2, ..., Δ_{2n-2}, Pf 是 $\mathfrak{h}$ 的一个广义生成系。

因此，定理 3.14 适用于此处，从而$\mathcal{Z}_{\langle \mathfrak{h},\ \mathfrak{g}_0 \rangle}$ 是一个多项式环。还要注意，在此处 $W_0 \simeq \mathbb{S}_2$ 且限制映射 $\Bbbk[\mathfrak{t}]^W \to \Bbbk[\mathfrak{t}_0]^{W_0}$ 是满射。

6.4. $\mathfrak{g} = \mathcal{E}_6$。这里 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_6 \dotplus \mathfrak{sl}_2$ 以及 σ 的 Satake 图绘于图 3中。因此 维数 $\mathfrak{t}_0 = 2$ 且 维数 $\mathfrak{c} = 4$。

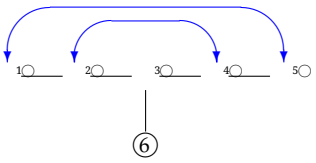


图 3. $(\mathcal{E}_6,\ \mathfrak{sl}_6 \dotplus \mathfrak{sl}_2)$ 的 Satake 图

这两条箭头表示 $\sigma(\alpha_1) = -\alpha_5$ 和 $\sigma(\alpha_2) = -\alpha_4$，即 $\mathfrak{t}_0 = \langle \alpha_1 - \alpha_5,\ \alpha_2 - \alpha_4 \rangle$。与第 6.2 节一样，我们利用 Richardson 的结果证明不存在 广义生成系 对于 $\mathfrak{h}$。为此，我们必须明确确定 $W_0 = N_W(\mathfrak{t}_0)/Z_W(\mathfrak{t}_0)$，其中 $W = W(\mathcal{E}_6)$。

引理 6.4。对于 $\mathfrak{t}_0 = \langle \alpha_1 - \alpha_5, \alpha_2 - \alpha_4 \rangle \subset \mathfrak{t} = \mathfrak{t}(\mathcal{E}_6)$，有 $W_0 \simeq \mathbb{S}_3$ 且 $W_0 \to GL(\mathfrak{t}_0)$ 是 $\mathbb{S}_3$ 的标准反射表示。

证明。我们有 $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{c}$ 和 $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{c}^{\perp}$。因此 $N_W(\mathfrak{c}) = N_W(\mathfrak{t}_0)$。由于 $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{g}_1$ 是 σ的 Cartan 子空间，$W_{\mathfrak{c}} := N_W(\mathfrak{c})/Z_W(\mathfrak{c})$ 是该对称簇的小 *Weyl* 群

$\mathcal{E}_6/(\mathcal{A}_5\times\mathcal{A}_1)$。因此，$W_{\mathfrak{c}}\simeq W(\mathcal{F}_4)$。由于 $\mathfrak{c}$ 包含 $\mathfrak{t}$的正则半单元素，$Z_W(\mathfrak{c})=\{1\}$，从而 $N_W(\mathfrak{c})=N_W(\mathfrak{t}_0)\simeq W(\mathcal{F}_4)$。为确定（非平凡）群$Z_W(\mathfrak{t}_0)$，我们使用限制根系 $\Delta|_{\mathfrak{c}}$，它与 $\Delta(\mathcal{F}_4)$ 同构。

若根 $\gamma=\sum_{i=1}^{6}n_i\alpha_i\in\Delta(\mathcal{E}_6)$ 满足 $n_1=n_5$ 和 $n_2=n_4$，则称其为对称根，见图 3。所有其他根都称为非对称根。容易看出，γ 是对称根当且仅当 $\gamma\in\mathfrak{c}$，并且所有对称根构成类型为 $\mathcal{D}_4$的根系。若 γ 是对称根，则 $\bar{\gamma}=\gamma|_{\mathfrak{c}}$ 与 γ相对应，而这些根构成 $\Delta(\mathcal{F}_4)$ 中所有长根的集合。若γ 是非对称根，则 $\bar{\gamma}=\frac{1}{2}(\gamma+\sigma(\gamma))$ 是 $\Delta(\mathcal{F}_4)$ 中的一条短根。

对于对称根 γ，反射 $r_\gamma\in W(\mathcal{F}_4)\subset W(\mathcal{E}_6)$ 在 $\mathfrak{t}_0=\mathfrak{c}^{\perp}$上平凡作用。因此，$W(\mathcal{D}_4)\subset Z_W(\mathfrak{t}_0)$。注意，$W(\mathcal{D}_4)\lhd W(\mathcal{F}_4)$，且 $W(\mathcal{F}_4)/W(\mathcal{D}_4)\simeq W(\mathcal{A}_2)\simeq\mathbb{S}_3$。$W(\mathcal{A}_2)$ 中的简单反射对应于 $\Delta(\mathcal{F}_4)$ 的短简单根。这些单根为 $\bar{\alpha}_1=\bar{\alpha}_5$ 和 $\bar{\alpha}_2=\bar{\alpha}_4$，而 $W(\mathcal{F}_4)$ 中相应的反射为 $\bar{r}_1=r_{\alpha_1}r_{\alpha_5}$和 $\bar{r}_2=r_{\alpha_2}r_{\alpha_4}$。计算 $\bar{r}_1$ 和 $\bar{r}_2$ 对 $\alpha_1-\alpha_5$ 和 $\alpha_2-\alpha_4$的作用，可得到 $\mathbb{S}_3$的反射表示。因此，$W(\mathcal{D}_4)=Z_W(\mathfrak{t}_0)$，证毕。□

代数$\Bbbk[\mathfrak{t}_0]^{W_0}$ 中包含一个次数为3的元素，而 $\Bbbk[\mathfrak{t}]^{W}$中没有次数为3 的元素。因此，限制同态 $p:\ \Bbbk[\mathfrak{t}]^{W}\to\Bbbk[\mathfrak{t}_0]^{W_0}$ 不是满射。由推论4.13可得，$\mathfrak{h}$ 不承认广义生成系。

表1的结论。对于第1项和第3项，我们已证明 $\mathfrak{h}$承认广义生成系，且$\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{g}_0\rangle}$ 是一个多项式环。另一方面，对于第2项和第4项，$\mathfrak{h}$ 不承认广义生成系。因此，我们尚不清楚它们的 $\mathcal{Z}_0=\mathcal{Z}\mathcal{S}(\mathfrak{h}\ltimes\mathfrak{g}_0^{\mathsf{ab}})$的结构。由此，$\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{g}_0\rangle}$ 的结构也仍笼罩在迷雾之中。

6.5. 关于 $\mathfrak{g}_0$的良好生成系。设 σ 是单李代数 $\mathfrak{g}$的一个对合，$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1$ 是相应的 $\mathbb{Z}_2$-分次。已知有四种情形使得 $\mathfrak{g}_0$ 不承认广义生成系 [17, 备注4.3]。（在这些“坏”情形中，$\mathfrak{g}$ 属于 $\mathcal{E}_n$型。）对于其他所有对合，确实存在广义生成系 [17, 30]。在 [21, 第 6] 节中指出，若 $\sigma=\vartheta^{\mathsf{max}}$，则 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ 的每个希尔伯特基都是广义生成系。在分裂的情形下，这一性质相当有用，特别是当我们需要 $\mathfrak{g}_0$ 与另一个直和项拥有公共 g.g.s.时。

对于任意单 $\mathfrak{g}$，存在唯一一个（在 G共轭意义下）最大秩对合，它可以是内对合，也可以是外对合。此外，如果 ϑ^{max} 是外对合，那么存在唯一一个内 S-正则对合 ϑ^{int}。这适用于类型为 $\mathcal{A}_n$ $(n\geqslant 2)$、$\mathcal{D}_{2n+1}$ $(n\geqslant 2)$以及 $\mathcal{E}_6$的李代数。对合 ϑ^{int} 见表1 （其中 n 第3项必须为奇数）。

P命题6.5。若 $\sigma=\vartheta^{\mathsf{int}}$，则 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ 的任意希尔伯特基都是 $\mathfrak{g}_0$的广义生成系。

证明。由引理 6.1 可知 维数 $\mathfrak{g}_1=$维数 $\mathfrak{b}-$维数 $\mathfrak{t}_0$。由于 σ是内的，$\sigma(F)=F$对所有 $F\in\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}\simeq\Bbbk[\mathfrak{g}]^{G}$成立。对于任意 $x\in\mathfrak{g}_1$，我们有

$$F(x)=(\sigma F)(x)=F(\sigma x)=F(-x)=(-1)^{\deg F}F(x).$$

因此， $F|_{\mathfrak{g}_1} \equiv 0$ 只要 次数 F为奇数。任取 $\Bbbk[\mathfrak{g}]^G$的一个希尔伯特基。如果 σ 在表 1 中是内的，即 $\sigma = \vartheta^{\mathsf{int}}$，那么 $\#\{j \mid \text{次数 } F_j \text{ 为奇数}\} = \text{维数}\,\mathfrak{t}_0$。（尽管逐一验证各个情形很容易，但也有先验的论证。）此外，由于 $(\mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{g}_1) = 0$，条件 $F_j|_{\mathfrak{g}_1} \equiv 0$ 等价于条件 $F_j^\bullet \notin \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$。因此

$$\sum_{j=1}^{\ell} \deg_{\mathfrak{g}_1}(F_j^\bullet) \leqslant \sum_{j=1}^{\ell} \deg F_j - \dim \mathfrak{t}_0 = \dim \mathfrak{g}_1.$$

由定理 2.3，此处必然有等式，因此 $F_1, \dots, F_\ell$ 是广义生成系，用于$\mathfrak{g}_0$。□

注 6.6. 对于 $(\mathfrak{so}_{2n}, \mathfrak{so}_{n+1} \dotplus \mathfrak{so}_{n-1})$，若 n 为偶数，则 σ 是外的，命题 6.5 不成立。这里所有的 F_j 次数都是偶数，且任意希尔伯特基都包含两个次数为 n 的元素。相应的二维空间为 $\langle \Delta_n, \mathrm{Pf} \rangle$（记号见第 6.3 节）。该空间的任意一组基都可作为 $\Bbbk[\mathfrak{so}_{2n}]^{SO_{2n}}$ 的希尔伯特基的一部分。但要为$\mathfrak{g}_0$得到一个广义生成系，必须将 Pfaffian Pf 纳入希尔伯特基。已知若 n 为偶数（即σ 为外的），则 $\sigma(\mathrm{Pf}) = -\mathrm{Pf}$，而 $\sigma(\Delta_{2i}) = \Delta_{2i}$，其中 $i \leqslant n-1$。这表明，无论 n的奇偶性如何，$\mathrm{Pf}|_{\mathfrak{g}_1} \equiv 0$。

7. 应用与补充

这里我们将展示，我们的方法如何能够快速得到一些与 Adler–Kostant–Symes（AKS）理论相关的经典结果，并指出进一步研究的方向。

7.1. 与 AKS 理论的关系。 设 $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$ 是任意一个分裂。则 $\mathfrak{q}^* = \mathfrak{a}_1^* \oplus \mathfrak{a}_2^*$，其中 $\mathfrak{a}_1^* = \mathfrak{a}_2^\perp$ 且 $\mathfrak{a}_2^* = \mathfrak{a}_1^\perp$。回顾一下，$\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ 中的元素是定义在 $\mathfrak{q}^*$ 上的多项式函数；若 $\mathcal{F} \in \mathcal{S}^d(\mathfrak{q})$，则 $\mathcal{F} = \sum_{i=0}^{d} \mathcal{F}_{i,\ d-i}$，其中 $\mathcal{F}_{i,\ d-i} \in \mathcal{S}^i(\mathfrak{a}_1) \otimes \mathcal{S}^{d-i}(\mathfrak{a}_2)$。双齐次分量 $\mathcal{F}_{0,\ d}$（分别为 $\mathcal{F}_{d,\ 0}$）可分别视为限制$\mathcal{F}|_{\mathfrak{a}_2^*}$（分别为 $\mathcal{F}|_{\mathfrak{a}_1^*}$）。令 $\mathcal{A}_i$表示 $\mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}}$在 $\mathfrak{a}_i^*$上的限制。

定理 7.1 (参见 [26, 定理 2。2])。 对于 $i = 1,\ 2$，子代数 $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{S}(\mathfrak{a}_i)$ 关于 李–泊松括号是泊松交换的，该括号定义在 $\mathfrak{a}_i^*$上。

证明。按照我们的一般方法，我们得到 In¨on ¨u–Wigner 收缩 $\mathfrak{q}_{(0)} = \mathfrak{a}_1 \ltimes \mathfrak{a}_2^{\mathsf{ab}}$和 $\mathfrak{q}_{(\infty)} = \mathfrak{a}_2 \ltimes \mathfrak{a}_1^{\mathsf{ab}}$，以及它们的李–泊松括号 $\{\ ,\ \}_0$ 和 $\{\ ,\ \}_\infty$。根据命题 3.1，所有 $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}}$ 的双齐次分量关于族 $\{\ ,\ \}_0 + t\{\ ,\ \}_\infty$ $(t \in \mathbb{P})$ 中的所有括号均交换。特别地，由于它们是双齐次分量，$\mathcal{A}_1$ 中的元素关于 $\{\ ,\ \}_0$ 交换。由于 $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{S}(\mathfrak{a}_1)$ 和 $\mathfrak{a}_1$ 是 $\mathfrak{q}_{(0)}$ 的李子代数，我们得出 $\mathcal{A}_1$ 中的元素关于 $\mathfrak{a}_1^*$ 上的李–泊松括号交换。对于 $\mathcal{A}_2$ 的论证类似。□

对于约化李代数 $\mathfrak{g}$ 的对合，会出现一个略有不同的结果。设 σ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个对合，并且 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1$。则存在一个抛物子代数 $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}$，使得 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{h}$，其中某个 $\mathfrak{h}$ 位于 $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$ 与 $\mathfrak{p}$ 之间。更确切地说，如果 $\mathfrak{c}\subset\mathfrak{g}_1$ 是一个嘉当子空间，那么 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{c}}$ 是 $\mathfrak{p}$ 的一个列维子代数。（因此，当且仅当 σ 是 S-正则时，$\mathfrak{p}=\mathfrak{b}$ 成立。）实际上，和 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{h}$ 是对应于 σ（在 $\Bbbk=\mathbb{C}$ 上）的 $\mathfrak{g}$ 的实形式的岩泽分解的复化。存在如下线性同构 $\psi:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{h}^*$，使得对于 $\psi(x_1)(y)=(x_1,y)$，其中 $x_1\in\mathfrak{g}_1$ 和 $y\in\mathfrak{h}$。对于 $f\in\Bbbk[\mathfrak{g}_1]^{G_0}$，我们通过公式 $H_f(\xi)=f(\psi^{-1}(\xi))$ 定义 $H_f\in\mathcal{S}(\mathfrak{h})$，其中 $\xi\in\mathfrak{h}^*$。

Th定理 7.2（参见 [6, 第 3 节。1]）。 $\{H_f\mid f\in\Bbbk[\mathfrak{g}_1]^{G_0}\}$ 是一个 PC 子代数 $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$。

证明。考虑限制 $p\colon\Bbbk[\mathfrak{g}]^G\to\Bbbk[\mathfrak{g}_1]^{G_0},\mathcal{F}\mapsto\mathcal{F}|_{\mathfrak{g}_1}$。若 $f=p(\mathcal{F})$ 且 $\deg\mathcal{F}=d$，则 H_f 不过是关于和 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{h}$ 的双齐次分量 $\mathcal{F}_{0,d}$。因此，定理 7.1 表明，$\{H_f\mid f\in p(\Bbbk[\mathfrak{g}]^G)\}$ 是 $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$ 的 PC 子代数。根据 [22,命题 7.1]，，扩张 $p(\Bbbk[\mathfrak{g}]^G)\subset\Bbbk[\mathfrak{g}_1]^{G_0}$ 是有限的。还容易看出，若 $\mathcal{A}\subset\mathcal{S}(\mathfrak{h})$ 是~PC，且 $\mathcal{A}\subset\mathcal{A}$ 是代数扩张，那么 $\mathcal{A}\subset\mathcal{S}(\mathfrak{h})$ 也是 PC。□

7.2. **一些开放问题及未来研究方向**。 我们已经知道许多非退化分裂 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{r}$ 使得 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$ 是一个（较大的）多项式环。此外，在每个这样的良好情形中，$\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$ 的希尔伯特基都有明确的描述。

问题 1。 在什么情况下，$\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$ 也会是 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ 中关于包含关系的极大 *PC* 子代数?

目前，已证明 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{b},\ \mathfrak{u}_-\rangle}$（任意 $\mathfrak{g}$）和 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{b}\rangle}$（$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$）具有极大性，见引言。

问题 2。 在良好情形下，包含关系 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}\subset\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ 给出态射 m

$$\tau:\mathfrak{g}^*\to\operatorname{Spec}\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\mathfrak{r}\rangle}\simeq\mathbb{A}^{\boldsymbol{b}(\mathfrak{g})}.$$

证明它 是平坦的，即 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$ 的一个（任意）希尔伯特基在 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$中构成正则序列 .

更一般地，如果 $\mathcal{Z}$ 是一个大型多项式 PC 子代数，那么同样的问题也适用于 $\tau:\mathfrak{g}^*\to$ 谱 $\mathcal{Z}\simeq\mathbb{A}^{\boldsymbol{b}(\mathfrak{g})}$。对于满足 $\gamma\in\mathfrak{g}^*_{\mathsf{reg}}$ 的 Mishchenko–Fomenko 代数 $\mathcal{Z}_\gamma$，Moreau [14] 给出了肯定的答案。

问题 3。 量子化形如 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$ 的大型 PC子代数，即构造包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 的交换子代~数 $\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$，使得 $\operatorname{gr}\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}=\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{r}\rangle}$。

$\mathcal{Z}_{\langle\mathfrak{b},\ \mathfrak{u}_-\rangle}$ 的量子化最近在 [9], 中得到，而Mishchenko–Fomenko 代数 $\mathcal{Z}_\gamma$ 则由 Rybnikov [25]量子化。

参考文献

[1] M. ADLER、P. VAN MOERBEKE 和 P. VANHAECKE。《代数可积性、Painlev´e 几何与李代数》，数学及其边界领域成果丛书，第 47 卷。柏林：Springer（2004）。[2] W. BORHO 和 H. KRAFT。关于 Gelfand–Kirillov 维数，Math. Ann.，220（1976），1–24。[3] M. BULOIS 和 N. RESSAYRE。关于 Borel 李子代数 Drinfeld 双的自同构，J. Algebra，647（2024），515–532。[4] C. DE CONCINI 和 C. PROCESI。完备对称簇，载于《不变理论》，数学讲义，996（1983），1–44。[5] J. P. DUFOUR 和 N.T. ZUNG。《Poisson 结构及其标准形》。数学进展，242。巴塞尔：Birkh¨auser，2005。[6] R. GOODMAN 和 N. WALLACH。Toda 格型经典与量子力学系统。II：经典流的解，Commun. Math. Phys.，94（1984），177–217。[7] V.V. GORBATSEVICH、A.L. ONISHCHIK 和 E.B. VINBERG。《李群与李代数 III》（数学科学百科全书，第 41 卷）柏林：Springer，1994。[8] J. I. IGUSA。绝对容许表示的几何，载于《数论、代数几何与交换代数》，为 Yasuo Akizuki 作，东京：Kinokuniya，1973，373–452。[9] A. ILIN、J. KAMNITZER 和 L. RYBNIKOV。Gaudin 模型与花曲线模空间，arXiv:2407.06424。[10] F. KNOP。Weyl 群与矩映射，Invent. Math.，99（1990），1–23。[11] B. KOSTANT。多项式环中的李群表示，Amer. J. Math.，85（1963），327–404。[12] B. KOSTANT 和 S. RALLIS。与对称空间相关的轨道与表示，Amer. J. Math.，93（1971），753–809。[13] A.S. MISHCHENKO 和 A.T. FOMENKO。有限维李群上的欧拉方程，Math. USSR-Izv. 12（1978），371–389。[14] A. MOREAU。关于 Mishchenko–Fomenko 代数与正则序列的一则评注，Selecta Math.，24（2018），2651–2657。[15] D. PANYUSHEV。齐性空间的复杂度与秩，Geom. Dedicata，34（1990），249–269。[16] D. PANYUSHEV。不变理论中作用的复杂度与秩，J. Math. Sci. (New York)，95（1999），1925–1985。[17] D. PANYUSHEV。约化李代数的 $\mathbb{Z}_2$-收缩的余伴随表示，Adv. Math.，213（2007），380–404。[18] D. PANYUSHEV。李代数的半直积及其不变量，Publ. Res. Inst. Math. Sci. 43（2007），第 4 期，1199–1257。[19] D. PANYUSHEV 和 O. YAKIMOVA。半单李代数的一种显著收缩，Annales Inst. Fourier (Grenoble)，62，第 6 期（2012），2053–2068。[20] D. PANYUSHEV 和 O. YAKIMOVA。与对合相关的 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$的泊松交换子代数，Intern. Math. Res. Notices，2021，第 23 期（2021），18367–18406。[21] D. PANYUSHEV 和 O. YAKIMOVA。与分裂相关的相容 Poisson 括号及 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$的泊松交换子代数，J. London Math. Soc.，103（2021），第 4 期，1577–1595。[22] D. PANYUSHEV 和 O. YAKIMOVA。有限阶自同构、周期压缩以及 $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$的泊松交换子代数，Math. Zeitschrift，303，第 2 期（2023），文章 51。[23] M. RA¨IS。半直积 $E \times_\rho \mathfrak{g}$的指标，C.R. Acad. Sc. Paris, Ser. A，287（1978），195–197。[24] R.W. RICHARDSON。半单李代数中 G-稳定子簇的正规性，载于《代数群》，数学讲义，柏林：Springer，1271（1987），243–264。

[25] L.G. Rybnikov. 自变量平移法与 Gaudin模型，泛函分析及其应用，**40**，第3期（2006），188–199页。[26] W.W. Symes. Toda型系统、反谱问题与表示论，*Invent.Math.*，**59**（1980），13–51页。[27] D.A. Timashev. 半单李代数的 In¨on ¨u–Wigner 收缩的指数，俄罗斯数学物理杂志，**32**（2025），189–195页。[28] E.B. VINBERG. 泛包络代数的一些交换子代数，*Math. USSR-Izv.***36**（1991），1–22页。[29] E.B. VINBERG 和 V.L. Popov. 不变理论，载于：Sovremennye problemy matematiki. Fundam. napravl.，第**55**卷，第137–309页，莫斯科：全俄科学技术信息研究所，1989（俄文）。英文译本见：代数几何 *IV*（《数学科学百科全书》，第55卷，第123–284页），柏林、海德堡、纽约：Springer，1994。[30] O. YAKIMOVA. 李–泊松括号的单参数收缩，欧洲数学会杂志，**16**（2014），387–407页。[31] O. YAKIMOVA. $\mathbb{Z}_2$-收缩及其他半直积的对称不变量，国际数学研究公告，（2017）**2017**（6）：1674–1716页。

(D.P.) 莫斯科独立大学，119002 莫斯科，俄罗斯电子邮箱地址: panyush@mccme.ru (O.Y.) 数学研究所，弗里德里希·席勒耶拿大学，07737 耶拿，德国电子邮箱地址: oksana.yakimova@uni-jena.de