过完备量子低密度奇偶校验码置信传播译码中的对数似然比失配

Hernan Cordova、Alexios Balatsoukas-Stimming、Gabriele Liga、Yunus Can Gültekin 和 Alex Alvarado 电气工程系，埃因霍温理工大学，荷兰 {h.x.cordova, a.k.balatsoukas.stimming, y.c.g.gultekin, g.liga, a.alvarado}@tue.nl

arXiv:2603.04991v1 [cs.IT] 5 Mar 2026

摘要——量子低密度奇偶校验码（QLDPC）的置信传播（BP）译码通常采用过完备稳定子（OS）表示，通过引入冗余奇偶校验来提升有限长度性能。此类表示下的译码器行为主要由有限次迭代动力学决定，而非渐近码属性。众所周知，这些动力学在很大程度上取决于译码器的初始化。本文研究用于置信传播初始化的失配对数似然比（LLR）对采用OS表示的QLDPC码性能的影响。结果表明，初始对数似然比失配会显著影响帧错误率（FER），尤其是在低噪声区间。我们还发现，最优性能并非只出现在某个狭窄的参数点：在较宽的失配对数似然比范围内，帧错误率基本不受影响。这一现象表明，与其将对数似然比失配视为必须与量子信道精确匹配的量，不如将其理解为一种正则化控制参数。

索引词—**置信传播、对数似然比失配、过完备稳定子、量子纠错、QLDPC**。

一、引言

量子计算有望通过解决经典计算机难以处理的问题，变革药物发现、材料科学、密码学和优化等领域。然而，量子系统天生脆弱：量子比特容易受到噪声、退相干和操作缺陷的影响，导致量子信息迅速受损。因此，稳健的量子纠错（QEC）不可或缺。没有量子纠错，就不可能将规模扩展到如今的小型含噪原型系统之上。量子纠错的持续进步，对于从概念验证设备过渡到早期容错架构，并最终实现实用的大规模量子计算，至关重要。量子低密度奇偶校验（QLDPC）码是量子纠错中一种特别有前景的方案 [1]–[3]。

置信传播（BP）译码在经典低密度奇偶校验码中广为人知，并于 [4]–[7] 首次应用于量子低密度奇偶校验码。在其四元表示（BP4）中，BP 在 GF(4) 上实现，并直接处理泡利符号。BP4 能自然地处理量子纠错中的简并性 [6], [8]。近期的译码器实现表明，在过完备稳定子（OS）表示上运行 BP 可以提升性能；这种表示会在 Tanner 图中显式纳入冗余奇偶校验 [9], [10]。作为 BP4 的替代方案，量子低密度奇偶校验码的译码也可以使用 BP2，通过对稳定子矩阵进行二元投影来实现。

尽管过完备性可以在有限分组长度下降低帧错误率（FER），但它也会显著改变置信传播（BP）所作用的图结构。冗余 OS 会增加短环的密度，尤其是长度为 4 的环，从而增强消息相关性，并使局部树状假设以及密度演化等传统渐近分析技术失效 [11], [12]。因此，OS 上的译码器行为主要由有限次迭代动力学决定，而非由渐近收敛性质决定。

所假设的信道参数（例如去极化信道中的去极化概率 ε_0 ）不仅仅表示一个信道参数，还直接决定注入译码器的初始对数似然比（LLR）的幅度。这种初始化进而决定消息饱和的速度，以及信息通过短反馈环得到强化的程度，尤其是通过 OS 图中按设计大量存在的长度为 4 的环。因此，所假设的信道参数充当了早期置信传播（BP）动力学的隐式正则化参数或稳定性控制参数，而不是渐近最优的选择。

对于在 OS 图上运行的 BP4 译码器，经验观察发现，在中等（至高）噪声区间，适度的信道参数失配可以降低帧错误率，如 [9, 图 3]所示。这种失配对应于假定的（初始）信道参数与真实信道参数不同的情况。虽然在量子设置中，失配能够降低 BP4 帧错误率这一现象是新发现，但早在 [13]中就有人提出，经典低密度奇偶校验码在二元对称信道上也存在这一现象。现有文献中的结果尚未明确说明信道失配对量子低密度奇偶校验码的实际作用，也未阐明这种敏感性是否为四元 BP（BP4）所特有，还是反映了 BP 在 OS 图上的更普遍性质。

本文对上述对数似然比失配进行了详细研究，重点关注 BP4 和 BP2 译码。我们的主要贡献是揭示了两种译码器的性能都高度依赖于对数似然比失配。不过，结果也表明，最优失配并非集中在一个狭窄范围内。相反，表面上的最优值对应的是一段失配程度相近的工作区间，而不是某个需要精细调节的单一数值。这些结果促使我们将对数似然比计算视为有限迭代正则化参数，而非必须与量子

本研究部分经费由荷兰国防部通过 Purple Nectar QuantumChallenge 2025 计划（TORQUE 项目）资助。

信道完美匹配的过程。数值结果表明，在低噪声区间，失配对数似然比相较于匹配的对数似然比，在 BP2 和 BP4 中均可带来近两个数量级的增益。据我们所知，本文首次表明，对数似然比失配可带来显著的帧错误率增益，且 BP2 和 BP4 均可观察到这些增益。

符号约定：标量用小写字母表示（例如 ε），向量用粗体表示（例如$\boldsymbol{E}$），矩阵用大写字母表示（例如 H）。有限域记为 GF(2) 和 GF(4)。花体字母表示索引集（例如 G）。迹内积为 $\cdot,\cdot_{\mathrm{tr}}:\mathrm{GF}(4)^n\times\mathrm{GF}(4)^n\to\mathrm{GF}(2)$。$\mathrm{GF}(4)^n$ 中的加法记作 $\oplus$，对应于模去全局相位后的逐分量泡利乘法。$\mathrm{FER}(\varepsilon;L_0)$ 表示帧错误率。

II. 系统模型与 BP解码器

图 1 展示了所考虑的受量子纠错保护的量子系统概览。首先，将 k 个逻辑量子比特编码为 n 个物理量子比特，记为 $|\psi\rangle$。编码后的量子比特受到由退极化概率 ε 定义的量子信道影响。该信道引入噪声 $\boldsymbol{E}$，产生带噪输出 $\boldsymbol{E}|\psi\rangle$，其中 $\boldsymbol{E}$ 逐分量作用于物理量子比特。BP解码器利用通过对带噪量子比特$\boldsymbol{E}|\psi\rangle$进行稳定子测量所获得的 m位伴随式向量，以及对数似然比 $L_{\mathrm{ch}}(\varepsilon_0)$——它是对假设信道参数 ε_0 的函数——来估计错误向量 $\boldsymbol{E}$，得到 $\hat{\boldsymbol{E}}$。在以下小节中，我们将更详细地介绍上述步骤。

A. 量子低密度奇偶校验码

我们考虑一种量子低密度奇偶校验码，它将 k 个逻辑量子比特编码为 n 个物理量子比特，并由校验矩阵 $H\in\mathrm{GF}(4)^{m\times n}$ 指定，该矩阵满足有效稳定子生成元所需的辛正交条件 [3], [14]。如 [14] 所示，编码通过在辅助量子比特与 k 个逻辑量子比特之间施加 CNOT门来完成。

B. 量子信道与稳定子

我们假设存在一个去极化信道，其中每个量子比特 j 都受到独立且同分布的影响。量子比特 j 上的错误 E_j 建模为泡利算符 $E_j\in\{I,\ X,\ Y,\ Z\}$。为进行解码，我们根据 [15] 中描述的标准稳定子同构，将这些泡利算符表示为 GF(4) 中对应的元素。在全文中，符号 $\{I,\ X,\ Y,\ Z\}$ 既表示物理泡利矩阵，也表示其对应的 GF(4) 元素，具体含义由上下文确定。在去极化信道下，n 量子比特错误模式为 $\boldsymbol{E}=(E_1,\ \ldots\ldots,\ E_n)\in\mathrm{GF}(4)^n$，错误的分布为

$$\Pr\{E=e\}=\begin{cases}1-\varepsilon, & e=I\\ \varepsilon/3, & e=X\\ \varepsilon/3, & e=Y\\ \varepsilon/3, & e=Z\end{cases}, \tag{1}$$

其中 ε 是去极化概率，并且我们使用了$\Pr\{E_j=e\}=\Pr\{E=e\}$，因为该信道是无记忆的。

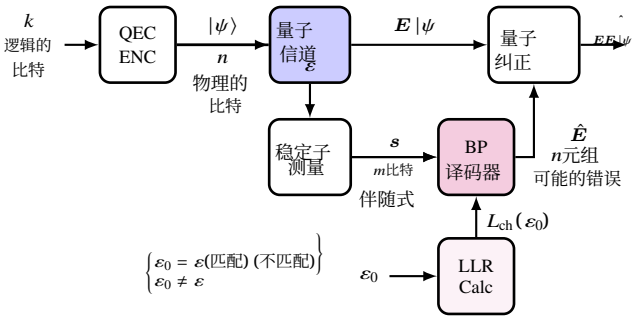

图 1. 量子纠错译码框图。BP4 及其等效的 BP2 均采用相同的 OSGB(126，28，126) 构造 ($k=28,\ n=m=126$)。真实信道退极化概率为 ε。LLR计算模块使用 ε_0。

伴随式向量 $\boldsymbol{s}\in\mathrm{GF}(2)^m$在给定错误实现$\boldsymbol{E}\in\mathrm{GF}(4)^n$时按分量定义为:

$$s_i=\langle H_i,\boldsymbol{E}\rangle_{\mathrm{tr}},\qquad i=1,\ldots,m, \tag{2}$$

其中，H_i 表示 H 的第 i行，$\cdot,\ \cdot_{\mathrm{tr}}$ 为迹内积。译码在陪集层面进行，这意味着两个相差一个稳定子元素的错误模式 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{E}'$ 会产生相同的伴随式，并对码空间 [15] 产生相同作用。因此，译码器要在正确的稳定子陪集中寻找一个估计，而不是精确的物理ˆ错误。令 $\boldsymbol{E}$ 表示译码器对错误的估计（见图 1 中置信传播解码器模块的输出）。残余˜ ˆ错误定义为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\oplus\boldsymbol{E}$，其中 $\oplus$ 表示 GF(4) 中的加法^n ，对应于模去全局相位后的逐分量泡利乘法，如 [15]中所述。若残余错误˜ ˜$\boldsymbol{E}\in\mathrm{S}$，即 $\boldsymbol{E}$ 与所有稳定子生成元都对易，则判定本次译码尝试成功。这里，S 表示稳定子群。实际上，使用稳定子生成元矩阵 G验证这一条件。该矩阵包含稳定子群 S 的一组独立生成元˜，用于验证残余错误 $\boldsymbol{E}$ 是否属于 S，如 [10], [15]中所述。

C. BP解码器

我们重点讨论 OS表示，其中包含额外冗余，以便 $m>n-k$。变量节点（量子比特）的索引为 $j\in\{1,\ldots,n\}$，校验节点（稳定子）的索引为$i\in\{1,\ldots,m\}$。令 $\mathrm{N}(j)$ 表示与变量节点 j 相邻的校验节点集合，$\mathrm{M}(i)$ 表示与校验节点 i相邻的变量节点集合。

在稳定子矩阵的二元投影上执行 BP2 译码。定义 $(H_Z)_{i,\ j}=\mathbf{1}\{H_{i,\ j}\in\{X,\ Y\}\}$ 和 $(H_X)_{i,\ j}=\mathbf{1}\{H_{i,\ j}\in\{Z,\ Y\}\}$，分别得到二元奇偶校验关系$\boldsymbol{s_Z}=H_Z\boldsymbol{e}_X$ (模 2) 和 $\boldsymbol{s_X}=H_X\boldsymbol{e}_Z$ (模 2)，其中 $\boldsymbol{e}_X$ 和 $\boldsymbol{e}_Z$ 分别表示指示 $\boldsymbol{E}$中存在 X 和 Z 分量的二元向量。分别对这两个二元系统应用 BP2 译码，最多进行$l^{\max}$ 次迭代，并采用基于综合征的停止规则。由于物理噪声作用于量子比特，因此只有变量节点被赋予初始 LLR 值，而校验节点表示

确定性奇偶校验约束，其 LLR 值初始化为零 [9]。更多详情请参见 [6]–[8]。

对于 BP4，我们考虑与 [9], 中相同的表征，该表征采用标量消息传递，而非（四元）向量消息传递。令 $L_{j\to i}^{(\ell)}$ 和 $L_{i\to j}^{(\ell)}$ 分别表示迭代 l 时变量到校验节点（V2C）和校验节点到变量（C2V）的对数似然比消息。校验节点 i 处的 C2V 更新为：

$$L_{i\to j}^{(\ell)} = (-1)^{s_i}\, 2\,\operatorname{atanh}\left(\prod_{k\in\mathcal{M}(i)\setminus\{j\}} \tanh\left(\frac{L_{k\to i}^{(\ell)}}{2}\right)\right), \qquad (3)$$

其中，s_i 的定义见式（2），而式（3）中的校验节点符号因子 $(-1)^{s_i}$ 考虑了测得的伴随式值，因此每个稳定子节点 i 都会反映其邻域内累积的泡利错误与相应稳定子生成元是对易（$s_i = 0$）还是反对易（$s_i = 1$）。

在迭代l时，每个变量节点 j 处的 V2C 更新通过汇总除目标校验节点外的所有传入 C2V 消息，并加上初始对数似然比贡献 $L_{\mathrm{ch}}^{\mathrm{BP4}}(\varepsilon_0)$ 得到：

$$L_{j\to i}^{(\ell)} = L_{\mathrm{ch}}^{\mathrm{BP4}}(\varepsilon_0) + \sum_{i'\in\mathcal{N}(j)\setminus\{i\}} L_{i'\to j}^{(\ell)}, \qquad (4)$$

根据 [16] 中提出并在 [9], 中应用的标量化原理，在每个变量节点 j处计算三个后验对数似然比，分别对应 X、Y 和 Z 错误（泡利）假设（相对于恒等假设）。这些值由标量边消息计算得出，无需进行向量消息传递。因此，与完整的向量消息置信传播相比，这种标量化技术 [16]在降低计算复杂度的同时，保留了泡利符号概率的相对排序。硬判决选择与最大后验对数似然比对应的泡利符号。如果三个 LLR 值均为正，则选择恒等算符。当满足伴随式约束或达到最大迭代次数$l^{\max}$ 时，译码器终止。

D. 对数似然比失配

如式（1）所示，量子（物理）信道由去极化概率 ε 表征。BP解码器在每个变量节点 j 处初始化，所用对数似然比根据去极化概率 ε_0计算。匹配 运行对应于 $\varepsilon_0 = \varepsilon$，而不匹配 运行指的是 $\varepsilon_0 \neq \varepsilon$的情况。

BP2 译码运行于基于二进制矩阵 H_X 和 H_Z构建的Tanner图上。交换的消息是标量，用于量化错误分别为 Z 或 X的置信度，因为 X 和 Z 反对易。因此，BP2 中的初始对数似然比定义为

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{ch}}^{\mathrm{BP2}}(\varepsilon_0) &\triangleq \underbrace{\ln\left(\frac{\Pr\{I\in\{I,X\}\mid\varepsilon_0\}}{\Pr\{I\in\{Y,Z\}\mid\varepsilon_0\}}\right)}_{\text{for } H_X} \\ &= \underbrace{\ln\left(\frac{\Pr\{I\in\{I,Z\}\mid\varepsilon_0\}}{\Pr\{I\in\{X,Y\}\mid\varepsilon_0\}}\right)}_{\text{for } H_Z} = \ln\left(\frac{1-2\varepsilon_0/3}{2\varepsilon_0/3}\right) \end{aligned} \qquad (5)$$

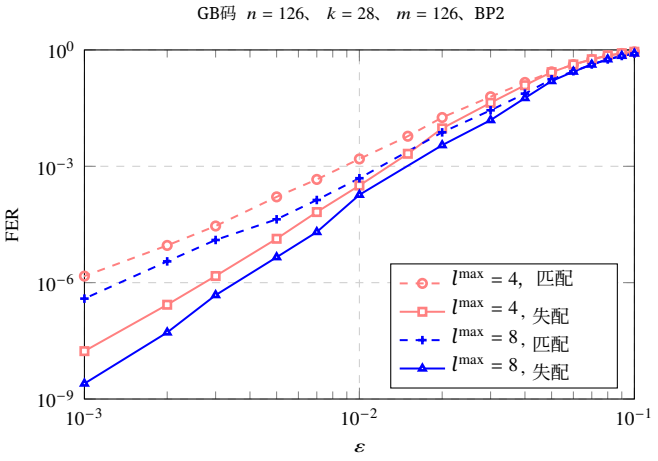

图 2. OS GB(126，28，126) 码上 BP2 的帧错误率。对数似然比失配（$\varepsilon_0 = 0.10$）有助于提升有限迭代帧错误率性能。

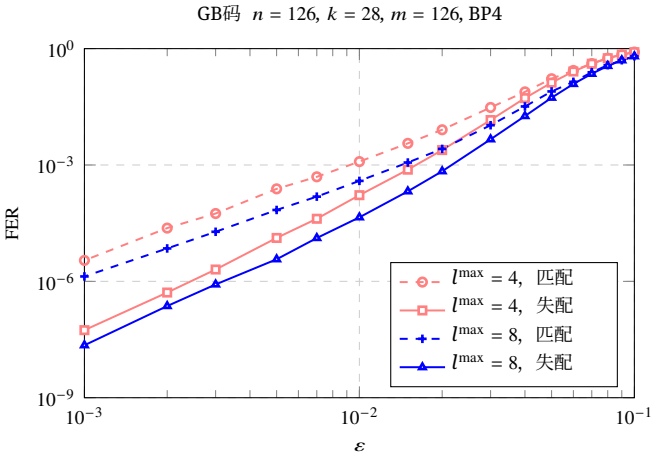

图3. OS GB(126，28，126)码的BP4帧错误率。对数似然比失配（$\varepsilon_0 = 0.10$）可改善有限迭代帧错误率性能。

这可直接由错误模型 (1) 得出。

BP4译码在基于四元矩阵 H构建的Tanner图上运行。交换的消息是三维向量，用于量化错误为X、 Y或 Z的置信度。因此，BP4中的初始对数似然比向量定义为具有相同元素的向量，具体为

$$L_{\mathrm{ch}}^{\mathrm{BP4}}(\varepsilon_0) \triangleq \ln\left(\frac{\Pr\{E = I\mid\varepsilon_0\}}{\Pr\{E = \xi\mid\varepsilon_0\}}\right) = \ln\left(\frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0/3}\right), \qquad (6)$$

这直接由（1）得出，其中 $\xi\in\{X,\ Y,\ Z\}$。

III. 对数似然比失配分析

本节形式化有限迭代译码性能对所假设信道参数 ε_0 的依赖，并引入一个标量目标度量来量化对该失配的敏感性。[9], 中报告了类似的帧错误率观察结果，但仅针对 BP4，且帧错误率值相对较高。

A. 对数似然比失配对*BP*解码器的影响

我们考虑 OS 广义自行车（GB）（126，28，126）码，采用$l^{\max} = 4$ 和$l^{\max} = 8$ 次译码迭代。对于每个

物理错误率为 ε 时，我们根据（1）生成独立同分布的 Pauli 错误 $E \in \mathrm{GF}(4)^n$，计算伴随式，并使用 BP2 或 BP4 进行译码。这两种译码器使用了失配对数似然比，取值为 $\varepsilon_0 = 0$。10，以便所呈现的结果可直接与 [9] 中报告的结果进行比较。

图2给出了BP2的匹配与不匹配对数似然比对比。该图结果表明，对数似然比失配（ $\varepsilon_0 = 0.10$）对BP2的帧错误率性能具有积极影响，尤其是在低帧错误率取值时。对于 $\varepsilon = 10^{-3}$的去极化信道，对数似然比失配带来的增益最高可达两个数量级。在4次和8次迭代下均可观察到此类增益。

图3展示了BP4的帧错误率性能，其中译码器同样以失配对数似然比 $\varepsilon_0 = 0.10$进行初始化。该图结果表明，在固定迭代次数下，相对于匹配运行 $\varepsilon_0 = \varepsilon$ 的帧错误率再次得到改善。与图2中的BP2情形类似，在低帧错误率区间，增益最高可达两个数量级。当$l^{\max}$ 从4增加到8时，这一效应开始减弱，表明对数似然比失配主要影响瞬态消息演化，而非最终译码能力。

图 2–3 中的结果并不表明，对数似然比失配能够弥补迭代次数不足，也不表明它能在迭代次数趋于无穷大时提升译码器性能。相反，这些结果表明，在图结构和迭代预算固定的情况下，有限迭代误帧率对初始化十分敏感。这促使我们对初始对数似然比敏感性进行系统量化。下一节将提出一种用于分析这种行为的度量。第 IV 节将给出该度量的数值结果。

B. 聚合目标函数（*AO*）

对于固定的物理退极化概率 ε 和失配对数似然比（下文记为 L_0），有限迭代帧错误率定义为

$$\mathrm{FER}(\varepsilon; L_0) \triangleq \Pr\{\text{decoder fails} \,|\, \varepsilon, L_0\}. \tag{7}$$

在实际应用中，帧错误率$(\varepsilon; L_0)$通过蒙特卡洛方法估计如下:

$$\mathrm{FER}(\varepsilon; L_0) \approx \frac{1}{N(\varepsilon)} \sum_{r=1}^{N(\varepsilon)} \mathbf{1}(\text{failure at trial } r), \tag{8}$$

其中， N（ε）为模拟帧数。对于固定的量子低密度奇偶校验码和译码器配置，帧错误率$(\varepsilon; L_0)$可以完整表征译码器关于失配对数似然比 L_0 的经验有限迭代行为。

为量化失配对数似然比 L_0 的影响，我们对选定的信道退极化概率工作区域 G（经离散化）上的性能进行汇总，其中 ε 定义为 G $=\{\varepsilon_1, \ldots\ldots, \varepsilon_T\}$。我们将聚合目标（AO）定义为经验帧错误率的加权几何平均:

$$\tilde{J}(L_0) = \prod_{t=1}^{T} \Big(\max\{\mathrm{FER}(\varepsilon_t; L_0), x_{\min}\} \Big)^{w_t}, \tag{9}$$

其中 $\{w_t\}_{t=1}^{T}$ 为满足 $\sum_{t=1}^{T} w_t = 1$ 的非负权重， $x_{\min}$ 是在观测到零帧错误时采用的保守下限。帧错误率的计算方式与式 (8) 相同。当帧错误率$(\varepsilon_t; L_0)$ =0 时，我们设定

$$x_{\min} = 1 - (0.05)^{1/N(\varepsilon_t)}, \tag{10}$$

这对应于 N 次独立试验中 ε_t 的单侧 95% Clopper–Pearson 上置信界 [17]。这可避免乐观偏差，并确保聚合目标的数值稳定性。为保证数值稳定性并便于可视化，我们在对数域中进行计算，将式（9）转换为

$$J(L_0) = \sum_{t=1}^{T} w_t \, \phi(\mathrm{FER}(\varepsilon_t; L_0)), \tag{11}$$

其中 $\phi(x) = \log_{10}(\max\{x, x_{\min}\})$。除非另有说明，我们在选定的离散集合 G 上使用均匀权重，即对于 $\varepsilon_t \in \mathrm{G}$, $w_t = 1/|\mathrm{G}| = 1/T$ ； 其他情况下则为 $w_t = 0$ 。例如，也可以采用非均匀权重，以探索特定量子技术进步所带来的特定噪声区间。

由于每个假设的失配对数似然比 L_0 都会在选定的物理噪声区域 G 上产生一条完整的帧错误率曲线，我们通过计算式 (11) 中（对数）帧错误率的加权离散期望，概括其总体性能。由此得到的标量目标$J(L_0)$可用于系统地比较初始对数似然比的取值并识别稳定区域，而不必依赖对各条帧错误率曲线的目视检查。

我们将每个译码器的稳定性最优初始对数似然比定义为聚合目标 $J(L_0)$ 的最小化点，

$$L_{0,\star}^{\mathrm{BP2}} = \arg\min_{L_0} J^{\mathrm{BP2}}(L_0), \qquad L_{0,\star}^{\mathrm{BP4}} = \arg\min_{L_0} J^{\mathrm{BP4}}(L_0). \tag{12}$$

相应的去极化参数通过式 (5) 和 (6) 中给出的逆似然映射得到，即，

$$\varepsilon_{0,\star}^{\mathrm{BP2}} = \varepsilon_0\left(L_{0,\star}^{\mathrm{BP2}}\right), \qquad \varepsilon_{0,\star}^{\mathrm{BP4}} = \varepsilon_0\left(L_{0,\star}^{\mathrm{BP4}}\right).$$

C. 分裂目标分解

为了解聚合目标由哪个噪声区间主导，我们使用阈值 $\varepsilon_{\mathrm{split}}$ 将离散化操作区域 G $=\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_T\}$ 划分为若干部分。对每个子集应用与式 (11) 相同的定义，可得:

$$\begin{aligned} J_{\mathrm{low}}(L_0) &= \sum_{\varepsilon_t \le \varepsilon_{\mathrm{split}}} w_t \, \phi(\mathrm{FER}(\varepsilon_t; L_0)), \\ J_{\mathrm{high}}(L_0) &= \sum_{\varepsilon_t > \varepsilon_{\mathrm{split}}} w_t \, \phi(\mathrm{FER}(\varepsilon_t; L_0)). \end{aligned} \tag{13}$$

其中，原始权重 w_t 保持不变。由于式 (11) 将$J(L_0)$定义为所选网格 G 上的均匀离散期望，且子集 $\mathrm{G}_{\mathrm{low}}$ 和 $\mathrm{G}^{\mathrm{high}}$ 构成 G 的不相交划分，因此总目标满足以下（凸）分解:

$$J(L_0) = \frac{\mathcal{G}_{\mathrm{low}}}{\mathcal{G}} J_{\mathrm{low}}(L_0) + \frac{\mathcal{G}_{\mathrm{high}}}{\mathcal{G}} J_{\mathrm{high}}(L_0), \tag{14}$$

其中，$\mathrm{G}_{\mathrm{low}}$ 和 $\mathrm{G}_{\mathrm{low}}$ 分别对应 $\varepsilon < \varepsilon_{\mathrm{split}}$ 和 $\varepsilon > \varepsilon_{\mathrm{split}}$时使用的基数点。

IV. 数值结果

我们报告了在 [9] 的固定 OS GB(126，28，126) 构造上，针对物理错误率为 ε 的独立同分布退极化噪声进行 BP2 和 BP4 译码的结果。所有实验均使用相同的 Tanner图、停止规则、迭代次数$l^{\max} \in\{4，8\}$，并针对不同初始对数似然比取值使用相同的随机错误实现，以确保比较公平。

A. 对数似然比失配下的帧错误率性能

图4展示了在不同对数似然比失配程度下，BP4 进行$l^{\max} = 4$ 次迭代时，帧错误率随信道退极化概率 ε 变化的情况。我们考察了 ε_0 的广泛取值范围，从 ε_0 =0.03 到 ε_0 = 0.75。极端情况 ε_0 = 0.75 对应于 L_0 = 0，也就是说，无法获知可能发生了哪种错误。另一个极端值（ε_0 = 0.03）则用于覆盖广泛的初始化区间；在该区间内，性能变化与蒙特卡洛不确定度相当，从而展示近最优稳定区域的宽度。

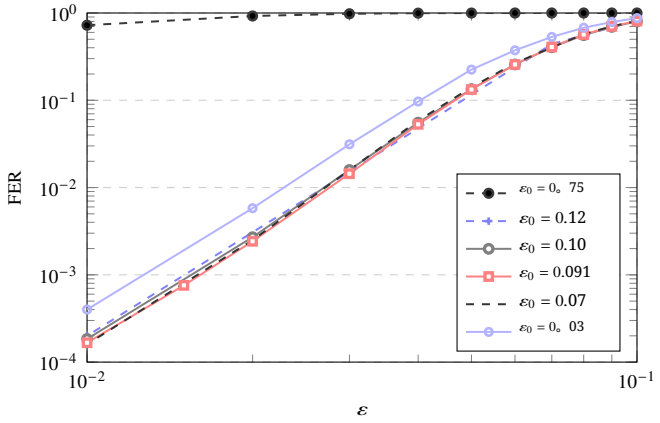

图4. 采用$l^{\max}$ = 4的BP4的帧错误率与 ε 的关系，不同 ε_0可获得相近性能。对BP2也观察到类似结果（未示出）。

图4中的结果表明，范围 $\varepsilon_0 \in$ {0.07,0.12}可带来近乎等效的帧错误率性能。

在本文中，我们使用 $\varepsilon_{\text{split}}$ = 0.05作为任意阈值（我们将在下一节说明这一选择的依据）。聚合目标概念可以扩展到更多噪声区间划分和/或不同阈值（可能与非均匀权重相结合）。

B. BP4 和 *BP2* 的聚合目标

我们选择噪声集为 G ={0.15, 0.13, 0.11, 0.10, 0.09, 0.07, 0.05,0.03}，该集合有意在高噪声区间（即 0.11, 0.13,0.15,$\cdots$）相对于所选$\varepsilon_{\text{split}}$提供更多观测。因此，我们选择$\varepsilon_{\text{split}}$ ，使得将 25% 分配给集合 G_{low} ，其余分配给 G_{high}。在初步实验中（为简洁起见此处未展示），当使用图4中所用的噪声集，即 $\varepsilon \in$ {0.01 – 0.1} 时，出现了由低噪声区间驱动的$J(L_0)$主导现象。因此，我们构建该场景以验证如下假设：在该总集合 G 内，主导来源仍主要受低噪声区间影响。

我们发现，在由 G 定义的工作集合上，最优初始对数似然比出现在：

$$\left(\varepsilon_{0,\star}^{\text{BP4}},\ L_{0,\star}^{\text{BP4}}\right) \approx (0.091,\ 3.4)\,,$$

$$\left(\varepsilon_{0,\star}^{\text{BP2}},\ L_{0,\star}^{\text{BP2}}\right) \approx (0.082,\ 2.85)\,.$$

图5和图6分别展示了 BP4 和 BP2 在式（11）中的聚合目标 $J(L_0)$。在 BP4 的情况下，该聚合目标在$L_0 \in$ [3.2,3.5] 附近呈现近似平坦的区域；而对于 BP2，对应区域则跨越 $L_0 \in$ [2.6,3.2]。在这些区间内，$J(L_0)$ 的变化与蒙特卡洛不确定性相当，表明有限迭代性能对最优值附近 ε_0 的微小调节并不敏感。初始对数似然比会影响迭代早期消息接近饱和的速度。在具有密集短环的 OS 图上，相关反馈可能会在译码器有效整合整个图的信息之前累积。初始对数似然比失配会改变这一早期行为，但不会改变译码目标本身，从而导致有限迭代误帧率出现可计算的差异。这一解释进一步支持了如下观点：在冗余有环 OS 图上，在给定迭代次数下，假定的初始对数似然比会作为一种实际的正则化参数l。

图5(a)和图6(a)的插图绘制了 $\Delta J(L_0) = J(L_0) - J(L_{0,\text{ref}})$，其中 $J(L_{0,\text{ref}})$ 对应于参考值 ε_0 =0。10。我们观察到，在接近最优区域时，差异与统计不确定性相当。从实践角度来看，这支持在稳定区域内选择一个代表值（例如 [9] 中报告的 BP4 对应的 ε_0 = 0。10），而不是尝试精细优化或使其与信道匹配（$\varepsilon_0 = \varepsilon$）。

图5(b)和图6(b)中的分裂目标分解验证了我们的初始假设，证实对数似然比值初始敏感性的主要部分来自低噪声区间。在该区间内，译码失败很少见，因此对早期迭代动态高度敏感。相比之下，高噪声贡献相对于 ε_0 较不显著；尽管 $G_{\text{low}} < G_{\text{high}}$，低噪声子集仍主导 $J(L_0)$ 的变化。

最后还观察到，随着迭代次数l 增加，译码结果对初始对数似然比的敏感性会减弱。这证实，初始对数似然比失配会改变有环 OS 图上的早期消息动态，但不会改变译码过程的结果。

V. 结论

本文研究了对数似然比初始化对采用过完备校验矩阵的量子低密度奇偶校验码进行 BP2 和 BP4 译码时性能的影响。我们重点考察了迭代次数相对较少的情况，并表明，初始化对数似然比中的适度失配可以显著提升帧错误率性能。观察到的敏感性在 BP2 和 BP4 中均存在，这表明它反映了置信传播在冗余（过完备）校验矩阵及相应的有环 Tanner 图上的一种普遍有限迭代现象。随后我们证明，

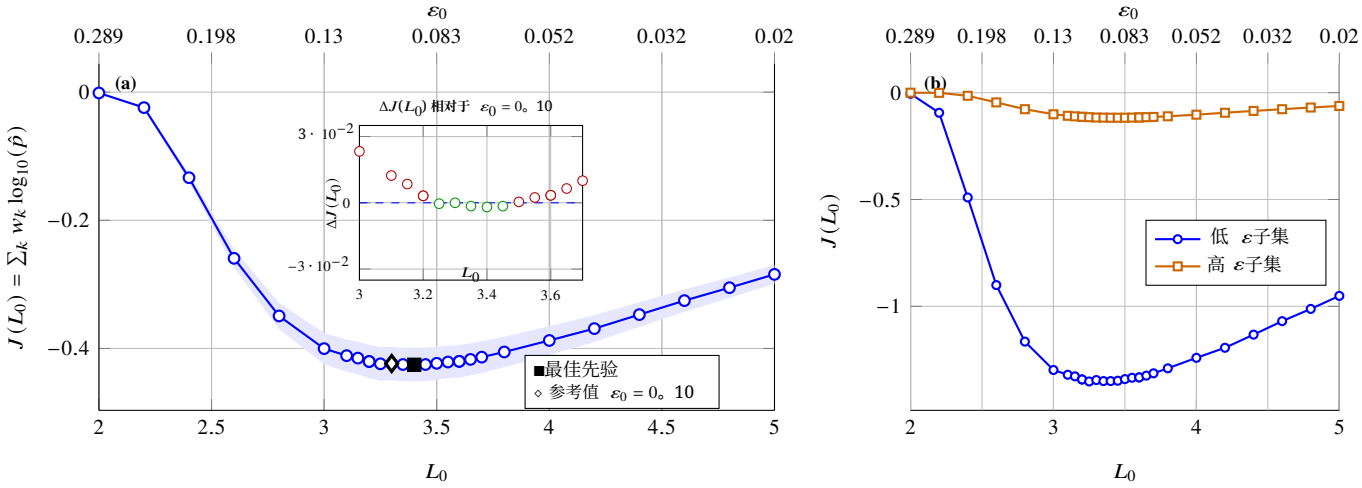

图5. BP4 AO与失配对数似然比。蓝色阴影区域表示AO标准差。(a) 最优点对应于近等价先验区域。插图表明，在模拟噪声范围内，$\varepsilon_0 = 0.10$是BP4的务实选择；(b) 敏感性主要由低噪声子集主导。

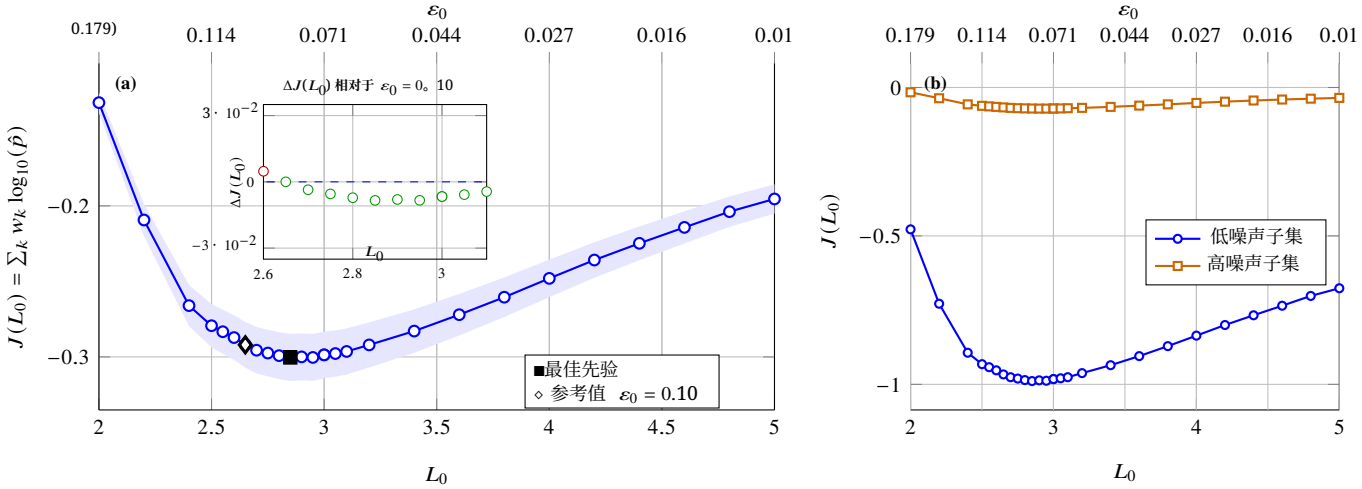

图 6. BP2聚合目标函数与失配对数似然比的关系。蓝色阴影区域表示AO标准差。(a) 最优点对应于近等价先验的一个区域。插图显示，$\varepsilon_0 = 0.10$ 仍处于可视为最优区间的范围内。(b) 与BP4的情况类似，敏感性也主要由低噪声子集决定。

在最优点附近，性能对失配的小幅变化相对不敏感。

本文还提出了一种聚合目标函数，用于量化对数似然比失配的影响。我们的结果揭示了对数似然比失配对量子低密度奇偶校验码解码的两个重要方面。首先，所提出的函数有助于预测最优初始化区域，从而减少对大量数值仿真的需求。其次，结果证实了这样一种解释：对数似然比初始化是一种有限迭代正则化参数，用于控制早期置信传播消息幅度以及沿短环的反馈强化，而不是必须与实际信道精确匹配的量。

参考文献

[1] P. Panteleev 和 G. Kalachev，《具有良好有限长度性能的退化量子LDPC码》，*Quantum*，第 5 卷，第 585 页，2021 年。

[2] S. Evra、T. Kaufman 和 G. Zémor，“利用高维扩张子突破平方根距离障碍的可译码量子低密度奇偶校验码”，载于 *2020 IEEE 第61届计算机科学基础年会（FOCS）*，2020年，第218–227页。[3] J.-P. Tillich 和 G. Zémor，“具有正码率且最小距离与码长平方根成正比的量子低密度奇偶校验码”，*IEEE 信息论汇刊*，第60卷，第2期，第1193–1202页，2014年。[4] D. MacKay、G. Mitchison 和 P. McFadden，“用于量子纠错的稀疏图码”，*IEEE 信息论汇刊*，第50卷，第10期，第2315–2330页，2004年。[5] M. Hagiwara 和 H. Imai，“量子准循环LDPC码”，载于*IEEE信息论国际研讨会论文集（ISIT）*，2007年，第806–810页。[6] D. Poulin 和 Y. Chung，“稀疏量子码的迭代译码”，量子信息与计算，第8卷，第10期，第987–1000页，2008年。[7] H. Yao、W. A. Laban、C. Häger、A. G. i Amat 和 H. D. Pfister，“采用引导抽取的量子低密度奇偶校验码置信传播译码”，载于*IEEE信息论国际研讨会论文集（ISIT）*，2024年，第2478–2483页。[8] M. S. Leifer 和 D. Poulin，“量子图模型与置信传播”，物理学年鉴，第323卷，第8期，第1899–1946页，2008年。[9] S. Miao、A. Schnerring、H. Li 和 L. Schmalen，“采用过完备校验矩阵的量子低密度奇偶校验码四元神经置信传播译码”，*IEEE Access*，第13卷，第25637–25649页，2025年。

[10] A. Cumitini、S. Tinelli、B. Matuz、F. Lazaro 和 L. Barletta，“量子码的最优单次译码”，*IEEE Communications Letters*，第28卷，第6期，第1243–1247页，2024年。[11] T. J. Richardson 和 R. L. Urbanke，现代编码理论。剑桥大学出版社，2008年。[12] A. Montanari 和 T. Rizzo，“如何计算Bethe近似的环修正”，统计力学杂志：理论与实验，第10期，10011，2005年，第P页。[13] M. Hagiwara、M. P. C. Fossorier 和 H. Imai，“二元对称信道上LDPC码的固定初始化译码”，*IEEE* 信息论汇刊，第58卷，第4期，第2321–2329页，2012年。[14] D. Gottesman，“量子纠错与容错的介绍——容错量子计算”，载于量子信息科学及其对数学的贡献，应用数学研讨会论文集系列。美国数学会，2010 年，第 68 卷，第 13–58 页。[15] ——，《稳定子码与量子纠错》，博士论文，加州理工学院，1997 年。[16] C.-Y. Lai 和 K.-Y. Kuo，“二元有限域上量子低密度奇偶校验码的对数域译码”，*IEEE*量子工程汇刊，第 2 卷，第 1–15 页，2021 年。[17] C. J. Clopper 和 E. S. Pearson，“以二项分布为例说明置信限或基准限的用法”，*Biometrika*，第 26 卷，第 4 期，第 404–413 页，1934 年。