arXiv:2603.04983v1 [math.AG] 5 Mar 2026

拉格朗日可构造层导出模空间上的 n 结构 S

Merlin Christ 和 Enrico Lampetti

2026年3月6日

摘要

给定一个维数为 n 、带有锥形光滑分层的紧致定向流形，我们证明，取值于 $\mathcal{D}(k)$ 的可构造层模空间以及反常层模空间都是 $(2-n)$-移位拉格朗日的。前一结论源于在取值于 $\mathcal{D}(k)$ 的可构造层所构成的稳定 ∞-范畴上构造相对左 n-卡拉比–丘结构。为此，我们利用了配备立方卡拉比–丘结构的范畴立方体的宽松粘合结果。给定一个余维 2 子流形，我们进一步确定了与具有指定单值化的反常层相对应的辛叶。

目录

1 引言 1

2 卡拉比–丘范畴立方体 4

2.1 线性稳定 ∞-范畴与范畴立方体 .42.2 立方 Calabi–Yau 结构 .52.3 宽松粘合 .82.4 非松弛粘合 .11

3 C可构造层范畴上的卡拉比–丘结构 13

3.1 分层空间上的可构造层 .143.2 锥形光滑分层空间 .153.3 锥光滑分层空间的范畴立方体 .193.4 与带角光滑流形相关的卡拉比–丘立方体 .223.5 $\mathrm{Cons}(X)_*$ 上的立方卡拉比–丘结构.253.6 图示示例 .27

4 L可构造层模空间上的拉格朗日结构 3 0

4.1 对象模空间 .304.2 可构造层与反常层模空间 .314.3 反常层模空间的辛叶 .344.3.1 光滑子流形情形下的拉格朗日结构 .344.3.2 光滑除子的辛叶 .35

1 引言

导出叠上的态射上的移位拉格朗日结构由 Pantev–Toën– Vezzosi–Vaquié 在 [PTVV13]中引入。沿袭 Toën 的思想，Brav–Dyckerhoff [BD19]引入了移位拉格朗日结构的一个非交换类比，它附属于一个微分分次函子，被称为相对左卡拉比–丘结构。一个特殊情形是（绝对）左 n-卡拉比–丘结构，它等价于一个 S^1-等变地将逆塞尔函子与悬移函子 $[-n]$相识别。转到 Toën-Vaquié 对象模空间 [TV07], 后，相对左卡拉比–丘结构诱导出一个拉格朗日结构 [BD21]。许多自然的拉格朗日态射源自拓扑学和代数几何。在本文中，我们将描述一类源自分层空间拓扑的新例子。

考虑一个维数为 X n的定向闭流形。正如 Brav–Dyckerhoff [BD19], 所示，赋值于 Perf(k) 的局部系统范畴 $\mathrm{Loc}^{\mathrm{dg}}(X)$，其中 k 为一个域，从 X 的定向继承了一个左 n-卡拉比–丘结构。因此，对象模空间 $\mathcal{M}_{\mathrm{Loc}^{\mathrm{dg}}}(x)$ 继承了 $2-n$移位辛结构（依照 [PTVV13] 的意义）。更一般地，若 X 具有边界 ∂X，则函子 $\mathrm{Loc}^{\mathrm{dg}}(\partial X) \to \mathrm{Loc}^{\mathrm{dg}}(X)$ 继承了一个相对左 n-卡拉比–丘结构。由此产生的导出叠态射 $\mathcal{M}_{\mathrm{Loc}^{\mathrm{dg}}}(x) \to \mathcal{M}_{\mathrm{Loc}^{\mathrm{dg}}\partial X}$ 是拉格朗日的，其目标是一个$3-n$移位辛结构；这也称为一个$2-n$移位辛态射 [Cal15]。

本文将这些结果推广到紧致定向流形 X 上相对于 [AFT17] 意义下的锥形光滑分层 P 的可构造层范畴 $\mathrm{Cons}_P(X)$。为此，我们采用 k-线性稳定 ∞-范畴的框架，而非 dg 范畴。具体而言，我们用 k-线性稳定 ∞-范畴 $\mathrm{Loc}(X)$ 替代 $\mathrm{Loc}^{\mathrm{dg}}(X)$，该范畴由取值于 $\mathcal{D}(k)$ 的局部系统构成；并用 Toën-Vaquié 对象模空间的 ∞-范畴版本 [AG14] 替代 Toën-Vaquié 模空间。

取值于 $\mathcal{D}(k)$ 的可构造层范畴 $\mathrm{Cons}_P(X)$ 是一个 k-线性稳定 ∞-范畴。 [PT22, Jan24, CJ24, HPT24] 从 (X,P) 的出口路径 ∞-范畴到$\mathcal{D}(k)$ 的函子的角度描述了该范畴，推广了 [Lur17, Appendix A] 中关于取值于空间的可构造层的结果。∞-范畴 $\mathrm{Cons}_P(X)$ 及其对象模空间在 [HPT23,HPT24,Lam25], 中得到了进一步研究，并可识别为在 (X,P) 上可构造层的内在定义模空间 $\mathrm{Cons}_P(X)$。对于任意偏 perversity 函数 $\mathfrak{p}$，反常层模空间存在一个开浸入 ${}^{\mathfrak{p}}\mathrm{Perv}_P(X) \to \mathrm{Cons}_P(X)$。

我们的主要结果可以表述如下：

Theo注 1 (定理3.51，推论 4.20)。 设 X 是一个维数为 *ion wit* n 边界。设 (X,P) 是 X 的一个带边界、深度为 n的锥形光滑分层。

(i) 存在一个典范的左 d-卡拉比–丘结构，定义在范畴 $(n+1)$-立方体 $\mathrm{Cons}_P(X)_*$上，该结构来自定义 *3.40*，其顶点是 k-线性稳定 ∞范畴 $\mathrm{Cons}_P(X)$，由 $\mathcal{D}(k)$值的、定义在 (X,P)内部的可构造层。在 *particular*，该函子

$$\mathrm{colim}_{I^{d+1}\setminus\{1,\dots,1\}} \mathrm{Cons}_P(X)_* \longrightarrow \mathrm{Cons}_P(X)_{(1,\dots,1)} \simeq \mathrm{Cons}_P(X)$$

继承一个相对左 n-卡拉比–丘结构。

(ii) 设 $\mathfrak{p}\colon\ P \to \mathbb{Z}$ 是一个函数。上述相对左 d-卡拉比–丘函子在局部几何导出叠之间诱导出 $(2-d)$-移位拉格朗日态射

$$\mathbf{Cons}_P(X) \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{colim}_{I^{n+1}\setminus\{1,\dots,1\}} \mathrm{Cons}_P(X)_*}$$

and

$${}^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}_P(X) \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{colim}_{I^{n+1}\setminus\{1,\dots,1\}} \mathrm{Cons}_P(X)_*}.$$

注 1. 在定理 *1* 中边界非空的情形下， ∞-范畴 $\mathrm{Cons}_P(X)$指在边界法向方向上局部常值的可构造层；等价地说，指 X 内部上的可构造层。另见注 *3.21*。

对于 X 一条光滑代数曲线， X 上的局部常值层的模空间带有一种泊松结构，该结构已在文献中得到广泛研究 [FR99, GHJW97, Gol06, GR98]。在更高维的情形下，Pantev-Toën [PT21] 将其推广到了局部常值层的导出栈（即他们论文中的 $\mathbf{GL}_n$ ）。定理 1 使我们能够给出如下推广：

推论 1 (推论4.22)。 设 X 是一个带边界的紧致定向流形，其维数为 d。设 $(X,\ P)$ 是 X 的带边界锥形光滑分层，并设 $\mathfrak{p}\colon\ P \to \mathbb{Z}$ 是一个函数。那么，导出叠 $\mathbf{Cons}_P(X)$ 和 ${}^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}_P(X)$ 都带有 $(2-d)$-移位泊松结构。

立方卡拉比–丘结构由 [CDW23], 引入，是对对应于 1-立方体（即函子）这一情形的相对卡拉比–丘结构的推广。它们也可以视为迭代卡拉比–丘余跨的高阶范畴中的高阶态射 [BCS24]。转向对象模空间后，立方卡拉比–丘结构便产生了可称为迭代拉格朗日交叉立方体的对象。相对卡拉比–丘结构的一个核心特征是可以对其进行粘合。文献中已经提出了这类粘合性质的多种版本 [BD19、CDW23、Chr23、BCS24、ST25]。最简单的情形是，相对左卡拉比–丘函子可以沿推出进行粘合 [BD19]。本文介绍并应用了卡拉比–丘立方体的一种新型粘合性质，它使用所谓的有向推出，即 $(\infty,2)$-范畴意义下的部分宽松推出。

这推广了 1-立方体（即函子）上的相对卡拉比–丘结构的宽松粘合这一特殊情形，该情形见 [CDW23]。

$\mathrm{Cons}_P(X)_*$ 上的立方左卡拉比–丘结构会在从立方体顶点补集上的余极限出发的函子上诱导出左 Calabi–Yau 结构

$$\mathrm{colim}_{I^n\setminus\{1,\dots,1\}}\,\mathrm{Cons}_P(X)_* \longrightarrow \mathrm{Cons}_P(X)_{(1,\dots,1)} \simeq \mathrm{Cons}_P(X)\,.$$

然而，其定义域是一个抽象余极限，通常我们不会对它作出明确描述。当 X 是闭的且 P 的深度为1时，我们可以如下确定其定义域：

例1. 设 X 是一个维数为 n 的光滑闭流形， $D\subset X$ 是一个余维为 d 的（不一定连通的）光滑子流形。则 X 继承了一个深度为1的锥形光滑分层P，其分层为 D 和 $X\backslash D$。设 $\partial D\to D$ 是由D的链接给出的圆丛，即 D 在 X中的管状邻域的边界。范畴论1-立方体 $\mathrm{Cons}_P(X)_*$等价于一个函子

$$\mathrm{Loc}(\partial D)\longrightarrow \mathrm{Cons}_P(X)\,. \tag{1}$$

函子（1）由 Cons_P（X）与（部分 lax）有向推出之间的等价所诱导

$$\mathrm{Cons}_P(X)\simeq \mathrm{Loc}(D)\,\overrightarrow{\amalg}_{\mathrm{Loc}(\partial D)}\,\mathrm{Loc}(X\backslash D)\,,$$

另请参见定义 2.12。请注意，这种将其描述为有向宽松推出的方式，恢复了 $\mathrm{Cons}_P(X)$ 分解为 $\mathrm{Loc}(D)$ 和 $\mathrm{Loc}(X\backslash D)$的经典再粘合。定理 1 的第 (i) 部分指出，函子 (1) 是相对左 n-卡拉比–丘，并且

$$\mathbf{Cons}_P(X)\longrightarrow \mathbf{Loc}(\partial D)$$

是一个 $(2-n)$-移位拉格朗日态射，其中 $\mathbf{Loc}(\partial D):=\mathcal{M}_{\mathrm{Loc}(\partial D)}$是 ∂D 上的局部系统栈。

最后，我们进一步专门考虑光滑闭子流形 $D\subset X$ 的余维为 2 的情形。设 D 有 m 个连通分支。我们进一步描述 X 上反常层模空间的 $(2-n)$-移位辛叶，这些叶是通过固定圆丛 $\partial D\to D$ 中绕 m 个圆的单值化而得到的。

定理 2 (定理 4.38)。 取一组元素 $\lambda_i\in GL_{r_i}$, $i=0,\dots,m$。那么，导出栈 $^{\mathfrak{p}}$**周 perversity 层范畴**$_D^{r\,\lambda}$,(X) 由沿圆丛 $\partial D\to D$ 的 m 个连通分支纤维、具有指定单值化 $\lambda=\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$ 的反常层构成，并带有 $(2-n)$-移位辛结构。

注2. 定理 $\partial D\to D$ 中的圆丛 *2* 可以识别为 $D\subset X$的法丛，而其中给定的拉格朗日态射可以识别为与法锥形变相关联的消失循环函子。特别地，定理 *2* 中与具有指定平凡单值化的局部系统相关联的辛栈，恢复了局部系统模栈 $\mathbf{Loc}(X)$。

我们以下述情形为例说明定理 2： D 三维流形中的一个纽结3。黎曼曲面所产生的另一个 0-移位辛栈的例子见例 4.39。

例 2. 令 K 为嵌入三维流形 M 中的一个纽结，并令 α: $K\to BS^1$ 为由 M中 K的管状邻域的边界给出的 S^1-丛$\partial K\to K$。令 $r\in\mathbb{N}$和 $\lambda\in GL_r$。则 $^{\mathfrak{p}}$**周 perversity 层范畴**$_K^{r\,\lambda}$, (M) 带有一个 (-1)-移位辛结构。正如 T. Kinjo 告知我们的，若 λ 可对角化，则可证明叠 $^{\mathfrak{p}}$**周 perversity 层范畴**$_K^{r\,\lambda}$, (M) 是对称的。

T叠 $^{\mathfrak{p}}$**周 perversity 层范畴**$_K^{r\,\lambda}$, （M）的情形也曾被考虑过 $M=S^3$ 见 [BK16] 和 [ST25，第 8 节.5]。

近期研究表明，在对称导出栈0移位及(-1)移位辛结构 $\mathcal{X}$ 的存在性可用于构造 BPS李代数，从而能够通过上同调霍尔代数研究 $\mathcal{X}$ 的上同调，参见例如 [BDN+25，HK25]。应用*loc.cit.* 中的结果，另一个关键要素是（导出）好模空间的存在性；在 [Lam25]中已为反常层的（导出）叠确立了这一点。

论文结构

我们在第2 节开始讨论 Calabi–丘范畴立方体。我们在命题2.17 中证明了沿有向推出粘合立方卡拉比–丘结构的粘合结果。在第3节中，我们证明主要结果。为此，我们首先将卡拉比–丘立方体与带角流形联系起来。通过宽松粘合 X 的解缠以及分层的管状邻域所对应的卡拉比–丘立方体，我们在范畴立方体$\mathrm{Cons}_P(X)_*$上构造立方卡拉比–丘结构。最后，我们在第$(X,\ P)$节描述4上可构造层和反常层模空间的拉格朗日结构，以及移位辛叶。

致谢

我们感谢 Mauro Porta 和 Jean-Baptiste Teyssier 提出的建议，以及 Tasuki Kinjo 富有成效的讨论和建议。我们也感谢 Marco Volpe 对论文初稿的评论。

M.C. 是波恩大学豪斯多夫数学中心的成员（德国科学基金会 GZ2047/1，项目编号 ID390685813）。

E.L. 感谢波恩大学豪斯多夫数学中心以及西雅图大学的款待，本研究的部分工作在此完成。

2 卡拉比–丘范畴立方体

在第2.1 节和2.2节中，我们回顾线性稳定∞-范畴立方体上的左 Calabi–Yau 结构的概念，该概念由 [CDW23]引入。我们将此类 Calabi–Yau 结构称为立方 Calabi–Yau 结构。在第2.3节中，我们介绍范畴立方体的有向宽松粘合，并证明立方 Calabi–Yau 结构也能沿这些粘合。在第2.4 节中，我们最后证明立方 Calabi–Yau 结构在非宽松推出下也能粘合。

2.1 线性稳定 ∞-范畴与范畴立方体

我们用 $\mathcal{P}r^L_{\mathrm{St}}$ 表示稳定可呈现 ∞-范畴及左伴随函子的 ∞-范畴。我们固定一个域 k，并用 $\mathrm{Mod}_k \in \mathcal{P}r^L_{\mathrm{St}}$ 表示 k-模的对称幺半 ∞-范畴。注意，$\mathrm{Mod}_k \simeq \mathcal{D}(k)$ 是对称幺半 ∞-范畴。k-线性 ∞-范畴的 ∞-范畴定义为 $\mathrm{LinCat}_k = \mathrm{Mod}_{\mathrm{Mod}_k}(\mathcal{P}r^L_{\mathrm{St}})$。我们注意到，遗忘函子 $\mathrm{LinCat}_k \to \mathcal{P}r^L_{\mathrm{St}}$ 保持余极限。

回顾一下，若一个 k-线性 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 在对称幺半 ∞-范畴 LinCat_k 中存在对偶 $\mathcal{C}^\vee$，并配备求值函子 $\mathcal{C}^\vee \otimes \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}_k$ 和余求值函子 $\mathrm{Mod}_k \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}^\vee$，且满足三角恒等式，则称其为可对偶化的。若一个 k-线性函子的右伴随保持余极限，因此本身也是一个 k-线性函子，则称该函子可对偶化。我们将由可对偶化的 k-线性 ∞-范畴及可对偶函子构成的 ∞-范畴记作 $\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}}$。注意，任何紧生成的 k-线性 ∞-范畴都是可对偶化的。遗忘函子 $\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}} \to \mathrm{LinCat}_k$ 保持余极限，见 [Efi24，命题 1.65]。

我们将 $I = N(\{0 \to 1\})$ 记作偏序集 $\{0 \to 1\}$ 的神经。注意，$I \simeq \Delta^1$。因此，所有立方体在视为多重链复形时，均采用上同调分次约定，且微分使次数增加。

定义 2.1。

(1) 一个 k-线性范畴 n-立方体是一个函子 $\mathcal{C}_*\colon I^n \to \mathrm{LinCat}_k$。

(2) k-线性范畴 n-立方体的 ∞-范畴定义为

$$\mathrm{Cube}_n(\mathrm{LinCat}_k) \coloneqq \mathrm{Fun}(I^n, \mathrm{LinCat}_k)\,.$$

可对偶化 k-线性范畴 n-立方体的 ∞-范畴类似地定义为

$$\mathrm{Cube}_n(\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}}) \coloneqq \mathrm{Fun}(I^n, \mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}})\,.$$

注 2.2. 存在一个 ∞-范畴之间的典范等价

$$\mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathrm{Cube}_n(\mathrm{LinCat}_k)) \simeq \mathrm{Cube}_{n+1}(\mathrm{LinCat}_k)\,.$$

这个等价相当于将 n-立方体 $\mathcal{C}_* \to \mathcal{D}_*$ 之间的态射识别为一个 $(n+1)$-立方体$\mathcal{E}_*$，其具有 $\mathcal{E}_{0,\ *} = \mathcal{C}_*$ 和 $\mathcal{E}_{1,\ *} = D_*$。我们还将使用记号

$$\mathcal{E}_* = [\mathcal{C}_* \to \mathcal{D}_*] .$$

定义 2.3. 令 $\mathcal{C}_* \in \mathrm{Cube}_n(\mathrm{LinCat}_k)$。

1. 对于 $1 \le i \le n$，我们记

$$\mathcal{C}_{\partial_i^0 *} \in \mathrm{Cube}_{n-1}(\mathrm{LinCat}_k)$$

$\mathcal{C}_*$ 到 $I^{i-1} \times \{0\} \times I^{n-i-1} \subset I^n$ 的限制。类似地，我们记

$$\mathcal{C}_{\partial_i^1 *} \in \mathrm{Cube}_{n-1}(\mathrm{LinCat}_k)$$

到 $I^{i-1} \times \{1\} \times I^{n-i-1} \subset I^n$ 的限制。

2. 重复限制记作

$$\mathcal{C}_{\partial_{i_1}^{\epsilon_1} \dots \partial_{i_j}^{\epsilon_j} *} \in \mathrm{Cube}_{n-j}(\mathrm{LinCat}_k)$$

对于任意 $1 \le i_1 < \cdots < i_j \le n$ 以及 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_j \in \{0, 1\}$。

我们用 $\mathrm{cof} : \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathrm{LinCat}_k) \to \mathrm{LinCat}_k$ 表示（范畴的）余纤维函子，它将一个k-线性函子 F: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 映到 LinCat_k 中沿 0 的推出:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{B} \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{cof}(F) \end{array}$$

定义 2.4. 我们用 cof_i: $\mathrm{Cube}_n(\mathrm{LinCat}_k) \to \mathrm{Cube}_{n-1}(\mathrm{LinCat}_k)$ 表示第 i 个坐标方向上的余纤维函子，定义为复合函子

$$\begin{aligned} \mathrm{Cube}_n(\mathrm{LinCat}_k) &= \mathrm{Fun}(I^{k-1} \times I \times I^{n-k}, \mathrm{LinCat}_k) \\ &\simeq \mathrm{Fun}(I^{k-1} \times I^{n-k}, \mathrm{Fun}(I, \mathrm{LinCat}_k)) \\ &\xrightarrow{\mathrm{Fun}(I^{k-1} \times I^{n-k}, \mathrm{cof})} \mathrm{Fun}(I^{k-1} \times I^{n-k}, \mathrm{LinCat}_k) \\ &\simeq \mathrm{Cube}_{n-1}(\mathrm{LinCat}_k) . \end{aligned}$$

2.2 立方 Calabi–Yau 结构

给定一个 k-线性 ∞-范畴 $\mathcal{C} \in \mathrm{LinCat}_k$，我们用 $\mathrm{HH}(\mathcal{C}) \in \mathrm{Mod}_k$ 表示 $\mathcal{C}$的 k-线性 Hochschild 同调。它可以通过迹的形式体系来定义，参见 [HSS17]，以及 [Chr23 第 2.6] 节中使用与本文相同记号的讨论。Hochschild 同调 $\mathrm{HH}(\mathcal{C})$ 带有一个 S^1-作用，其不动点（在 BS^1 上的极限）记为 $\mathrm{HH}^{S^1}(\mathcal{C})$，并称为 $\mathcal{C}$ 的（k-线性）负循环同调。Hochschild 同调与负循环同调构成函子 $\mathrm{HH}(-)$、$\mathrm{HH}^{S^1}(-) : \mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}} \to \mathrm{Mod}_k$，并带有一个自然变换 $\mathrm{HH}^{S^1}(-) \to \mathrm{HH}(-)$。

回顾一下，若一个 k-线性、可对偶化的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 具有光滑性，是指求值函子 $\mathrm{ev}_{\mathcal{C}}$: $\mathcal{C}^\vee \otimes \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}_k$ 存在一个保持余极限的左伴随。在这种情况下，左伴随 $\mathrm{ev}_{\mathcal{C}}^L$可视为 $\mathcal{C}$上的一个 k-线性自函子，记作 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}^!$，并称为逆对偶化双模。注意，$\mathrm{HH}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Mor}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}}^!, \mathrm{id}_{\mathcal{C}})$描述了 $\mathcal{C}$的 k-线性函子范畴中 k-线性∞自函子的态射对象。

定义 2.5 ([BD19] 关于 dg 范畴，[Chr23] 关于线性 ∞-范畴)。设 F: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个可对偶化的 k-线性函子，介于光滑的 k-线性 ∞-范畴之间。一个相对[1] 左 n-卡拉比–丘结构在 F 由一个类构成

$$R[n] \longrightarrow \mathrm{cof}(\mathrm{HH}^{S^1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\mathrm{HH}^{S^1}(F)} \mathrm{HH}^{S^1}(\mathcal{D}))$$

[1]函子上的卡拉比–丘结构中，“相对”这一修饰词其实是多余的。不过，我们始终会保留它，以便将相对卡拉比–丘结构与立方卡拉比–丘结构区分开来。

使得在 k-线性自函子的相应图表中（$\mathcal{C}$ 参见 [BD19，Chr23]）

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{id}^!_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\mathrm{cu}^!} & F_!(\mathrm{id}^!_{\mathcal{C}}) & \longrightarrow & \mathrm{cof} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{fib} & \longrightarrow & F_!(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})[1-n] & \xrightarrow{\mathrm{cu}} & \mathrm{id}_{\mathcal{D}}[1-n] \end{array}$$

水平边上的纤维与余纤维序列中，垂直态射都是等价。

为了定义立方卡拉比–丘结构，我们考察范畴立方体的总 Hochschild 同调。回忆一下，取总余纤维定义了一个函子 $(\text{-})^{\mathrm{tot}}$: 函子范畴$(I^n, \text{模}_k) \to \text{模}_k$，例如参见 [DJW19，附录 A。2]。函子 $(\text{-})^{\mathrm{tot}}$ 可以由沿 n 中各个方向的迭代余纤维函子复合而得，I^n顺序任意。

定义 2.6。总 k-线性负循环同调函子

$$\mathrm{HH}^{S^1,\mathrm{tot}}(\text{-})\colon \mathrm{Cube}_n(\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}}) \longrightarrow \mathrm{Mod}_k$$

定义为函子范畴$(I^n,\ \mathrm{HH}^{S^1}(\text{-}))$ 与 $(\text{-})^{\mathrm{tot}}$: 函子范畴$(I^n,\ \text{模}_k) \to \text{模}_k$ 的复合。

我们类似地定义函子 $\mathrm{HH}^{\mathrm{tot}}(\text{-})\colon \mathrm{Cube}_n(\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}}) \longrightarrow \text{模}_k$。

一个总负循环同调类 $R[m] \to \mathrm{HH}^{\mathrm{tot}}(\mathcal{C}_*)$ 给出以下数据[2]:

- 函子的相对负循环同调类 $R[m] \to \mathrm{cof}(\mathrm{HH}(\mathrm{colim}_{I^n\setminus(\{1\}^{\times n})}\mathcal{C}_*) \to \mathrm{HH}(\mathcal{C}_{1,\ \ldots,\ 1}))\ \mathrm{colim}_{I^n\setminus(\{1\}^{\times n})}\mathcal{C}_* \to \mathcal{C}_{1,\ \ldots,\ 1}$。
- 对每个 $1 \le i \le n$，边界立方体的总相对负循环同调类 $R[m-1] \to \mathrm{HH}_{\mathrm{tot}}(C_{\partial^0_i *})$。

立方左卡拉比–丘结构的概念递归地由函子上的相对卡拉比–丘结构概念得到，如下所示:

定义 2.7 ([CDW23]). 设 $\mathcal{C}_* \in \mathrm{Cube}_n(\mathrm{LinCat}_k)$。对于任意 $m \in \mathbb{Z}$，$\mathcal{C}$ 上的立方 m-卡拉比–丘结构由一个类 $R[m] \to \mathrm{HH}^{S^1,\ \mathrm{tot}}(\mathcal{C}_*)$ 构成，并满足

(1) 相对负循环同调类 $R[m] \to \mathrm{cof}(\mathrm{HH}(\mathrm{colim}_{I^n\setminus\{1\}^{\times n}}\mathcal{C}_*) \to \mathrm{HH}(\mathcal{C}_{1,\ \ldots,\ 1}))$ 在函子上定义一个相对左 m-卡拉比–丘结构

$$\mathrm{colim}_{I^n\setminus\{1\}^{\times n}}\mathcal{C}_* \to \mathcal{C}_{1,\ldots,1}\,.$$

（2）对于每个 $1 \le i \le n$，类 $R[m-1] \to \mathrm{HH}^{\mathrm{tot}}(C_{\partial^0_i *})$ 在 $C_{\partial^0_i *}$ 上定义了一个立方（$m-1$）卡拉比–丘结构。

展开定义可知，在一个范畴n-立方体 $\mathcal{C}_*$ 上，立方左 m-卡拉比–丘结构相当于在函子上给出相容的左卡拉比–丘结构

$$\mathrm{colim}_{(I^n)_{/\mathbf{i}}\setminus\{\mathbf{i}\}}\mathcal{C}_* \to \mathcal{C}_{\mathbf{i}}$$

对于所有 $\mathbf{i} \in I^n$，其中（I^n）$_{/\mathbf{i}}\setminus\{\mathbf{i}\}$ 描述了 $\mathbf{i}$ 上方的立方体（维数小于或等于 n），并移除了底部顶点 $\mathbf{i}$。

例 2.8。令 $\mathcal{C}_* \in \mathrm{Cube}_2(\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}})$。我们可以如下描绘 $\mathcal{C}_*$：

$$\mathcal{C}_* = \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{0,0} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}_{0,1} \\ {\scriptstyle F'}\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}_{1,0} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{1,1} \end{array}$$

The 余极限 $\mathrm{colim}_{I^2\setminus\{1\}^{\times 2}}\mathcal{C}_*$ 相当于上方跨度的推出 $\mathcal{C}_{0,\ 1} \amalg_{\mathcal{C}_{0,\ 0}} \mathcal{C}_{1,\ 0}$，以及 com es with 一个函子

$$F''\colon \mathcal{C}_{0,1} \amalg_{\mathcal{C}_{0,0}} \mathcal{C}_{1,0} \to \mathcal{C}_{1,1}\,.$$

在 $\mathcal{C}_*$ 上的立方 m-卡拉比–丘结构由一个总负循环同调类$R[m] \to \mathrm{HH}^{S^1,\ \mathrm{tot}}(\mathcal{C}_*)$ 构成，该同调类诱导出

[2]事实上，也可以从这些数据中恢复总负循环同调类。

- 一个左 $(m-2)$-卡拉比–丘结构于 $\mathcal{C}_{0,\ 0}$。
- 相对左 $(m-1)$-卡拉比–丘结构于 $F\colon \mathcal{C}_{0,\ 0} \to \mathcal{C}_{0,\ 1}$ 以及 $F\prime\colon \mathcal{C}_{0,\ 0} \to \mathcal{C}_{1,\ 0}$。它们粘合成 $\mathcal{C}_{0,\ 1} \amalg_{\mathcal{C}_{0,\ 0}} \mathcal{C}_{1,\ 0}$上的左 $(m-1)$-卡拉比–丘结构。
$F\prime\prime\colon \mathcal{C}_{0,\ 1} \amalg_{\mathcal{C}_{0,\ 0}} \mathcal{C}_{1,\ 0} \to \mathcal{C}_{1,\ 1}$上的一个相对左 m-卡拉比–丘结构。

下面给出双立方体的立方卡拉比–丘结构的一种便捷刻画：

命题 2.9。 设 $(\mathcal{C}_{*_1})_{*_2} \in$ 函子范畴$(I^{n_2}$,立方体$_{n_1}(\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}}))$ $\simeq$ 立方体$_{n_1+n_2}(\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}})$ 是一个(n_1+n_2)-立方体，其中 $*_1 \in I^{n_1}$ 且 $*_2 \in I^{n_2}$。考虑一个总负循环同调类η： $R[m] \to \mathrm{HH}^{S^1,\ \mathrm{tot}}((\mathcal{C}_{*_1})_{*_2})$。若

1) 类 η 在 (n_1+1)-立方体上诱导出一个立方左 m-卡拉比–丘结构

$$\left[\mathrm{colim}_{I^{\times n_2}\setminus\{1\}^{\times n_2}}(\mathcal{C}_{*_1})_{*_2} \to (\mathcal{C}_{*_1})_{1,\dots,1}\right]$$

2) 并且，对于所有 $1 \le i \le n_2$， η 在 k 面 (n_1+n_2-1)-立方体$(\mathcal{C}_{*_1})^{\partial^0_i *_2}$ 上限制为一个立方左 $(m-1)$-卡拉比–丘结构，

那么 η 在$(\mathcal{C}_{*_1})_{*_2}$上定义了一个立方左 m-卡拉比–丘结构。

证明。 总负循环同调类 η 对于 $(\mathcal{C}_{*_1})_{*_2}$ 在立方体 2.7 的所有指标处满足定义 $(\mathcal{C}_{\mathbf{i}})_{\mathbf{j}}$ 中条件 1）（递归出现）$\mathbf{i} \in I^{n_1}$ 任意且$\mathbf{j} \in I^{n_2}\setminus\{1,\dots,1\}^{\times n_2}$当且仅当它满足命题 2.9中的递归条件 2）。

以下我们假设这些等价条件成立，并证明：如果范畴（n_1+1）立方体所诱导的总负循环同调类

$$\mathcal{E}_* := \left[\mathrm{colim}_{I^{\times n_2}\setminus\{1\}^{\times n_2}}(\mathcal{C}_{*_1})_{*_2} \to (\mathcal{C}_{*_1})_{1,\dots,1}\right]$$

定义了立方左 m-卡拉比–丘结构，那么类 η 在形如（$\mathcal{C}_{\mathbf{i}}$）$_{1,\dots,1}$, $\mathbf{i} \in I^{n_1}$ 的指标处满足立方左卡拉比–丘结构的递归定义。为此，我们证明，由（n_1+1）阶前面 $\mathcal{E}_{\partial^1_{n_1+1}*}$ 导出的非退化条件，与 η 在条目（ $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}$ ）$_{1,\dots,1}$ 处的其余非退化条件相一致，其中 $\mathbf{i}\in I^{n_1}$；证明方法是说明相关函子等价。

我们固定 $\mathcal{E}_*$ 的一个前面指标（$\mathbf{i}$,1）。我们有

$$I^{n_1+1}_{/(\mathbf{i},1)}\setminus\{(\mathbf{i},1)\} \simeq (I^{n_1}_{/\mathbf{i}} \times \{0\}) \amalg_{(I^{n_1}_{/\mathbf{i}}\setminus\{\mathbf{i}\})\times\{0\}} (I^{n_1}_{/\mathbf{i}}\setminus\mathbf{i} \times I) \tag{2}$$

and

$$(I^{n_1}_{/\mathbf{i}} \times I^{n_2})\setminus\{(\mathbf{i},(1,\dots,1))\} \simeq \left(I^{n_1}_{/\mathbf{i}} \times (I^{n_2}\setminus\{1\}^{\times n_2})\right) \amalg_{(I^{n_1}_{/\mathbf{i}}\setminus\{\mathbf{i}\})\times(I^{n_2}\setminus\{1\}^{\times n_2})} \left((I^{n_1}_{/\mathbf{i}}\setminus\{\mathbf{i}\}) \times I^{n_2}\right). \tag{3}$$

利用 [Lur24,标签 03DB] 以及（2），可得

$$\begin{aligned}\mathrm{colim}_{I^{n_1+1}_{/(\mathbf{i},1)}\setminus(\mathbf{i},1)} \mathcal{E}_* &\simeq \mathcal{E}_{(\mathbf{i},0)} \amalg_{\mathrm{colim}_{I^{n_1}_{/\mathbf{i}}\setminus\mathbf{i}} \mathcal{E}_{(*_1,0)}} \mathrm{colim}_{I^{n_1}_{/\mathbf{i}}\setminus\mathbf{i}} \mathcal{E}_{(*_1,1)} \\ &\simeq \mathrm{colim}_{I^{n_2}\setminus\{1\}^{\times n_2}}(\mathcal{C}_{\mathbf{i}})_{*_2} \amalg_{\mathrm{colim}_{I^{n_1}_{/\mathbf{i}}\setminus\mathbf{i}} \mathrm{colim}_{I^{n_2}\setminus\{1\}^{\times n_2}}(\mathcal{C}_{*_1})_{*_2}} \mathrm{colim}_{I^{n_1}_{/\mathbf{i}}\setminus\{\mathbf{i}\}}(\mathcal{C}_{*_1})_{1,\dots,1}.\end{aligned}$$

类似地，利用（3），可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{colim}_{(I^{n_1}_{/\mathbf{i}}\times I^{n_2})\setminus\{(\mathbf{i},(1,\dots,1))\}}(\mathcal{C}_{*_1})_{*_2} \\ &\simeq \mathrm{colim}_{I^{n_1}_{/\mathbf{i}}\times(I^{n_2}\setminus\{1\}^{\times n_2})}(\mathcal{C}_{*_1})_{*_2} \amalg_{\mathrm{colim}_{I^{n_1}_{/\mathbf{i}}\setminus\{\mathbf{i}\})\times I^{n_2}\setminus\{1\}^{\times n_2}}(\mathcal{C}_{*_1})_{*_2}} \mathrm{colim}_{I^{n_1}_{/\mathbf{i}}\setminus\{\mathbf{i}\}\times I^{n_2}}(\mathcal{C}_{*_1})_{*_2}.\end{aligned}$$

注意，

$$\mathrm{colim}_{I^{n_2}\setminus\{1\}^{\times n_2}}(\mathcal{C}_{\mathbf{i}})_{*_2} \simeq \mathrm{colim}_{I^{n_1}_{/\mathbf{i}}\times(I^{n_2}\setminus\{1\}^{\times n_2})}(\mathcal{C}_{*_1})_{*_2}$$

and

$$\mathrm{colim}_{I^{n_1}_{/\mathbf{i}}\setminus\{\mathbf{i}\}}(\mathcal{C}_{*_1})_{1,\dots,1} \simeq \mathrm{colim}_{I^{n_1}_{/\mathbf{i}}\setminus\{\mathbf{i}\}\times I^{n_2}}(\mathcal{C}_{*_1})_{*_2}$$

由余终性可知。因此我们得到

$$\mathrm{colim}_{I^{n_1+1}_{/(\mathbf{i},1)}\setminus(\mathbf{i},1)}\mathcal{E}_* \simeq \mathrm{colim}_{(I^{n_1}_{/\mathbf{i}}\times I^{n_2})\setminus\{(\mathbf{i},(1,\dots,1))\}}(\mathcal{C}_{*_1})_{*_2} \simeq \mathrm{colim}_{(I^{n_1}\times I^{n_2})/\{(\mathbf{i},1,\dots,1)\}\setminus\{(\mathbf{i},(1,\dots,1))\}}(\mathcal{C}_{*_1})_{*_2}$$

这意味着到 $(\mathcal{C}_{\mathbf{i}})_{1,\dots,1} \simeq \mathcal{E}_{(\mathbf{i},1)}$ 的诱导函子也等价。 □

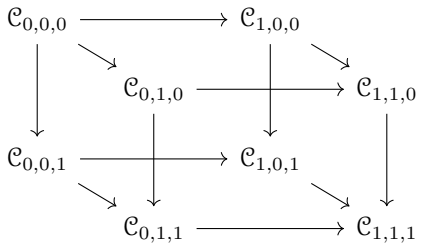
注2.10。 命题 2.9 中的逆向蕴含也可以证明成立。

例 2.11。 (1) 在 $n_2 = 1$ 命题 2.9 的情形下，我们有

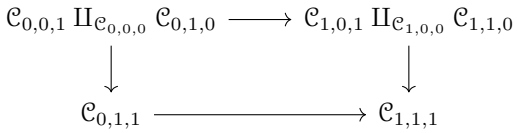
$$(\mathcal{C}_{*_1})_{*_2} \simeq \left[\mathrm{colim}_{I\setminus\{1\}}(\mathcal{C}_{*_1})_{*_2} \to (\mathcal{C}_{*_1})_1\right] .$$

因此，命题 2.9 显然成立。

(2) 假设 $n_1 = 1$ 和 $n_2 = 2$。我们可以将 $(\mathcal{C}_{*_1})_{*_2}$ 描述如下：



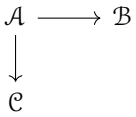
条件 1) 表明，方形



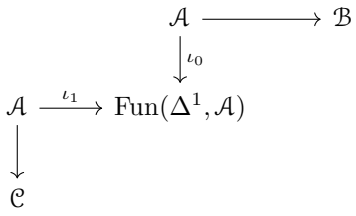
继承了立方左 n-卡拉比–丘结构。条件 2) 表明，顶面和背面继承了立方左 $(n-1)$-卡拉比–丘结构。综合这些条件可知，类 η 在 $(\mathcal{C}_{*_1})_{*_2}$ 上定义了一个立方 n-卡拉比–丘结构。

2.3 宽松粘合

定义2.12。给定一个跨度



→在 LinCat_k 中，有向推出 $\mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\amalg} \mathcal{C}$ 定义为该图表的余极限



(4)

其中 ι_0: $\mathcal{A} \to$函子范畴$(\Delta^1, \mathcal{A})$ $X \mapsto (X \to 0)$与 ι_1: $\mathcal{A} \to$函子范畴$(\Delta^1, \mathcal{A})$ $X \mapsto (0 \to X)[1]$ 是显然的
全忠实函子。

有向推出也可以从更概念化的角度解释为部分 lax $(\infty, 2)$- 范畴余极限，例如参见 [CDW23、AHM26]。由于函子 $\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}} \to \mathrm{LinCat}_k$ 保留余极限，$\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}}$中一个跨度的有向推出仍然是可对偶化的。

构造 2.13。 取有向推出定义了一个函子

$$(\text{-}) \underset{(\text{-})}{\overrightarrow{\amalg}} (\text{-}) \colon \text{函子范畴}(\Lambda^2_0, \mathsf{LinCat}_k) \to \mathsf{LinCat}_k ,$$

我们将在下文构造该函子。

下面，我们构造一个函子

$$\iota_{0,1}(\text{-}) \colon \mathrm{LinCat}_k \to \mathrm{Fun}(\Lambda^2_2, \mathrm{LinCat}_k)$$

将一个 k-线性 ∞-范畴 $\mathcal{A} \in \mathbf{LinCat}_k$ 映射到以下图表。

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{A} \\ & & \downarrow{\scriptstyle \iota_1} \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\iota_0} & \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{A}) \end{array}$$

→我们将 (-) $\underset{(-)}{\amalg}$(-) 定义为以下复合函子

$$\begin{aligned} \mathrm{Fun}(\Lambda^2_0, \mathrm{LinCat}_k) &\simeq \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathrm{LinCat}_k) \times_{\mathrm{LinCat}_k} \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathrm{LinCat}_k) \\ &\simeq \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathrm{LinCat}_k) \times_{\mathrm{LinCat}_k} \mathrm{LinCat}_k \times_{\mathrm{LinCat}_k} \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathrm{LinCat}_k) \\ &\to \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathrm{LinCat}_k) \times_{\mathrm{LinCat}_k} \mathrm{Fun}(\Lambda^2_2, \mathrm{LinCat}_k) \times_{\mathrm{LinCat}_k} \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathrm{LinCat}_k) \\ &\simeq \mathrm{Fun}(\Delta^1 \amalg_{\Delta^0} \Lambda^2_2 \amalg_{\Delta^0} \Delta^1, \mathrm{LinCat}_k) \\ &\xrightarrow{\mathrm{colim}} \mathrm{LinCat}_k \ . \end{aligned}$$

上面的第二个态 p射是 g由 b 给y composing 定，并带有 $\iota_{0,1}$ 位于中心的 LinCat $_k$.

对于 $i = 0,\ 1,$ 令 $f_i\colon \Delta^0 \to \Delta^1$ be i的包含映射。沿 f_i 拉回定义了一个函子

$$\mathrm{LinCat}_k \to \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathrm{LinCat}_k)$$

将一个 k-线性稳定 ∞-范畴 $\mathcal{A}$ 映射到 $\mathrm{Fun}(\Delta^1,\ \mathcal{A}) \xrightarrow{\iota_i^*} \mathcal{A}$。沿 $\Delta^1 \to \Lambda^2_2$作右 Kan 延拓，将 $0 \to 1$ 映射到 $1 \to 2$，并沿 $\Lambda^2_2 \to \Delta^1 \times \Delta^1$作左 Kan 延拓，定义了一个函子

$$\mathrm{LinCat}_k \to \mathrm{Fun}(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathrm{LinCat}_k)$$

将一个 k-线性稳定 ∞-范畴 $\mathcal{A}$ 映射到拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\iota_j} & \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{A}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_i^*} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} \end{array}$$

其中，若 $i = 2$，则 $j = 1$；若 $i = 1$，则 $j = 2$。将上述方块中的上方态射加以限制，定义了函子 $\mathrm{LinCat}_k \to \mathrm{Fun}(\Delta^1,\ \mathrm{LinCat}_k)$，它们组合为所需的函子 $\iota_{0,\ 1}$(-)。

定义 2.14。 给定 $\mathrm{Cube}_n(\mathrm{LinCat}_k)$ 中如下形式的一个图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_* & \longrightarrow & \mathcal{B}_* \\ \downarrow & & \\ \mathcal{C}_* & & \end{array}$$

我们记作

$$\mathcal{B}_* \underset{\mathcal{A}_*}{\overrightarrow{\amalg}} \mathcal{C}_* \in \mathrm{Cube}_n(\mathrm{LinCat}_k)$$

→逐分量有向推出。因此，$\mathcal{B}_* \underset{\mathcal{A}_*}{\amalg} \mathcal{C}_*$ 对所有 $\mathbf{i} \in I^n$均满足

$$\left(\mathcal{B}_* \underset{\mathcal{A}_*}{\overrightarrow{\amalg}} \mathcal{C}_*\right)_{\mathbf{i}} \simeq \mathcal{B}_{\mathbf{i}} \underset{\mathcal{A}_{\mathbf{i}}}{\overrightarrow{\amalg}} \mathcal{C}_{\mathbf{i}}\,.$$

注 2.15。

(1) 考虑定义 2.12中的情形。复合全忠实函子

$$\iota\colon \mathcal{A} \to \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathcal{A}), \quad X \mapsto (X \xrightarrow{\mathrm{id}} X)$$

→余极限图中的函子 $\mathrm{Fun}(\Delta^1,\ \mathcal{A}) \to \mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\amalg} \mathcal{C}$ 定义了一个函子

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\overrightarrow{\amalg}} \mathcal{C}\,.$$

这个函子具有这样的性质：非宽松推出 $\mathcal{B} \amalg_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$ 等价于其余纤维，也就是说，下面的图在 $\mathbf{LinCat}_k$ 中是一个推出方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\overrightarrow{\amalg}} \mathcal{C} \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B} \amalg_{\mathcal{A}} \mathcal{C} \end{array}$$

(2) 在定义 2.14 的设定中，同样存在一个范畴 n-立方体的态射 $\mathcal{A}_* \to\!\!\to \mathcal{B}_* \underset{\mathcal{A}_*}{\amalg} \mathcal{C}_*$ 以及一个位于 $\mathrm{Cube}_n(\mathrm{LinCat}_k)$ 中的余纤维序列 如下：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_* & \longrightarrow & \mathcal{B}_* \underset{\mathcal{A}_*}{\overrightarrow{\amalg}} \mathcal{C}_* \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}_* \amalg_{\mathcal{A}_*} \mathcal{C}_* \end{array}$$

其中 $\mathcal{B}_* \amalg_{\mathcal{A}_*} \mathcal{C}_*$ 是（非松弛的）推出 n-立方体。

命题 2.16 ([CDW23])。 考虑 $\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}}$ 中如下形式的图表

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \mathcal{A} \\ & & & & \downarrow \\ & & \mathcal{A}' & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ & & \downarrow{\scriptstyle \iota_0} & & \\ \mathcal{A}'' & \xrightarrow{\iota_1} & \mathcal{C} & & \end{array}$$

并假设函子 $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \to \mathcal{B}$ 和 $\mathcal{A}' \times \mathcal{A}'' \to \mathcal{C}$ 配备了相对左 m-卡拉比–丘结构，且它们在 $\mathcal{A}'$ 处兼容。那么函子

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \times \mathcal{A}'' \to \mathcal{B} \underset{\mathcal{A}'}{\overrightarrow{\amalg}} \mathcal{C}$$

继承一个典范的相对左 n-卡拉比–丘结构。

上述命题的立方推广如下：

命题 2.17. 考虑 $\mathrm{Cube}_n(\mathrm{LinCat}_k)$ 中的如下图表

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \mathcal{A}_* \\ & & & & \downarrow \\ & & \mathcal{A}'_* & \longrightarrow & \mathcal{B}_* \\ & & \downarrow & & \\ \mathcal{A}''_* & \longrightarrow & \mathcal{C}_* & & \end{array}$$

使得 $(n+1)$-立方体 $[\mathcal{A}_* \times \mathcal{A}'_* \to \mathcal{B}_*]$ 和 $[\mathcal{A}'_* \times \mathcal{A}''_* \to \mathcal{C}_*]$ 带有立方的 m-卡拉比–丘结构，并且在 $\mathcal{A}'_*$ 处相容。那么，$(n+1)$-立方体

$$\left[\mathcal{A}_* \times \mathcal{A}'_* \times \mathcal{A}''_* \to \mathcal{B}_* \underset{\mathcal{A}'_*}{\overrightarrow{\amalg}} \mathcal{C}_*\right]$$

继承一个典范的立方左 m-卡拉比–丘结构。

特别地，若 $\mathcal{A}_* \simeq \mathcal{A}''_* \simeq 0$，则范畴 $(n+1)$-立方体

$$\left[\mathcal{A}'_* \to \mathcal{B}_* \underset{\mathcal{A}'_*}{\overrightarrow{\amalg}} \mathcal{C}_*\right]$$

源自范畴 n-立方体的态射（见注 2.15 ）继承了一个典范的立方左 m-卡拉比–丘结构。

证明。 证明用到了 [CDW23] 关于范畴链复形、范畴立方体的全化以及它们的相对卡拉比–丘结构之间相互作用的结果。关于范畴链复形的背景知识，请参阅[CDW23] 。下文也会引用 [CDW23] 中的相关部分。

考虑由范畴 n-立方体的正方形描述的范畴（$n+2$）-立方体 $\mathcal{E}_*$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_* \times \mathcal{A}'_* \times \mathcal{A}''_* & \longrightarrow & \mathcal{C}_* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}_* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中函子 $\mathcal{A}''_* \to \mathcal{B}_*$ 和 $\mathcal{A}_* \to \mathcal{C}_*$ 是平凡的。我们选择$\mathcal{E}_*$ 的坐标 $n+1$、$n+2$，使其对应于上图所示的 n-立方体的态射。给定的立方左 m-卡拉比– 丘结构确定了 $\mathcal{E}_*$上的一个立方左（$m+1$）-卡拉比–丘结构。令 $\mathrm{tot}^{\amalg}(\mathcal{E}_*)$ 表示按 [CDW23，定义 4.4.2] 的意义对 $\mathcal{E}_*$ 作余积全化。这是按 [CDW23，定义 2.2.5] 的意义定义的范畴链复形，其集中于同调次数 $m+3$，……，1。根据 [CDW23，定理 6.4.6]，，全化 $\mathrm{tot}^{\amalg}(\mathcal{E}_*)$ 继承了按 [CDW23，定义 6.2.2] 的意义定义的左（$m+1$）-卡拉比–丘结构。将 $\mathrm{tot}^{\amalg}(\mathcal{E}_*)$ 下移一个次数，我们得到范畴链复形 $\mathrm{tot}^{\amalg}(\mathcal{E}_*)[-1]$（集中于次数 $m+2$，……，0），并带有左 m-卡拉比–丘结构。

考虑范畴$(n+1)$-立方体 $\mathcal{D}_* = \left[\mathcal{A}_* \times \mathcal{A}'_* \times \mathcal{A}''_* \to \mathcal{B}_* \underset{\mathcal{A}'_*}{\overset{\to}{\amalg}} \mathcal{C}_*\right]$，其中 n-立方体的态射定义了第$(n+1)$个坐标。采用 [CDW23，构造 4.4 中的记号。1], 显然可得

$$\mathrm{tot}^{\amalg}_{n+1,n+2}(\mathcal{E}_*)[-1] \simeq \mathcal{D}_*\,,$$

其中，左侧的 $(n+1)$-立方体在第 $(n+1)$ 个坐标上向下平移一个次数。由此可得 $\mathrm{tot}^{\amalg}(E_*)[-1] \simeq \mathrm{tot}^{\amalg}(\mathcal{D}_*)$，因此 $\mathrm{tot}^{\amalg}(\mathcal{D}_*)$ 继承了左侧 $(n+1)$-卡拉比–丘结构。根据 [CDW23，注 6.4。13], 这便确定了$\mathcal{D}_*$上的所需立方左 $(n+1)$-卡拉比–丘结构。 □

引理 2.18.

→*(1)* 函子 $(\text{-}) \underset{(\text{-})}{\amalg} (\text{-})$: 函子范畴$(\Lambda^2_0, \mathrm{LinCat}_k) \to \mathrm{LinCat}_k$ 保留余极限，因此特别保留余纤维。

→*(2)* 函子 $(\text{-}) \underset{(\text{-})}{\amalg} (\text{-})$: 函子范畴$(\Lambda^2_0, \mathrm{Cube}_n(\mathrm{LinCat}_k)) \to \mathrm{Cube}_n(\mathrm{LinCat}_k)$ 保留余极限，因此特别保留余纤维。

证明。 （2）由（1）得出，利用等价

$$\mathrm{Fun}(\Lambda^2_0, \mathrm{Cube}_n(\mathrm{LinCat}_k)) \simeq \mathrm{Fun}(I^n, \mathrm{Fun}(\Lambda^2_0, \mathrm{LinCat}_k))$$

以及函子范畴中的余极限是逐点计算的 [Lur24,Tag02X9]。

证明（1）只需注意到，将一个跨度映射为

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ \downarrow & & \\ \mathcal{C} & & \end{array}$$

图表（4）的函子保留余极限，这可通过检查其构造得出。 □

我们指出，在更一般的情形下， [AHM26，定理 5.65] 也证明了，转到（部分）宽松余极限锥是一个左伴随，因此保留余极限。

2.4 非松弛粘合

本节将从命题2.17 推导出立方 Calabi–Yau 结构的非松弛粘合结果。

引理 2.19。 考虑 $\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}}$ 中的一个范畴2立方体

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \end{array}$$

配备了立方左 m-卡拉比–丘结构。于是所诱导的函子

$$\mathcal{C}/\mathcal{A} \to \mathcal{D}/\mathcal{B}$$

继承一个典范的相对左 m-*Calabi–Yau* 结构。

证明。 将函子 $\mathcal{C} \amalg_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ 记为 F，并将函子 $\mathcal{C}/\mathcal{A} \to \mathcal{D}/\mathcal{B}$ 记为 F'。我们首先注意到 $(\mathcal{C} \amalg_{\mathcal{A}} \mathcal{B})/\mathcal{B} \simeq \mathcal{C}/\mathcal{A}$。由 [Chr23，引理 2.33.(1)], 这些函子

$$\left((\mathcal{C} \amalg_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \to (\mathcal{C} \amalg_{\mathcal{A}} \mathcal{B})/\mathcal{B} \simeq \mathcal{C}/\mathcal{A}\right)_!, \qquad \left(\mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{B}\right)_!$$

将逆对偶化双模 $\mathrm{id}^!_{\mathcal{C}\amalg_{\mathcal{A}}\mathcal{B}}$，$\mathrm{id}^!_{\mathcal{D}}$ 映到逆对偶化双模 $\mathrm{id}^!_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}$，$\mathrm{id}^!_{\mathcal{D}/\mathcal{B}^\circ}$ 描述 F 的相对 Calabi–Yau 结构的、 $\mathcal{D}$ 的 k-线性自函子的纤维与余纤维序列

$$\mathrm{id}^!_{\mathcal{D}} \to F_!(\mathrm{id}^!_{\mathcal{C}\amalg_{\mathcal{A}}\mathcal{B}}) \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}[1-m]$$

从而被正合函子 $(\mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{B})_!$ 映成自函子的纤维与余纤维序列

$$\mathrm{id}^!_{\mathcal{D}/\mathcal{B}} \to F'_!(\mathrm{id}^!_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}) \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}[1-m]$$

从而表明 F' 的诱导霍赫希尔德同调类的非退化性。 □

引理 2.20。

(1) 设 $\mathcal{C}_* \in \mathrm{Cube}_n(\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}})$ 是一个带有立方左 m-卡拉比–丘结构的范畴 n-立方体。那么，$\mathrm{colim}_{I^n\backslash\{1,\dots,1\}}\ \mathcal{C}_* \in \mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}}$继承一个典范的左 $(m-1)$-卡拉比–丘结构。*(2)* 设 $[\mathcal{A}_* \to \mathcal{B}_*] \in \mathrm{Cube}_{n+1}(\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}})$ 是一个带有左 m-卡拉比–丘结构的范畴 $(n+1)$-立方体。那么，函子

$$\mathrm{colim}_{I^n\backslash\{1,\dots,1\}} \mathcal{A}_* \to \mathrm{colim}_{I^n\backslash\{1,\dots,1\}} \mathcal{B}_* \tag{5}$$

继承一个典范的左 $(m-1)$-卡拉比–丘结构。

证明。我们先证明第 (1) 部分。 k-线性 ∞-范畴 $\mathrm{colim}_{I^n\backslash\{1,\dots,1\}}\ \mathcal{C}_*$ 是余积全化 $\mathrm{tot}^{\amalg}(\mathcal{C}_*)$ 的微分 $\mathrm{tot}^{\amalg}(\mathcal{C}_*)_2 \to \mathrm{tot}^{\amalg}(\mathcal{C}_*)_1$ 的余纤维，这由 [CDW23, 引理 6.4.9.(2)], 得出，因此继承一个左 $(m-1)$-卡拉比–丘结构（依据 [CDW23, 定义 6.2.2]，以及卡拉比–丘函子的余纤维是卡拉比–丘范畴这一事实）。

（2）由类似的论证可得：我们转到余积全化，得到如下交换图表，其中竖直方向是 $\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}}$ 中的余纤维序列：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{tot}^{\amalg}(\mathcal{A}_*)_2/\,\mathrm{tot}^{\amalg}(\mathcal{A}_*)_3 & \longrightarrow & \mathrm{tot}^{\amalg}(\mathcal{B}_*)_2/\,\mathrm{tot}^{\amalg}(\mathcal{B}_*)_3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{tot}^{\amalg}(\mathcal{A}_*)_1 & \longrightarrow & \mathrm{tot}^{\amalg}(\mathcal{B}_*)_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{colim}_{I^n\backslash\{1,\dots,1\}}\ \mathcal{A}_* & \longrightarrow & \mathrm{colim}_{I^n\backslash\{1,\dots,1\}}\ \mathcal{B}_* \end{array}$$

上方的方块是左 $(m-1)$-卡拉比–丘，这可由 [CDW23，定理 6.4。6]以及 [CDW23，引理 6.3.5.(3)]。所期望的函子（5）的卡拉比–丘性从而由引理 2.19得出。

□

引理 2.21. 设 $\mathcal{C}_* = [\mathcal{A}_* \to \mathcal{B}_*] \in \text{立方}^{n+1}(\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}})$ 为一个范畴$(n+1)$-立方，并配备左 m-卡拉比–丘结构。则该方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{colim}_{I^n\setminus\{1,\dots,1\}}\ \mathcal{A}_* & \longrightarrow & \text{余极限}_{I^n\setminus\{1,\dots,1\}}\ \mathcal{B}_* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}_{1,\dots,1} & \longrightarrow & \mathcal{B}_{1,\dots 1} \end{array}$$

继承了一个典范的立方左 m-卡拉比–丘结构。

证明。 引理 2.20 表明，$\mathrm{colim}_{I^n\setminus\{1,\dots,1\}}\mathcal{A}_*$ 是左 $(m-2)$-卡拉比–丘的，并且函子 $\mathrm{colim}_{I^n\setminus\{1,\dots,1\}}\mathcal{A}_* \to \mathrm{colim}_{I^n\setminus\{1,\dots,1\}}\mathcal{B}_*$ 是相对左 $(m-1)$-卡拉比–丘的。函子 $\mathrm{colim}_{I^n\setminus\{1,\dots,1\}}\mathcal{A}_* \to \mathcal{A}_{1,\dots,1}$ 是相对左 $(m-1)$-卡拉比–丘的，因为 $\mathcal{A}_*$ 是立方左 $(m-1)$-卡拉比–丘的。推出态射

$$\mathcal{A}_{1,\dots,1} \amalg_{\mathrm{colim}_{I^n\setminus\{1,\dots,1\}}\mathcal{A}_*} \mathrm{colim}_{I^n\setminus\{1,\dots,1\}}\mathcal{B}_* \to \mathcal{B}_{1,\dots,1}$$

等价于函子

$$\mathrm{colim}_{I^{n+1}\setminus\{1,\dots,1\}}\mathcal{C}_* \to \mathcal{C}_{1,\dots,1} = \mathcal{B}_{1,\dots 1}\,,$$

根据假设 $\mathcal{C}_*$ 是立方 m-卡拉比–丘的，它是相对左 m-卡拉比–丘的。 □

命题 2.22。 考虑 $\mathrm{Cube}_n(\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}})$ 中的如下图式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_* & \longrightarrow & \mathcal{B}_* \\ \downarrow & & \\ \mathcal{C}_* & & \end{array}$$

使得 $(n+1)$-立方体 $[\mathcal{A}_* \to \mathcal{B}_*]$ 和 $[\mathcal{A}_* \to \mathcal{C}_*]$ 带有相容的立方左 m-卡拉比–丘结构。那么，推出立方体 $\mathcal{B}_* \amalg_{\mathcal{A}_*} \mathcal{C}_*$ 继承一个典范的 m-卡拉比–丘结构。

我们指出，命题 2.22 也可由 [BCS24] 的结果，通过高阶范畴中迭代卡拉比–丘跨度的态射复合推导出来。

命题 *2.22* 的证明。 我们先证明 $\mathcal{C}_* \simeq 0$ 时的断言，此时推出由余纤维立方体 $\mathcal{B}_*/\mathcal{A}_*$ 给出。考察立方卡拉比–丘结构的递归定义可知，只需证明对于 $\mathbf{i} \in I^n$，函子 $\mathrm{colim}^{I^n_{/\,\mathbf{i}}\setminus\{\mathbf{i}\}}\mathcal{B}_*/\mathcal{A}_* \to \mathcal{B}_{\mathbf{i}}/\mathcal{A}_{\mathbf{i}}$ 继承一个相对左 m-卡拉比–丘结构。这由引理 2.19 和 2.21 得出。

令 $\mathcal{C}_*$ 仍为任意对象。由命题 2.17，我们推得立方体 $\left[\mathcal{A}_* \to \mathcal{B}_* \underset{\mathcal{A}_*}{\overrightarrow{\amalg}} \mathcal{C}_*\right]$ 具有立方左 m-卡拉比–丘结构。余纤维立方体由推出立方体 $\mathcal{B}_* \amalg_{\mathcal{A}_*} \mathcal{C}_*$ 给出，因此根据上述结论，它继承了所需的立方卡拉比–丘结构。 □

3 可构造层范畴上的卡拉比–丘结构

在第 3.1 节中，我们回顾锥状分层空间上可构造层的 k-线性稳定 ∞-范畴的背景知识。在第 3.2 节中，我们回顾锥光滑分层的概念（可能带角），并回顾如何通过解缠将其解析为带角流形。在第 3.3 节中，我们将每个锥光滑分层空间 (X, P) 与范畴立方体 $\mathrm{Cons}_P(X)_*$相关联，方法是对与各分层的管状邻域相关联的范畴立方体进行宽松粘合。我们在第 3.5 节中利用 $\mathrm{Cons}_P(X)_*$ 的这一宽松粘合构造来生成立方卡拉比–丘结构。在第 3.4 节中，我们应用 $\mathrm{Cons}_P(X)_*$的构造，在 ∞-范畴框架下重新证明 Brav–Dyckerhoff 关于由带边界光滑流形上的局部系统所产生的卡拉比–丘结构的结果。证明的表述方式可推广到任意 $\mathbb{E}_\infty$-环谱上的系数。在第 3.6 节中，我们以由坐标轴分层的二维圆盘为例，详细说明本节中的构造。

3.1 分层空间上的可构造层

本节回顾可构造层理论的若干方面。我们的主要参考文献是 [Lur17，PT22]。

记号 3.1. 在本节中，我们将使用超层而非层。由于不存在混淆的风险，我们不会在记号中对此作任何说明。此外，在本文其余部分，我们将使用锥光滑分层空间，其中层与超层取值于紧生成 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 的概念相一致，这由 [Vol25，引理 A.2] 得出，因为$\mathrm{Sh}(X;\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Sh}(X;\mathcal{S}) \otimes \mathcal{C}$ 以及 $\mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}(X;\mathcal{S}) \otimes \mathcal{C} \simeq \mathrm{Sh}^{\mathrm{hyp}}(X;\mathcal{C})$。

定义 3.2. 分层空间是指连续映射 $\rho\colon\ X \to P$ 这一数据，其中 X 是拓扑空间，P是赋予亚历山德罗夫拓扑的偏序集。分层空间的态射$(f,r)\colon (X,P) \to (Y,Q)$是如下交换图表：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \rho_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_Y} \\ P & \xrightarrow[r]{} & Q \end{array}$$

稍微滥用一下记号，我们常把分层空间称为一对 $(X,\ P)$，有时也简称为 X。对于 $p \in P,\ X$ 的 p-分层定义为 $X_p \coloneqq \rho^{-1}(p) \subset X$。

定义 3.3 ([Lur17，定义 A.5。3])。设 $(X,\ P)$ 是一个分层空间。锥 $(C(X)\ P \sqcup \{-\infty\})$ 是如下定义的分层空间：

1. 作为一个集合，$C(X) = \{*\} \sqcup (X \times \mathbb{R}_{>0})$；2. 子集 $U \subset C(X)$ 是开集，当且仅当 $U \cap X \times \mathbb{R}_{>0}$ 是开集；若 $* \in U$，则存在 $\epsilon > 0$ 使得 $X \times (0,\ \epsilon) \subset U$；3. $C(X)$ 的分层由映射 $\rho\colon\ X \to P \sqcup \{-\infty\}$ 定义，其中 $\rho(*) = -\infty$ 且 $\rho(x,\ t) = \rho(x)$，对于 $(x,\ t) \in X \times \mathbb{R}_{>0}$。

– –

定义 3.4（[Lur17，定义 A.5.5]）。设 (X,P) 为分层空间。称 (X,P) 是锥分层的，如果对每个 $p \in P$ 与 $x \in X_p$，存在分层空间 $(Y,P_{>p})$ 以及拓扑空间 Z，使得存在开浸入 $j\colon C(Y) \times Z \to X$，其中 x 落在 j 的像中，且下列图表交换：

$$\begin{array}{ccc} C(Y) \times Z & \xhookrightarrow{j} & X \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \\ C(Y) & & \downarrow{\scriptstyle \rho_X} \\ {\scriptstyle \overline{\rho}_Y}\downarrow & & \\ P_{\geq p} & \longrightarrow & P \end{array}$$

定义 3.5（[Lur17，定义 A.6.2]）。设 (X,P) 为分层空间。我们将退出路径范畴 $\mathrm{Exit}(X,P)$ 定义为 $\mathrm{Sing}(X)$ 的单纯子集，由满足下述条件的单形 $\sigma\colon |\Delta^n| \to X$ 构成：存在 P 的元素链 $p_1 \leq \cdots \leq p_n$，使得对每个满足 $t_i > 0$ 的 $(t_0,\ldots,t_i,0,\ldots,0) \in |\Delta^n|$，有 $\sigma(t_0,\ldots,t_i,0,\ldots,0) \in X_{p_i}$

定理 3.6 ([Lur17，定理 A.6。4])。设$(X,\ P)$是一个锥状分层空间。那么$\mathrm{Exit}(X,\ P)$是一个 ∞-范畴。

记号 3.7。在 $\mathrm{Exit}(X,\ P)$ 是一个 ∞-范畴的情形下，我们将其记为 $\Pi_\infty(X,\ P)$，并称其为 $(X,\ P)$ 的分层同伦类型。

为便于后文引用，我们回顾锥状分层空间上的以下有限性条件。

定义 3.8 ([PT22，定义 2.2。1])。设$(X,\ P)$是一个具有局部弱可缩分层的锥状分层空间。

(1) 我们称 (X,P) 是范畴紧的，如果 $\Pi_\infty(X,P)$ 是 Cat_∞ 中的紧对象。(2) 我们称 (X,P) 是局部范畴紧的，如果对每个 $p \in P$以及每个 $x \in X_p$，存在形如 $Z \times \mathrm{C}(Y)$ 且包含 x 的锥状图，使得 $(Y,P_{>p})$ 是范畴紧的，并且 Z 是弱可缩的且局部弱可缩的。

定义 3.9. 设 (X,P) 为一个分层空间，并设 $\mathcal{E}\in\mathsf{Cat}_\infty$。对 $p\in P$，用 $i_p\colon X_p\to X$ 表示包含映射。对象 $F\in\mathsf{Sh}(X;\mathcal{E})$ 是可构造的，如果对所有 $p\in P$，i_p^*F 是局部常值的。我们用

$$\mathrm{Cons}_P(X;\mathcal{E})\subset\mathrm{Sh}(X;\mathcal{E})$$

由可构造层所跨越的全子范畴。在 $\mathcal{E}=\mathsf{Mod}_k$ 的情形下，我们也将 $\mathsf{Cons}_P(X)$ 写作 $\mathsf{Cons}_P(X;\mathsf{Mod}_k)$。

定义 3.10。 设 (X,P) 为一个分层空间，并设 $\mathcal{E}\in\mathsf{Cat}_\infty$。记

$$\mathrm{Cons}_{P,\omega}(X;\mathcal{E})\subset\mathrm{Cons}_P(X;\mathcal{E})$$

为由具有紧茎的可构造层所跨越的全子范畴。

以下结果是单值化等价在分层情形下的自然推广。我们将其称为外单值化等价。

定理 3.11 ([PT22，定理 5.4.1 和备注 5.4。2])。设 (X,P) 为具有局部弱可缩分层的锥状分层空间，并设 $\mathcal{E}$ 为一个紧生成 ∞-范畴。则有一个等价

$$\mathrm{Cons}_P(X;\mathcal{E})\simeq\mathrm{Fun}(\Pi_\infty(X,P),\mathcal{E}).$$

备注 3.12。 外单值化等价的 2-范畴版本最早出现于 [Tre09]，，其中将其表述为对一篇未发表的1-范畴版本的推广，该版本归功于 MacPherson。Lurie 对 3.11 在 $\mathcal{E}=\mathcal{S}$ 中的情形 [Lur17附录 A]进行了证明。外单值化等价的其他更一般版本见 [HPT24、CJ24、Jan24]。

命题 3.13 ([PT22，推论 6.7。2])。设 (X,P) 为具有局部弱可缩分层的锥状分层空间，并设 $S\subset P$ 为闭子集，且设 $U:=P\setminus S$。考虑相应的开闭浸入 $j\colon X_U\hookrightarrow X$ 与 $i\colon X_S\to X$。设 $\mathcal{E}$ 为可表现∞-范畴。全忠实函子

$$i_*\colon\ \mathrm{Cons}_S(X_S;\mathcal{E})\to\mathrm{Cons}_P(X;\mathcal{E})\leftarrow\mathrm{Cons}_U(X_U;\mathcal{E})\colon j_*$$

延拓为 $\mathrm{Cons}_P(X;\mathcal{E})$ 到 $\mathrm{Cons}_S(X_S;\mathcal{E})$ 与 $\mathrm{Cons}_U(X_U;\mathcal{E})$ 的再粘合。

3.2 锥形光滑分层空间

锥形光滑分层空间，如 [AFT17，定义 3.2.21]，所述，由一个 C^0-分层空间 $\rho\colon X\to P$ 连同锥状光滑图册的一个选取构成。所谓 C^0-分层空间的概念是锥状分层空间概念的细化，并满足其分层为拓扑流形。我们参阅 [AFT17] 以了解更多细节。

注意，任何配备平凡分层的光滑流形都是锥光滑的，参见 [AFT17，例 3.2。15]。锥形光滑分层空间的分层都是光滑流形，参见 [AFT17，引理 3.4。5]。因此，我们可以为每个锥形光滑分层空间 X 赋予一个维数$\dim(X)$，其定义为各分层维数的最大值。

定义 3.14。 设 X 是一个锥形光滑分层空间。

1. 分层 Y的深度 $\mathsf{depth}(Y)$ 定义为 $\dim(X)-\dim(Y)$。2. X 的深度定义为 X各分层深度的最大值。

锥形光滑分层空间的概念还可以进一步细化为带有$\langle m\rangle$-角的锥形光滑分层空间：

定义 3.15。设 $m\geq 1$ 且 $[m]=\{1,\dots,m\}$。设 $\mathcal{P}([m])$ 为 $[m]$的幂集，并将其视为带反向包含序的偏序集。带 m-角的锥形光滑分层空间由一个锥形光滑分层空间 $\rho\colon X\to P$ 以及一个偏序集态射 $P\to\mathcal{P}([m])$ 组成，使得复合映射 $\rho'\colon X\to\mathcal{P}([m])$ 按照 [AFT17，定义 7.2.2]，的意义是拓扑余笛卡尔的；这意味着，对于 $T\in\mathcal{P}([m])$，包含映射 $(\rho')^{-1}(T)$ 可扩张为一个锥光滑开嵌入

$$\mathbb{R}_{\geq 0}^{\times|T|}\times(\rho')^{-1}(T)\subset X\,.$$

带 $\langle 1\rangle$-角的锥形光滑分层空间也称为带边界锥形光滑分层空间。

定义 3.16. 给定带 $\langle m\rangle$-角的锥形光滑分层空间 $\rho'\colon\ X \xrightarrow{\rho} P \to \mathcal{P}([m])$，我们用 $X^\circ = (\rho')^{-1}(\emptyset)$ 表示 X 的内部，它通过限制 ρ 继承锥形光滑分层空间的结构。

注 3.17。 设 $(X,\ P)$ 是一个锥形光滑分层空间。那么 P必须是局部有限偏序集；若 X 是紧的，则它是有限偏序集。此结论由 Volpe 在 [Vol24的引理 3 中证明。1]。

记号 3.18。 设 $(X,\ P)$ 是一个带有 $\langle m\rangle$-角的锥形光滑分层空间，且 $\mathcal{E}$ 是一个∞-范畴。特别地，我们将 X 上系数取自 $\mathcal{E}$ 的可构造层范畴记作 $\mathsf{Cons}_{P,\ \partial}(X;\mathcal{E})$。

警告 3.19。 在记号 3.18 的设定下，记号 $\mathsf{Cons}_P(X;\ \mathcal{E})$ 将专用于 $\mathsf{Cons}_{P,\ \partial}(X;\mathcal{E})$ 的一个全子范畴，我们将在下文引入该子范畴。

设 $(X,\ P)$ 是一个带有 $\langle m\rangle$-角的锥形光滑分层空间。考虑箭头的集合$W_\partial \subset \Pi_\infty(X,\ P)_1$，定义如下

$$W_\partial \coloneqq \left\{ \gamma \in \Pi_\infty(X,P)_1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists U = \mathbb{R}^i \times (\mathbb{R}_{\geq 0})^j \times \mathrm{C}(Z) \text{ local chart such that } \mathrm{Im}(\gamma) \subset U, \text{ and} \\ \gamma = (y,\gamma',w) \text{ where } y \in \mathbb{R}^i, w \in \mathrm{C}(Z), \gamma' \in \Pi_\infty((\mathbb{R}_{\geq 0})^j, \mathcal{P}([j]))_1 \end{array} \right\}.$$

定义 3.20. 设 $(X,\ P)$ 是一个具有 $\langle m\rangle$-角的锥形光滑分层空间，且 $\mathcal{E}$ 是一个紧生成 ∞-范畴。我们令

$$\mathrm{Cons}_P(X;\mathcal{E}) \subset \mathrm{Cons}_{P,\partial}(X;\mathcal{E})$$

be t在定理 函子范畴$(\Pi_\infty[W_\partial^{-1}],\ \mathcal{E})$ 的等价下所对应的全子范畴3.1 1.

注 3.21. 设 (X,P) 是一个具有 m-角的锥形光滑分层。根据定义，∞-范畴 $\mathsf{Cons}_P(X)$ 是 $\mathsf{Cons}_{P,\partial}(X)$ 的全子范畴，其对象由那些沿角发出的法向方向上局部常值的可构造层构成。利用领圈邻域的存在性 [AFT17，引理 8.2.1], 容易看出，$\mathsf{Cons}_P(X)$ 等价于内部有分层空间 X° 上可构造层的 ∞-范畴 $\mathsf{Cons}_P(X^\circ)$。

定义 3.22. 设 $m \geq 1$。带有 $\langle m\rangle$-角的光滑流形（简称光滑 $\langle m\rangle$-流形）由一个带有 $\langle m\rangle$-角的锥形光滑分层空间 $\rho'\colon\ X \xrightarrow{\rho} P \xrightarrow{c} \mathcal{P}([m])$ 构成，其中c 是一个保偏序双射。

对于 $T \in \mathcal{P}([m])$，令 $\mathcal{P}([m])_{\leq T} \subset \mathcal{P}([m])$ 为其元素为 $\{T' \in \mathcal{P}([m]) | T\prime \leq T\}$ 的子偏序集。

定义 3.23. 给定一个带有 $\langle m\rangle$-角的光滑流形 $\rho\colon\ X \to \mathcal{P}([m])$，与 $T \in \mathcal{P}([m])$ 关联的闭面是一个带有 $\langle m - |T|\rangle$-角的锥形光滑分层空间

$$\rho^{-1}(\mathcal{P}([m])_{\leq T}) \to \mathcal{P}([m])_{\leq T} \simeq \mathcal{P}([m - |T|]).$$

如果 $T = \{1,\ldots,m\}\backslash\{i\}$，我们也用 $\partial_i X$ 表示关联面。

光滑流形 X 的$\langle m\rangle$角的面因此仍是带角的光滑流形。此外，X 底层的拓扑空间继承了一个带边界光滑流形结构，其边界由所有面之并给出。

备注 3.24。 给定一个带 $\langle m\rangle$角的光滑流形 X，我们有 $\partial_i X \cap \partial_j X$ 既是 $\partial_i X$ 的面，也是 $\partial_j X$的面。因此，带$\langle m\rangle$角的锥光滑流形会产生一个 $\langle m\rangle$-流形，意义见 [Jän68、Lau00]。[AFT17，例 7.2 中也提到了这一点。12]。

接下来我们回顾带角的锥光滑分层空间的解缠 ers.

定义 3.25 ([AFT17，定义 7.3。2])。设 X 是一个锥光滑分层空间，带有 $\langle m\rangle$角，且其内部的深度为 n。解缠 $\mathrm{Unzip}^n(X)$ 定义为以下1-范畴中的终对象：$\mathrm{Res}^n_{\mathbf{X}}$，其具有

- 由带有$\langle m+1\rangle$-角的锥光滑分层空间构成的对象 Y，以及一个锥状光滑映射 $p\colon\ Y \to X$，使得下方方块

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\ p\ } & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{P}([m+1]) & \xrightarrow{(\text{-})\cap[m]} & \mathcal{P}([m]) \end{array}$$

可交换，且 $\partial_{m+1}Y$与 p 下 X 的最大带角分层子空间的逆像一致，其内部是 X°的最深层 $X^{\circ,\ n}$。

- 由锥状光滑映射 $Y \to Y_\prime$ 在 $\mathcal{P}([m+1]) \times X$ 上给出的态射。

D定义 3.26。 设 X 是一个深度为 n 且具有 $\langle m\rangle$-角的锥形光滑分层空间。

(1) 我们将第 k 次解缠定义为

$$\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X) \coloneqq \mathrm{Unzip}_k \circ \cdots \circ \mathrm{Unzip}_n(X)\,.$$

它配有一个锥状光滑映射 $\pi_k\colon \mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X) \to X$。令 $\mathrm{Unzip}^{[n+1,n]}(X) = X$。我们将 $\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)$ 的深度 $(k-1)$ 分层（即维数最低的分层）记为 $\widetilde{X^{k-1}} \subset \mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)$。

(2) 我们将第 k 个链接 $\mathrm{Link}_k(X)$ 定义为 $\partial_{m+n}\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)$。注意，$\mathrm{Link}_k(X)$ 是映射 $\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X) \to \mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X)$ 下 $\widetilde{X^k}$ 的逆像。$\sim \pi_k$ 的限制定义了一个映射 $\tilde{\pi}_k\colon \mathrm{Link}_k(X) \to X^k$。

命题 3.27 ([AFT17，命题 8.2。3])。设 X 是一个深度为 n、具有 $\langle m\rangle$-角的锥形光滑分层空间。对于任意 $1 \le k \le n$，最深层 $\widetilde{X^{k-1}} \subset \mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)$ 有一个管状邻域 $T^\circ(X^k)$，它由一个锥光滑开嵌入给出

$$T^\circ(\widetilde{X^k}) = C(\tilde{\pi}_k) \hookrightarrow \mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)\,.$$

注 3.28。 在命题3.27的情形下，我们将管状邻域的闭版本记为 $\mathrm{T}(X^k) \subset T^\circ(X^k)$，定义为 $\tilde{\pi}_k$ 在 $[0,1] \subset \mathbb{R}_{\ge 0}$ 上的锥。注意到 $\mathrm{T}(X^k)$ 典范地是一个紧致光滑的 $\langle n+m-k+1\rangle$-流形。

引理 3.29 ([AFT17，例 8.3。5])。设 X 是一个深度为 n 、具有 $\langle m\rangle$-角的锥形光滑分层空间。那么存在一个同胚

$$\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X) \simeq \mathrm{T}(\widetilde{X^k}) \underset{\mathbb{R}\times \mathrm{Link}_k(X)}{\amalg} \mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)\,. \tag{6}$$

注 3.30。 设 X 是一个深度为 n 且带有 $\langle m\rangle$-角的锥形光滑分层空间。存在一个同胚 $\mathrm{Unzip}_n(X)\backslash \mathrm{Link}_n(X) \simeq X\backslash X_n$，见 [AFT17，命题 7.3。10]。

根据领圈邻域的存在性 [AFT17，引理 8.2。1], 由此可知 $\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)$同胚于 X 的一个子空间。类似地，我们可知 $\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)$ 同胚于 $\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X)$的一个子空间。我们可以选取这些嵌入，使得由此得到的图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X) & \hookrightarrow & \mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & X & \end{array}$$

对所有 $1 \le k \le n$都交换。此外，我们可以将 $\mathrm{T}(\widetilde{X^k})$ 嵌入 $\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X)$ 中，使得 (6) 中的推出成为以下空间的子空间之间的等式 X:

$$\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X) \simeq \mathrm{T}(\widetilde{X^k}) \bigcup_{\mathbb{R}_{\ge 0}\times \mathrm{Link}_k(X)} \mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)\,.$$

根据 [AFT17，引理 7.3.5-(3)], ，上述等价与限制到 $\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X)$ 的角相容。

注 3.31。 设 X 是一个深度为 n 、具有 $\langle m\rangle$角的锥形光滑分层空间，且其底层拓扑空间是带边界拓扑流形。那么，每个解缠 $\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)$ 的底层拓扑空间也都是带边界拓扑流形。这是由领圈邻域的存在性 AFT17，引理 8.21] 以及带边界拓扑流形的每个开子集都是带边界拓扑流形这一事实得出的。

带边界拓扑流形 X 的定向由此诱导出带边界流形 $\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)$、$\mathrm{T}(\widetilde{X^k})$ $\mathbb{R}_{\ge 0} \times$ 链接$_k(X)$ 的定向，其中 $1 \le k \le n$ 均成立；这些流形到 X 中的选定嵌入保定向。

引理 3.32。 设 (X, P) 是一个具有 $\langle m\rangle$-角的锥形光滑分层空间，且 X_p 是 X° 中的最深层，其深度为 n。分层空间图表的分层由 X 诱导，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Link}_n(X) \sqcup (\mathrm{Link}_n(X) \times \mathbb{R}_{>0}) & \longrightarrow & \mathrm{Link}_n(X) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_p \sqcup (X \setminus \mathrm{T}(X_p)) & \longrightarrow & X \end{array}$$

在Cat_∞中导出一个推出方块

$$\begin{array}{ccc} \Pi_\infty(\mathrm{Link}_n(X), P \setminus \{p\}) \sqcup \Pi_\infty(\mathrm{Link}_p(X), P \setminus \{p\}) & \longrightarrow & \Pi_\infty(\mathrm{Link}_n(X) \times \mathbb{R}_{\geq 0}, (P \setminus \{p\})^{\triangleright}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi_\infty(X_p, \{p\}) \sqcup \Pi_\infty(X \setminus \mathrm{T}(X_p), P \setminus \{p\}) & \longrightarrow & \Pi_\infty(X, P) \end{array} .$$

证明。 我们仿照 [AFR19，命题 3.3 的证明。8]根据出口路径的范坎彭定理（ [AFR19，命题 3.3.8-(1)], 或 [HPT24，定理 5.1.7-(4)]），我们可以将此陈述归约为局部情形。因此，我们只需证明以下分层空间构成的方块

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^i \times (\mathbb{R})^j_{\geq 0} \times \{0\} \times Z) \sqcup (\mathbb{R}^i \times (\mathbb{R})^j_{\geq 0} \times \{0\} \times Z \times \mathbb{R}_{>0}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^i \times (\mathbb{R})^j_{\geq 0} \times \{0\} \times Z \times \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{R}^i \times (\mathbb{R})^j_{\geq 0}) \sqcup (\mathbb{R}^i \times (\mathbb{R})^j_{\geq 0} \times R_{>\epsilon} \times Z) & \longrightarrow & \mathbb{R}^i \times (\mathbb{R})^j_{\geq 0} \times \mathrm{C}(Z) \end{array}$$

其中 $j \leq m$、 $0 < \epsilon \ll 1$ 和 Z 是一个锥形光滑分层空间。容易验证，这确实是分层空间的一个推出，而且退出路径范畴函子保持此推出。

□

Cor推论 3.33。 设 X 是一个带有 $\langle m\rangle$-角的锥形光滑分层空间，且设 X_p 为 *the deep*中的最深分层， X°，深度为 n。引理*3.32*在LinCat_k中导出等价

$$\mathrm{Cons}_{P,\partial}(X; \mathrm{Mod}_k) \simeq \mathrm{Loc}(\mathrm{T}(X_p); \mathrm{Mod}_k) \underset{\mathrm{Cons}_{P\setminus\{p\},\partial}(\mathrm{Link}_n(X); \mathrm{Mod}_k)}{\overrightarrow{\coprod}} \mathrm{Cons}_{P\setminus\{p\},\partial}(X \setminus T^\circ(X_p); \mathrm{Mod}_k) ,$$

and

$$\mathrm{Cons}_P(X; \mathrm{Mod}_k) \simeq \mathrm{Loc}(\mathrm{T}(X_p); \mathrm{Mod}_k) \underset{\mathrm{Cons}_{P\setminus\{p\}}(\mathrm{Link}_n(X); \mathrm{Mod}_k)}{\overrightarrow{\coprod}} \mathrm{Cons}_{P\setminus\{p\}}(X \setminus T^\circ(X_p); \mathrm{Mod}_k) .$$

警告 3.34. 请注意，推论 3.33 中等价右侧的分层与由 (X, P)诱导的分层并不一致。它们反而与引理 3.32的分层所诱导的分层一致。例如，诱导在 $\mathrm{T}(X_p) \subset X$上的分层并非平凡。具体来说，我们考虑：

- 带有平凡分层的 $\mathrm{T}(X_p)$，该分层与其同伦等价空间 X_p的分层一致；
- $X \setminus T^\circ(X_p)$，其分层由其同伦等价空间 $X \setminus T(X_p)$ 诱导；
- X 以及 $\mathrm{Link}_p(X)$，均带有自然分层。

推论 *3.33* 的证明。 为简化记号，本证明中省略修饰Mod_k 。我们需要证明在LinCat_k中存在一个（非 lax）推出方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cons}_{P\setminus\{p\}}(\mathrm{Link}_k(X)) \sqcup \mathrm{Cons}_{P\setminus\{p\}}(\mathrm{Link}_k(X)) & \longrightarrow & \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathrm{Cons}_{P\setminus\{p\}}(\mathrm{Link}_k(X))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Loc}(\mathrm{T}(X_p)) \sqcup \mathrm{Cons}_{P\setminus\{p\}}(X \setminus T^\circ(X_p)) & \longrightarrow & \mathrm{Cons}_{P\setminus\{p\}}(X \setminus \mathrm{T}^\circ(X)) \end{array}$$

在对称幺半 ∞-范畴 LinCat_k 中，我们有等价

$$\begin{aligned} \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathrm{Cons}_{P\setminus\{p\}}(\mathrm{Link}_k(X))) &\simeq \mathrm{Fun}(\Delta^1, \mathrm{Mod}_k) \otimes \mathrm{Cons}_{P\setminus\{p\}}(\mathrm{Link}_k(X); \mathrm{Mod}_k) \simeq \\ &\simeq \mathrm{Cons}_{0<1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \otimes \mathrm{Cons}_{P\setminus\{p\}}(\mathrm{Link}_k(X)) \simeq \\ &\simeq \mathrm{Cons}_{\{0<1\}\times(P\setminus\{p\})}(\mathrm{Link}_k(X) \times \mathbb{R}_{\geq 0}) . \end{aligned}$$

其中最后一个等价由下式得出 [HPT24，命题 5.2。11]。由可构造层的同伦不变性 [HPT23], ，我们有 $\mathrm{Loc}(\mathrm{T}(X_p)) \simeq \mathrm{Loc}(X_p)$ ，且 $\mathrm{Cons}^{P\setminus\{p\}}(X \setminus \mathrm{T}^\circ(X)) \simeq \mathrm{Cons}^{P\setminus\{p\}}(X \setminus \mathrm{T}(X))$。因此，上述图表可改写为

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cons}_{P\setminus\{p\}}(\mathrm{Link}_k(X)) \sqcup \mathrm{Cons}_{P\setminus\{p\}}(\mathrm{Link}_k(X)) & \longrightarrow & \mathrm{Cons}_{\{0<1\}\times(P\setminus\{p\})}(\mathrm{Link}_k(X)\times\mathbb{R}_{\geq 0}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Loc}(X_p) \sqcup \mathrm{Cons}_{P\setminus\{p\}}(X \setminus T(X_p)) & \longrightarrow & \mathrm{Cons}_{P\setminus\{p\}}(X \setminus \mathrm{T}^\circ(X)) \end{array}$$

第一个等价随后由将 函子范畴$(-;\mathrm{Mod}_k)$ 作用于引理 3.32的推出方块，并结合定理3.11即可得到。根据备注3.21，第二个等价的证明方法相同，只需将$(\mathbb{R}_{\geq 0})^j$ 处处替换为$(\mathbb{R}_{>0})^j$ 。 □

Volpe 的工作 [Vol25,Vol24] 表明，锥光滑流形具有良好的有限性条件。事实上，我们有如下结论：

定理 3.35。 锥光滑分层空间是局部范畴紧的。紧致锥形光滑分层空间是范畴紧的。带角的锥形光滑分层空间的内部也具有相同性质。

证明。 第二个断言见 [Vol24，定理 3。10]。第一个断言是局部的，由第一个断言以及锥光滑分层空间具有如下形式的锥状图这一事实可得：$\mathrm{C}(\mathrm{Z}) \times \mathbb{R}^n$ ，其中 (Z, Q) 是一个紧致锥形光滑分层空间，参见 [AFT17，推论 7.3。7]。最后一个断言由 [Vol25，推论 2。20], 与第一个断言结合得到。 □

以下 Nocera-Volpe 的结果提供了一大类锥光滑分层空间的例子。

定理 3.36 ([NV23，命题 2.9 与定理 3.7])。 *Whitney* 分层空间是锥光滑的。

3.3 锥形光滑分层空间的范畴立方体

本节的主要目的是完成构造 3.38，该构造为每个紧致的锥光滑分层空间 $\mathrm{Cons}(X)_*$ 赋予一个范畴立方体 (X, P)，其边界可以为空。

我们可以将构造 3.38 概括如下。令 n 为分层的深度。

- 解缠 $\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(X)$ 是一个光滑的 $\langle n+1\rangle$-流形，我们在定义 3.37 中为其关联了一个范畴 $n+1$-局部系统立方体。该立方体的顶端为 $\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(X)) \simeq \mathrm{Loc}(X^0)$，其中 X^0 是深度为 0 的分层，也就是 X 的最高维分层。$\sim$ $\sim$

- 更一般地，深度为 k 的分层 X^k 在 $\mathrm{Unzip}^{[n-k+1,n]}(X)$ 中的每个闭管状邻域 $T(X^k)$ 本身都是一个带有 $\langle n-k+2\rangle$ 角的流形，因此确定了一个以 $\mathrm{Loc}(T(X^k)) \simeq \mathrm{Loc}(X^k)$ 为尖端的范畴（$n-k+2$）立方体。我们将通过填入 0 来把这个范畴（$n-k+2$）立方体扩展为一个范畴 n 立方体。

- 我们可以通过逐步粘合较低分层 $T(X^k)$ 的管状邻域 $\sim$，从 $\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(X)$ 重构 X ，参见引理 3.29。相应的可构造层 $\mathrm{Cons}_P(X;\mathrm{Mod}_k)$ 的 ∞-范畴，由 X 各分层上的局部系统范畴经过迭代有向推出得到。我们考虑与 X 各分层相关联的范畴 n-立方体的一系列有向推出，从而得到 n-立方体 $\mathrm{Cons}_P(X)_*$。限制到尖端后，我们恢复描述 $\mathrm{Cons}_P(X;\mathrm{Mod}_k)$ 的有向推出，因此可得其尖端为

$$\mathrm{Cons}_P(X)_{1,\dots,1} \simeq \mathrm{Cons}_P(X;\mathrm{Mod}_k)\,.$$

回忆一下， $I = \{0 \to 1\}$。给定一个紧致光滑的$\langle n\rangle$-流形 X，我们将其记作函子$I^n \to$_这是一个到拓扑空间范畴的函子，定义如下：

$$\underline{X}((i_1,\dots,i_n)) = \begin{cases} X & (i_1,\dots,i_n) = (1,\dots,1) \\ \bigcap_{1\leq j\leq n \text{ s.t. } i_j=0} \partial X_j & (i_1,\dots,i_n) \neq (1,\dots,1)\,. \end{cases}$$

对于任意$\mathbf{j} \in I^n$，我们有

$$\bigcup_{\mathbf{i}<\mathbf{j}} \underline{X}(\mathbf{i}) = \partial \underline{X}(\mathbf{j}) \subset \underline{X}(\mathbf{j}) .$$

我们将 Loc(-): $\mathcal{S} \to \mathrm{LinCat}_k$ 记作由 $*$ 映射到 Mod_k所确定的本质唯一的保余极限函子。注意，对于任意空间 $X \in \mathcal{S}$，都有 $\mathrm{Loc}(X) \simeq$ 函子范畴(X, Mod_k)。

D定义 3.37。 令 X 为一个紧致光滑$\langle n\rangle$-流形。我们定义范畴 n-立方体 e

$$\mathrm{Loc}(X)_* \coloneqq \mathrm{Loc} \circ \underline{X} \colon I^n \to \mathrm{LinCat}_k$$

$$(i_1, \dots, i_n) \mapsto \begin{cases} \mathrm{Loc}(X) & (i_1, \dots, i_n) = (1, \dots, 1) \\ \mathrm{Loc}\big(\bigcap_{1 \le j \le n \text{ s.t. } i_j = 0} \partial X_j\big) & (i_1, \dots, i_n) \neq (1, \dots, 1) \end{cases} .$$

回顾定义 3.20 中关于带角锥光滑分层空间上的可构造层的约定（另见记号3.19和警告）。

构造 3.38。令 $\rho \colon X \to P$ 为一个带边界的锥形光滑分层空间，其基础空间 X 是一个紧致拓扑 d-带边界流形。令 n 为 X的分层深度。记 X^k 为 (X, P) 的深度 k 分层。下文将使用第 3.2 节中的记号。令 $\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(X))_*$、$\mathrm{Loc}(\mathrm{T}(\widetilde{X^1}))_*$ 分别为与光滑$n+1$-流形 $\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(X)$、$\mathrm{T}(\widetilde{X^1})$相关联的范畴 $(n+1)$-立方体局部系统，如定义 3.37 所述。展开定义可得各个面的一个典范等价

$$\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(X))_{\partial_1^0 *} \simeq \mathrm{Loc}(\mathrm{T}(\widetilde{X^1}))_{\partial_1^0 *} .$$

这确定了范畴 n-立方体的一个态射

$$\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(X))_{\partial_1^0 *} \to \mathrm{Loc}(\mathrm{T}(\widetilde{X^1}))_{\partial_1^1 *} .$$

我们如下定义$(n+1)$-立方体 $\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[2,n]}(X))_*$:

$$\Big[\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(X))_{\partial_1^0 *} \to \mathrm{Loc}(\mathrm{T}(\widetilde{X^1}))_{\partial_1^1 *} \underset{\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(X))_{\partial_1^0 *}}{\overset{\to}{\bigsqcup}} \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(X))_{\partial_1^1 *}\Big]$$

由注记 2.15，范畴 n-立方体的跨度的推出

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[2,n]}(X))_{\partial_1^0 *} \simeq \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(X))_{\partial_1^0 *} & \longrightarrow & 0_* \\ \downarrow & & \\ \mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[2,n]}(X))_{\partial_1^1 *} & & \end{array}$$

等价于推出 n-立方体

$$\mathrm{Loc}(\mathrm{T}(\widetilde{X^1}))_{\partial_1^1 *} \underset{\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(X))_{\partial_1^0 *}}{\bigsqcup} \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(X))_{\partial_1^1 *}$$

利用注记 3.30，后者可以典范地等同于局部系统立方体 $\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[2,n]}(X))_*$，其关联于光滑 $\langle n\rangle$-流形 $\mathrm{Unzip}^{[2,n]}(X)$。

我们按如下方式迭代进行。

我们假设已经定义了 $\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_*$，其中 $0 < k < n+1$。我们进一步作出如下假设：

假设 (k)。 存在一个由范畴论的 $(n-k+2)$-立方体构成的等价

$$\mathrm{cof}_1^{\times k-1} \mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_* \simeq \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_*$$

从沿前 $k-1$ 个坐标迭代得到的余纤维立方体到与光滑 $\langle n-k+2\rangle$-流形 $\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)$ 相关联的范畴立方体。

接下来，我们构造 $\mathsf{Cons}(\mathsf{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_*$，并证明它满足假设（$k+1$）。展开定义后，我们得到范畴（$n-k+1$）-立方体之间的典范等价

$$\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^0_k *} \simeq \mathrm{Loc}(\mathrm{T}(\widetilde{X^k}))_{\partial^0_1 *}.$$

因此，与 $\mathsf{T}(X^k)$ 相关联的 $(n-k+2)$-立方体可以表示为 $(n-k+1)$-立方体的态射

$$\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^0_k *} \to \mathrm{Loc}(\mathrm{T}(\widetilde{X^k}))_{\partial^1_1 *}.$$

利用归纳假设，由此得到范畴 n-立方体的一个态射

$$\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^0_k *} \to \mathrm{Loc}^0(\mathrm{T}(\widetilde{X^k}))_*,$$

其中 $\mathsf{Loc}^0(\mathsf{T}(\widetilde{X^k}))_*$ 的定义方式是：将 $0 \in$ 函子范畴$(I^{k-1}, \mathsf{Cube}_{n-k+1}(\mathsf{LinCat}_k^{\mathrm{dual}}))$ 的顶点替换为 $(n-k+1)$-立方体 $\mathsf{Loc}(\mathsf{T}(X^k))_{\partial^1_1 *}$。

然后我们将 $\mathsf{Cons}(\mathsf{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_*$ 定义为

$$\left[\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^0_k *} \to \mathrm{Loc}^0(\mathrm{T}(\widetilde{X^k}))_* \underset{\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^0_k *}}{\overrightarrow{\amalg}} \mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^1_k *}\right].$$

为了完成构造 3.38，我们还需要证明以下内容

引理 3.39. 范畴 $(n+1)$-立方体 $\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_*$ 满足假设 $(k+1)$。

证明。 我们首先分别计算 $\mathsf{Cons}(\mathsf{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_*$ 在 $i_k = 0$ 和 $i_k = 1$ 上的限制在前 $k-1$ 个方向上的迭代余纤维。根据构造，我们有一个典范等价

$$\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_{\partial^0_k *} \simeq \mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)))_{\partial^0_k *}.$$

因此，根据假设 (k) 我们有 余纤维$_1^{k-1}\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))^{\partial^0_k *} \simeq \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)))^{\partial^0_k *}$。再次使用假设 (k)，并利用松弛余极限与余极限可交换这一事实（引理 2.18），我们得到以下等价

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cof}_1^{k-1}(\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_{\partial^1_k *}) \\
&\quad\simeq \mathrm{cof}_1^{k-1}(\mathrm{Loc}^0(\mathrm{T}(\widetilde{X^k}))_* \underset{\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^0_k *}}{\overrightarrow{\amalg}} \mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^1_k *}) \\
&\quad\simeq \left(\mathrm{cof}_1^{k-1}(\mathrm{Loc}^0(\mathrm{T}(\widetilde{X^k}))_*) \underset{\mathrm{cof}_1^{k-1}(\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^0_k *})}{\overrightarrow{\amalg}} \mathrm{cof}_1^{k-1}(\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^1_k *})\right)_{\partial^1_k *} \\
&\quad\simeq \left(\mathrm{Loc}(\mathrm{T}(\widetilde{X^k}))_{\partial^1_1 *} \underset{\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^0_k *}}{\overrightarrow{\amalg}} \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^1_k *}\right)_{\partial^1_k *}.
\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cof}_1^{\times k}(\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_*) \\
&\quad\simeq \mathrm{cof}_1\left(\left[\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^0_k *} \to \left(\mathrm{Loc}(\mathrm{T}(\widetilde{X^k}))_{\partial^1_1 *} \underset{\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^0_k *}}{\overrightarrow{\amalg}} \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^1_k *}\right)_{\partial^1_k *}\right]\right) \\
&\quad\simeq \mathrm{Loc}(\mathrm{T}(\widetilde{X^k}))_{\partial^1_1 *} \underset{\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^0_k *}}{\bigsqcup} \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^1_k *} \\
&\quad\simeq \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_*,
\end{aligned}$$

其中，最后一个等价由注记 3.30 得出。 □

定义 3.40。 设 (X, P) 是一个带边界的典范光滑分层空间，且 X 是一个带边界紧拓扑流形。设 n 为分层的深度。我们将 (X, P) 的范畴论 $(n+1)$- 立方体 $\mathsf{Cons}_P(X)$ 定义为输出

$$\mathrm{Cons}_P(X)_* := \mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[n+1,n]}(X))_* \in \mathrm{Cube}_{n+1}(\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}}),$$

构造 3.38。

注 3.41。 为说明构造 3.38，我们明确写出$\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[2,n]}(X))_{*}$。
$\sim$ $\sim$与 n-立方体 $\mathrm{Loc}(\mathrm{T}(X^2))$ 相关联的、带有 $\langle n\rangle$-角 $\mathrm{T}(X^2)$ 流形适配于由范畴 $(n-1)$-立方体构成的图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(X))_{\partial_1^0,\partial_2^0 *} & \longrightarrow & 0_* \\ \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow \\ \mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[2,n]}(X))_{\partial_1^1,\partial 2^0 *} & \longrightarrow & \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[2,n]}(X))_{\partial_2 *} \\ & & \searrow^{\varphi} \\ & & \mathrm{Loc}(\mathrm{T}(\widetilde{X^2}))_{\partial_1^1 *} \end{array} \tag{7}$$

其中它被表示为对角映射 φ。令$\mathrm{Loc}^0(\mathrm{T}(\widetilde{X^2}))_{*}:=[0_{*}\to \mathrm{Loc}(\mathrm{T}(\widetilde{X^2}))_{\partial_1^1 *}]$。根据立方体的松弛推出的定义，将$\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[2,n]}(X))$ 限制 $i_1=0$ 到恰好是$\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(X))^{\partial_1^0 *}$。因此由（7），我们得到一个 n-立方体的态射

$$\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[2,n]}(X))_{\partial_2^0 *}\to \mathrm{Loc}^0(\mathrm{T}(\widetilde{X_2}))_{*}.$$

我们定义 $\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[3,n]}(X))$ 如下：

$$\left[\mathrm{Loc}^0(\mathrm{T}(\widetilde{X^2}))_{*} \underset{\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[2,n]}(X))_{\partial_2^0 *}}{\overset{\rightarrow}{\bigsqcup}} \mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[2,n]}(X))_{\partial_2^1 *}\right].$$

引理 3.39 表明，我们有如下的$(n-3)$-立方体的余极限图：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[3,n]}(X))_{\partial_1^0,\partial_2^0 *} & \longrightarrow & \mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[3,n]}(X))_{\partial_1^0,\partial_2^1 *} & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & 0 & \longrightarrow & & 0 \\ \mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[3,n]}(X))_{\partial_1^1,\partial_2^0 *} & \longrightarrow & \mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[3,n]}(X))_{\partial_1^1,\partial_2^1 *} & & \downarrow \\ & \searrow & & \searrow & \\ \downarrow & & 0 & \longrightarrow & \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[3,n]}(X))_{*} \end{array}$$

Re标记 3.42。 反复应用推论3.33，即可明确描述范畴立方体的各项 he cate范畴立方体

$$\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{*}\colon I^{n+1}\to \mathrm{St}_k$$

如下：

$$(\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)))_{\mathbf{i}}=\begin{cases}\mathrm{Cons}((p_{1,n})^{-1}(\partial X)\cap \bigcap_{i_j=0,j\neq n}\partial_{i_j}^{\min\{\{i_j=0\},k\}}X), & \text{if } i_n=0\\ \mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[\min\{\{i_j=0\},k\},n]}(X)\cap \bigcap_{i_j=0,j\neq n}\partial_{i_j}^{\min\{\{i_j=0\},k\}}X) & \text{if } i_n=1\end{cases}$$

这个立方体中的所有层范畴都相对于由 X 上的分层所诱导的分层是可构造的。因此，记作 $\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{*}$ 是合理的，因为立方体的顶点，即对应于 $\mathbf{i}=(1,1,\ldots\ldots,1)$ 的元素，可识别为 $\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)$ 上相对于由 (X,P) 诱导的分层的可构造层。特别地，$\mathrm{Cons}(X)_{*}$ 的顶点可识别为 $\mathrm{Cons}_P(X)$。

3.4 与带角光滑流形相关的卡拉比–丘立方体

记 $C_{*}(\text{-};R)\colon \mathcal{S}\to \mathrm{Mod}_k$ 为取值于 k 的同调函子，它是由 $C_{*}(*)\simeq k$ 确定的本质唯一的保持余极限函子。给定 $X\in\mathcal{S}$，我们有 $X\simeq \mathrm{colim}_X *\in\mathcal{S}$。应用函子 $\mathrm{Loc}(\text{-})$ 和负循环同调函子 $\mathrm{HH}^{S^1}(\text{-})$，这一等价诱导出 Mod_k 中的一个态射

$$C_{*}(X)\simeq \mathrm{colim}_X\, k\simeq \mathrm{colim}_X\, \mathrm{HH}^{S^1}(\mathrm{Loc}(*))\to \mathrm{HH}^{S^1}(\mathrm{Loc}(X))\,.$$

该态射关于 X 具有函子性。给定一个带边界 ∂X 的流形 X，由此我们得到 $\mathbf{Mod}_k$ 中的一个态射

$$C_*(X,\partial X) \coloneqq \mathrm{cof}(C_*(\partial X) \to C_*(X)) \longrightarrow \mathrm{HH}^{S^1}(\mathrm{Loc}(X), \mathrm{Loc}(\partial X))\,. \tag{8}$$

以下是 ∞-范畴版本的 [BD19，定理 5。7] 适用于带边界的光滑流形。

定理 3.43。设 X 是一个维数为 n 且带边界的紧致光滑可定向流形∂X。任意定向类 $k[n] \to C_*(X,\ \partial X)$ 与态射(8) 复合后，定义了函子上的相对左 n-卡拉比–丘结构

$$\mathrm{Loc}(\partial X) \longrightarrow \mathrm{Loc}(X)$$

它限制为$(n-1)$-卡拉比–丘结构，定义在$\mathrm{Loc}(\partial X)$上。

我们在本节末尾证明定理3.43。接下来，我们记录定理3.43的以下细化，它也是 [CDW23，定理 7.42]的一个变体。

推论 3.44。设 X 是一个维数为 d的紧致光滑$\langle n\rangle$-流形。底层带边界拓扑流形 X 的定向在范畴 n 的立方体上诱导出一个立方左 d-卡拉比–丘结构。

$$\mathrm{Loc}(X)_* \coloneqq \mathrm{Loc}(\underline{X})\colon I^n \to \mathrm{LinCat}_k\ .$$

证明。 该证明类似于 [CDW23定理 7.4 的证明。2]:

我们有 $\mathrm{colim}_{i\in I^n\setminus\{1,\dots,1\}} C_*(X(i)) \simeq C_*(\partial X)$，因为函子 $C_*(\text{-})\colon \mathcal{S} \to \mathbf{Mod}_k$ 保 es coli持。因此在 $\mathbf{Mod}_k$ 中存在一个诱导态射

$$C_*(X,\partial X) \coloneqq \mathrm{cof}(C_*(\partial X) \to C_*(X)) \to \mathrm{HH}^{S^1,\mathrm{tot}}(\mathrm{Loc}(X)_*)\,.$$

对于 X 的每个面 $\partial_i X$，存在一个相应的交换方块:

$$\begin{array}{ccc} C_*(X,\partial X) & \longrightarrow & \mathrm{HH}^{S^1,\mathrm{tot}}(\mathrm{Loc}(X)_*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_*(\partial_i X, \partial\partial_i X)[1] & \longrightarrow & \mathrm{HH}^{S^1,\mathrm{tot}}(\mathrm{Loc}(X)_{\partial_i^0 *})[1] \xrightarrow{\simeq} \mathrm{HH}^{S^1,\mathrm{tot}}(\mathrm{Loc}(\partial_i X)_*)[1] \end{array}$$

由 $(X,\partial X)$ 的定向所诱导的 $\mathrm{Loc}(X)_*$ 的总负循环同调类，限制为由该定向到 $(\partial_i X, \partial\partial_i X)$ 的限制所诱导的第 i 个面 $\mathrm{Loc}(\partial_i X)_*$ 的总负循环同调类。

该函子的负循环同调类

$$\mathrm{Loc}(\partial X) \simeq \mathrm{colim}_{I^m\setminus\{1,\dots,1\}} \mathrm{Loc}(X)_* \longrightarrow \mathrm{Loc}(X)$$

由$(X,\partial X)$ 的定向所诱导的 d-卡拉比–丘结构，是根据定理 3.43给出的相对左 X结构。利用受限类源自的各个面的受限定向这一事实，我们可以对所有面迭代这一论证，从而证明定义 2.7 中立方左卡拉比–丘结构定义的递归条件 (2)。。 □

设 X 是一个紧致可微流形。那么 X 存在一个三角剖分 [，其40], 含义是 X 同胚于一个有限单纯复形。此外，该三角剖分满足：单纯复形中任一顶点的链接都同胚于一个球面。

引理 3.45。 设 X 是一个带边界的紧致光滑流形，并带有一个三角剖分。那么在 X上存在一个带边界的锥光滑分层，其深度为 d 的分层由 X中所有 d-单形的内部构成。

证明。 锥形光滑分层 $X \to P$ 见 [AFT17，例 3.5。6]。如有必要，对P 进行细化，我们可以假设对每个 $p \in P$， X_p 都是仅由包含在 d 或仅包含在 X° 中的 ∂X- 胞腔的内部不交并组成。于是，态射 $X \to P$锥形延拓为一个拓扑余笛卡尔映射 $X \to P \to \mathcal{P}([1])$，从而确定一个具有 $\langle 1\rangle$-角的锥光滑分层。 □

引理 *3.46*。对于 $m \geq 1$，令 D^m 为带边界 S^{m-1}的 m 维圆盘。一个定向类 σ: $k[m] \simeq C_*(D^m, S^{m-1})$ 的选取通过 *(8)* 给出函子 $\mathit{Loc}(S^{m-1}) \to \mathit{Loc}(D^m)$ 上的相对左 m-卡拉比–丘结构，该结构限制为 $\mathit{Loc}(S^{m-1})$ 上的左 $(m-1)$-卡拉比–丘结构。

证明。我们通过对 m 作归纳法来证明此断言。$m = 1$ 的情形可直接论证，留给读者。假设该命题对 $m-1$ 已经成立。利用 $\mathrm{LinCat}_k^{\mathrm{dual}}$ 中的推出图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Loc}(S^{m-2}) & \longrightarrow & \mathrm{Loc}(D^{m-1}) \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \mathrm{Loc}(D^{m-1}) & \longrightarrow & \mathrm{Loc}(S^{m-1}) \end{array}$$

以及 [Chr23定理 315], 中关于左卡拉比–丘结构的粘合结果，我们得到$\mathrm{Loc}(S^{m-1})$ 继承一个相对左 $(m-1)$-卡拉比–丘结构，该结构由 σ的限制导出。

类 σ 通过（8）给出一个由 k-线性自函子构成的图表，其对象为 $\mathrm{Loc}(D^m) \simeq \mathrm{Mod}_k$，形式如下:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{id}_{\mathrm{Mod}_k} & \hookrightarrow & \mathrm{id}_{\mathrm{Mod}_k} \oplus [1-m] & \longrightarrow & \mathrm{cof} \\ \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \\ \mathrm{fib} & \longrightarrow & \mathrm{id}_{\mathrm{Mod}_k} \oplus [1-m] & \twoheadrightarrow & [1-m] \end{array}$$

其水平箭头构成纤维与余纤维序列，其中 $\mathrm{id}_{\mathrm{Mod}_k} \simeq \mathrm{id}^!_{\mathrm{Mod}_k}$，中间态射由等价 $\mathrm{id}^!_{\mathrm{Loc}(S^{m-1})} \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{Loc}(S^{m-1})}[1-m]$ 导出。右下方的水平态射由伴随 $f_!\colon \mathrm{Loc}(S^{m-1}) \to \mathrm{Loc}(*) : f^*$ 的余单位态射给出，其中 $f\colon S^{m-1} \to *$，因此根据 [Chr22，引理 3.3]，它等价于从直和出发的投影。类似地，左上方的水平态射根据 [Chr23，引理 2.34] 和 [Chr22，引理 3.3]，等价于对直和项的包含映射。我们选择 $\mathrm{id}_{\mathrm{Mod_S}} \oplus [1-m]$ 的直和分解，使包含映射和投影均为典范映射。由于 k 是连通的（甚至集中在 0 次），且 $m \geq 2$，不存在非零的自然变换 $\mathrm{id}_{\mathrm{Mor}_k} \to [1-m]$。因此，$\mathrm{id}_{\mathrm{Mod}_k} \oplus [1-m]$ 的中间竖直自等价必为下三角形式，且对角线上为等价。由图表的交换性可知，该等价的下方非对角项也必须为零。由此我们得出，竖直态射都是等价。

□

引理 3.47. 将 Δ^n 视为锥形光滑分层空间，并设$\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(\Delta^n)$ 为其 *Unzip*，视为紧光滑$\langle n\rangle$-流形。则范畴 n-立方$\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(\Delta^n))_*$具有典范的立方左 n-卡拉比–丘结构。

证明。我们发现 $\partial\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(\Delta^n) \simeq S^{n-1}$，从而得到一个负循环同调类$\sigma$: $k[n] \simeq C_*(X, \partial X) \to \mathrm{HH}_{S^1}$,$\mathrm{tot}(\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(\Delta^n))_*)$，它来自 $\mathrm{Unzip}(\Delta^n)$ 的定向。对于$1 \leq i \leq n$，背面 $\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(\Delta^n))\delta_i^{0*}$ 典范等价于 $\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(\Delta^{n-1}))_*$，且 $\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(\Delta^n))_*$ 的总负循环同调类限制到来自 $\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(\Delta^{n-1})$ 之定向的类。因此，σ 诱导立方左 n-卡拉比–丘结构这一事实归结为对引理 3.46 的迭代应用。

□

定理 3.43 的证明。我们对 n 进行归纳法证明，因此假设该命题已对所有维数为 $n-1$ 的紧致可定向光滑流形成立。考虑构造 3.38 中的范畴立方体 $\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_*$。在 $k = 1$ 的情况下，$\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(X)$ 由 n-胞腔 $\Delta_n \subset X$ 的解开操作的不交并给出，而 $\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,n]}(X))_*$ 因此根据引理 3.47，从 X 的定向继承了一个立方体 n-卡拉比–丘结构。对于 $k \geq 1$，我们有

$$\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_* \simeq \mathrm{Loc}(\mathrm{T}(\widetilde{X^k}))_{\partial_1^{1*}} \bigsqcup_{\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial_k^{0*}}} \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial_k^{1*}}.$$

我们通过粘合，逐步在立方体 n 上构造立方左 $\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_*$～卡拉比–丘结构。$\mathrm{T}(X^k)$ 的边界同胚于一个 $(n-1)$-球面。利用引理 3.46

并对 $\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_*$ 的各个面应用归纳假设，我们由此得出：$\sim$ 的定向 X 在 n 上诱导出立方左卡拉比–丘结构 $\mathrm{Loc}(\mathrm{T}(X^k))_*$，该结构与 $\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_*$ 在公共面上的立方卡拉比–丘结构相容。由命题 2.22，$\mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_*$ 继承了立方左 n卡拉比–丘结构。

在 $k = n$ 的情形下，1-立方 $\mathbf{Loc}(\mathbf{Unzip}^{[n+1,n]}(X))_*$ 相当于函子 $\mathbf{Loc}(\partial X) \to \mathbf{Loc}(X)$，从而得到所需的卡拉比–丘结构。 □

注记 3.48。引理 3.46 的证明可以直接从 k-线性情形推广到基底为任意连通 $\mathbb{E}_\infty$-环谱的情形。由此可推得，引理 3.46 对任意 $\mathbb{E}_\infty$-环谱 R作为系数时仍成立。定理 3.43 的证明也可推广到 R-线性情形，前提是 X 带有相对于 R的定向。

3.5 $\mathbf{Cons}(X)_*$ 上的立方卡拉比–丘结构

如上所述，固定一个带边界锥形光滑分层空间 $X \to P \to \mathcal{P}([1])$，使得 X 所对应的拓扑空间是一个维数为 d 的带边紧流形。本节将证明，若 X 可定向，则 X 的一个定向会在定义 3.40中给出的范畴立方体 $\mathrm{Cons}(X)_*$ 上诱导一个立方左 d-卡拉比–丘结构。

命题 3.49. 设 $(X,\ P)$ 为一个深度为 n、维数为 d 的带边界锥形光滑分层空间。假设底层拓扑空间 X 是可定向带边流形。对每个 $1 \le k \le n+1$，X 上的一个定向选择诱导出一个立方左 d-卡拉比–丘结构，该结构位于范畴 $(n+1)$-立方 $\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_*$ 上，即构造 *3.38* 中的该立方。

证明。我们对 $1 \le k \le n+1$ 使用归纳法证明如下陈述：在 X 上的一个定向选择诱导出一个立方左 n-卡拉比–丘结构，该结构位于范畴 $(n+1)$-立方 $\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_*$上，即构造 3.38，并且所诱导的卡拉比–丘结构在

$$\mathrm{cof}_1^{\times k-1}\,\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_* \simeq \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_*$$

与由推论 3.44 通过将 X 的定向限制到 $\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)$而得到的结构相一致。对于 $k = 1$，该陈述的第一部分是推论 3.44，而第二部分是平凡的。假设我们对某个 $k < n+1$已经证明了该断言。由命题 2.17 以及 $\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_*$的归纳定义，只需证明 $(n+1)$-立方

$$\mathrm{C}^k_* := [\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^0_k *} \to \mathrm{Loc}^0(\mathrm{T}(\widetilde{X^k}))_*]$$

带有一个立方左 n-卡拉比–丘结构，并且与归纳假设给出的 $\mathbf{Cons}(\mathbf{Unzip}^{[k,n]}(X))$ 上的结构相容。

断言：范畴 $(n+1)$-立方体

$$\mathrm{C}^k_* := [\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial^0_k *} \to \mathrm{Loc}^0(\mathrm{T}(\widetilde{X^k}))_*]$$

带有一个立方左 d-卡拉比–丘结构，其在 ∂^0_k-面上的限制与 $\mathbf{Cons}(\mathbf{Unzip}^{[k,n]}(X))_*$ 上立方左 d-卡拉比–丘结构在 ∂^0_k-面上的限制相容。

我们暂且假设该断言成立，并说明如何借此完成命题的证明。根据命题 2.17 以及 $\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_*$的归纳定义，该断言意味着 $\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_*$ 具有一个立方左 d-卡拉比–丘结构，该结构由 C^k_* 和 $\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_*$上的结构诱导而来。为了完成归纳论证，我们还需证明诱导在

$$\mathrm{cof}_1^{\times k}\,\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_{\partial^0_k *} \simeq \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_*$$

上的立方卡拉比–丘结构与推论 3.44给出的结构一致。引理 3.39 的证明表明，存在等价

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cof}_1^{\times k}(\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_*)\\
&\simeq \mathrm{cof}_1\left[\mathrm{cof}_1^{k-1}(\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial_k^0 *}) \to \Big(\mathrm{Loc}(\mathrm{T}(\widetilde{X^k}))_{\partial_1^1 *} \underset{\mathrm{cof}_1^{k-1}(\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial_k^0 *})}{\overrightarrow{\bigsqcup}} \mathrm{cof}_1^{k-1}(\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial_k^1 *})\Big)_{\partial_k^1 *}\right]\\
&\simeq \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_*.
\end{aligned}$$

因此，归纳假设的第二部分表明，$\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_*$ 上的立方 d-卡拉比–丘结构会在 $\mathrm{cofib}_1^{\times k}(\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_*) \simeq \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k+1,n]}(X))_*$ 上诱导出立方 d-卡拉比–丘结构，而该结构源自对 X 的定向的限制。

现在我们继续证明该断言。首先，我们构造一个类 $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{HH}^{S^1,\text{总}}(\mathrm{C}_*^k)$，它具有良好的性质，从而使我们能够证明其非退化性。

- **构造** $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{HH}^{S^1,\text{总}}(\mathrm{C}_*^k)$

根据 C_*^k 的定义，我们有 $\mathrm{C}_{\partial_k^0}^k \simeq \mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))^{\partial_k^0 *}$。因此，$\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_*$ 上的立方左 d-卡拉比–丘类 α 会在 $\mathrm{C}_{\partial_k^0 *}^k$ 上诱导出立方左 $(d-1)$-卡拉比–丘类 $\alpha_{\partial_k^0}$。根据构造，我们有一个等价 $\mathrm{cof}_1^{\times(k-1)} C_*^k \simeq \mathrm{Loc}(\mathrm{T}(X^k))_*$，从而在水平纤维与余纤维序列之间诱导出一个态射

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{HH}^{S^1,\mathrm{tot}}(C_*^k) & \xrightarrow{\eta} & \mathrm{HH}^{S^1,\mathrm{tot}}(C_{\partial_k^0 *}^k)[1] & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{HH}^{S^1,\mathrm{tot}}(C_{\partial_k^1 *}^k)[1]\\
\downarrow{\scriptstyle \widetilde{q}} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q'}\\
\mathrm{HH}^{S^1,\text{总}}(\mathrm{Loc}(\mathrm{T}(\widetilde{X^k}))_*) & \mathrm{HH}^{S^1,\text{总}}(\underline{\mathrm{Loc}(\mathrm{T}(\widetilde{X^k}))}_{\delta}) & {\scriptstyle \partial_k^0 *}[1] & {\scriptstyle \varphi} & {\scriptstyle \partial_k^1 *}[1]) \ \mathrm{HH}^{S^1,\text{总}}(\mathrm{Loc}(\mathrm{T}(\widetilde{X^k})))
\end{array}$$

我们想要证明 $^{-}\alpha_{\partial_k^0}$ 存在一个提升 $\widetilde{\alpha}$ 沿着 η 使得 $\widetilde{q}(\widetilde{\alpha})$ 与（$\sim$的像）定向类$\mathrm{T}(X^k)$ （见推论 3.44）。

注意，由于 $C_{\partial_k^1 *}^k \simeq \mathrm{Loc}^0(\mathrm{T}(\widetilde{X^k}))_*$，态射 q是一个等价。因此，要构造 $-\alpha$ 的提升，只需证明 $\varphi \circ q(^{-}\alpha_{\partial_k^0 *})$ 同伦于零。

根据构造，态射 q 与由下式诱导的总 Hochschild 同调上的态射在 ∂_k^0 上的限制一致

$$\mathrm{cof}_1^{\times(k-1)} \mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)) \simeq \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)).$$

因此，根据我们的归纳假设，类 $q(^{\alpha}_{\partial_k^0})$ 与由 $\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X)$ 的定向类诱导的 $T(\widetilde{X^k})$ 的定向类（的像）一致。注意，$\mathrm{T}(X^k)$ 的 $\sim$定向类（的像）通过 δ 诱导出 $q(^{\alpha}_{\partial_k^0})$ 的相反类。因此，$\mathrm{T}(X^k)$ 的定向 $\sim$ 类诱导出到零的同伦 $\varphi \circ q(^{-\alpha}_{\partial_k^0 *}) \simeq 0$。这定义了 $^{-\alpha}_{\partial_k^0 *}$ 的一个提升 $\widetilde{\alpha}$，并且，$\sim$ 根据构造，我们有 $\widetilde{q}(\widetilde{\alpha})$ 与 $\mathrm{T}(X^k)$ 的定向类（的像）一致。

- **该断言的证明**

考虑上一段中构造的类 $\widetilde{\alpha}$: $k[d] \to \mathrm{HH}^{S^1,\mathrm{tot}}(C_*^k)$ 根据构造，类 $\widetilde{\alpha}$ 与描述 α 立方左侧 d-卡拉比–丘结构的类兼容，该结构位于$\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_*$，这意味着它限制为 $^{-}\alpha_{\partial_k^0}$。我们将通过证明 $\widetilde{\alpha}$ 满足命题 2.9的假设来完成证明。由于我们有

$$\mathrm{C}_{\partial_j *}^k \simeq [\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[k,n]}(X))_{\partial_k^0 \partial_j^0 *} \to 0_*]$$

与 α 的相容性也表明 $\widetilde{\alpha}$ 满足命题2.9-(1)。由于 $\widetilde{q}(\widetilde{\alpha})$ 与$\sim$（像）$\mathrm{T}(X^k)$的定向类一致，因此我们也有 $\widetilde{\alpha}$ 满足命题2.9-(1)，从而完成证明。

□

注 3.50。 构造 3.38 可以推广：将一个范畴$(n+m)$-立方体与一个具有$\langle m\rangle$-角、深度为 n 的带边界流形的锥形光滑分层相关联。定理3.51 也可以推广到这一情形。

定理 3.51. 设 (X,P) 是一个深度为 n、维数为 d的带边界锥形光滑分层空间。假设其底层拓扑空间 X 是一个可定向带边流形。在 X 上选取定向，会在范畴 上诱导一个 d-卡拉比–丘结构，该范畴为定义 $(n+1)$ 中的立方体$\mathrm{Cons}_P(X)_*$ 。*3.40*。

证明。 这是命题 $k=n+1$ 中的情形 3.49。 □

推论 3.52. 设(X,P) 是一个深度为 d、维数为 n的带边界锥形光滑分层。假设底层拓扑空间 X 是带边界的可定向流形。在 X 上选取定向，会在函子 n 上诱导一个相对左卡拉比–丘结构。

$$\mathrm{colim}_{I^{n+1}\setminus\{(1,\dots 1)\}}\mathrm{Cons}_P(X)_* \to \mathrm{Cons}_P(X)\,. \tag{9}$$

证明。 这可由定理 3.51 与注 3.42直接结合得到。 □

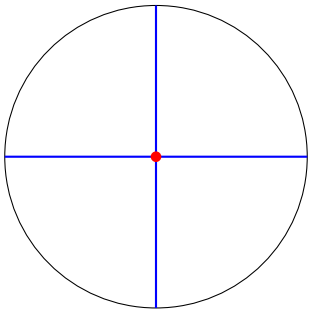
例 3.53. 根据定理 3.52 ，推论适用于 Whitney 分层空间。3.36。

注 3.54。定理3.51 似乎不能直接推广到锥光滑分层空间$(X,\ P)$，如果 X不是流形。一般而言，似乎不存在适用于此目的的 X 定向概念。

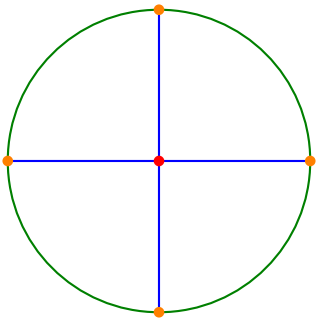
若 X 是闭的，则函子（9）在LinCat_k 中的余纤维等价于$\mathrm{Loc}(X)$，因此继承了绝对左 n-卡拉比–丘结构。若 X 不是闭的定向流形，则$\mathrm{Loc}(X)$一般不具有左卡拉比–丘结构。

3.6 图解示例

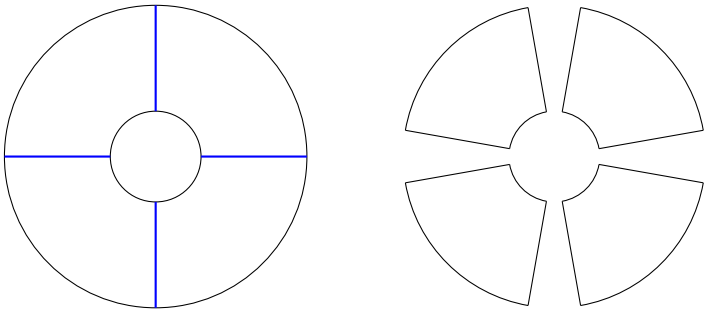
例 3.55。令 $(X,\ P)=(\mathrm{D}_2,\ 0<1<2)$ 为一个二维圆盘，其分层由坐标轴及其在原点处的交点构成，如下图所示：



这是一个分层空间，它是以下带边界锥光滑分层空间的内部（等价地，通过粗化沿边界法向方向的分层，参见注3.21）。

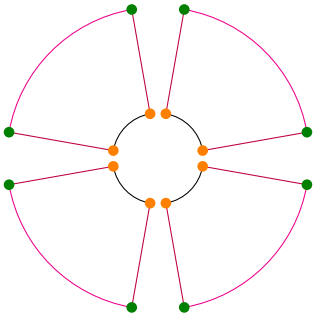


分层空间 $\mathrm{Unzip}^{[2,2]}(X)$ 和 $\mathrm{Unzip}^{[1,2]}(X)$ 的内部可表示如下：



上述分层空间的构造方式是：先移除原点的一个管状邻域（红色），再移除蓝色直线的一个管状邻域。在此例中，$\widetilde{X^2} = X^2$ 是红色原点，而 $\widetilde{X^1}$ 由 $\mathbf{Unzip}^{[2,2]}(X)$ 的蓝色坐标轴给出。

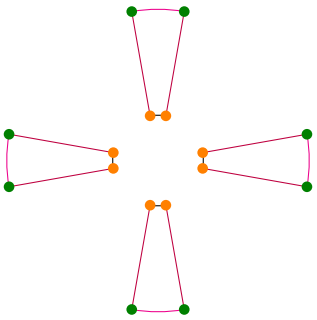
为了在 $\mathrm{Cons}_P(X)$ 上得到卡拉比–丘结构，我们首先考虑由带角光滑流形 $\mathrm{Unzip}^{[1,2]}(X)$经由推论 3.44 产生的卡拉比–丘立方体。为此，我们考虑 $\langle 3\rangle$-角（由 $\mathrm{Unzip}^{[1,2]}(X)$ 所继承），可描绘如下：



于是，左侧 2-卡拉比–丘范畴立方体由推论 3.44 产生，如下所示

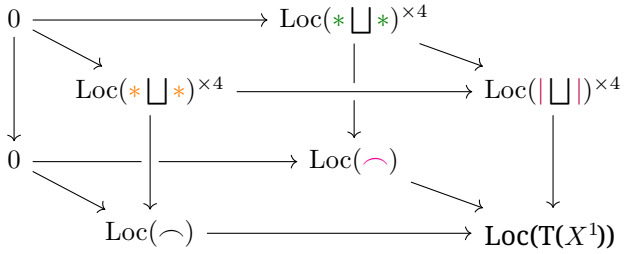
$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Loc}(*\sqcup *)^{\times 4} & & \\
\downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Loc}(\frown)^{\times 4} & \longrightarrow & \mathrm{Loc}(|\sqcup|)^{\times 4} \\
 & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathrm{Loc}(\frown)^{\times 4} & \longrightarrow & \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}^{[1,2]}(X))
\end{array} \tag{10}$$

现在考虑 $\mathbf{Unzip}^{[2,2]}(X)$ 的蓝色坐标轴的一个管状邻域 $\mathbf{T}(\widetilde{X^1})$，并将其赋予如下的 $\langle 3\rangle$-角结构：



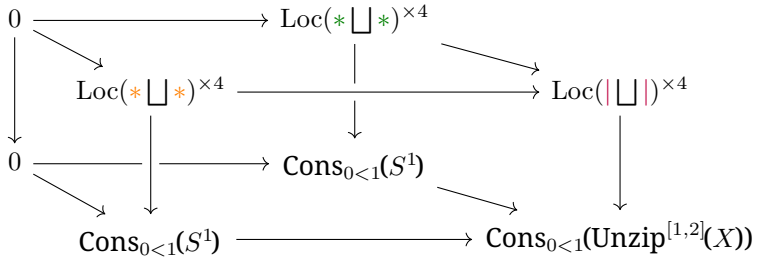
The $\tilde{}$左侧 2-卡拉比–丘范畴立方体，来自带 $\langle 3\rangle$-角的光滑流形 $\mathbf{T}(X^1)$

则由下式给出



(11)

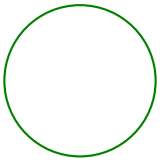
沿用构造3.38，我们以松弛方式沿它们的公共顶面粘合这些立方体（10）和（11），由此得到左侧的 2-卡拉比–丘范畴3-立方体$\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[2,2]}(X))_*$:



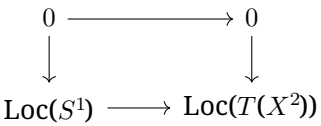
(12)

上图右后方位置出现的分层圆 S^1 是 $\mathsf{Unzip}^{[2,2]}(X)$ 的外圆，而左下方位置出现的分层圆 S^1 是 $\mathsf{Unzip}^{[2,2]}(X)$ 的内圆。请注意，这些圆之所以出现，是因为绿色点和橙色点的四个副本在粘合映射中被（循环地）置换。

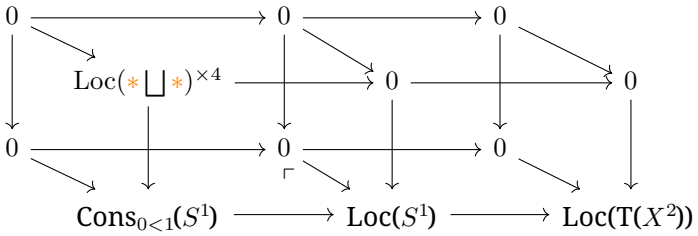
分层 X^2 是原点，其管状邻域 $T(X^2)$ 继承了带有$\langle 2\rangle$-角的流形结构。然而，由于 X^2 与 X 的边界不相交，$\mathsf{T}(X^2)$ 上的 $\langle 2\rangle$- 流形结构源自一种 $\langle 1\rangle$- 流形结构，即带边界的圆盘：



因此，与$\langle 2\rangle$-流形 $\mathsf{T}(X^2)$ 相关联的是以下 2-Calabi–丘方形：



我们将这个正方形扩展为一个由 0 个 3维立方体，并在左侧附上该 3维立方体的左侧面（12）。

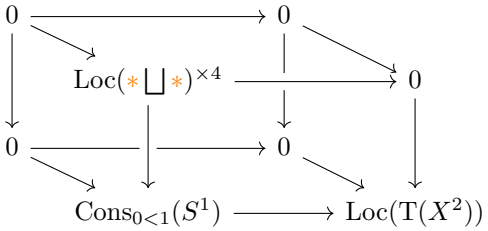


上方左侧 3-立方体的前面是一个推出方块，编码了这种等价关系

$$\mathrm{cof}_1\,\mathrm{Cons}(\mathrm{Unzip}^{[1,2]}(X))_{\partial_1^0 *} \simeq \mathrm{Loc}(T(X^2))_{\partial_1^0 *}\,.$$

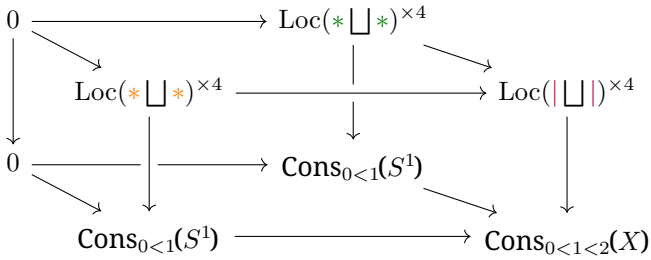
Com放置这些3-立方体，我们得到3-立方体 $\mathsf{Loc}^0(\mathsf{T}(X^2))$，其左面与 le 一致 ft

面（12）：



(13)

最后，我们沿着它们的公共左侧面粘合立方体（12）和（13），从而得到所需的左 2-卡拉比–丘范畴立方体，其尖端为 $\mathrm{Cons}_{0<1<2}(X)$：



4 可构造层模空间上的拉格朗日结构

本节分析定理 3.51 的导出代数几何推论。我们将在第 4.2 节证明，在可定向锥形光滑分层空间上，可构造层和反常层的导出模空间存在移位拉格朗日结构。对于由余维 2 的光滑子流形给出的分层，我们还将在第 4.3 节描述反常层的辛叶，其中层在管状邻域周围具有指定的单值化。例子包括由黎曼曲面和纽结嵌入产生的 0-移位和 (-1)-移位辛栈，参见例 4.39 和例 2。

4.1 对象模空间

本段介绍 k-线性 ∞有限型范畴的对象模空间（定义4.1）。这一构造最早见于 [TV07], ，但我们将采用 [Por25第 1 节中的表述。5] （另见 [AG14第 5], 节，其中采用了不同的约定。）

定义 4.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个紧生成的 k-线性 ∞-范畴。如果 $\mathcal{C}$ 是紧生成的 k-线性 ∞-范畴及保 k-线性紧对象的函子的 ∞-范畴 $\mathbf{LinCat}_k^{\omega}$ 中的一个紧对象，我们就称 $\mathcal{C}$ 为有限型。

回顾 4.2 ([Lur17，第 4 节。8])。 对于 $\mathcal{C}$， $\mathcal{D} \in \mathrm{LinCat}_k$，我们可以考虑它们的张量积

$$\mathcal{C} \otimes_k \mathcal{D} \simeq \mathrm{Fun}_k^{\mathrm{R}}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{D}),$$

其中右侧是由与极限相交换的 k-线性函子构成的 ∞-范畴。这个张量积赋予 $\mathbf{LinCat}_k$ 对称幺半结构，并将其限制到 $\mathbf{LinCat}_k^{\omega}$。若 $\mathcal{C}$ 是紧生成的，则存在一个典范等价

$$\mathcal{C} \otimes_k \mathcal{D} \simeq \mathrm{Fun}_k^{\mathrm{ex}}((\mathcal{C}^{\omega})^{op}, \mathcal{D}),$$

其中右侧是由精确的 k-线性函子构成的 ∞-范畴。

定义 4.3. 设 $\mathcal{C} \in \mathrm{LinCat}_k$ 且 $\mathbf{Spec}(A) \in \mathbf{dAff}_{k\circ}$ 我们将 $\mathcal{C}$ 中对象的 A-族构成的 ∞-范畴定义为

$$\mathcal{C}_A \coloneqq \mathcal{C} \otimes_k \mathrm{Mod}_A .$$

定义 4.4. 设 $\mathcal{C} \in \mathrm{LinCat}_k^{\omega}$，且 $\mathbf{Spec}(A) \in \mathbf{dAff}_{k\circ}$ 我们将 $\mathcal{C}$ 中位于 A 上的伪完美族的 ∞-范畴定义为全子范畴

$$\mathrm{Fun}_k^{\mathrm{ex}}((C^{\omega})^{op}, \mathrm{Perf}(A)) \subset \mathcal{C}_A$$

由取值于 $\mathbf{Perf}(A)$ 的精确 k-线性函子张成。

回顾 4.5 ([Lam25，回顾 2.2。1])。令 $\mathcal{C} \in \mathrm{LinCat}_k^{\omega}$。考虑预层

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{C}} \colon \mathrm{dAff}_k^{op} \to \mathcal{S}$$

$$\mathrm{Spec}(A) \to \mathcal{C}_A^{\simeq}.$$

$\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{C}}$ 预层 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ 定义了一个在 k 上的导出栈。叠 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ 通常过于庞大，无法由某个表示对象表示。$\mathcal{C}$ 的对象导出模空间定义为如下预层

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}} : \mathrm{dAff}_k^{op} \to \mathcal{S}$$

$$\mathrm{Spec}(A) \to \mathcal{C}_A^{pp},$$

其中 $\mathcal{C}_A^{pp} \subset \mathcal{C}_A$ 是由 上的伪完美族所张成的极大群胚，定义见定义4.4。子预层

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}} \subset \widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{C}}$$

是一个导出子叠。

的主要定理 [TV07]表述如下：

定理 4.6 ([AG14，定理 5.8 和推论 5.9])。设 $\mathcal{C} \in \mathrm{LinCat}_k^{\omega}$ 为有限型。那么，$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$是一个局部有限表示于 上的局部几何导出叠。进一步，点 $x\colon \mathrm{Spec}(A) \to \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ 处对应于对象伪完美族的切复形 $M_x \in \mathcal{C}_A$由下式给出

$$x^* \mathbb{T}_{\mathcal{M}_{\mathcal{C}}} \simeq \mathrm{Hom}(M_x, M_x)[1]\,.$$

定理 4.7 ([BD21，定理 5.5])。

(i) 设 $\mathcal{C}$ 是一个紧生成、光滑的 k-线性 ∞-范畴。那么，$\mathcal{C}$ 上的左 d-卡拉比–丘结构会诱导出 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ 上一个$(2-d)$ 移位辛结构。***(ii)*** 设 $\varphi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是紧对象保留的 k-线性函子，介于紧生成、光滑的 k-线性 ∞-范畴之间，且其右伴随为 φ^r。那么，φ 上的相对左 d-卡拉比–丘结构会诱导出 $\varphi^r\colon \mathcal{M}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ 上一个$(2-d)$-移位拉格朗日结构。

我们注意到，定理 4.7 在 [BD21] 中以 dg 范畴和 Toën-Vaquié 模空间对象的术语表述。不过，[BD21] 中给出的证明具有形式范畴性质，因此可直接从 dg 范畴的情形转译到 k-线性稳定 ∞-范畴的情形。

4.2 可构造层与周 perversity 层的模空间

本段中，我们遵循 [HPT26]，给出可构造层与反常层的导出模空间的定义。在紧致锥形光滑分层空间上总是满足的一些温和假设下，可构造层模空间是对象模空间的一个例子（定理 4.17），而反常层模空间是其中的一个开子叠。

我们首先遵循 [BBDG18]，回顾反常层的定义。

定义 4.8。设 (X, P) 是一个分层空间，$\mathfrak{p}\colon P \to \mathbb{Z}$ 是一个函数。设 R 是一个单纯交换环。考虑由下式定义的全子范畴对 $\mathsf{Sh}(X; \mathsf{Mod}_A)$

$${}^{\mathfrak{p}}\mathrm{Sh}(X; \mathrm{Mod}_A)_{\geq 0} := \left\{ F \in \mathrm{Sh}(X; \mathrm{Mod}_A) \mid \ \forall p \in P\ ,\ \pi_i(i_p^*(F)) = 0 \text{ for every } i \leq \mathfrak{p}(p) \right\},$$

$${}^{\mathfrak{p}}\mathrm{Sh}(X; \mathrm{Mod}_A)_{\leq 0} := \left\{ F \in \mathrm{Sh}(X; \mathrm{Mod}_A) \mid \ \forall p \in P\ ,\ \pi_i(i_p^!(F)) = 0 \text{ for every } i \geq \mathfrak{p}(p) \right\}.$$

∞-范畴的反常层为

$${}^{\mathfrak{p}}\mathrm{Perv}(X; \mathrm{Mod}_A) := {}^{\mathfrak{p}}\mathrm{Sh}(X; \mathrm{Mod}_A)_{\leq 0} \cap {}^{\mathfrak{p}}\mathrm{Sh}(X; \mathrm{Mod}_A)_{\geq 0}\,.$$

定义 4.9。在定义4.8的设定下，令

$${}^{\mathfrak{p}}\mathrm{Cons}_P(X; \mathrm{Mod}_A)_{\geq 0} := {}^{\mathfrak{p}}\mathrm{Sh}(X; \mathrm{Mod}_A)_{\geq 0} \cap \mathrm{Cons}_P(X; \mathrm{Mod}_A) \subset \mathrm{Cons}_P(X; \mathrm{Mod}_A)\,.$$

类似地，我们定义 ${}^{\mathfrak{p}}\mathsf{Cons}_P(X; \mathsf{Mod}_A)_{\leq 0}$和 ${}^{\mathfrak{p}}\mathsf{Perv}_P(X; \mathsf{Mod}_A)$。我们用以下符号表示

$${}^{\mathfrak{p}}\mathrm{Perv}_{P,\omega}(X; \mathrm{Mod}_A) := {}^{\mathfrak{p}}\mathrm{Perv}_P(X; \mathrm{Mod}_A) \cap \mathrm{Cons}_{P,\omega}(X; \mathrm{Mod}_A)_{\geq 0} \subset {}^{\mathfrak{p}}\mathrm{Perv}_P(X; \mathrm{Mod}_A)$$

由具有完美茎的 P-可构造反常层张成的全子范畴。

命题 3.13 可用于证明以下结论（另见 [HPT26，引理 3.2.2 和注释 4.2。12]）：

命题 4.10 ([Lam25，命题 4.1。5])。 设 $(X,\ P)$ 是一个分层空间，且 P有限，设 $\mathfrak{p}\colon\ P\to\mathbb{Z}$ 是一个函数。

∞ 类别对（${}^{\mathfrak{p}}Sh(X;\ Mod_A)^{\leq 0},\ {}^{\mathfrak{p}}Sh(X;\ Mod_A)^{\geq 0}$）由定义 *4.8* 定义了 $Sh(X;Mod_A)$ 上的 t-结构 ${}^{\mathfrak{p}}\tau$ 。*2.* 若 $(X,\ P)$ 是锥分层且其分层为局部弱可构造层，则 t-结构 ${}^{\mathfrak{p}}\tau$限制为 $Cons_P(X;\ Mod_A)$ 上的 t-结构。

记号 4.11。 由 [HPT26，引理 3.1。8] 可知，若 $\mathfrak{p}$ 是常数 0 函数，则周 perversity 层范畴 t-结构与 t 上的标准 $\mathrm{Cons}_P(X;\mathrm{Mod}_A)$-结构一致。我们将用 τ_{st} 表示它。

定义 4.12. 设 (X,P) 是一个分层空间，且 P有限，并设 $\mathfrak{p}\colon\ P\to\mathbb{Z}$ 是一个函数。令 $\mathrm{Spec}(A)\ \in\mathrm{dAff}_k$ 和 $F\in\mathrm{Cons}_P(X;\mathrm{Mod}_A)$。我们称 F在 A上是 ${}^{\mathfrak{p}}\tau$-平坦的，如果对每个 $M\in\mathrm{Mod}_A^{\heartsuit}$，都有 $F\otimes_A M\in{}^{\mathfrak{p}}\mathrm{Perv}_P(X;\mathrm{Mod}_A)$。

备注 4.13. 在定义 4.12的设定下，当 A 是离散的时，一个 τ-平坦族 F 在 A上属于 ${}^{\mathfrak{p}}$周 perversity 层范畴$_P(X;\mathrm{Mod}_A)$。事实上，在这种情况下有 $A\in\mathrm{Mod}_A^{\heartsuit}$，因此 $F\simeq F\otimes_A A\in{}^{\mathfrak{p}}$周 perversity 层范畴$_P(X;$ $\mathrm{Mod}_A)$。当 A是一个域时，反之亦成立。

备注 4.14. 在定义4.12的设定下，若考虑记号4.11中的标准 t-结构 τ_{st} ，则 $F\in\mathrm{Cons}_{P,\omega}(X;$ $\mathrm{Mod}_A)$ 是 τ_{st}-平坦的，当且仅当其茎是 Tor 振幅为 $[0,0]$[3] 的 A-模。特别地，当 A 是离散的时，F 是 τ_{st}-平坦的，当且仅当其茎是有限秩局部自由 A-模。

回顾 4.15。 设 (X,P) 为一个分层空间，且 $\mathfrak{p}\colon\ X\to P$为一个函数。可构造层的导出预层栈定义为以下赋值

$$\mathbf{Cons}_P(X)\colon\ \mathrm{dAff}_k\to\mathcal{S}$$

$$\mathrm{Spec}(A)\mapsto\mathrm{Cons}_{P,\omega}(X;\mathrm{Mod}_A)^{\simeq}$$

其函子性由标量扩张给出。如果 P 是有限的，我们令

$${}^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}_P(X)\subset\mathbf{Cons}_P(X)$$

为 k 上的子预层栈，其由具有完美茎且是 ${}^{\mathfrak{p}}\tau$-平坦的可构造层所张成。我们将 ${}^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}_P(X)$ 称为反常层的导出预层栈。

我们强调，如果 (X,P) 是一个带边界的锥状光滑分层，即具有 $\langle 1\rangle$-角，$\mathrm{Cons}_{P,\omega}(X;\ \mathrm{Mod}_A)^{\simeq}$

记号 4.16。 在回顾 4.15的设定中，如果分层是平凡的，即 $P=\{*\}$，我们将 $\mathbf{Cons}_P(X)$ 记为 $\mathbf{Loc}(X)$。进一步地，我们将 $\mathbf{Loc}^{[0,0]}(X)\ \subset\mathbf{Loc}(X)$ 记为 k 上的子预层栈，其由具有完美茎且 Tor 振幅为 $[0,0]$的局部系统所张成。

在下面的定理中，我们总结 [HPT26的推论 4.1.11、命题 4.1.12 和定理 4.2（的证明）中包含的结果。11]。

定理 4.17。 设(X,R) 是一个分层局部弱可缩的锥分层空间，设 $\phi\colon\ R\to P$是偏序集的一个映射，设 $\mathfrak{p}\colon\ P\to\mathbb{Z}$是一个函数。假设$(X,R)$ 是范畴紧的。则：

1. $\mathrm{Cons}_P(X;\mathrm{Mod}_k)\ \in\mathrm{LinCat}_k^{\omega}$是有限型的。
2. 存在一个典范等价

$$\mathcal{M}_{\mathrm{Cons}_P(X;\mathrm{Mod}_k)}\simeq\mathbf{Cons}_P(X).$$

特别地，$\mathbf{Cons}_P(X)$ 是一个局部几何导出叠，且在k上局部有限表示。

[3]回忆一下，如果与任意离散的 A-模作导出张量积后仍然是离散的，那么 A-模就具有 Tor 振幅 $[0,0]$ 。

3. 此外，如果(X, R)是局部范畴紧的，且 R, P是有限偏序集，那么导出堆栈态射

$$^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}_P(X) \hookrightarrow \mathbf{Cons}_P(X)$$

可由开浸入表示。特别地， $^{\mathfrak{p}}$**周 perversity 层范畴**$_P(X)$ 是一个在 k 上局部有限表示的 1-*Artin* 叠。

例 4.18。 定理4.17 根据定理 3.35，适用于带角紧致锥光滑分层空间内部上的可构造层。

为便于后文引用，我们也记录以下结果：

定理 4.19 ([HPT26，引理 4.2.5 和引理 4.2.10])。 设 (X, R) 是一个范畴紧、局部范畴锥形分层空间，其分层局部弱可缩，并且 $\phi\colon R \to P$是有限偏序集之间的映射。设 $\mathfrak{p}\colon P \to \mathbb{Z}$ 是一个函数。那么我们在 dSt_k 中有一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} {}^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}_P(X;\mathrm{Mod}_A) & \longrightarrow & {}^{\mathfrak{p}\circ\phi}\mathbf{Perv}_R(X;\mathrm{Mod}_A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Cons}_P(X;\mathrm{Mod}_A) & \longrightarrow & \mathbf{Cons}_R(X;\mathrm{Mod}_A) \end{array}$$

其中所有箭头都是开浸入。

给定一个函子 $C_*\colon K \to \mathrm{LinCat}_k^{\omega}$，我们记 $\mathcal{M}_{C_*}\colon K \to \mathrm{dSt}_k$为与函子 $\mathcal{M}_{(-)}$复合。推论 3.52转化为以下关于对象模空间的结果：

推论 4.20。 设 (X, P) 是一个深度为 n、带有（可能为空）边界的锥形光滑分层空间。假设其底层拓扑空间 X 是一个维数为 d、带有（可能为空）边界的紧致可定向拓扑流形。设 $\mathfrak{p}\colon P \to \mathbb{Z}$ 是一个函数。那么， X 的任一定向都会在dSt_k中的态射上诱导出$(2-d)$-移位拉格朗日结构

$$\mathbf{Cons}_P(X) \to \lim_{I^{n+1}\setminus\{(1,\dots 1)\}} \mathcal{M}_{\mathrm{Cons}_P(X)_*}.$$

and

$$^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}_P(X) \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{colim}_{I^{n+1}\setminus\{1,\dots,1\}} \mathrm{Cons}_P(X)_*}.$$

证明。回顾一下，根据注 3.17， P是有限的，因此 $^{\mathfrak{p}}\mathrm{Perv}_P(X)$ 有定义，并且根据定理 4.17， $^{\mathfrak{p}}\mathrm{Perv}_P(X)$ $\to\mathrm{Cons}_P(X)$ 是一个开浸入。因此，只需证明第一个陈述。根据构造，图表 $\mathrm{Cons}(X)_*$ 中出现的每个 k-线性 ∞-范畴都是有限型 k-线性 ∞-范畴的余极限，且每个函子都是可对偶化函子的余极限。由于 $\mathrm{LinCat}_k^{\omega}$ $\to\mathrm{LinCat}_k$ 保持余极限，推论 3.52 中的左 d-Calabi-Yau 函子 $\mathrm{colim}_{I^{n+1}\setminus\{(1,\dots 1)\}}$ $\mathrm{Cons}(X)_* \to \mathrm{Cons}_P(X)$ 是有限型范畴之间的一个可对偶函子。由此根据定理 4.7 即得所述结论。

□

注 4.21。 推论 4.20 可以推广到一个分层空间 (X, P) 它允许一个细化(X, R) 且该细化是一个带有（可能为空的）边界的锥形光滑分层空间的内部。事实上，对4.20 应用推论 (X, R)，然后沿开浸入限制拉格朗日态射，即可得到这一结论 $\mathbf{Cons}_P(X) \to \mathbf{Cons}_R(X)$ (定理 4.19)。

作为推论 4.20的直接推论，我们得到以下结果：

推论 4.22。 设 X 是一个带边界的紧致定向流形，其维数为 d。设 (X, P) 是 X 的一个带边界的锥形光滑分层，并设 $\mathfrak{p}\colon P \to \mathbb{Z}$ 是一个函数。那么，导出叠 $\mathbf{Cons}_P(X)$ 和 $^{\mathfrak{p}}$**周 perversity 层范畴**$_P(X)$ 带有$(2-d)$-移位泊松结构。

证明。 得益于 [MS18，定理 4。22]，导出叠态射上的 n-移位拉格朗日结构的空间等价于 n意义下的非退化 [MS18，定义 4。3]。 n的 [CPT+17]与 [MS18] 中的 [Saf18，推论 3。9]所定义的 4.20 推论及移位余等向结构的定义直接推出该结论（见 [CPT+17，定义 3.4。4]及其后的讨论）。

□

在第 4.3.2 节中，我们研究上述泊松结构在某些特定情形下对反常层的辛叶。

4.3 反常层模空间的辛叶

本段研究由闭光滑流形 X和光滑闭子流形 D所给出的锥形光滑分层。在此设定下，我们可以明确描述推论 4.20 （推论 4.27）中出现的拉格朗日态射。当 D 的余维为 2时，这也使我们能够研究反常层模空间的辛叶（定理 4.38）。

4.3.1 光滑子流形情形下的拉格朗日结构

构造 4.23. 设 X 为维数 d 的光滑闭流形，且

$$D \coloneqq \sqcup_{i=1}^{m} D_i$$

为余维数 c 的光滑连通闭子流形的不交并，并带有 $c \geq 1$。考虑分层

$$\rho \colon X \to \{0 < 1\}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } x \in D \\ 1 & \text{if } x \in X \setminus D. \end{cases}$$

分层空间 $(X,\{0<1\})$ 经锥分层，参见 [AFT17，例 3.5。8]。

记号 4.24. 作为例外，在本段中我们将分层空间 $(X,\{0<1\})$ 记为 (X, D)。我们相应地修改 (X, D) 上可构造层与反常层的记号。

由于只有两个分层，我们只需应用一次Unzip 过程，而命题3.49表明，我们得到一个 d维数为1的卡拉比–丘立方体，也就是一个相对 d卡拉比–丘函子。考虑一组管状邻域$\mathrm{T}(D_i) \subset X$ 属于 D_i，$1 \leq i \leq m$。我们可以选择这些管状邻域，使它们彼此不相交，即$\mathrm{T}(D_i) \cap \mathrm{T}(D_j) = \emptyset$ 对每个 $i \neq j$ 都成立。于是我们有

$$\mathrm{Unzip}(X) \simeq X \setminus (\sqcup_{i=1}^{m} \mathrm{T}(D_i))$$

这是一个带边界流形。对于 $1 \leq i \leq m$，令 q: $\partial D_i \to D_i$ 为与 D^c-丛 $\mathbf{T}(D_i) \to D_i$相关联的 S^{c-1}-丛。注意，$\bigsqcup_{i=0}^{m} \partial D_i$ 是 $\mathbf{Unzip}(X)$ 的边界。投影映射 p: $\mathbf{Unzip}(X) \to X$ 与边界的包含映射 $\widetilde{i}$: $\bigsqcup_{i=0}^{m} \partial D_i \to \mathbf{Unzip}(X)$ 在 $\mathbf{Top}$ 中构成如下推出方块:

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{i=0}^{n} \partial D_i & \xrightarrow{\widetilde{i}} & \mathrm{Unzip}(X) \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \bigsqcup_{i=1}^{m} D_i & \xrightarrow[i]{} & X \end{array}$$

命题 4.25。 该函子

$$p_{\#}\widetilde{i}_{*} \colon \bigsqcup_{i=0}^{m} \mathrm{Loc}(\partial D_i) \to \mathrm{Cons}_{0<1}(X)$$

带有相对左 d-卡拉比–丘结构。

证明。 这些函子

$$\widetilde{i}_{\#} \colon \mathrm{Loc}(\bigsqcup_{i=0}^{m} \partial D_i) \simeq \bigsqcup_{i=0}^{m} \mathrm{Loc}(\partial D_i) \to \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}(X))$$

$$q_{\#} \colon \mathrm{Loc}(\bigsqcup_{i=0}^{m} \partial D_i) \simeq \bigsqcup_{i=0}^{m} \mathrm{Loc}(\partial D_i) \to \bigsqcup_{i=0}^{m} \mathrm{Loc}(\mathrm{T}(D_i)) \simeq \mathrm{Loc}(\bigsqcup_{i=0}^{m} \mathrm{T}(D_i))$$

带有相容的相对左 d-卡拉比–丘结构，由 [BD19，定理 5。7]。由推论3.33，我们有一个等价

$$\mathrm{Cons}_{0<1}(X) \simeq \mathrm{Loc}(\bigsqcup_{i=1}^{m} D_i) \underset{\mathrm{Loc}(\bigsqcup_{i=0}^{n} \partial D_i)}{\overrightarrow{\amalg}} \mathrm{Loc}(\mathrm{Unzip}(X)).$$

该断言由命题 2.16 得出。 □

记号 4.26。 我们将 $\widetilde{i}^!\colon \mathrm{Cons}_{0<1}(\mathrm{Unzip}(X)) \to \mathrm{Loc}(\bigsqcup_{i=0}^m \partial D_i)$ 记作零延拓函子 $\widetilde{i}_*\colon \mathrm{Loc}(\bigsqcup_{i=0}^m \partial D_i) \to \mathrm{Cons}_{0<1}(\mathrm{Unzip}(X))$ 的右伴随。

推论 4.27。 在记号 *4.26*下，设 $\mathfrak{p}\colon \{0<1\} \to \mathbb{Z}$ 是一个函数。映射dSt_k

$$\widetilde{i}^!_* p^*\colon \mathbf{Cons}_D(X) \to \prod_{i=0}^m \mathbf{Loc}(\partial D_i).$$

具有一个$(2-d)$移位拉格朗日结构。

证明。 这可由命题 4.25 、定理 3.35 和定理 4.7直接结合得到。 □

推论 4.28。 在记号 *4.26*下，设 $\mathfrak{p}\colon \{0<1\} \to \mathbb{Z}$ 是一个函数。映射dSt_k

$$\widetilde{i}^!_* p^*\colon {}^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}_D(X) \to \prod_{i=0}^m \mathbf{Loc}(\partial D_i).$$

具有一个$(2-d)$移位拉格朗日结构。

证明。 由定理 3.35 和定理 4.17-(3)，自然嵌入 **${}^{\mathfrak{p}}$周 perversity 层范畴**$_D(X) \subset \mathbf{Cons}_D(X)$ 是一个开浸入。因此，结论由推论4.27得出。 □

4.3.2 光滑除子的辛叶

记号 4.29. 在构造 4.23的设定下，在本段余下部分中固定偏 perversity $\mathfrak{p} := \mathrm{id}\colon \{0,1\} \to \{0,1\} \subset \mathbb{Z}$。

例 4.30. 记号 $\mathfrak{p}$ 的偏 perversity 4.29 在 维数 $X=2$(例如 X 是带有有限个标记点的黎曼曲面)时，与中间 perversity 相同；在 维数 $X=3$ (例如， $X=S^3$ 在纽结处分层 $K \subset S^3$) 时，则与下中间 perversity 相同。更一般地，对于 $D \subset X$ 光滑除子（即实余维数为 2的光滑子流形），偏 perversity $\mathfrak{p}$ 与下中间 perversity（的某个平移）相同。

引理 4.31. 在记号 *4.29*的设定下，设 $D \subset X$ 的余维数为 2 ，并设 $\mathrm{Spec}(A) \in \mathrm{dAff}_k$。则函子

$$\widetilde{i}^! p^*\colon \mathrm{Cons}_{0<1}(X; \mathrm{Mod}_A) \to \mathrm{Loc}(\partial D; \mathrm{Mod}_A)$$

限制为一个函子

$$\widetilde{i}^! p^*\colon {}^{\mathfrak{p}}\mathrm{Perv}_{0<1}(X; \mathrm{Mod}_A) \to \mathrm{Loc}(\partial D; \mathrm{Mod}_A)^{\heartsuit}.$$

证明。设 $x \in \partial D$ 和 $F \in {}^{\mathfrak{p}}\mathrm{Perv}_{0<1}(X; \mathrm{Mod}_A)$。我们需要证明 $(\widetilde{i}^! p^* F)_x \in \mathrm{Mod}_A^{\heartsuit}$。问题在 x附近是局部的，因此可以假设 D 是连通的，并且 $D \hookrightarrow X$ 由 $\{(0,0)\} \times D^{n-2} \hookrightarrow D^n \simeq \mathrm{C}(S^1) \times D^{n-2}$给出，其中 D^{n-2}是 $(n-2)$维圆盘。由同伦不变性 [HPT23，推论 5.22], ，我们可以将问题归约到 $\{(0,0)\} \to D^2 \simeq \mathrm{C}(S^1)$。在此情形下，解缠和链接可以通过以下含有拉回方块的图明确描述

$$\begin{array}{ccccc} S^1 \times \{0\} & \xrightarrow{\widetilde{i}} & S^1 \times [0,1) & \xleftarrow{\widetilde{j}} & S^1 \times (0,1) \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow \\ \{(0,0)\} & \xrightarrow[i]{} & \mathrm{C}(S^1) & \xleftarrow{j} & \mathrm{C}(S^1) \setminus (\{(0,0)\}) \end{array}$$

其中，左侧和中间的竖直箭头是自然投影，右侧的竖直箭头是同胚，左侧的水平箭头是闭浸入，右侧的水平箭头是开浸入。考虑纤维/余纤维序列

$$\widetilde{i}^! p^* F \to \widetilde{i}^* p^* F \to \widetilde{i}^* \widetilde{j}_* \widetilde{j}^* p^* F\,.$$

考虑茎在 x 处的同伦群在 $\mathrm{Mod}_A^{\heartsuit}$ 中的长正合列

$$0 \to \pi_1((\widetilde{i}^! p^* F)_x) \to \pi_1((\widetilde{i}^* p^* F)_x) \xrightarrow{\varphi} \pi_1((\widetilde{i}^* j_* j^* p^* F)_x) \to \pi_0((\widetilde{i}^! p^* F)_x) \to \pi_0((\widetilde{i}^* p^* F)_x) \to 0\,,$$

其中 $\pi_i((\widetilde{i}^!p^*F)_x) \simeq \pi_n(i^*F)$ 对所有 $i \neq 0,1$ 都成立。事实上，将同伦不变性应用于沿 $\widetilde{j}$: $S^1 \times (0,1) \to S^1 \times [0,1)$ 的推前，并且由于 F 是 $\mathfrak{p}$-perverse，我们得到 $i^*j_*j^*p^*$ 集中在次数 1。由于 F 是 $\mathfrak{p}$-perverse，对于每个 $n < \mathfrak{p}(0) = 0$，都有 $\pi_n(i^*F) \simeq 0$。此外，由于 F 是 $\mathfrak{p}$-perverse 且 $\mathfrak{p}(1) = 1$，根据 HPT26，引理 3.1.8]，它是 1-余连通的 [。由于 $\widetilde{i}^!$ 对标准 t-结构是左正合的（其左伴随是 t-正合的），我们对每个 $n > 1$ 得到 $\pi_i((\widetilde{i}^!p^*F)_x) \simeq 0$。

因此，我们只需证明 $\pi_1((\widetilde{i}^!p^*F)_x) \simeq 0$，或者等价地，证明该态射

$$\varphi\colon \pi_1((\widetilde{i}^*p^*F)_x) \to \pi_1((\widetilde{i}^*j_*j^*p^*F)_x)$$

是单射。设 $y \in \mathrm{C}(S^1) \setminus \{0\}$，并令 $U_y \subset \mathrm{C}(S^1) \setminus \{0\}$ 为 y 的一个可缩开邻域。展开定义可知，φ 分解为如下复合

$$\pi_1(F_0) \simeq \pi_1\Gamma(\mathrm{C}(S^1), F) \xrightarrow{\varphi_1} \pi_1\Gamma(\mathrm{C}(S^1) \setminus \{0\}, j^*F) \xrightarrow{\varphi_2} \pi_1\Gamma(U_y, j^*F) \simeq \pi_1(j^*F_y)\,.$$

态射 φ_2由限制到 y 的一个可缩开邻域给出，它总是单射（它是 $F_y[-1] \in \mathbf{Mod}_A^\heartsuit$ 的单值化不动点的包含映射）。因此，我们只需证明 φ_1 是单射。为此，考虑纤维/余纤维序列

$$i^!F \to i^*F \to i^*j_*j^*F\,.$$

取茎在 0 处的同伦群的长正合列，我们得到 $\mathbf{Mod}_A^\heartsuit$ 中的一个正合列

$$\pi_1(i^!F) \to \pi_1(i^*F) \xrightarrow{\varphi_1} \pi_1(i^*j_*j^*F)$$

根据 ${}^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}_{0<1}(X; \mathbf{Mod}_A)$ 的定义，我们有 $\pi_1(i^!F) \simeq 0$，因此结论得证。 □

推论 4.32。 在记号 *4.29*的设定下，令 $D \subset X$ 的余维为 2，并令 $\mathrm{Spec}(A) \in \mathrm{dAff}_k$。则函子

$$\widetilde{i}^!p^*\colon \mathrm{Cons}_{0<1}(X; \mathrm{Mod}_A) \to \mathrm{Loc}(\partial D; \mathrm{Mod}_A)$$

将 $\mathrm{Cons}_{0<1}(X; \mathrm{Mod}_A)$ 中的 ${}^{\mathfrak{p}}\tau$-平坦对象映为 $\mathrm{Loc}(\partial D; \mathrm{Mod}_A)$中的 τ_{st}-平坦对象

证明。 令 $M \in \mathrm{Mod}_A^\heartsuit$和 $F \in \mathrm{Cons}_{0<1}(X; \mathrm{Mod}_A)$是 ${}^{\mathfrak{p}}\tau$-平坦的。我们需要证明 $\widetilde{i}^!p^*(F) \otimes_A M \in \mathrm{Loc}(X; \mathrm{Mod}_A)^\heartsuit$。根据 [HPT26，引理 3.3。4]，，我们有一个等价

$$\widetilde{i}^!p^*(F) \otimes_A M \simeq \widetilde{i}^!p^*(F \otimes_A M).$$

由假设可知 $F \otimes_A M \in {}^{\mathfrak{p}}$周 perversity 层范畴$_{0<1}(X; \mathrm{Mod}_A)$，因此结论由引理 4.31得出。

□

推论 4.33。 在记号 *4.29*的设定下，令 $D \subset X$ 的余维为 2。则我们在dSt_k中有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} {}^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}_D(X) & \xrightarrow{\widetilde{i}^!p^*} & \mathbf{Loc}^{[0,0]}(\partial D) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Cons}_D(X) & \xrightarrow[\widetilde{i}^!p^*]{} & \mathbf{Loc}(\partial D) \end{array}$$

其中，竖直箭头是开浸入，水平箭头是$(2 -$ 维数 $X)$-移位拉格朗日。

证明。 上述交换图表存在，这正是推论 4.32 的内容。竖直箭头是开浸入，这正是定理 3.35 和定理 4.17-(3) 的内容。下方水平映射是 $(2-n)$-移位拉格朗日映射，这正是推论 4.27 的内容。由于上方水平映射是将一个 $(2-n)$-移位拉格朗日映射限制到开子叠上，因此它本身也是$(2-n)$-移位拉格朗日映射。 □

我们接下来研究（$2-n$）-移位拉格朗日映射的辛叶

$$\widetilde{i}^! p^* \colon {}^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}_D(X) \to \mathbf{Loc}^{[0,0]}(\partial D)\,.$$

fr来自推论4.33。我们先回顾 Pantev-Toën 的以下构造 [PT21] :

回顾 4.34。 给定 $T \in \mathcal{S}$，我们可以将其视为 k 上的常值导出栈。那么， T 上导出栈的局部常值族由 dSt_k 中的一个态射 $\mathcal{X} \to T$ 给出。令$n \in \mathbb{N}$ 和 $G := GL_n$。考虑叠 $[G/G]$。注意到 S^1 作用于 $[G/G] \simeq$ **映射**$(S^1,\ BG)$。现在考虑一个 S^1-丛 $\partial T \to T$。它由映射 $\alpha\colon T \to BS^1$ 分类。接下来，我们考虑由以下拉回方块定义的 T 上的叠族

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{[G/G]}_\alpha & \xrightarrow{\alpha'} & [[G/G]/S^1] \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ T & \xrightarrow[\alpha]{} & BS^1 \end{array}$$

注意， q 的纤维（非典范地）等价于 $[G/G]$。

现在令 $\lambda \in G$ 和 $Z_\lambda \subset G$ 为其中心化子。于是 S^1 通过元素 $\lambda \in Z_\lambda$ =π_1(Aut(BZ_λ),id) 作用于 $B(Z)$，且映射 $BZ_\lambda \to [G/G]$ 是 S^1-等变的。因此，我们可以类似地构造 $\widetilde{(BZ_\lambda)_\alpha}$ ，它带有一个 1-移位拉格朗日映射 $\widetilde{(BZ_\lambda)_\alpha} \to \widetilde{[G/G]}_\alpha$ ，属于 T 上几何导出栈局部常值族的范畴。如果 T 的同伦型是一个维数为 n 的可定向闭拓扑流形，那么选取一个定向会在全局截面的导出叠上诱导一个 $(2-n)$-移位拉格朗日态射

$$\mathbf{Loc}_{Z_\lambda,\alpha}(Y) \to \mathbf{Loc}_G(Y)\,.$$

回顾 4.35。 设 $r \in \mathbb{N}$ 和 k 是特征零的域。那么存在一个典范开浸入 $BGL_r \to \mathbf{Perf}_k$ ，将秩为 r 的向量丛映至相应的、集中在次数 0的完美复形。根据 [PTVV13], ，叠 BGL_r 和$\mathbf{Perf}_k$ 具有相容的辛结构。注意，根据 Fu25的定理 6，特征零的假设可放宽为 $\mathrm{char}(k) \neq 2$。 [23]。

回顾 4.36。 设 T 是一个局部弱可缩的拓扑空间。根据注4.14，导出栈 $\mathbf{Loc}^{[0,0]}(X)$ 分解为开闭子栈的不交并

$$\mathbf{Loc}^{[0,0]}(T) := \coprod_{r\in\mathbb{N}} \mathbf{Loc}^r(T),$$

其中 $\mathbf{Loc}^r(T)$ $\simeq \mathbf{Map}(\Pi_\infty(T)\ BGL_r)$ 是 T上秩为 r的局部系统的导出栈。根据回顾 4.35，如果 T 是一个可定向闭连通拓扑流形，那么 $\mathbf{Loc}^{[0,0]}(T)$ 和$\mathbf{Loc}(T)$ 具有相容的辛结构。

构造 4.37。 在记号 4.29的设定下，记 D 为其连通分支的不交并 $D_1, \ldots, D_m$。根据回顾 4.36，导出栈 $\mathbf{Loc}^{[0,0]}(\partial D)$ 分解为开闭子栈的不交并

$$\mathbf{Loc}^{[0,0]}(\partial D) \simeq \coprod_{\underline{r}\in\mathbb{N}^m} \mathbf{Loc}^{\underline{r}}(\partial D)\,,$$

其中

$$\mathbf{Loc}^{\underline{r}}(\partial D) := \prod_{i=1}^{m} \mathbf{Loc}^{r_i}(\partial D_i)\,.$$

我们将导出栈 ${}^{\mathfrak{p}}$**周 perversity 层范畴**$^r_D(X)$ 定义为 dSt_k 中如下的拉回:

$$\begin{array}{ccc} {}^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}^{\underline{r}}_D(X) & \longrightarrow & \mathbf{Loc}^{\underline{r}}(\partial D) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}_D(X) & \xrightarrow{\widetilde{i}^! p^*} & \mathbf{Loc}^{[0,0]}(\partial D) \end{array}$$

那么， **$^{\mathfrak{p}}$周 perversity 层范畴**$_D(X)$ 分解为开闭子栈的不交并

$$^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}_D(X) \simeq \coprod_{\underline{r}\in\mathbb{N}^m} {}^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}^{\underline{r}}_D(X)\,.$$

对于一组元素 $\lambda_i \in GL_{r_i}$、 $i=0$、……、 m，在回顾 4.34的设定下，我们通过 **$^{\mathfrak{p}}$周 perversity 层范畴**$^{\lambda}_D$（X）在dSt_k中的拉回方块来定义导出栈

$$\begin{array}{ccc} {}^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}^{\underline{r},\lambda}_D(X) & \longrightarrow & \mathbf{Loc}_{Z_{\underline{\lambda}},\alpha}(\partial D) \coloneqq \prod_{i=1}^m \mathbf{Loc}_{Z_{\underline{\lambda}},\alpha_i}(\partial D_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}^{\underline{r}}_D(X) & \xrightarrow[\widetilde{i}^!p^*]{} & \mathbf{Loc}^{\underline{r}}(\partial D) \coloneqq \prod_{i=1}^m \mathbf{Loc}^{r_i}(\partial_i D) \end{array} \tag{14}$$

其中， $\alpha\colon\ D \to BS^1$（分别地， $\alpha_i\colon\ D_i \to BS^1$）是将 S^1-丛 $\partial D \to D$（分别地， $\partial D_i \to D_i$）分类的映射。

我们得到以下 **$^{\mathfrak{p}}$周 perversity 层范畴**$_D(X)$的辛叶：

定理 4.38。设有一组元素 $\lambda_i \in GL_{r_i}$、 $i=0$、……、 m。则由构造**$^{\mathfrak{p}}$周 perversity 层范畴**$^{\underline{r},\lambda}_D$、（$X$）中具有指定单值化 $\lambda=\{\lambda_1$、……、 $\lambda_m\}$ 的反常层所构成的导出栈4.37带有一个（$2-$维数 X）移位辛结构。

证明。 根据推论 4.33、回顾 4.34 和回顾4.35，(14) 中底部水平态射和右侧竖直态射带有相容的 $2-$维数 X)-移位拉格朗日结构。由导出拉格朗日交理论 [PTVV13，定理2，即可得到该断言。9]。□

例 4.39。 设 S为一个黎曼曲面，且 $D=\{p_1,\ldots p_n\}\subset S$为有限个点。设 $r=\{r_1,\ldots,r_m\}\in\mathbb{N}^r$ 和 $\lambda=\{\lambda_1 \cdot\cdot \lambda_r\}\in\prod_{i=1}^m GL_{r_i}$。 则存在如下的 1-移位拉格朗日交拉回方块于 dSt_k 中：

$$\begin{array}{ccc} {}^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}^{\underline{r},\lambda}_D(S) & \longrightarrow & \prod_{i=1}^m BZ_{\lambda_i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^{\mathfrak{p}}\mathbf{Perv}^{\underline{r}}_D(S) & \xrightarrow[\widetilde{i}^!p^*]{} & \prod_{i=1}^m \mathbf{Loc}^{r_i}(S^1) \simeq \prod_{i=1}^m [GL_{n_i}/GL_{n_i}] \end{array}$$

特别地， **$^{\mathfrak{p}}$周 perversity 层范畴**$^{\underline{r},\lambda}_D$，($S$) 带有一个 0-移位辛结构。

注 4.40。 我们指出，研究更复杂分层的辛叶是一个具有挑战性的问题。例如，设 (X,D) 为一个分层空间，其中 X 为一个复代数簇，且 $D\subset X$ 为一个正规交叉除子，并且其中两个（或更多）不可约分支相交。那么，除了它是可构造层的叠的拉回之外，我们没有移位拉格朗日 $\mathbf{Cons}_D(X)$ 的移位辛目标的显式描述。由于其中涉及例外拉回，我们不期望该辛目标通常能够由局部系统范畴来描述（如在光滑除子情形中那样）。关于两个分支情形下补集 D 上的局部系统的一些考察 $D=D_1\cup D_2$，参见 [PT21，第 4 节。3]。

参考文献

[AFR19] D. Ayala、J. Francis 和 N. Rozenblyum. 分层同伦假设。《欧洲数学学会杂志》（*JEMS*），21(4):1071–1178，2019年。[AFT17] D. Ayala、J. Francis 和 H. Tanaka. 分层空间上的局部结构。 数学进展，307:903–1028，2017。[AG14] B. Antieau 和 D. Gepner. 导出代数几何中的 Brauer 群与 étale 上同调。《几何与拓扑》，18(2):1149–1244，2014。[AHM26] F. Abellan、R. Haugseng 和 L. Martini. 自由纤维化、松弛余极限以及 $(\infty,2)$-范畴的 Kan 扩张。arXiv:2602.07604，2026 年。

[BBDG18] A. Beilinson、J. Bernstein、P. Deligne 和 O. Gabber. 反常层。《奇异空间上的分析与拓扑》研讨会论文集。第一部分，Astérisque 第100卷。巴黎：法国数学学会（SMF），第2版，2018。[BCS24] T. Bozec、D. Calaque 和 S. Scherotzke. 与卡拉比–丘范畴相关的拓扑场论。arXiv:2410.17726，2024。[BD19] C. Brav 和 T. Dyckerhoff. 相对卡拉比–丘结构。《数学构图》，155(2):372–412，2019年。[BD21] C. Brav 和 T. Dyckerhoff. 相对卡拉比–丘结构 II：对象模空间中的移位拉格朗日结构。《Selecta Mathematica（新辑）》，27(63)，2021。[BDN+25] C. Bu、B. Davison、A. Ibáñez Núñez、T. Kinjo 和 T. Pădurariu. 对称栈的上同调。arXiv:2502.04253，2025年。[BK16] R. Bezrukavnikov 和 M. Kapranov. 微局部层与箭图簇。《图卢兹数学科学学院年刊》，25(2-3):473–516，2016。[Cal15] D. Calaque. 映射栈上的拉格朗日结构与半经典拓扑场论。载于《几何、拓扑与代数中的栈与范畴》。CATS4高阶范畴结构及其与代数几何、代数拓扑和代数相互作用会议，CIRM，法国吕米尼，2012年7月2日至7日，第1–23页。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2015年。[CDW23] M. Christ、T. Dyckerhoff 和 T. Walde. 稳定 ∞范畴的复形。arXiv:2301.02606，2023年。[Chr22] M. Christ. 稳定无穷范畴的球形单子伴随。《国际数学研究通知》（IMRN），2023(15):13153–13213，2022年。[Chr23] M. Christ. 曲面上的相对卡拉比–丘结构与反常schober。arXiv:2311.16597，2023年。[CJ24] D. Clausen 和 M. O. J ansen. 作为不稳定代数K理论模型的约化Borel–Serre紧化。《Selecta Mathematica（新辑）》，30(1):93，2024年。编号10。[CPT+17] D. Calaque、T. Pantev、B. Toë、M. Vaquié 和 G. Vezzosi. 移位泊松结构与变形量子化。《拓扑学杂志》，10(2):483–584，2017。[DJW19] T. Dyckerhoff、G. Jasso 和 T. Walde. 高阶Auslander–Reiten理论中的单纯形结构。数学进展，355:73，2019。编号106762。[Efi24] A. Efimov. 大范畴的K理论与局部化不变量。arXiv:2405.12169，2024年。[FR99] V.V. Fock 和 A.A. Rosly. 黎曼曲面上平坦联络模空间的泊松结构及其 r-矩阵。载于《莫斯科数理物理研讨会》，第67–86页。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，1999年。[Fu25] J. Fu. 特征 $p > 2$下导出概形的（-1）移位达布定理。arXiv:2511.12584，2025年。[GHJW97]K. Guruprasad、J. Huebschmann、L. Jeffrey 和 A. Weinstein. 抛物丛的群系、群胚与模空间。《杜克数学杂志》，89(2):377–412，1997年。[Gol06] W.M. Goldman. 曲面群表示上的映射类群动力学。载于《映射类群及相关主题问题》，第189–214页。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2006年。[GR98] K. Guruprasad 和 C.S. Rajan. 群上同调与表示模空间上的辛结构。《杜克数学杂志》，91(1):137–149，1998年。[HK25] L. Hennecart 和 T. Kinjo. BPS分解定理。arXiv:2509.21298，2025年。[HPT23] P.J. Haine、M. Porta 和 J.B. Teyssier. 可构造层的同伦不变性。《同调、同伦及应用》，25(2):97–128，2023年。[HPT24] P.J. Haine、M. Porta 和 J.B. Teyssier. 超越锥性的外同伦。arXiv:2401.12825，2024年。[HPT26] P.J. Haine、M. Porta 和 J.B. Teyssier. 反常层的导出模空间。准备中，2026年。

[HSS17] M. Hoyois、S. Scherotzke 和 N. Sibilla。高阶迹、非交换动机与范畴化陈特征。数学进展，309：97–154，2017。[Jän68] K. Jänich。关于 $O(n)$-流形的分类。数学年刊，176：53–76，1968。[Jan24] M. O. Jansen。拓扑 ∞-叠的分层同伦论：工具箱。纯粹与应用代数杂志，228(11)：28，2024。编号 107710。[Lam25] E. Lampetti。对象模空间的好模空间。arXiv:2510.23835，2025。[Lau00] G. Laures。关于带角流形的配边。美国数学会汇刊，352(12)：5667–5688，2000。[Lur17] J. Lurie。高阶代数。可在此处获取，2017。[Lur24] J. Lurie。Kerodon。https://kerodon.net，2024。[MS18] V. Melani 和 P. Safronov。导出余迷向结构。II：叠与量子化。Selecta Mathematica（新辑），24(4)：3119–3173，2018。[NV23] G. Nocera 和 M. Volpe。Whitney分层是锥光滑的。Selecta Mathematica（新辑），29(5)：20，2023。编号 68。[Por25] M. Porta。模理论的导出方法。指导研究特许资格，斯特拉斯堡大学，2025年3月。[PT21] T. Pantev 和 B. Toën。光滑簇上局部系统模空间的泊松几何。数理解析研究所纪要，57(3-4)：959–991，2021。[PT22] M. Porta 和 J.-B. Teyssier。带系数的拓扑外单值。arXiv:2211.05004，2022。[PTVV13] T. Pantev、B. Toën、M. Vaquié 和 G. Vezzosi。移位辛结构。法国高等科学研究所数学出版物，117：271–328，2013。[Saf18] P. Safronov。Brace代数与泊松可加性。数学构图，154(8)：1698–1745，2018。[ST25] V. Shende 和 A. Takeda。拓扑Fukaya范畴上的Calabi-Yau结构。数学构图，161(5)：1128–1214，2025。[Tre09] D. Treumann。出口路径与可构造叠。数学构图，145(6)：1504–1532，2009。[TV07] B. Toën 和 M. Vaquié。dg-范畴中的对象模空间。巴黎高师科学纪事（第4辑），40(3)：387–444，2007。[Vol24] M. Volpe。分层同伦论中的有限性与有限支配。arXiv:2412.04745，2024。[Vol25] M. Volpe。锥光滑分层空间上的Verdier对偶。代数与几何拓扑，25(2)：919–950，2025。[Whi40] J. H. C. Whitehead。关于 C^1-复形。数学纪事（第2辑），41：809–824，1940。MC：数学研究所，波恩大学，Endenicher Allee 60，53115 波恩，德国 电子邮件地址： christ@math.uni-bonn.deEL：索邦大学与巴黎西岱大学，法国国家科学研究中心，巴黎左岸数学研究所，F-75005 巴黎，法国

电子邮件地址： lampetti@imj-prg.fr