正权图电阻距离和基尔霍夫指数海森矩阵的二次型估计

Yu Li[a], Lizhu Sun[a,*], Changjiang Bu[a]

[a]数学科学学院，哈尔滨工程大学，中国哈尔滨

arXiv:2603.04963v1 [math.CO] 5 Mar 2026

摘要

设 $G^w=(V,E,w)$ 是一个正权图，其权 $w(e)>0$对所有 $e\in E.$均成立。加权图 $G^{\widetilde{w}}=(V,E,\widetilde{w})$ 称为超对偶数加权图，其中权 $\widetilde{w}(e)=w(e)+\Delta w(e)(\varepsilon+\varepsilon^*)$ 是一个超对偶数，$\Delta w(e)$ 是实数，ε 和 ε^* 是两个对偶单位，$e\in E$。本文分别给出拉普拉斯矩阵的 Moore-Penrose逆表示，以及 G^w 的电阻距离和基尔霍夫指数的计算公式。我们利用广义矩阵逆建立了 G^w 电阻距离和基尔霍夫指数海森矩阵的二次型。进一步地，我们根据图参数推导出 G^w 电阻距离和基尔霍夫指数海森矩阵特征值的显式界。我们还证明，具有有界边权的正权图的基尔霍夫指数关于其边权向量是强凸的。

关键词： 海森矩阵；超对偶数加权图；电阻距离；基尔霍夫指数；广义逆美国数学学会分类（*2020*）： 05C09；05C12；05C50；15A10。

1. 引言

本文所讨论的所有图都是简单无向 [1]。对于连通图 G，若在每条边上放置一个1欧姆的电阻，则 G 的顶点 i 与 j 之间的有效电阻称为 i 与 j之间的电阻距离，

*通讯作者电子邮箱： liyuzone@163.com (YuLi), lizhusun@hrbeu.edu.cn (Lizhu Sun), buchangjiang@hrbeu.edu.cn (Changjiang Bu)

记作 $R_{ij}(G)$ [2]。所有顶点对之间的电阻距离之和称为 G的基尔霍夫指数，记作 $Kf(G)$ [3]。1993年，Klein和Randi´c利用其拉普拉斯矩阵 [4]的Moore-Penrose逆，给出了连通图G 的电阻距离和基尔霍夫指数的公式。设 G^w 为一个连通正权图，其中 $w(e) > 0$ 表示其每条边e的权。2004年，Bapat给出了 G^w [5]的电阻距离和基尔霍夫指数公式。电阻距离和基尔霍夫指数已应用于多个研究领域，包括图生成树 [6, 7], 、随机游走 [8, 9], 、网络分析[10]、化学图论 [11], 以及鲁棒网络设计 [12, 13]。

设 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^\top$，其中 y_i 与 $\frac{1}{y_i}$ 为正权图 G^w中边 e_i 的电阻和权，$i = 1, 2, \cdots, m$. 1956年，Shannon 与 Hagelberger 证明，G^w 的电阻距离是电阻向量 $\mathbf{y}$ [14]的凹函数。2008年，Ghosh、Boyd 与 Saberi 指出，G^w 的电阻距离是边权向量 $\mathbf{x} = (\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \cdots, \frac{1}{y_m})^\top$[15], 的凸函数，但该结论并不能直接由 [14] 中的结果得出。此外，文献 [15] 通过矩阵逆给出了G^w 的基尔霍夫指数的海森矩阵的二次型，并证明 G^w 的基尔霍夫指数是 $\mathbf{x}$ 的严格凸函数。利用对偶数，文献 [16]给出了图的电阻距离与基尔霍夫指数的误差估计。

令 $\mathbb{R}^m$ 表示实数域 $\mathbb{R}$上的 m 维向量集合，$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^\top \in \mathbb{R}^m$. 设 $f(\mathbf{x})$ 是定义在 $\mathbb{R}^m$ 上且具有连续二阶偏导数的实值函数。矩阵

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{m \times m}$$

称为 $f(\mathbf{x})$ 的海森矩阵。 $f(\mathbf{x})$ 的海森矩阵的二次型和特征值在神经网络优化 [17], 、代数图论 [18] 以及图的主成分分析 [19]中有广泛应用。

超对偶数是求函数海森矩阵二次型的有力工具。本文给出了连通超对偶数加权图的拉普拉斯矩阵的 Moore-Penrose逆，并推导了其电阻距离和基尔霍夫指数的显式公式。利用这些结果，我们通过图 G^w 的拉普拉斯矩阵的Moore-Penrose逆，给出了正权图 G^w 的电阻距离和基尔霍夫指数的海森矩阵二次型。我们还建立了这些二次型的显式界

，这些界以拉普拉斯矩阵的最大特征值、 G^w的代数连通度和双调和距离，以及底层图 G 的最大度表示。我们进一步证明，具有有界边权的正权图 G^w 的基尔霍夫指数关于其边权向量是强凸的。

2. 预备知识

2.1. 超对偶数

1873年，克利福德引入了对偶数 [20]

$$\widehat{a} = a + a_1\varepsilon,$$

其中， ε 是满足 $\varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0,$ 且 a, a_1 为实数的对偶单位。迄今为止，对偶数已广泛应用于力学和运动学 [21, 22],机器人学 [23], 编队控制 [24], 脑科学 [25]和马尔可夫链 [26]等领域。2011年，Fike 和 Alonso 提出了超对偶数 [27]

$$\widetilde{a} = a + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^* + a_3\varepsilon\varepsilon^*,$$

其中， $\varepsilon, \varepsilon^*$ 是满足 $\varepsilon\varepsilon^* = \varepsilon^*\varepsilon \neq 0,\ \varepsilon^2 = (\varepsilon^*)^2 = 0,$ 且a, a_1, a_2, a_3 的两个对偶单位，且这些量均为实数。超对偶数广泛应用于自动微分、多体运动学和优化问题 [28, 29, 30]。

设 $\mathbb{H}^m$ 为超对偶数集$\mathbb{H}$上的 m 维向量集。令 $\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{x}_1\varepsilon + \mathbf{x}_2\varepsilon^* + \mathbf{x}_3\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{H}^m$，其中 $\mathbf{x}、\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^m$。令 $f(\widetilde{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{x}_1\varepsilon + \mathbf{x}_2\varepsilon^* + \mathbf{x}_3\varepsilon\varepsilon^*)$ 表示关于 $\widetilde{\mathbf{x}}$ 的超对偶函数。令 $\mathcal{S}_{\varepsilon\varepsilon^*}[f(\widetilde{\mathbf{x}})]$ 表示 $f(\widetilde{\mathbf{x}})$ 中 $\varepsilon\varepsilon^*$ 的实系数。利用超对偶数，文献 [27, 31] 给出了计算函数 $f(\mathbf{x})$ 的海森矩阵的二次型 $(\Delta\mathbf{x})^\top\nabla^2 f(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}$ 的公式：

$$(\Delta\mathbf{x})^\top\nabla^2 f(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} = \mathcal{S}_{\varepsilon\varepsilon^*}[f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}(\varepsilon + \varepsilon^*))], \tag{2.1}$$

其中 $\Delta\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m.$

2.2. 超对偶数加权图

超对偶数矩阵是各项均为超对偶数的矩阵。设 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\mathbb{H}^{m\times n}$ 分别表示所有 $m \times n$阶实矩阵与超对偶数矩阵的集合。记 $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$。接下来，我们定义超对偶数加权图。

定义2.1. 设 $G=(V,E)$ 是顶点集为 V 、边集为$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$的图。设边 e_i 的超对偶数权重为

$$\widetilde{w}(e_i)=\widetilde{x}_i=x_i+\Delta x_i(\varepsilon+\varepsilon^*),$$

其中 $x_i=w(e_i)>0$ 是正权图 $G^w=(V,E,w)$中边 e_i 的权， $\Delta x_i=\Delta w(e_i)$ 是满足 $x_i+\Delta x_i>0$ 的实数，对所有$i\in[m]$均成立。我们称 $G^{\widetilde{w}}=(V,E,\widetilde{w})$ 为超对偶数加权图。

向量

$$\widetilde{\mathbf{x}}=(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\cdots,\widetilde{x}_m)^\top=\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}(\varepsilon+\varepsilon^*)$$

称为 $G^{\widetilde{w}}$ 的超对偶边权向量，其中 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^\top$ 是 G^w 的边权向量， $\Delta\mathbf{x}=(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_m)^\top$。对于连通正权图 G^w，顶点 i 和 j 之间的电阻距离 $R_{ij}(G^w)$ 与基尔霍夫指数 $Kf(G^w)$ 分别记作 $R_{ij}(\mathbf{x})$ 和 $Kf_G(\mathbf{x})$。

令 $A=(a_{ij})$ 为 G^w 的邻接矩阵，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}w(e), & e=\{i,j\}\in E,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

我们称 $\widetilde{A}=(\widetilde{a}_{ij})=A+A_1(\varepsilon+\varepsilon^*)$ 为 $G^{\widetilde{w}}$ 的邻接矩阵，其中 $A_1=(\Delta a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$。于是

$$\begin{aligned}\widetilde{a}_{ij}&=\begin{cases}a_{ij}+\Delta a_{ij}(\varepsilon+\varepsilon^*), & e=\{i,j\}\in E,\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}\\ &=\begin{cases}w(e)+\Delta w(e)(\varepsilon+\varepsilon^*), & e=\{i,j\}\in E,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}\end{aligned}\tag{2.2}$$

超对偶数矩阵

$$\widetilde{D}=D+D_1(\varepsilon+\varepsilon^*)=\mathrm{diag}(\widetilde{d}_1,\widetilde{d}_2,\cdots,\widetilde{d}_n)\tag{2.3}$$

称为 $G^{\widetilde{w}}$ 的度矩阵，其中 $D=\mathbf{diag}(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n)$ 是 G^w 的度矩阵，$D_1=\mathbf{diag}(\Delta d_1,\ \Delta d_2,\ \cdots,\ \Delta d_n)$， d_i 是顶点 i 的加权度

G^w 和 $\Delta d_i = \sum \Delta a_{ij}$ 中的 n，对所有 $i \in [n]$ 均成立。我们称 $j=1$

$$\widetilde{L} = \widetilde{D} - \widetilde{A} = L + L_1(\varepsilon + \varepsilon^*) \tag{2.4}$$

G^w的拉普拉斯矩阵，其中 $L = D - A$ 是 G^w的拉普拉斯矩阵，$L_1 = D_1 - A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$。

对于连通超对偶数加权图 G^w，任意两个顶点 i，j之间的电阻距离$R_{ij}(G^{\widetilde{w}})$以及 $G^{\widetilde{w}}$的基尔霍夫指数 $Kf(G^{\widetilde{w}})$分别记为超对偶边权向量 $\widetilde{\mathbf{x}}$的函数 $R_{ij}(\widetilde{\mathbf{x}})$和 $Kf_G(\widetilde{\mathbf{x}})$。

2.3. 超对偶数矩阵的 *Moore-Penrose* 逆

设 I 为适当阶数的单位矩阵。设 $A \in \mathbb{H}^{n\times n}$。若存在 $X \in \mathbb{H}^{n\times n}$ 使得 $AX = XA = I$，则 A 可逆，且 X 称为 A的逆矩阵，记为 A^{-1}。若存在满足下式的 $X \in \mathbb{H}^{n\times m}$

$$\widetilde{A}\widetilde{X}\widetilde{A} = \widetilde{A},\ \ \widetilde{X}\widetilde{A}\widetilde{X} = \widetilde{X},\ \ (\widetilde{A}\widetilde{X})^\top = \widetilde{A}\widetilde{X},\ \ (\widetilde{X}\widetilde{A})^\top = \widetilde{X}\widetilde{A}, \tag{2.5}$$

则称 $\widetilde{X}$ 为 $\widetilde{A}$的 Moore-Penrose逆，记作 $\widetilde{A}^\dagger$. 。如果超对偶数矩阵的 Moore-Penrose逆存在，则它是唯一的 [32]。为了推导超对偶数加权图的电阻距离和基尔霍夫指数，接下来给出超对偶线性方程解的存在性及其显式表示。

定理 2.2. </style}设 ,$\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$ 和 $\mathbf{b} \in \mathbb{H}^m$。假设 $A^\dagger$ 存在，则以下结论成立。

(*a*) </style}超对偶方程 $\mathbf{x} = b$ *</style}*有解，当且仅当

$$\widetilde{A}\widetilde{A}^\dagger\widetilde{\mathbf{b}} = \widetilde{\mathbf{b}}.$$

(*b*) </style}如果超对偶方程$\mathbf{x} = b$ *</style}*有解，则其通解为

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{A}^\dagger\widetilde{\mathbf{b}} + (I - \widetilde{A}^\dagger\widetilde{A})\widetilde{\mathbf{u}}, \tag{2.6}$$

其中 $\widetilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{H}^n$ 为任意值。

~ ~证明：(a) 设 ~x 是 A~x =b 的一个解。那么

$$\widetilde{\mathbf{b}} = \widetilde{A}\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{A}\widetilde{A}^{\dagger})\widetilde{A}\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{A}\widetilde{A}^{\dagger}\widetilde{\mathbf{b}}.$$

~~~ ~ ~~ ~ ~反之，如果 $AA^{\dagger}\mathbf{b} = \mathbf{b}$，显然， $A^{\dagger}\mathbf{b}$ 是 A~x =b的一个解。

~~~ ~(b) 由（a）可得 $AA^{\dagger}\mathbf{b} = \mathbf{b}$。对于任意 ~u $\in \mathbb{H}^m$,

$$\widetilde{A}(\widetilde{A}^{\dagger}\widetilde{\mathbf{b}} + (I - \widetilde{A}^{\dagger}\widetilde{A})\widetilde{\mathbf{u}}) = \widetilde{A}\widetilde{A}^{\dagger}\widetilde{\mathbf{b}} = \widetilde{\mathbf{b}}.$$

~~ ~~ ~ ~因此， ~x $= A^{\dagger}\mathbf{b} + (I - A^{\dagger}A)$~u 是 A~x =b的一个解。

~ ~另一方面，设 ~x 是 A~x =b的一个解。则

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{x}} &= \widetilde{\mathbf{x}} + \widetilde{A}^{\dagger}(\widetilde{\mathbf{b}} - \widetilde{A}\widetilde{\mathbf{x}}) \\ &= \widetilde{A}^{\dagger}\widetilde{\mathbf{b}} + (I - \widetilde{A}^{\dagger}\widetilde{A})\widetilde{\mathbf{x}}.\end{aligned}$$

~ ~因此， A~x =b 的每一个解都可以写成方程 (2.6) 的形式 . □

3. 主要结果

3.1. 超对偶数加权图的电阻距离与基尔霍夫指数

本文中，我们分别用**1**、 $\mathbf{1}_i$ 和 J 表示全1向量、适当维数且第 i个位置为1、其余位置为0的标准单位向量，以及适当阶的全1方阵。对于矩阵 $P \in \mathbb{H}^{n\times n}$，我们记 $P^{(i,j)} = (P)_{ii} + (P)_{jj} - (P)_{ij} - (P)_{ji}$.

本节建立了连通超对偶数加权图 G^w的~拉普拉斯矩阵的Moore-Penrose逆的一种表示，进而借助这一广义逆给出~G^w 的电阻距离与基尔霍夫指数的显式计算公式。

~**定理3.1**。 设方程 (2.4) 中给出的 $L = L + L_1(\varepsilon + \varepsilon^*)$ 为一个具有 n 个顶点的连通超对偶数加权图 G^w 的拉普拉斯矩阵~。那么

~(a) L 的 *Moore-Penrose*逆存在，且

$$\widetilde{L}^{\dagger} = L^{\dagger} - L^{\dagger}L_1L^{\dagger}(\varepsilon + \varepsilon^*) + 2L^{\dagger}L_1L^{\dagger}L_1L^{\dagger}\varepsilon\varepsilon^*. \tag{3.1}$$

(b)

$$R_{ij}(G^{\widetilde{w}}) = (L^{\dagger})^{(i,j)} - (L^{\dagger}L_1L^{\dagger})^{(i,j)}(\varepsilon + \varepsilon^*) + 2(L^{\dagger}L_1L^{\dagger}L_1L^{\dagger})^{(i,j)}\varepsilon\varepsilon^*,$$

其中 i、 $j \in [n]$。

(c)

$$Kf(G^{\tilde{w}}) = ntr(L^{\dagger}) - ntr((L^{\dagger})^2 L_1)(\varepsilon + \varepsilon^*) + 2ntr((L^{\dagger})^2 L_1 L^{\dagger} L_1 \varepsilon\varepsilon^*. \tag{3.2}$$

证明。 (a) 令 $\widetilde{X} = L^{\dagger} - L^{\dagger}L_1L^{\dagger}(\varepsilon + \varepsilon^*) + 2L^{\dagger}L_1L^{\dagger}L_1L^{\dagger}\varepsilon\varepsilon^*$. 现在我们证明， $\widetilde{X}^{\frown}$是 L 的 Moore-Penrose逆。由此可得

$$\begin{aligned}\widetilde{X}\widetilde{L} &= (L^{\dagger} - L^{\dagger}L_1L^{\dagger}(\varepsilon + \varepsilon^*) + 2L^{\dagger}L_1L^{\dagger}L_1L^{\dagger}\varepsilon\varepsilon^*)(L + L_1(\varepsilon + \varepsilon^*)) \\ &= L^{\dagger}L - L^{\dagger}L_1L^{\dagger}L(\varepsilon + \varepsilon^*) + 2L^{\dagger}L_1L^{\dagger}L_1L^{\dagger}L\varepsilon\varepsilon^* + L^{\dagger}L_1(\varepsilon + \varepsilon^*) - 2L^{\dagger}L_1L^{\dagger}L_1\varepsilon\varepsilon^* \\ &= L^{\dagger}L + L^{\dagger}L_1(I - L^{\dagger}L)(\varepsilon + \varepsilon^*) - 2L^{\dagger}L_1L^{\dagger}L_1(I - L^{\dagger}L)\varepsilon\varepsilon^*. \end{aligned} \tag{3.3}$$

由于正权图 G^w 是连通的，其拉普拉斯矩阵 L 是秩为 $n-1$[33, p 的半正定矩阵。50]。设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} > \lambda_n = 0$ 为 L的特征值，并令 p_i 为对应于 λ_i 的单位特征向量，使得对于 i， $j \in [n], i \neq j$， p_i和 p_j 两两正交。由于全1向量是 L 对应于 $\lambda_n = 0$的特征向量，我们取 $p_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}$。于是

$$L = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i p_i^{\top} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i p_i p_i^{\top}, \tag{3.4}$$

且 L 的 Moore-Penrose逆为

$$L^{\dagger} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} p_i p_i^{\top}. \tag{3.5}$$

由式 (3.4) 和 (3.5)，我们得到

$$\begin{aligned} I - L^{\dagger}L &= I - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} p_i p_i^{\top} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i p_i p_i^{\top} = I - \sum_{i=1}^{n-1} p_i p_i^{\top} \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i p_i^{\top} - \sum_{i=1}^{n-1} p_i p_i^{\top} = p_n p_n^{\top} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} \mathbf{1}\mathbf{1}^{\top} = \frac{1}{n} J. \end{aligned}$$

代入 将上述等式代入方程 (3.3) 得到 $\widetilde{X}\widetilde{L} = I - \frac{1}{n}J + \frac{1}{n}L^{\dagger}L_1J(\varepsilon +$

$\varepsilon^*) - \frac{2}{n}L^\dagger L_1 L^\dagger L_1 J\varepsilon\varepsilon^*$. 由于 L_1 的行和为零，因此可得

$$\widetilde{X}\widetilde{L} = I - \frac{1}{n}J. \tag{3.6}$$

类似地，$\widetilde{L}\widetilde{X} = I - \frac{1}{n}J$. 由于 $\widetilde{L}\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{X}\widetilde{L}$ 都是对称的， $\widetilde{X}$ 满足方程 (2.5) 中的第三个和第四个方程。

~将方程 (3.6) 的两边左乘 L ，得到

$$\widetilde{L}\widetilde{X}\widetilde{L} = \widetilde{L}(I - \frac{1}{n}J) = \widetilde{L} - \frac{1}{n}\widetilde{L}J = \widetilde{L}.$$

~因此， X 满足方程 (2.5) 中的第一个方程。

~将方程 (3.6) 的两边左乘 X ，可得

$$\widetilde{X}\widetilde{L}\widetilde{X} = (I - \frac{1}{n}J)\widetilde{X} = \widetilde{X} - \frac{1}{n}J\widetilde{X}. \tag{3.7}$$

由于 L 是对称的，由此可得 $LL^\dagger = (LL^\dagger)^\top = (L^\dagger)^\top L^\top = L^\dagger L$. 于是 $JL^\dagger = JL^\dagger LL^\dagger = JL(L^\dagger)^2 = 0$. 因此， $J\widetilde{X} = JL^\dagger - JL^\dagger L_1 L^\dagger(\varepsilon+\varepsilon^*) + 2JL^\dagger L_1 L^\dagger L_1 L^\dagger\varepsilon\varepsilon^* = 0$。再由方程 (3.7)，我们有 $XLX = X$, 这表明 X 满足方程 (2.5) 的~第二个方程。因此， X 是 L的Moore-Penrose逆，即$\widetilde{L}^\dagger = L^\dagger - L^\dagger L_1 L^\dagger(\varepsilon + \varepsilon^*) + 2L^\dagger L_1 L^\dagger L_1 L^\dagger\varepsilon\varepsilon^*$.

(*b*) 如果 $i = j$，显然 $R_{ij}(G^{\tilde{w}}) = 0$。假设 $i \neq j, i, j \in [n]$ 并在 G^w 的顶点 i 和 j 之间施加电压~。令 $Y \in \mathbb{H}$ 表示从 $G^{\tilde{w}}$ 的顶点 i 流向 j 的净电流。令 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T \in \mathbb{H}^n$ 为电势向量，其中 v_s 是 $G^{\tilde{w}}$ 中顶点 s 处的电势， $s \in [n]$ 成立。令 y_{st} 表示从顶点 s 流向其相邻顶点 t ($y_{st} = -y_{ts}$) 的电流。于是

$$\sum_{s\sim t} y_{st} = Y(\mathbf{1}_i - \mathbf{1}_j)_s = \begin{cases} Y, & s = i, \\ -Y, & s = j, \\ 0, & s \neq i, j, \end{cases} \tag{3.8}$$

其中， $s \sim t$ 表示顶点， s 和 t 相邻。

令 $\Omega_{st}=\frac{1}{\widetilde{a}_{st}}$为 $G^{\widetilde{w}}$中边 $e=\{s,t\}$ 上的电阻。则

$$\begin{aligned}\sum_{s\sim t}y_{st}&=\sum_{s\sim t}\frac{v_s-v_t}{\Omega_{st}}=\sum_{s\sim t}\widetilde{a}_{st}(v_s-v_t)=v_s\sum_{s\sim t}\widetilde{a}_{st}-\sum_{s\sim t}\widetilde{a}_{st}v_t\\&=\widetilde{d}_sv_s-(\widetilde{A}\mathbf{v})_s=((\widetilde{D}-\widetilde{A})\mathbf{v})_s=(\widetilde{L}\mathbf{v})_s.\end{aligned}\tag{3.9}$$

由方程 (3.8) 和方程 (3.9)，我们得到

$$\widetilde{L}\mathbf{v}=Y(\mathbf{1}_i-\mathbf{1}_j).\tag{3.10}$$

根据定理 2.2（b），方程 (3.10) 的通解为

$$\mathbf{v}=\widetilde{L}^{\dagger}Y(\mathbf{1}_i-\mathbf{1}_j)+(I-\widetilde{L}^{\dagger}\widetilde{L})\mathbf{u},$$

其中 $\mathbf{u}\in\mathbb{H}^n$ 为任意值。因此，顶点 i 和 j~之间的电阻距离为 G^w

$$\begin{aligned}R_{ij}(G^{\widetilde{w}})&=\frac{v_i-v_j}{Y}=\frac{1}{Y}(\mathbf{1}_i-\mathbf{1}_j)^{\top}\mathbf{v}\\&=\frac{1}{Y}(\mathbf{1}_i-\mathbf{1}_j)^{\top}\widetilde{L}^{\dagger}Y(\mathbf{1}_i-\mathbf{1}_j)+\frac{1}{Y}(\mathbf{1}_i-\mathbf{1}_j)^{\top}(I-\widetilde{L}^{\dagger}\widetilde{L})\mathbf{u}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

由方程 (3.6)，我们得到 $I-\widetilde{L}^{\dagger}\widetilde{L}=\frac{1}{n}J.$那么，方程 (3.11) 的第二项为

$$\frac{1}{Y}(\mathbf{1}_i-\mathbf{1}_j)^{\top}(I-\widetilde{L}^{\dagger}\widetilde{L})=\frac{1}{Y}(\mathbf{1}_i-\mathbf{1}_j)^{\top}(\frac{1}{n}J)=0.$$

因此,

$$R_{ij}(G^{\widetilde{w}})=(\mathbf{1}_i-\mathbf{1}_j)^{\top}\widetilde{L}^{\dagger}(\mathbf{1}_i-\mathbf{1}_j)=(\widetilde{L}^{\dagger})^{(i,j)}.\tag{3.12}$$

将方程 (3.1) 代入方程 (3.12)，得

$$R_{ij}(G^{\widetilde{w}})=(L^{\dagger})^{(i,j)}-(L^{\dagger}L_1L^{\dagger})^{(i,j)}(\varepsilon+\varepsilon^*)+2(L^{\dagger}L_1L^{\dagger}L_1L^{\dagger})^{(i,j)}\varepsilon\varepsilon^*.$$

(*c*) 由第 (*a*) 部分可知， $\widetilde{L}^{\dagger}$ 存在。因此

$$\begin{aligned} Kf(G^{\widetilde{w}}) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R_{ij}(G^{\widetilde{w}}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\widetilde{L}^{\dagger})^{(i,j)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\widetilde{L}^{\dagger})_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\widetilde{L}^{\dagger})_{jj} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\widetilde{L}^{\dagger})_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\widetilde{L}^{\dagger})_{ji} \\ &= n\mathrm{tr}(\widetilde{L}^{\dagger}) - \mathbf{1}^{T}\widetilde{L}^{\dagger}\mathbf{1} \\ &= n\mathrm{tr}(\widetilde{L}^{\dagger}). \end{aligned} \tag{3.13}$$

将方程 (3.1) 代入方程 (3.13)，得到

$$\begin{aligned} Kf(G^{\widetilde{w}}) &= n\mathrm{tr}(L^{\dagger}) - n\mathrm{tr}(L^{\dagger}L_1L^{\dagger})(\varepsilon+\varepsilon^{*}) + 2n\mathrm{tr}(L^{\dagger}L_1L^{\dagger}L_1L^{\dagger})\varepsilon\varepsilon^{*} \\ &= n\mathrm{tr}(L^{\dagger}) - n\mathrm{tr}((L^{\dagger})^{2}L_1)(\varepsilon+\varepsilon^{*}) + 2n\mathrm{tr}((L^{\dagger})^{2}L_1L^{\dagger}L_1)\varepsilon\varepsilon^{*}. \end{aligned}$$

□

3.2. 正权图的电阻距离和基尔霍夫指数的海森矩阵二次型及其估计

本节中，对于连通正权图 G^{w}，利用方程，我们建立其电阻距离和基尔霍夫指数所对应的海森矩阵二次型与其拉普拉斯矩阵的 Moore-Penrose逆之间的关系。我们进一步根据图参数给出这些海森矩阵特征值的估计。此外，我们证明，边权有界的正权图的基尔霍夫指数关于其边权向量是强凸的。

定理 3.2. 设 G^{w} 是一个连通正权图，具有 n 个顶点，如方程 (2.2) 所示，其边权向量为 $\mathbf{x}$。设 L 是 G^{w} 的拉普拉斯矩阵，且 L_1 是方程 (2.4) 中的实矩阵。则下列结论成立。

（a） $R_{ij}(\mathbf{x})$ 的海森矩阵的二次型为

$$(\Delta\mathbf{x})^{\top}\nabla^{2}R_{ij}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} = 2(L^{\dagger}L_1L^{\dagger}L_1L^{\dagger})^{(i,j)},$$

其中 i、$j \in [n]$。

(*b*) $Kf_{G}(\mathbf{x})$ 的海森矩阵的二次型为

$$(\Delta\mathbf{x})^{\top}\nabla^{2}Kf_{G}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} = 2n\mathrm{tr}((L^{\dagger})^{2}L_1L^{\dagger}L_1).$$

证明。 (a)由定理3.1（b），我们有

$$\begin{aligned} R_{ij}(\widetilde{\mathbf{x}}) &= R_{ij}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}(\varepsilon+\varepsilon^*)) \\ &= (L^\dagger)^{(i,j)} - (L^\dagger L_1 L^\dagger)^{(i,j)}(\varepsilon+\varepsilon^*) + 2(L^\dagger L_1 L^\dagger L_1 L^\dagger)^{(i,j)}\varepsilon\varepsilon^*. \end{aligned}$$

由方程 (2.1)， R_{ij}(x) 的海森矩阵对应的二次型为

$$(\Delta\mathbf{x})^\top \nabla^2 R_{ij}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} = \mathcal{S}_{\varepsilon\varepsilon^*}[R_{ij}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}(\varepsilon+\varepsilon^*))] = 2(L^\dagger L_1 L^\dagger L_1 L^\dagger)^{(i,j)}.$$

(b) 根据定理 3.1 (c)，我们得到

$$\begin{aligned} Kf_G(\widetilde{\mathbf{x}}) =& Kf_G(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}(\varepsilon+\varepsilon^*)) \\ =& n\mathrm{tr}(L^\dagger) - n\mathrm{tr}((L^\dagger)^2 L_1)(\varepsilon+\varepsilon^*) + 2n\mathrm{tr}((L^\dagger)^2 L_1 L^\dagger L_1)\varepsilon\varepsilon^*. \end{aligned}$$

再次利用方程 (2.1)， Kf_G(x) 的海森矩阵对应的二次型为

$$(\Delta\mathbf{x})^\top \nabla^2 Kf_G(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} = \mathcal{S}_{\varepsilon\varepsilon^*}[Kf(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}(\varepsilon+\varepsilon^*))] = 2n\mathrm{tr}((L^\dagger)^2 L_1 L^\dagger L_1).$$

□

注 3.3. </style}文献 使用矩阵逆给出了连通正权图 的基尔霍夫指数 (G^w) 的海森二次型。由于图 G^w 的拉普拉斯矩阵 L 的 ***Moore-Penrose*** 逆为 $L^\dagger = (L + \frac{1}{n}J)^{-1} - \frac{1}{n}J$ *[5]*，将此恒等式代入本文的定理 *3.2* (b) 即可直接得到文献 *[15]* 中的结果。 –

图的拉普拉斯矩阵的第二小特征值称为该图的代数连通度，在研究图连通性和图划分方面有广泛应用 [34]。图连通当且仅当其代数连通度为正 [35]。拉普拉斯矩阵的最大特征值在最大割问题中发挥着重要作用 [36]。设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为半正定矩阵，其特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$。那么存在一个正交矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$，使得 $A = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)P^\top$。记 $A^{\frac{1}{2}} = P\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})P^\top$.

– — —

设 L 为连通正权图 G^w 的拉普拉斯矩阵。量 $((L^2)^\dagger)^{(i,j)}$ 是 G^w[37] 的双调和距离，记为 $\widehat{R}_{ij}$。随后，我们给出 G^w 的电阻距离和基尔霍夫指数的海森矩阵特征值的显式界，这些界以

G^w 的拉普拉斯矩阵最大特征值、代数连通度、双调和距离以及底图 G 的最大度表示。

定理 3.4。 设 G^w 是一个具有 n 个顶点的连通正权图，如(2.2)所示，其边权向量为$\mathbf{x}$。设 λ_1 和 λ_{n-1} 分别为拉普拉斯矩阵 L 的最大特征值和 G^w的代数连通度。设 d_{max} 为图 G的最大度。则

(a) 与 G^w)的电阻距离相关联的海森矩阵 $\nabla^2 R_{ij}(\mathbf{x})$ (的特征值 $\mu(\nabla^2 R_{ij}(\mathbf{x}))$ 满足

$$\mu(\nabla^2 R_{ij}(\mathbf{x})) \leq \frac{4(d_{max}+1)}{\lambda_{n-1}} \widehat{R}_{ij},$$

$\widehat{\ }$其中 R_{ij} 是 G^w、 i、 $j \in [n]$.的双调和距离

(b) 与 G^w) 的基尔霍夫指数相关联的海森矩阵 $\nabla^2 K f_G(\mathbf{x})$ (的特征值 $\mu($ $\nabla^2 K f_G(\mathbf{x}))$ 满足

$$\frac{4n}{\lambda_1^3} \leq \mu(\nabla^2 K f_G(\mathbf{x})) \leq \frac{4n(d_{max}+1)}{\lambda_{n-1}^3}.$$

证明。 我们首先证明以下不等式

$$2\|\Delta\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|L_1\|_F^2 \leq 2(d_{max}+1)\|\Delta\mathbf{x}\|_2^2, \tag{3.14}$$

其中 $\|\Delta\mathbf{x}\|_2$ 是向量 $\Delta\mathbf{x}$的欧几里得范数，而 $\|L_1\|_F$ 是矩阵 L_1的弗罗贝尼乌斯范数。由方程 (2.4)，可得

$$\|L_1\|_F^2 = \mathrm{tr}(L_1^2) = \mathrm{tr}((D_1 - A_1)^2) = \mathrm{tr}(D_1^2) + \mathrm{tr}(A_1^2) - 2\mathrm{tr}(A_1 D_1). \tag{3.15}$$

由于 A_1 的所有对角元素均为0，且 D_1 是对角矩阵，因此$\mathrm{tr}(A_1 D_1) = 0$. 由方程 (3.15)，我们有

$$\|L_1\|_F^2 = \mathrm{tr}(D_1^2) + \mathrm{tr}(A_1^2). \tag{3.16}$$

利用方程(2.2)和(2.3)，可得

$$\operatorname{tr}(A_1^2) = \sum_{i,j=1}^{n} (\Delta a_{ij})^2 = 2 \sum_{\{i,j\}\in E} (\Delta a_{ij})^2 = 2\|\Delta \mathbf{x}\|_2^2, \tag{3.17}$$

$$\operatorname{tr}(D_1^2) = \sum_{i}^{n} (\Delta d_i)^2 = \sum_{i}^{n} \left(\sum_{i\sim j}^{n} \Delta a_{ij} \right)^2 .$$

对于正整数 s 和实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_s, 显然有 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_s)^2 \le s(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_s^2)$。因此,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(D_1^2) = \sum_{i}^{n} \left(\sum_{i\sim j}^{n} \Delta a_{ij} \right)^2 &\le \sum_{i}^{n} d_i \sum_{j=1}^{n} |\Delta a_{ij}|^2 \\ &\le d_{max} \sum_{i,j=1}^{n} \Delta a_{ij}^2 = 2d_{max}\|\Delta \mathbf{x}\|_2^2, \end{aligned} \tag{3.18}$$

其中, d_i 是 G 的顶点 i 的度, $i \in [n]$. 结合方程 (3.16) 和 (3.18) 可得 (3.17)

$$\|L_1\|_F^2 \le 2(d_{max} + 1)\|\Delta \mathbf{x}\|_2^2.$$

由 (3.16) 可明显看出, $\|L_1\|_F^2 \ge \operatorname{tr}(A_1^2) = 2\|\Delta \mathbf{x}\|_2^2$. 因此，不等式 (3.14) 得证。

(a) 令 $\mathbf{b} = \mathbf{1}_i - \mathbf{1}_j$。由定理 3.2 ($a$) 可得

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{x})^\top \nabla^2 R_{ij}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} &= 2(L^\dagger L_1 L^\dagger L_1 L^\dagger)^{(i,j)} = 2\mathbf{b}^\top L^\dagger L_1 L^\dagger L_1 L^\dagger \mathbf{b} \\ &= 2\|(L^\dagger)^{\frac{1}{2}} L_1 L^\dagger \mathbf{b}\|_2^2 \le 2\|(L^\dagger)^{\frac{1}{2}}\|_2^2 \|L_1\|_2^2 \|L^\dagger \mathbf{b}\|_2^2 \\ &\le 2\|(L^\dagger)^{\frac{1}{2}}\|_2^2 \|L_1\|_F^2 \|L^\dagger \mathbf{b}\|_2^2, \end{aligned}$$

其中, $\|(L^\dagger)^{\frac{1}{2}}\|_2$ 是 $(L^\dagger)^{\frac{1}{2}}$ 的谱范数。

由 $L^\dagger$ 的谱分解方程 (3.5), 我们得到 $\|(L^\dagger)^{\frac{1}{2}}\|_2^2 = \frac{1}{\lambda_{n-1}}$.然后

$$(\Delta \mathbf{x})^\top \nabla^2 R_{ij}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} \le 2\frac{\|L_1\|_F^2 \|L^\dagger \mathbf{b}\|_2^2}{\lambda_{n-1}}.$$

再次根据不等式 (3.14)，我们有

$$\frac{(\Delta\mathbf{x})^\top \nabla^2 R_{ij}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}}{\|\Delta\mathbf{x}\|^2} \leq \frac{4(d_{max}+1)}{\lambda_{n-1}}\|L^\dagger \mathbf{b}\|_2^2 = \frac{4(d_{max}+1)}{\lambda_{n-1}}((L^2)^\dagger)^{(i,j)}. \tag{3.19}$$

因此，

$$\mu(\nabla^2 R_{ij}(\mathbf{x})) \leq \frac{4(d_{max}+1)}{\lambda_{n-1}}((L^2)^\dagger)^{(i,j)} = \frac{4(d_{max}+1)}{\lambda_{n-1}}\widehat{R}_{ij}.$$

(*b*) 对于 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$，范数不等式 [38, p. 364]

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_2 \|B\|_F. \tag{3.20}$$

成立。由定理 3.2 (*b*) 和不等式 (3.20)，可得

$$\begin{aligned}(\Delta\mathbf{x})^\top \nabla^2 K f_G(\Delta\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} &= 2n\mathrm{tr}((L^\dagger)^2 L_1 L^\dagger L_1) = 2n\|(L^\dagger)^{\frac{1}{2}} L_1 L^\dagger\|_F^2 \\ &\leq 2n\|(L^\dagger)^{\frac{1}{2}}\|_2^2 \|L_1 L^\dagger\|_F^2 \leq 2n\|(L^\dagger)^{\frac{1}{2}}\|_2^2 \|L_1\|_F^2 \|L^\dagger\|_2^2.\end{aligned} \tag{3.21}$$

由方程 (3.5)，可得 $\|(L^\dagger)^{\frac{1}{2}}\|_2^2 = \frac{1}{\lambda_{n-1}}$ 和 $\|L^\dagger\|_2^2 = \frac{1}{\lambda_{n-1}^2}$. 于是

$$(\Delta\mathbf{x})^\top \nabla^2 K f_G(\Delta\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} \leq 2n\frac{\|L_1\|_F^2}{\lambda_{n-1}^3}.$$

再次由不等式 (3.14)，可得

$$\frac{(\Delta\mathbf{x})^\top \nabla^2 K f_G(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}}{\|\Delta\mathbf{x}\|_2^2} \leq \frac{4n(d_{max}+1)}{\lambda_{n-1}^3}.$$

因此，

$$\mu(\nabla^2 K f_G(\mathbf{x})) \leq \frac{4n(d_{max}+1)}{\lambda_{n-1}^3}.$$

接下来，我们推导 $\mu(\nabla^2 K f_G(\mathbf{x}))$ 的一个下界。应用不等式 (3.20) 得到 $\|L^{\frac{1}{2}}(L^\dagger)^{\frac{1}{2}} L_1 L^\dagger\|_F^2 \leq \|L^{\frac{1}{2}}\|_2^2 \|(L^\dagger)^{\frac{1}{2}} L_1 L^\dagger\|_F^2$. 然后

$$\|(L^\dagger)^{\frac{1}{2}} L_1 L^\dagger\|_F^2 \geq \frac{\|L^{\frac{1}{2}}(L^\dagger)^{\frac{1}{2}} L_1 L^\dagger\|_F^2}{\|L^{\frac{1}{2}}\|_2^2}.$$

结合方程 (3.21)，可得

$$(\Delta\mathbf{x})^\top \nabla^2 K f_G(\Delta\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} = 2n\|(L^\dagger)^{\frac{1}{2}} L_1 L^\dagger\|_F^2 \geq 2n\frac{\|L^{\frac{1}{2}}(L^\dagger)^{\frac{1}{2}} L_1 L^\dagger\|_F^2}{\|L^{\frac{1}{2}}\|_2^2}.$$

由方程 (3.4) 和 (3.5)，我们有 $L^{\frac{1}{2}}(L^\dagger)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{\lambda_i}p_i p_i^\top)(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}p_i p_i^\top) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i p_i^\top = p_n p_n^\top = I - \frac{1}{n}J$. 由此可得

$$(\Delta\mathbf{x})^\top \nabla^2 K f_G(\Delta\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} \geq 2n\frac{\|(I-\frac{1}{n}J)L_1 L^\dagger\|_F^2}{\|L^{\frac{1}{2}}\|_2^2} = 2n\frac{\|L_1 L^\dagger\|_F^2}{\|L^{\frac{1}{2}}\|_2^2}. \tag{3.22}$$

再次由不等式 (3.20)，可得 $\|L_1 L^\dagger L\|_F^2 \leq \|L_1 L^\dagger\|_F^2 \|L\|_2^2$. 于是

$$\|L_1 L^\dagger\|_F^2 \geq \frac{\|L_1 L^\dagger L\|_F^2}{\|L\|_2^2}. \tag{3.23}$$

结合不等式 (3.22) 和 (3.23)，可得

$$(\Delta\mathbf{x})^\top \nabla^2 K f_G(\Delta\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} \geq 2n\frac{\|L_1 L^\dagger L\|_F^2}{\|L^{\frac{1}{2}}\|_2^2\|L\|_2^2} = 2n\frac{\|L_1(I-\frac{1}{n}J)\|_F^2}{\lambda_{n-1}^3} = 2n\frac{\|L_1\|_F^2}{\lambda_{n-1}^3}.$$

再次由不等式 (3.14)，我们有

$$\frac{(\Delta\mathbf{x})^\top \nabla^2 K f_G(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}}{\|\Delta\mathbf{x}\|_2^2} \geq \frac{4n}{\lambda_1^3},$$

then

$$\mu(\nabla^2 K f_G(\mathbf{x})) \geq \frac{4n}{\lambda_1^3}.$$

这就完成了定理 3.4 中第 (b) 部分的证明。

□

由于不等式 (3.19) 中 $\|L^\dagger\mathbf{b}\|_2^2 \leq \|L^\dagger\|_2^2\|\mathbf{b}\|_2^2 = \frac{2}{\lambda_{n-1}^2}$，我们得到了定理 3.4 ($a$) 的另一个上界。

推论 3.5. 对于具有 n 个顶点的连通正权图 G^w，与 G^w 的电阻距离相关的海森矩阵 $\nabla^2 R_{ij}(\mathbf{x})$ (的特征值 $\mu(\nabla^2 R_{ij}(\mathbf{x}))$ 满足

$$\mu(\nabla^2 R_{ij}(\mathbf{x})) \leq \frac{8(d_{max}+1)}{\lambda_{n-1}^3},$$

其中 $i,\ j \in [n]$。

定理 3.4 和推论 3.5 给出了正权图的电阻距离与基尔霍夫指数的海森矩阵特征值界，这些界以图参数表示。下面给出两个例子来验证这些界。

例3.6。(1) 设 K_3 为顶点集为 $V = \{1,2,3\}$、边集为 $E = \{e_1 = \{1,2\}, e_2 = \{2,3\}, e_3 = \{1,3\}\}$的完全图。设 $K_3^w = (V, E, w)$ 为一个正权图，其底图为 K_3，其中 $w(e_i) = x_i$ 是边 e_i, $i = 1$的权，2、3。利用串联与并联化简， K_3^w 中顶点1与2之间的电阻距离为

$$R_{12}(K_3^w) = \frac{x_2 + x_3}{x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3} = R_{12}(\mathbf{x}).$$

$R_{12}(\mathbf{x})$ 的二阶偏导数为:

$$\frac{\partial^2 R_{12}(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{2x_3^2(x_2+x_3)}{D^3}, \quad \frac{\partial^2 R_{12}(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{2x_2^2(x_2+x_3)}{D^3}, \quad \frac{\partial^2 R_{12}(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_3} = -\frac{2x_1x_2x_3}{D^3},$$
$$\frac{\partial^2 R_{12}(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} = \frac{2(x_2+x_3)^3}{D^3}, \quad \frac{\partial^2 R_{12}(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} = \frac{2x_3^2(x_1+x_2)}{D^3}, \quad \frac{\partial^2 R_{12}(\mathbf{x})}{\partial x_3^2} = \frac{2x_2^2(x_1+x_2)}{D^3},$$

其中 $D = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$。令 $x_1 = x_2 = x_3 = 1$，海森矩阵$\nabla^2 R_{12}(\mathbf{x})$ 变为

$$\nabla^2 R_{12}(\mathbf{1}) = \begin{bmatrix} 0.5926 & 0.1481 & 0.1481 \\ 0.1481 & 0.1481 & -0.0741 \\ 0.1481 & -0.0741 & 0.1481 \end{bmatrix}.$$

上述海森矩阵的最大特征值为 *0.6667*。类似地， $\nabla^2 R_{23}(\mathbf{1})$ 和 $\nabla^2 R_{13}(\mathbf{1})$的最大特征值均为 *0.6667*。

容易看出， K_3 的拉普拉斯矩阵的最大特征值和代数连通度均为 3。根据推论 *3.5*，用图参数表示的 K_3 电阻距离海森矩阵特征值的上界计算为 0.8888。

(2)与上文的(1) 类似， K_4 的基尔霍夫指数海森矩阵为

$$\nabla^2 K f_{K_4}(\mathbf{1}) = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.1250 & 0.1250 & 0.1250 & 0.1250 & 0.0000 \\ 0.1250 & 0.5000 & 0.1250 & 0.1250 & 0.0000 & 0.1250 \\ 0.1250 & 0.1250 & 0.5000 & 0.0000 & 0.1250 & 0.1250 \\ 0.1250 & 0.1250 & 0.0000 & 0.5000 & 0.1250 & 0.1250 \\ 0.1250 & 0.0000 & 0.1250 & 0.1250 & 0.5000 & 0.1250 \\ 0.0000 & 0.1250 & 0.1250 & 0.1250 & 0.1250 & 0.5000 \end{bmatrix}.$$

$\nabla^2 K f_{K_4}(\mathbf{1})$ 的最小和最大特征值分别计算得为1 4 和 *1*。 –

容易看出，完全图 K_4 的拉普拉斯矩阵的最大特征值和代数连通度均为4。根据定理 *3.4* (b)， K_4 的基尔霍夫指数海森矩阵的特征值下界和上界分别为1 4 和1。

–

众所周知，函数 f(x)是凸函数，当且仅当其海森矩阵为半正定。如果 f(x)的海森矩阵是正定的，那么 f(x)是严格凸函数。此外，如果存在常数 $\alpha > 0$ ，使得 f(x)的海森矩阵的最小特征值大于或等于 α，那么 f(x)是强凸函数 [39]。

Ghosh、Boyd 和 Saberi 证明，连通正权图 G^w 的电阻距离和基尔霍夫指数都是其边权向量x [15]上的严格凸函数。下文将证明，对于边权有界的正权图G^w ，基尔霍夫指数 Kf_G(x)关于其边权x是强凸的。

定理 3.7. 具有 n 个固定顶点且边权有界的连通正权图的基尔霍夫指数关于其边权向量是强凸的。

证明. 由 [40] 可知，正权图 G^w 的拉普拉斯矩阵的最大特征值 λ_1 满足 $\lambda_1 \leq 2d^w_{max}$，其中 d^w_{max} 是 G^w 的最大加权度。设对所有 $e \in E$， $w(e) \leq M$ ，其中 $M > 0$ 为常数。于是

$$\lambda_1 \leq 2d^w_{max} \leq 2(n-1)M.$$

根据定理 ~~3.4 (b)~~ ，最小特征值 $\mu_{min}(\nabla^2 K f_G(\mathbf{x}))$

（与 G^w 的基尔霍夫指数的海森矩阵相关）满足

$$\mu_{min}(\nabla^2 Kf_G(\mathbf{x})) \geq \frac{4n}{\lambda_1^3} \geq \frac{n}{2(n-1)^3 M^3} = \alpha > 0.$$

因此， G^w 的基尔霍夫指数关于其边权向量**x**是强凸的。

□

致谢

第二作者的研究工作得到国家自然科学基金（编号：12371344）、黑龙江省优秀青年科学基金（编号：YQ2024A009）和中央高校基本科研业务费（编号：3072025YC2403）的部分资助，第三作者的研究工作得到国家自然科学基金（编号：12071097）的部分资助。

参考文献

[1] F. Harary. 图论. Addison-Wesley Publishing company，美国，1969.[2] R.M. Foster. 电网络的平均阻抗. 《应用力学论文集》（《赖斯纳纪念文集》），第333–340页，1949.[3] H. Chen和F. Zhang. 电阻距离局部规则. 《数学化学杂志》，44(2):405–417，2008.[4] D.J. Klein和M. Randi´c. 电阻距离. 《数学化学杂志》，12:81–95，1993.[5] R.B. Bapat. 加权图的电阻矩阵. 《*MATCH*数学与计算机化学通讯》，50:73–82，2004年.[6] S. Cheng、W. Chen和W. Yan. 近完全多部图中生成树的计数. 《代数组合学杂志》，56:773–783，2022.[7] T. Li和W. Yan. 2-可分网络生成树的枚举.*Physica A*：统计力学及其应用，536:120877，2019.

[8] L. Lov´asz. 图上的随机游走：综述. 组合数学，保罗·埃尔德什八十岁，2:1–46，1993.[9]A. Cloninger、G. Mishne、A. Oslandsbotn、S.J. Robertson、Z. Wan和Y. Wang. 连接图拉普拉斯算子的随机游走、电导与电阻. *SIAM*矩阵分析与应用期刊，45(3):1541– 1572，2024.[10] T. Zhang和C. Bu. 基于电阻距离检测复杂网络中的社团结构. *Physica A*：统计力学及其应用，526:120782，2019.[11] D. Bonchev、A.T. Balaban、X. Liu和D.J. Klein. 多环图的分子环性与中心性. I. 基于电阻距离或倒数距离的环性. 国际量子化学杂志，50(1):1–20，1994.[12] C. Yang、J. Mao、X. Qian和P. Wei. 通过最小化总有效电阻设计鲁棒航空运输网络. *IEEE*智能交通系统汇刊，20(6):2353–2366，2018.[13] W. Ellens、F. Spieksma、P. Van Mieghem、A. Jamakovic和R. Kooij. 有效图电阻. 线性代数及其应用，435(10):2491–2506，2011.[14] 香农和D Hagelberger. 电阻函数的凹性. 应用物理学杂志，27:42–43，1956.[15] A. Ghosh、S. Boyd和A. Saberi. 最小化图的有效电阻.*SIAM*评论，50(1):37–66，2008.[16] Y. Li、L. Sun和C. Bu. 对偶数加权图的电阻距离. 离散应用数学，375:154–165，2025.[17] C. Chen、S. Reiz、C. Yu、H. Bungartz和G. Biros. 多层感知机的高斯-牛顿海森矩阵的快速逼近. *SIAM*矩阵分析与应用期刊，42(1):165–184，2021.[18] A. Yazawa. 完全图与完全二部图的海森矩阵的特征值. 《代数组合学杂志》，54(4):1137–1157，2021.

[19]Y. Pan、Y. Zhou、W. Liu 和 L. Nie。图海森矩阵上的主成分分析。载于 *2019 IEEE*计算智能研讨会系列 *(SSCI)*，第1494–1501页。IEEE，2019年。[20] M.A. Clifford。双四元数初步概述。《伦敦数学学会会刊》，4(64):381–395，1873。[21] E. Study。《运动几何学》。Teubner出版社，莱比锡，1903年。[22] I. Fischer。运动学、静力学与动力学中的对偶数方法。CRC出版社，博卡拉顿，1998年。[23] Y. Gu 和 J. Luh。对偶数变换及其在机器人学中的应用。*IEEE*机器人学与自动化期刊，3(6):615–623，1987年。[24] L. Qi 和 C. Cui。对偶厄米矩阵的特征值及其在编队控制中的应用。*SIAM*矩阵分析与应用期刊，45(4):2135–2154，2024年。[25] T. Wei、W. Ding 和 Y. Wei。对偶矩阵的奇异值分解及其在大脑行波识别中的应用。*SIAM*矩阵分析与应用期刊，45(1):634–660，2024年。[26] L. Qi 和 C. Cui。标准部分非负的对偶马尔可夫链与对偶数矩阵。《应用数学与计算通讯》，第1–20页，2024年。[27] J. Fike 和 J. Alonso。用于精确计算二阶导数的超对偶数的发展。载于第*49*届*AIAA*航空航天科学会议（含新视野论坛和航空航天展览会），第886页，2011年。[28] J. Fike 和 J. Alonso。利用超对偶数进行二阶导数的自动微分。载于《算法微分最新进展》，第163–173页，2012年。[29] D. Murai、R. Omote 和 M. Tanaka。使用超对偶数求解拓扑优化问题的方法。《应用力学档案》，92(10):2813–2824，2022年。[30] A. Cohen 和 M. Shoham。超对偶数在多体运动学中的应用。《机构与机器人学期刊》，8(1):011015，2016年。

[31] M. Tanaka、T. Sasagawa、R. Omote、M. Fujikawa、D. Balzani 和 J. Schr¨oder。基于超对偶数的超弹性材料模型高精度一阶和二阶微分方案。《计算机方法：应用力学与工程》，283:22–45，2015年。[32] Q. Xiao 和 J. Zhong。超对偶 Moore–Penrose 广义逆的刻画与性质。《*AIMS* 数学》，9(12):35125–35150，2024年。[33] R.B. Bapat。《图与矩阵》。Springer，伦敦，2010年。[34] F. Chung。《谱图论》。美国数学学会，普罗维登斯，1997年。[35] M. Fiedler。图的代数连通度。《捷克斯洛伐克数学杂志》，23(2):298–305，1973年。[36] B. Mohar 和 S. Poljak。特征值与最大割问题。《捷克斯洛伐克数学杂志》，40(2):343–352，1990年。[37] Y. Lipman、R. Rustamov 和 T. Funkhouser。双调和距离。《*ACM* 图形学汇刊》（*TOG*），29(3):1–11，2010年。[38] R. Horn 和 C. Johnson。《矩阵分析》。剑桥大学出版社，纽约，2013年。[39] S. Boyd 和 L. Vandenberghe。《凸优化》。剑桥大学出版社，剑桥（英国），2004年。[40] W.N. Anderson 和 T.D. Morley。图的拉普拉斯矩阵的特征值。《线性与多重线性代数》，18(2):141–145，1985年。