arXiv:2603.05007v1 [cs.DM] 5 Mar 2026

s位置k 博弈

Eric Duchˆene[1],Valentin Gledel[2],和 Miloˇs Stojakovi´c[3]

[1]里昂大学、法国国家科学研究中心、里昂国立应用科学学院、里昂第一大学、里昂中央理工学院、里昂第二大学、LIRIS实验室、UMR5205，法国维勒班 F-69622[2]萨瓦勃朗峰大学、法国国家科学研究中心UMR5127、LAMA实验室，尚贝里 F-73000，法国[3]诺维萨德大学理学院数学与信息学系，塞尔维亚

摘要

我们提出一种位置博弈的通用框架：玩家通过占领每个获胜集规定比例的元素来得分，从而扩展计分Maker–Breaker游戏的概念。在这种计分变体中，Maker完全占领一个获胜集即可得一分，而Breaker则力求将Maker的总得分降至最低。本文将这些理论模型推广到所有 k均匀位置博弈：设定一个整数阈值$s \in \{1, 2, \ldots, k\}$，当玩家占领一个大小为 k的获胜集中的至少 s 个元素时，即可得一分。我们将这类博弈称为 s取k 博弈。这种表述方式能够灵活描述计分目标，适用于理论模型和现实中的棋盘游戏。

我们进一步研究策略限制对可获得得分的影响。具体而言，我们分析在最优对弈下的 s-of-k 博弈（得分记为 SC），以及 Maker 受限于采用配对策略时的此类博弈。在后一情形下，相应得分记为 SC_2。不受限制的得分体现了计分位置博弈中最标准的最优对弈概念，而配对策略限制下的得分则使我们能够观察到 Maker 因受限于这些标准策略而损失的得分。

我们全面研究在规则网格上进行的 s-of-k 博弈，这为阐释一般框架提供了自然且统一的环境。在构建了若干用于分析这两种得分的一般工具后，我们还针对这些博弈的特定情形设计了多种专门策略，从而得到三角形、方格、菱形和六边形网格上两种得分的上界和下界。

1 引言

1.1 计分位置博弈

位置博弈是组合游戏中一个得到充分研究的子类，其中包括井字棋和六角棋等广受欢迎的休闲博弈。从结构上看，位置博弈是一个超图（$V, \mathcal{F}$），其中 V是一个有限集，即该博弈的棋盘，而 $\mathcal{F} \subseteq 2^V \setminus \{\emptyset\}$ 是一个集合族，即获胜集。该博弈由两名玩家进行，他们轮流占据棋盘上尚未被占据的元素，直到所有元素都被占据为止。

就判定胜者而言，位置博弈中研究得最多的约定或许是*Maker-Breaker* 博弈，这一约定已在 Erd˝os 与 Sel- fridge [9] 以及 Chv´atal 与 Erd˝os [6] 的开创性论文中得到研究。两名玩家分别称为 Maker 和 Breaker，博弈有两种可能的结果；Maker 的目标是占据某个获胜集的全部元素，否则 Breaker 获胜，即若 Breaker 在每个获胜集中都占据了一个元素。有两本书更详细地论述了位置博弈这一主题 [2, 11]。

Maker-Breaker 博弈的一种变体中，Maker 的目标是尽可能多地完全占领获胜集。这种变体在文献中屡见不鲜。本书的多个部分对此有所讨论 [2], , [4, 7, 13, 14, 15], 中也对其进行了研究；最近， [1]又以计分位置博弈之名对其作了更深入的考察。在这类博弈中，玩法与超图上的标准位置博弈 $\mathcal{H} = \{V, \mathcal{F}\}$相同，但 Maker 每次占领超边的所有顶点时便获得一分。Maker 的目标是尽可能提高得分，也就是在博弈结束前完全占领尽可能多的超边。另一方面，Breaker 力求使 Maker 的得分尽可能低。

多数博弈是计分位置博弈的又一种自然推广形式，与某些现实中的棋盘游戏更为相似，例如 Conquete[1] 或 Hedron[2]。这类博弈的玩法保持不变，但 Maker 每当在某条超边上占领的顶点数严格多于对手时，便获得一分；对手可以是 Breaker，也可以是另一位会记录自己得分的 Maker 玩家。Bensmail 和 McInerney 最近在研究顶点捕获博弈 [5]时考察了这类博弈。在他们的版本中，玩家占领图的边；每当某个顶点的关联边中有多数被自己占领时，便获得一分。他们确定了路径、圈、完全二部图和网格上的博弈结果。

我们目前提出的方案，是为研究此类博弈定义一个通用框架。事实上，“多数”未必总能恰当地描述 Maker 占据获胜集某个预先设定部分的意愿。此外，当获胜集的大小为偶数时，还需要处理平局的情况。因此，与其仅考虑多数，不如设定一个固定数量的元素，或规定获胜集大小的某个比例，这样在一般情况下更为合适。

文献中若干已知的博弈都可以嵌入这一框架。给定一个固定图 H， H-博弈是在基图 $E(G)$的边集上进行的一种得到充分研究的位置博弈，其中获胜集是 G [2, 8, 11]中 H 的全部副本。研究占据某个图 H 的完整副本之可能性的标准方法，一直与占据足够多个 H^-副本的可能性相关联； H^-是从H中去掉一条边所得的图，参见例如 [4] 或 [15]。这一方法可以推广为：在Maker可能获胜之前回溯 k 步，并统计 H^{-k}的副本数；对某个整数 k， H^{-k}是从 H中去掉 k 条边所得的图。本着同样的思路，在边上玩的Maker-Breaker哈密顿路径博弈，可以看作Maker-Breaker哈密顿圈博弈的一个实例：只需获得某个获胜集的一个$(n-1)$部分即可获胜（其中 n 是该图的顶点数）。在Kaplansky的 n连一线博弈中，见 [3, 12], , 获胜集是直线，它们通常视棋盘而定，所含元素远多于 n个。每位玩家的目标相同：率先占据某个获胜集中基数为 n的子集，而对手尚未占据该获胜集中的任何一个元素。

[1]https://escaleajeux.fr/jeu/conqd.0.0[2]
https://boardgamegeek.com/boardgame/11921/hedron

因此，在本文中，我们推广 [1] 中给出的计分博弈定义，引入一个常数参数 s ，对应于在一个获胜集中得一分所需的顶点数。当所有获胜集大小相同，即该超图是 k-一致时，这一点尤其合理。我们将这些博弈称为 s-*of*-k 博弈。注意，也可以用获胜集大小的某个比例 作为得分阈值来做类似推广（当该博弈的超图为一致超图时，这本质上与 s-of-k-博弈相同）。

1.2 s-of-k博弈

这里我们正式定义 s-of-k 博弈。设 $\mathcal{G}$ 是在 k-均匀超图（$V, \mathcal{F}$）上进行的位置博弈，并设 $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$ 为整数。Maker与Breaker轮流占据棋盘上尚未被占据的元素，由Maker先手，直到所有元素都被占据。我们关注至少有 s 个元素被Maker占据的获胜集数量——Maker的目标是最大化该数量，而Breaker则希望将其最小化。当双方均进行最优对弈时，我们将该数量称为博弈 $\mathcal{G}$的得分 。博弈结束时，若某个获胜集中Maker所占据的元素数量至少为 s，则称该获胜集为好 ； 若该数量低于 s，则称其为坏 。

在双方最优对弈下，该博弈的得分记为SC($\mathcal{G}, s$)。在 [1], 中引入的、在图的顶点上进行的博弈 Incidence，实际上对应于2-of-2博弈，因为每当Maker占据一条边的两个顶点时，她便获得一个点。由这项先前的工作已经可知，在一般情况下计算SC($\mathcal{G}, s$)是一个PSPACE完全问题，因为对 Incidence而言正是如此。

此外，以下观察表明，Maker 和 Breaker 所扮演的角色在某种程度上是类似的。

观察 1。 $SC(\mathcal{G}, s) = |\mathcal{F}| - SC(\mathcal{G}, k - s + 1) + O(\Delta(\mathcal{F}))$，其中 $\Delta(\mathcal{F})$ 是 $\mathcal{F}$的最大度。

换句话说，在一场 s-取-k 博弈中，Breaker 的目标是确保存在尽可能多的获胜集，其中有（$k - s + 1$）个顶点被他占据。也就是说，在同一个超图上的（$k - s + 1$）-取-k 博弈中，Breaker 扮演 Maker 的角色。注意， $O(\Delta(\mathcal{F}))$ 项的出现是因为 Maker 在两场博弈中都先手，而她在第一步中至多只能影响 $\Delta(\mathcal{F})$ 个获胜集。

在本研究中，我们将分析若干 s-of-k 博弈。由于文献中经常使用配对策略（因为它们简单且用途广泛），我们将特别关注 Maker 受限于使用配对策略时的博弈分析。研究配对策略距离最优策略有多远，是一件有趣的事。Beck 已在著作 [2] 中讨论过这一问题，他系统地研究了这样一类博弈：玩家不仅能够获胜，还能通过遵循配对策略获胜；这显然是更强的要求。回想一下，在配对策略中（例如 Maker 的配对策略），超图的顶点会预先两两配对，且各对互不相交。对于 Breaker 在博弈过程中认领的每个顶点 v，Maker 的应对方式就是认领与 v 配对的顶点。注意

配对策略对应于非自适应策略，因为 Maker 的应对在博弈开始之前就已固定。

在 s-of-k 博弈中，当 Maker 受限于采用配对策略时，博弈的得分记为 $SC_2(\mathcal{G},\ s)$。根据此定义，可以自然地得出以下观察。

观察 2. $SC_2(\mathcal{G},\ s) \leq SC(\mathcal{G},\ s)$。

众所周知（已有大量实例证实，参见例如 [2]），在 Maker-Breaker 博弈中，并非所有最优策略都是配对策略。然而，要证明我们在此研究的（计分）位置博弈中不存在最优配对策略，并非易事。在 s-of-k 博弈的背景下，我们希望证明，对于某些 $\mathcal{G}$ 和 s，$SC(\mathcal{G},\ s)$ 与 $SC_2(\mathcal{G},\ s)$ 的值不同。考虑在大小为 14 的圈上进行的 INCIDENCE（即 2-of-2 博弈），我们通过一段相对简单的 Python 代码检验所有可能的配对（参见 https://github.com/vgledel/test-pairing），验证了 $SC_2(C_{14},\ 2) = 2$；而根据 [1]，已知 $SC(C_{14},\ 2) = 3$。

这一结果保证，一般而言，$SC(\mathcal{G}, s)$ 与 $SC_2(\mathcal{G}, s)$ 并不相等。我们猜想，对于较大的 n 值，$SC(C_n,\ 2)$ 与 $SC_2(C_n,2)$ 之间仍存在差距。

1.3 工作概述

在第 2 节中，我们将介绍并推导若干一般结果，供后文使用。首先，我们将在计分位置博弈的背景下，改写著名的 Erd˝os-Selfridge 定理 [9]。此外，我们还提出两个针对 s-of-k 博弈的新结果，其中包括一种通用方法：通过分析 Breaker 对抗采用配对策略的 Maker 时所使用的随机策略，为 $SC_2(\mathcal{G}, s)$ 给出上界。在许多情况下，这一结果有助于为受限于只能采用配对策略的 Maker 所能取得的最佳得分，得到非平凡的上界。

在本文其余部分，我们将研究在规则结构上进行的特定 s-of-k 博弈；这些结构尤其意味着超图具有 k-均匀性。具体而言，我们将探讨在若干标准网格的顶点上进行的 s-of-k 博弈：三角网格，其获胜集为三角形$\mathcal{G}$（第 3 节）；正方形网格 $\mathcal{G}_\square$，其获胜集为正方形（第 4 节）；菱形网格，其获胜集为三角网格上的菱形$\mathcal{G}$（第 5 节）；最后是六边形网格 $\mathcal{G}$，其获胜集为所有六边形（第 6 节）。

我们的研究将探讨有限但规模较大的网格，其中获胜集的数量记为 n。我们通常会指出，我们所提出的大多数策略都是专门设计用于远离网格边界的区域。我们也通常不会讨论网格的具体形状，因为这不会影响我们的分析。贯穿全文，我们唯一的假设是所有网格都是“二维的”，也就是说，距离边界固定距离的获胜集数量相对于 n 渐近地较小。在表述结果时，我们会提及这一反复出现的 $o(n)$ 得分误差，但不会再作进一步讨论。

第3至第6节给出的所有结果均汇总于表 1，其中包含四种网格在所有相关 s 值下，两类策略——最优策略和配对策略——的下界和上界。

问题		SC		SC_2	
		下界	上界	下界	上界
$\mathcal{G}_{\triangle}$	$s=1$	$\geq 7n/8$ (E-S)	$\leq 27n/28$ (定理 8)	$\geq 3n/4$ (定理 6)	$\leq 15n/16$ (定理 4)
	$s=2$	$n/2$(引理 5)	$n/2$(引理 5)	$\geq 3n/8$ (定理 7)	$\leq n/2$ (定理 4)
	$s=3$	$\geq n/28$ (定理 8)	$\leq n/8$ (E-S)	$\geq n/28$ (定理 8)	$\leq n/8$ (定理 4)
$\mathcal{G}_{\square}$	$s=1$	$\mathrm{SC}(\mathcal{G}_{\square},\ 1) = \mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\square},\ 1) = n$(观察 9)			
	$s=2$	$\geq 2n/3$ (定理 10)	$\leq 13n/15$ (定理 13)	$\geq 2n/3$ (定理 10)	$\leq 3n/4$ (定理 4)
	$s=3$	$\geq 2n/15$ (定理 13)	$\leq n/3$ (定理 10)	$\geq n/8$ (定理 11)	$\leq 5n/16$ (定理 4)
	$s=4$	$\mathrm{SC}(\mathcal{G}_{\square},\ 4) = \mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\square},\ 4) = 0$(观察 9)			
$\mathcal{G}_{\square\!\!\square}$	$s=1$	$\geq 15n/16$ (E-S)	$\leq 77n/78$ (定理 17)	$\geq 11n/12$ (定理 14)	$\leq 23n/24$ (定理 4)
	$s=2$	$\geq 19n/36$ (定理 15)	$\leq 89n/96$ (定理 16)	$\geq 19n/36$ (定理 15)	$\leq 71n/96$ (定理 4)
	$s=3$	$\geq 7n/96$ (定理 16)	$\leq 17n/36$ (定理 15)	$\geq 7n/96$ (定理 16)	$\leq 5n/16$ (定理 4)
	$s=4$	$\geq n/78$ (定理 17)	$\leq n/16$ (E-S)	≥ 0	$\leq n/16$ (定理 4)
$\mathcal{G}_{\bigcirc}$	$s=1$	$\mathrm{SC}(\mathcal{G}_{\bigcirc},1) = \mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\bigcirc},\ 1) = n$ (观察 18)			
	$s=2$	$\mathrm{SC}(\mathcal{G}_{\bigcirc},\ 2) = \mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\bigcirc},\ 2) = n$ (观察 18)			
	$s=3$	$\geq 3n/4$ (定理 19)	$\leq 5n/6$ (Th 22)	$\geq 3n/4$ (Th 19)	$\leq 5n/6$ (Th 22)
	$s=4$	$\geq n/6$ (Th 22)	$\leq n/4$ (Th 19)	$\geq n/10$ (Th 21)	$\leq n/4$ (定理 19)
	$s=5$	$\mathrm{SC}(\mathcal{G}_{\bigcirc},5) = \mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\bigcirc},\ 5) = 0$ (注 18)			
	$s=6$	$\mathrm{SC}(\mathcal{G}_{\bigcirc},6) = \mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\bigcirc},\ 6) = 0$ (注 18)			

表 1：本文中关于 SC 和 SC_2 的不同上界（为简洁起见，省略 $o(n)$ 项）。表中，E-S 指定理 3，即 Erd˝os-Selfrige 定理在计分位置博弈中的应用。

2 一般结果

第一个定理是对 Erd˝os-Selfridge 定理的改写，参照 [1, Theorem 10], 的做法，并调整为适用于我们的记号。它给出了 $s \in \{1, k\}$ 时最优得分的上下界。

定理 3 (Erd˝os-Selfridge 定理, [1])。设 $\mathcal{G} = (V, \mathcal{F})$ 是一个 k-均匀超图，含有n 条超边，则有 $SC(\mathcal{G}, k) \leq \sum_{e\in\mathcal{F}} 2^{-|e|} = n2^{-k}$ 以及 $SC(\mathcal{G},1) \geq n(1-2^{-k})$。

接下来，在定理4中，我们利用概率分析证明：在任何均匀且正则的博弈中，Breaker 都存在一种能够对抗配对策略的策略。事实证明，对于我们所研究的若干博弈，通过这种方式获得的得分超过了目前已知的所有确定性策略。该定理的应用见表 1 的最后一列。

定理4。设 H 是一个超图，具有 n 个获胜集，且每个获胜集包含 k 个顶点，每个顶点属于 ℓ 个获胜集，并且任意一对顶点至多共同属于 q 个获胜集。设 $s \in [k]$。对于所有 $i \in \{k - 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \ldots, k-2, k\}$，令 X_i 为服从二项分布 $\mathcal{B}(i, 1/2)$ 的随机变量，并令 $p_{s,\,i} := \mathbb{P}\left(\binom{k-i}{2} + X_i \geq s\right)$。

那么，$SC_2(H,s) \le z \cdot n$，其中 z 是以下线性规划的最优值

$$\begin{aligned} &maximize \ \sum_i p_{s,i} \cdot m_i, \\ &subject\ to \ \sum_i m_i = 1, \\ &\qquad\qquad \sum_i i \cdot m_i \ge \frac{k(\ell - q)}{\ell}, \end{aligned} \tag{1}$$

变量为 $m_i \ge 0,\ i \in \{k - 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \ldots, k-2, k\}$。

证明。 由于每个获胜集都有 k 个顶点，且每个顶点属于 ℓ 个获胜集，因此共有 $\frac{k \cdot n}{\ell}$ 个顶点。

设 $\mathcal{P}$ 是 H 的一个配对。我们用 M_i 表示这样一组获胜集：其中每个获胜集恰好包含 i 个未在该获胜集内配对的顶点，其中 $i \in \{k - 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \ldots, k-2, k\}$。设 $m_i = \frac{|M_i|}{n}$。我们有 $\sum_i m_i = 1$。此外，对于 $\mathcal{P}$ 中的每一对 (u, v)，至多有 q 个获胜集同时包含 u 和 v。因此，对于每个顶点 u，至少有 $\ell - q$ 个不包含与其配对的顶点的获胜集包含它。这进一步意味着 $\sum_i |M_i| \ge (\ell - q) \cdot |V| = (\ell - q)\frac{k \cdot n}{\ell}$，并且 $\sum_i m_i \ge (\ell - q)\frac{k}{\ell}$。

在进行 s-取-k 博弈时，如果 Maker 按照配对 $\mathcal{P}$ 行动，那么 Breaker 就可以决定 Maker 在每一对顶点中占据哪一个。假设 Breaker 对每一对都独立地抛一枚公平硬币来做决定。那么，对于每个 i 和每个获胜集 $e \in M_i$，Maker 在该获胜集中占据的顶点数为 $\frac{k-i}{2} + X_i$，其中 X_i 是服从二项分布 $\mathcal{B}(i,\ 1/2)$ 的随机变量。因此，Maker 赢得获胜集 e 的概率为 $p_{s,\ i}$，并且游戏结束时 Maker 赢得的获胜集总数的期望为 $\sum_i (n \cdot m_i \cdot p_{s,\ i}) = n \sum_i (m_i \cdot p_{s,\ i})$。

由于 Breaker 的这一概率策略具有上述 Maker 得分的期望值，因此必定存在一种确定性策略，使 Breaker 至多允许 Maker 获得相同的得分。因此，对于给定的 m_i，这个数是 Maker 得分的上界；Maker 获得的获胜集总数占比不可能高于线性规划 (1) 的最优值。

□

该引理使我们能够得到表 2 中给出的结果，从而为 SC_2 的值提供上界。

最后，本节以下引理考察 k 为奇数且 s 等于该值一半的特殊情形。在这种条件下，Maker 和 Breaker 的角色基本相同，因为双方都试图在尽可能多的获胜集中，各自恰好占据一半的获胜集。这使得我们可以两次应用标准的策略窃取论证，从而得到 SC 的紧确界。

引理 5. 设 k 为奇整数，且 $s = (k+1)/2$。设 n 为一个 k-均匀超图 $\mathcal{G}$ 中获胜集的数量，且该超图的最大度为 $o(n)$。则 $SC(\mathcal{G}, s) = n/2 + o(n)$。

证明。 由观察 1 可知，Maker 与 Breaker 的角色都是尽可能多地得分至少含有 s 个顶点的获胜集。若为导出矛盾而假设 Breaker 能够获得多于 $n/2$ 个至少含有 s 个顶点的获胜集，则 Maker 可以窃取这一策略

问题		待最大化函数	上界
三角网格	$s=1$	$m_1+\frac{7}{8}m_3$	$\mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\triangle},1) \le \frac{15}{16}n$
	$s=2$	$\frac{1}{2}m_1+\frac{1}{2}m_3$	$\mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\triangle},2) \le \frac{1}{2}n$
	$s=3$	$\frac{1}{8}m_3$	$\mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\triangle},3) \le \frac{1}{8}n$
正方形网格	$s=1$	$m_0+m_2+\frac{15}{16}m_4$	$\mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\square},1) \le n$
	$s=2$	$m_0+\frac{3}{4}m_2+\frac{1}{2}m_4$	$\mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\square},2) \le \frac{3}{4}n$
	$s=3$	$\frac{1}{4}m_2+\frac{5}{16}m_4$	$\mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\square},3) \le \frac{5}{16}n$
	$s=4$	$\frac{1}{16}m_4$	$\mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\square},4) \le \frac{1}{16}n$
菱形网格	$s=1$	$m_0+m_2+\frac{15}{16}m_4$	$\mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\diamond},1) \le \frac{23}{24}n$
	$s=2$	$m_0+\frac{3}{4}m_2+\frac{1}{2}m_4$	$\mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\diamond},2) \le \frac{71}{96}n$
	$s=3$	$\frac{1}{4}m_2+\frac{5}{16}m_4$	$\mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\diamond},3) \le \frac{5}{16}n$
	$s=4$	$\frac{1}{16}m_4$	$\mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\diamond},4) \le \frac{1}{16}n$
六边形网格	$s=1$	$m_0+m_2+m_4+\frac{63}{64}m_6$	$\mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\hexagon},1) \le n$
	$s=2$	$m_0+m_2+\frac{15}{16}m_4+\frac{57}{64}m_6$	$\mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\hexagon},2) \le n$
	$s=3$	$m_0+\frac{3}{4}m_2+\frac{11}{16}m_4+\frac{21}{32}m_6$	$\mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\hexagon},3) \le \frac{85}{96}n$
	$s=4$	$\frac{1}{4}m_2+\frac{5}{16}m_4+\frac{11}{32}m_6$	$\mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\hexagon},4) \le \frac{11}{32}n$
	$s=5$	$\frac{1}{16}m_4+\frac{7}{64}m_6$	$\mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\hexagon},5) \le \frac{7}{64}n$
	$s=6$	$\frac{1}{64}m_6$	$\mathrm{SC}_2(\mathcal{G}_{\hexagon},6) \le \frac{1}{64}n$

表 2：使用定理4得到的上界。

并以先手身份采用该策略，忽略她的第一步。这样，她的得分将多于 $n/2$ 个获胜集，从而产生矛盾。

另一方面，Breaker 作为后手，可以设想自己是先手玩家，并窃取 Maker 的策略。对于自己的第一步，他设想自己下了这一步，尽管实际上并没有下。采用这种策略，Breaker 最多只会失去包含该设想第一步的获胜集，即一个 $o(n)$ 值。

因此，从渐近意义上看，每位玩家都能在 $n/2+o(n)$ 个获胜集上得分。 □

3 三角网格、三角形、 $k=3$

3.1 $s=1$ 的三角形

由定理4可得 $\mathrm{SC}_2(\mathcal{G},1) \le 15n/16+o(n)$，由定理 8 可得 $\mathrm{SC}(\mathcal{G},1) \le 27n/28+o(n)$，并由 Erdős-Selfridge 定理可得 $\mathrm{SC}(\mathcal{G},1) \ge 7n/8+o(n)$。

定理6。 $3n/4 \le SC_2(\mathcal{G},1)$。

证明。 Maker 将网格中图1标记为绿色的边上的顶点配对。显然，她会触及所有标记为红色的三角形，因为每个三角形都有一条边上的顶点已配对。

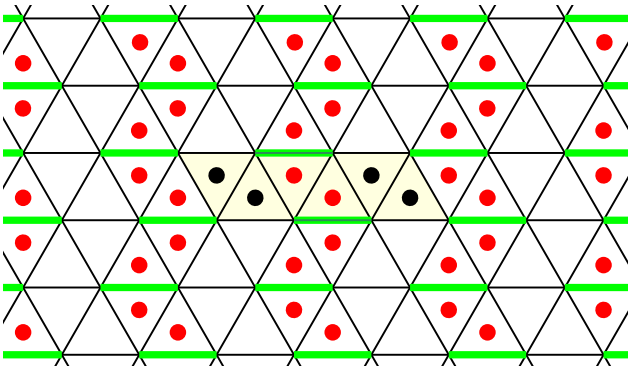


图1：Maker 在 $s = 1$ 三角形博弈中的配对。

此外，标记为黄色的区块中还有另外四个标记为黑色的三角形。无论 Maker 在区块内的两组（深）绿色配对中认领哪两个顶点，四个黑色三角形中至少有两个会被触及。由于其余所有三角形都可以划分成这样每组四个的若干组（如这四个标记为黑色的三角形），Maker 将触及至少一半的剩余三角形。

总之，Maker 至少会触及 $n/2 + 1/2 \cdot n/2 = 3n/4$ 个三角形。 □

3.2 $s = 2$ 的三角形

由引理 5，我们得到 $\mathrm{SC}(\mathcal{G}, 2) = n/2 + o(n)$。

定理 7。 $3n/8 \leq SC_2(\mathcal{G}, 2)$。

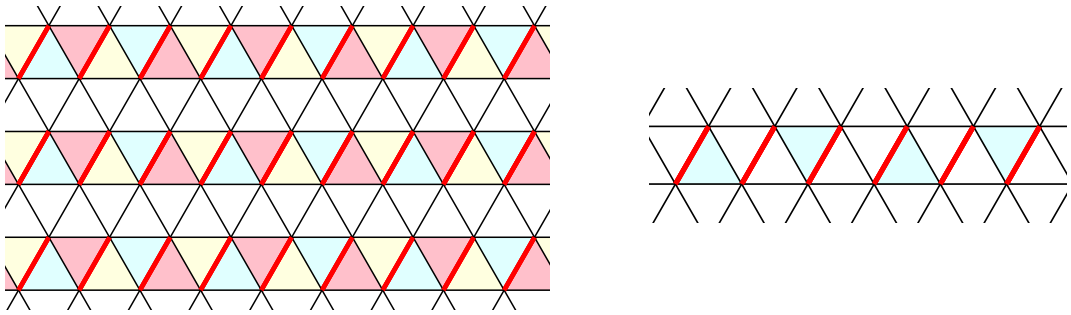


图2：三角网格和 $s = 2$ 的配对，以及两对颜色相同的匹配三角形。

证明。 Maker 按照左侧图 2 中红色所示的方式将顶点配对。在所有有一条边已配对且颜色相同（黄色、红色或蓝色）的三角形中，我们至少能得分其中的一半。事实上，对于每种颜色的三角形，都存在一种匹配，使得每对匹配的三角形各有两个顶点已配对，而第三个顶点则与其匹配三角形中的一个顶点配对，见右侧图 2。

对于剩余的三角形（即位于已配对边之间条带上的未着色三角形），已知每个三角形中 Maker 的顶点数平均为 1。5。假设最坏情况分布——所有得分的三角形都有 3 个 Maker 的顶点，其余三角形则各有 1 个 Maker 的顶点——我们可以据此确定得分的下界。因此，总得分至少为$n/2 \cdot 1/2 + n/2 \cdot 1/4 = 3n/8$。 □

3.3 s= $s = 3$时的三角形

由定理4可得 SC$_2$($\mathcal{G}$,3) $\leq n/8 + o(n)$；由 Erd˝os-Selfridge 定理可得 SC($\mathcal{G}$,3) $\leq n/8 + o(n)$。 △

定理 8。 $n/28 \leq SC_2(\mathcal{G}, 3)$。

证明。 Maker 按照图 3 中的方式进行配对：六边形的中心标记为红色，并任意两两配对；除此之外，每个六边形的其余顶点都采用相同的配对方式。

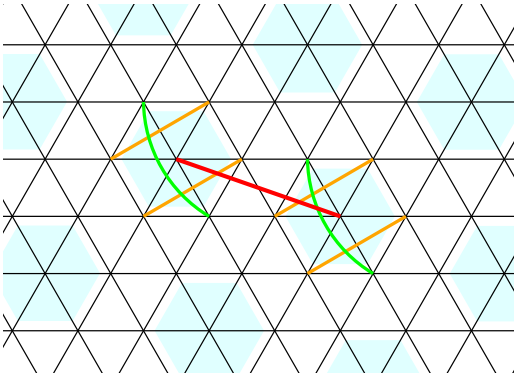


图 3：Maker 在 s= $s = 3$ 的三角形博弈中的配对方式。

首先注意，在每对红色顶点中，Maker 都会占据一个。我们把注意力集中在包含该顶点的六边形上。在一对绿色顶点中，Maker 会占据一个，因此得到两个相邻的 Maker的顶点，一个红色，一个绿色。最后，在一对能够组成 Maker的三角形的橙色顶点中，Maker 会占据一个，从而组成一个三角形。

因此，每两个六边形对应一个Maker的三角形。 □

4 正方形网格，方格， $k = 4$

4.1 当 $s \in \{1, 4\}$ 时的方格

观察 9。 $SC(\mathcal{G}_{\square}, 1) = SC_2(\mathcal{G}_{\square}, 1) = n$ 以及 $SC(\mathcal{G}_{\square}, 4) = SC_2(\mathcal{G}_{\square}, 4) = 0$。

证明。 根据观察 1，只需给出一种 $s = 1$配对，使网格中的每个方格都包含一对顶点。配对方式如下：将网格方格

按棋盘格方式涂成黑色和白色；每个白色方格的左边上都有一对配对顶点，每个黑色方格的右边上都有一对配对顶点。 □

4.2 s= $s=2$ 的方格

由定理4可得 $SC_2(\mathcal{G}_\square,\ 2) \le 3n/4 + o(n)$，由定理13可得 $SC(\mathcal{G}_\square,\ 2) \le 13n/15 + o(n)$。

定理 *10.* $SC_2(\mathcal{G}_\square,\ 2) \ge 2n/3$。

证明。 图 4 展示了 Maker 的一种绿色配对，可保证她至少获得正方形总数的 $2/3$ 。显然，这种配对可保证 Maker 占有

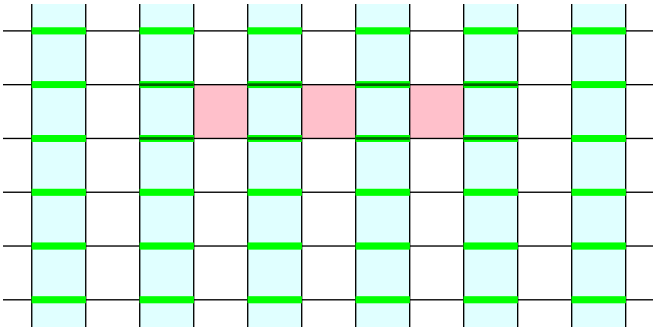


图 4：Maker 在 s= $s=2$ 时的方格游戏配对。

每个蓝色方格，即正方形总数的一半。此外，我们将证明，对于红色标出的三个正方形，她至少能得分其中一个。观察图中黑线标出的八个绿色配对，它们与红色正方形相邻，共覆盖 16 个顶点，其中 12 个位于红色正方形上。由于这 16 个顶点都已配对，Maker 将占有其中一半，即八个顶点。其中四个必定位于红色正方形上；根据抽屉原理，至少有一个红色正方形上有两个 Maker的顶点，这足以得分。

由于所有非蓝色的网格方格都可以划分为与红色三元组全等的三元组，Maker 至少能得分其中的三分之一。这保证 Maker 至少能获得总共 $4n/6$ 个方格。

□

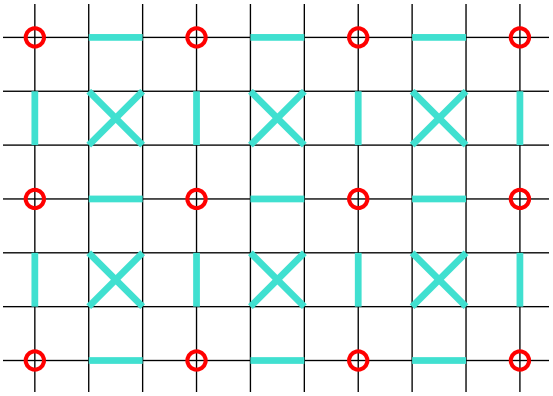
4.3 s= $s=3$ 时的正方形

由定理4可得 $SC_2(\mathcal{G}_\square,\ 3) \le 5n/16 + o(n)$；由定理 10 可得 $SC(\mathcal{G}_\square,\ 3) \le n/3 + o(n)$。

定理11。$SC_2(\mathcal{G}_\square,\ 3) \ge n/8 + o(n)$。

证明。我们将为 Maker 给出一种配对。所有配对将被划分为不同层级。
在第一层级，我们将初始方格网格细分为 3×3 个方格，如图5（左）所示，并按蓝色线段所标记的方式配对顶点。请注意，标记为红色的顶点在这一层级尚未配对，而是留待更高层级配对。

接着，在第二层级，我们考察由红色顶点构成的网格；这些顶点恰好排列成一个正方形网格。我们再次将该正方形网格细分为 3×3 个方格，并递归地应用相同的配对方式。同样，部分顶点尚未配对，我们将它们移至再高一层级，并重复这一过程。



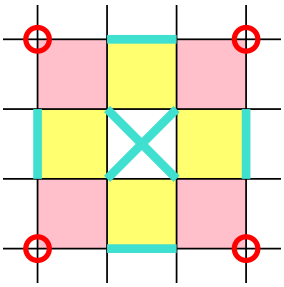


图5： $s = 3$ 的正方形网格上的配对。左：某一层上的配对，其中标为红色的顶点没有配对。右：边方格（黄色）和角方格（红色）。

现在来看第一层，在每个 3×3 方格中，我们可以看到四个边方格，它们在图5（右）中标为黄色。注意，其中至少有一个方格会包含 Maker 的至少三个元素，从而使得分增加一分。

此外，注意图5（右）中标为红色的四个角方格构成了一个 3×3 方格中 16 个顶点的划分。因此，如果四个标为红色的顶点中至少有三个被 Maker 占据，那么她拥有的该 3×3 方格中的顶点就会超过一半。原因是，非红色顶点在这个 3×3 方格内两两配对。于是显然，四个红色方格中至少有一个方格里，被 Maker 占据的顶点超过一半，这也会使 Maker 的得分至少增加一分。

现在进行最后的论证，我们从最后一层开始，逐层考察。固定层级上的每个 3×3 方格中，至少有一个黄色方格，使 Maker 在角上占优。此外，如果该 3×3 方格的红色角上 Maker 占优，那么其中也必有一个红色方格使 Maker 占优。为此，只需注意到，16 个顶点被四个红色方格划分，除四个红色顶点外，其余顶点均已配对。这样，Maker 的优势就沿着层级结构向下传递。

将所有层级上的得分相加，每个 3×3 方格（无论位于哪一层）至少为 Maker 的总得分贡献 1。第 i 层有 $n/9^i$ 个 3×3 方格，因此 Maker 的得分至少为

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \log_9(n) \rfloor} \frac{n}{9^i} = \frac{n}{8} + o(n).$$

□

对于这种情况，我们可以为 Maker 得到一个更好的上界，而无需使用配对策略。我们考虑具有 n 行、 m 个顶点的有限矩形网格 $G_{n,\ m}$

下一个引理给出了 3×5 网格的得分下界。

引理 12. *SC*($G_{3,5}$,3) ≥ 2。无论谁先手，该上界均成立。

证明。 设 x_i, y_i, z_i, $i = 1, \ldots, 5$ 为 $G_{3,5}$ 的顶点，其排列如图 6 所示。

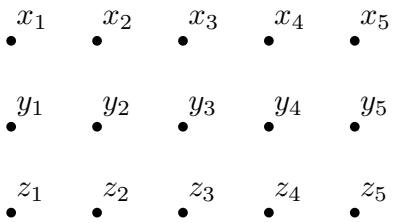


图 6：子网格$G_{3,5}$。

由于计分位置博弈属于米尔诺宇宙 [1], ，它们是非 zugzwang 的，这意味着对玩家而言，走子总是优于弃权。因此，只需证明 Breaker 先手时的结果即可。

作为预备说明，请注意：在 $G_{3,2}$ 网格上，若 Maker 在 Breaker 的任何一步之前占据两个中心顶点，则她可通过以显然的方式对剩余顶点进行配对，最终得到两个点。

首先假设 Breaker 的第一步不走在中心列。不失一般性，他走顶点 x_i 或 y_i ，且 $i = 1,2$。随后 Maker 占据 y_4 作为应对。若 Breaker 此时旨在避免 Maker 得到两个点，他必须阻止她获得每一个包含 y_4 的水平子网格与垂直子网格$G_{3,2}$ 的两个中心顶点。这是不可能的，因为剩余棋盘上所有此类图案的交集为空。

现在假设 Breaker 占据 x_3 （或者等价地占据 z_3 ）。然后 Maker 占据 y_2。如图 7 所示，此时 Breaker 面临两个威胁：事实上，如果 Maker 占据 y_1 或 z_2，她就能得到一个 $G_{3,\ 2}$ 网格，其中两个中心顶点已被占据。因此，Breaker 必须占据这两个彩色子网格的交集，也就是说，她可以占据 y_1、 z_1 或 z_2。根据对称性，Maker 现在占据 y_4，而 Breaker 被迫在 y_5、 z_4 或 z_5 中选择一处应对。Maker 接着占据 y_3 ，Breaker 被迫应对 z_3 （否则 Maker 占据该点并赢得两分）。最后，Maker 占据 x_2 并获得一分；下一步，她占据 x_1 或 x_4 ，以获得第二分。

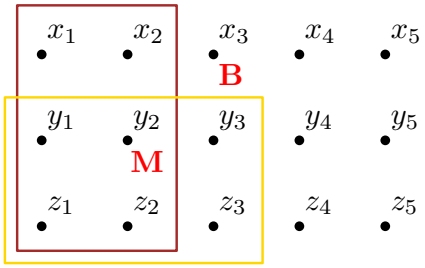


图 7：求解 $G_{3,\ 5}$ 博弈，情形 $s = 3$，第一步为 x_3。

这 las 这种情况是 Breaker 先下在 y_3。Maker 应手于 y_2，如图 8 所示。 e

现在左侧子网格上出现了威胁$G_{3,\ 2}$ Breaker 被迫在此处落子。令 b_1 为 Breaker 在该子网格中下的顶点。现在 Maker 占据 y_4，根据对称性，令 b_2 为 Breaker 在右侧子网格中下的顶点。

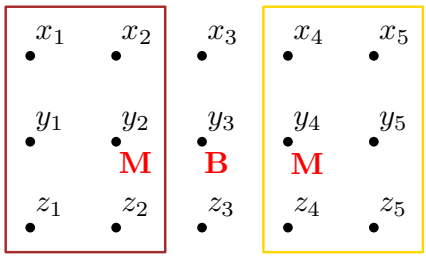


图 8：求解 $G_{3,\ 5}$ 博弈，情形 $s = 3$，第一步 y_3。

如果 $b_1 \neq y_1$，那么 Maker 现在走 y_1，并将此图案内一个方格的两个顶点配对，以确保得到 1 分。Breaker 现在被迫占据子网格的最后一个顶点，否则就会再失去 1 分。现在 Maker 将注意力转向右侧子网格。如果 $b_2 \neq y_5$，那么 Maker 走y_5，并将以类似策略得到 1 分。否则，Maker 走 x_4，并将 x_3与 x_5 配对，以确保得到第二分。

现在只需考虑 $b_1 = y_1$ 且 $b_2 = y_5$的情形。此时 Maker 走 x_3。如果 Breaker 没有立即在顶行应对，那么 Maker 通过占据 x_2确保得到 1 分，并将 x_1 与 x_4 配对，确保再得 1 分，从而获胜。根据对称性，不失一般性地假设 Breaker 占据 x_1 或 x_2。然后 Maker 占据 x_4 得到 1 分，Breaker 被迫应对 x_5，Maker 最后占据 z_4，并将 z_3与 z_5配对。

□

上述引理可以得到一个比使用配对策略所得下界更好的得分下界。

定理13。$SC(\mathcal{G}_{\square}, 3) \geq 2n/15.$

证明。 只需用 $G_{3,5}$ 个子网格铺满网格。在每块铺砖上，Maker采用她的制胜策略，至少获得两分（根据奇偶性，她在每块铺砖上可能是先手玩家，也可能是后手玩家）。铺砖之间的方格视为Maker未能占得的方格。由于每块 3×5 铺砖的周围有七个方格（东侧和南侧），这意味着采用该策略时，Maker每15个方格至少占得两点。

□

5 三角网格，菱形（沿三个方向），$k = 4$

5.1 $s = 1$的菱形

由定理4可得SC$_2$($\mathcal{G}$,1) $\leq 23n/24 + o(n)$；由定理17可得SC($\mathcal{G}$,1) $\leq 77n/78 + o(n)$；由Erdős-Selfridge定理可得SC($\mathcal{G}$,1) $\geq 15n/16 + o(n)$。

定理14。 $11n/12 \leq SC_2(\mathcal{G}, 1)$。

证明。 Maker 按照图9中的方式配对顶点，并以红色标出。唯一可能不含 Maker的顶点的菱形，是完全包含在某个绿色（阴影）区域内的菱形。每个绿色区域都包含五个菱形——一个中心菱形和四个角落处的菱形。

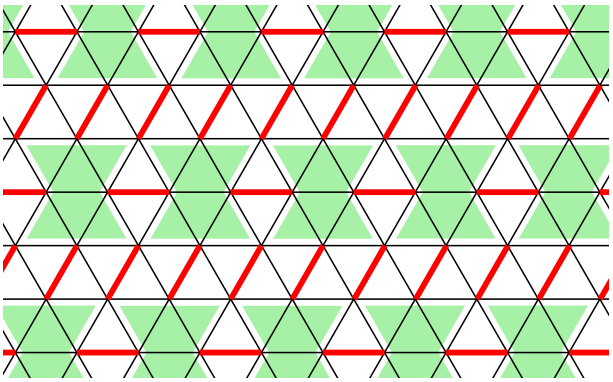


图9：Maker的配对，菱形游戏， $s = 1$。

观察图10中以灰色标出的所有中心菱形，它们的所有角都以类似方格网格的方式在彼此之间配对。因此，Maker将占据其顶点总数的至少一半，所以显然其中至多一半可以完全没有Maker的顶点。

至于角落菱形，我们观察图11所示的构型。由于图中强调的三个顶点对的配对，这四个菱形中至多有一个可以没有Maker的顶点。接下来只需注意到，棋盘上所有角落菱形都可以划分成每四个一组的此类构型。这意味着角落菱形总数中至多四分之一不会被Maker得分。

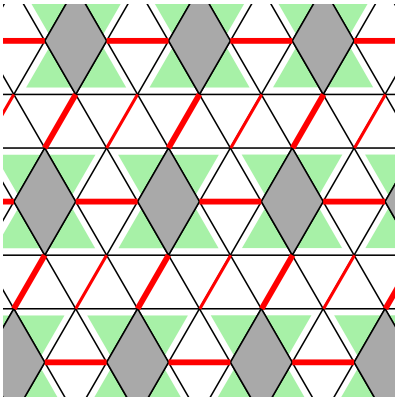


图10：中心菱形。

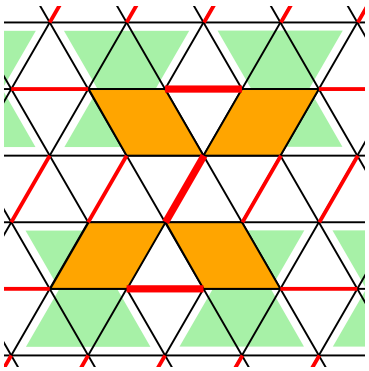


图11：四个角落菱形的构型。

由于中央菱形和角落菱形的数量分别为 $n/18$ 和 $2n/9$，因此在博弈结束时不含 Maker 顶点的菱形总数至多为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{18} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2n}{9} = \frac{n}{12}$。 □

5.2 $s = 2$的菱形

由定理4可得 $SC_2(\mathcal{G}, 2) \leq 71n/96 + o(n)$；由定理 16 可得 $SC(\mathcal{G}, 2) \leq 89n/96 + o(n)$。▱

定理 15. $19n/36 \leq SC_2(\mathcal{G}, 2)$。▱

证明。 我们可以将菱形网格看作三个正方形网格的叠加。如果对其中一个网格应用图 4 所示的正方形网格配对，并且满足 $s = 2$，就能得到该网格中 $2/3$ 个正方形的得分。将同样的配对转移到另外两个正方形网格后，会得到图 12 所示的两种配对。

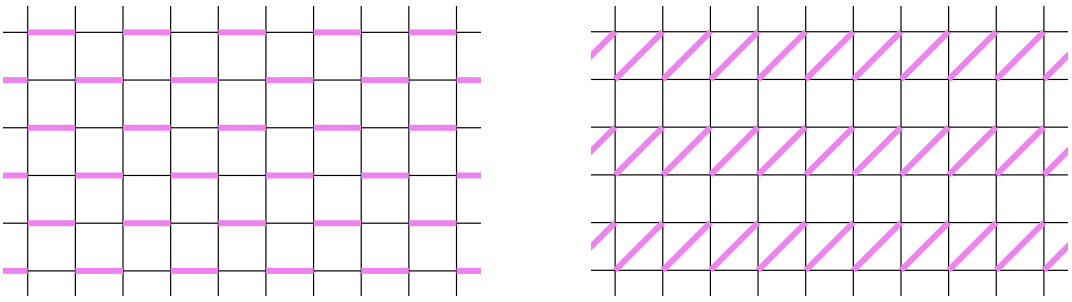


图 12：将正方形 $s = 2$ 的配对转移到菱形网格的另外两个正方形网格后所得的配对。

对于第二种（左侧）配对，可以将每条水平条带中的正方形配对，使每个正方形都与距离它两个单位的一个正方形配对。这样一来，每一对配对中的两个正方形至少有一个必定能得分。因此，第二个网格可获得 $1/2$ 个正方形的得分。

最后，对于第三个（右侧）网格，我们将正方形划分为两个集合——位于配对上方水平条带上的正方形，以及位于配对之间水平条带上的正方形。

配对上方的正方形可以相互匹配，使得两个相匹配的正方形中必有一个产生得分。对于配对之间的其他正方形，我们可以假设最坏情况分布——已得分的正方形有 4 个 Maker 标记，其余正方形有 1 个标记。这样，这些正方形中有三分之一必定产生得分，第三次配对的总得分为 $1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/3 = 5/12$。

Hence，这种情况下的总得分至少为 $(1/3 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 5/12)n = 19n/36$。 □

5.3 带有 $s = 3$ 的菱形

由定理4可得 $SC_2(\mathcal{G}, 3) \leq 5n/46 + o(n)$，由定理 15可得 $SC(\mathcal{G}, 3) \leq 17n/36 + o(n)$。▱

定理 16。 $7n/96 \leq SC_2(\mathcal{G}, 3)$▱

证明。 Maker 按照图13中的方式将顶点配对，其中所有浅蓝色六边形上的配对方式都相同：每个六边形的中间顶点都与另一个六边形的中间顶点配对，这些配对以红色标出。剩余顶点（不属于任何六边形）的配对以紫色标出，其方式使得有一半的六边形外围都“环绕”着一个紫色配对。

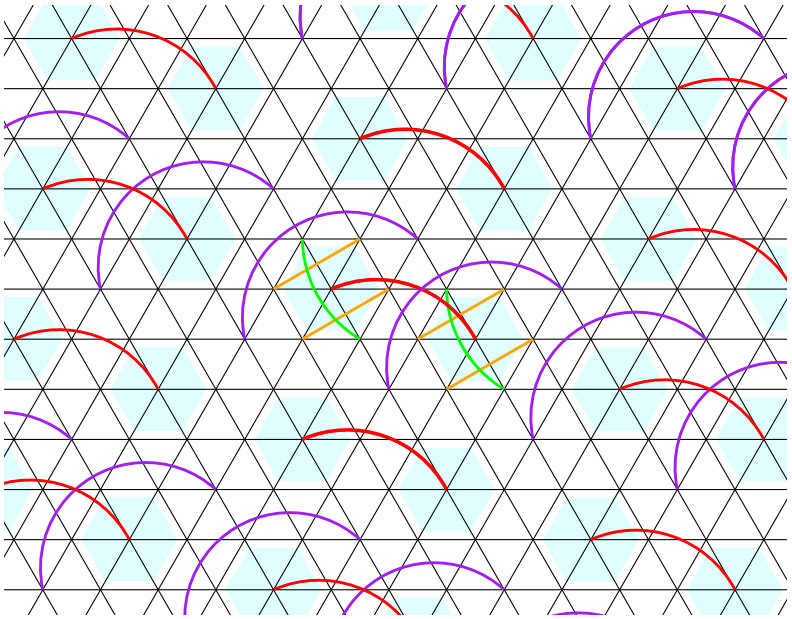


图13：当 $s = 3$ 时，菱形游戏中 Maker 的配对策略。图中只画出了其中一对六边形的内部配对。

首先，注意每对配对的红色顶点中，Maker 都会占据一个。我们来关注该顶点周围的六边形。在两个配对的绿色顶点中，Maker 会占据一个，从而得到两个相邻的 Maker 的顶点，一个红色，一个绿色。最后，在两个能够组成 Maker 的三角形的配对橙色顶点中，Maker 会占据一个，从而占据一个三角形。这个三角形包含在三个各有三个 Maker 的顶点的菱形中，而且这些菱形与其他六边形所产生的同类菱形互不重合。因此，每对六边形都会得到三个各有三个 Maker 的顶点的菱形。

此外，在每对中心已配对、且紫色配对围绕其“包裹”的六边形中，Maker 都会占据其中一个六边形的中心。接着观察包含该红色中心、两个橙色顶点以及其中一个配对紫色顶点的两个菱形，简单计数即可得出，其中至少有一个菱形包含三个 Maker 的顶点。由于这样的菱形不会与已经计入的菱形重叠，因此得分进一步增加一分。

总而言之，每两块六边形至少能保证得三分，每四块六边形还能再多得一分。

□

5.4 带有 $s = 4$ 的菱形

由定理4可得 $SC_2(\mathcal{G}, 4) \leq n/16 + o(n)$，由 Erdős-Selfridge 定理可得 $SC(\mathcal{G}, 4) \leq n/16 + o(n)$。

定理17。 $n/78 \leq SC(\mathcal{G}, 4)$

证明。 Maker使用图14所示的由六角星组成的铺砌。如果Maker首先在六角星内落子，她就占据中间顶点。随后，一旦Breaker在该六角星内落子，Maker便占据一个与中间顶点相邻、且距Breaker所落位置最远的顶点，从而形成一条Maker的边。在Breaker于该六角星内落下第二步后，Maker在Maker的边“另一侧”落子，从而形成一个三角形，并且该三角形有两种可能的延伸方式可以形成菱形。Maker只需将这两种延伸方式进行配对，就能占据一个完整的菱形。

这保证了每两个六角星中有一个Maker的菱形，从而完成证明。 □

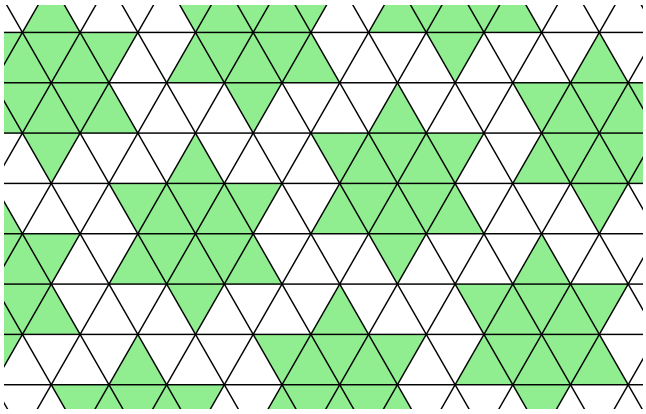


图14：Maker在带有 $s = 4$ 的菱形游戏中的策略。

6 六边形网格、六边形、 $k = 6$

6.1 六边形，其中 $s \in \{1, 2, 5, 6\}$

观察 18. $SC(\mathcal{G}, 1) = SC_2(\mathcal{G}, 1) = SC(\mathcal{G}, 2) = SC_2(\mathcal{G}, 2) = n$ 且 $SC(\mathcal{G}, 5) = SC_2(\mathcal{G}, 5) = SC(\mathcal{G}, 6) = SC_2(\mathcal{G}, 6) = 0$。

证明。 根据观察 1，只需给出一种适用于 $s \in \{1, 2\}$ 的配对，使网格中的每个六边形都包含两组配对。一种这样的配对是沿网格所有水平边进行配对，见图15。注意，另一种配对也同样适用，见图16。

□

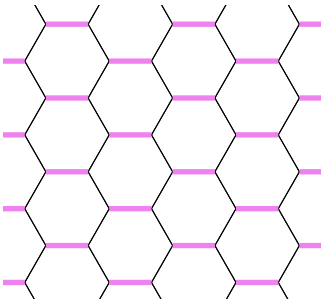


图15：水平配对。

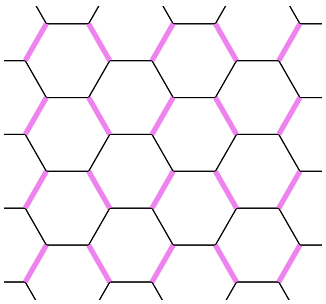


图16：之字形配对。

6.2 当 $s = 3$ 时的六边形

由定理4可得 $SC_2(\mathcal{G}, 3) \leq 85n/96$。

请注意，如果我们采用图15和图16中的任一种配对，就会得到 $SC_2(\mathcal{G}, 3) \geq n/2$。原因是，对于这两种配对中的任一种，Breaker 都可以选择每对中的哪个元素由 Maker 占据，从而使一半的六边形只有两个属于 Maker 的元素。不过，结果表明，有一种配对能带来更高的得分。

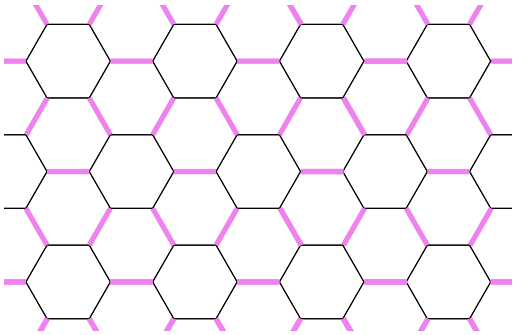


图17：花形配对。

定理 19. $\frac{3}{4}n \leq SC_2(\mathcal{G}, 3)$。

证明。 假设 Maker 采用图17所示的配对方式。那么， $2n/3$ 个六边形的边上各有三对配对顶点，因此每个六边形中恰好有三个元素被 Maker 占据。

我们将剩余的 $n/3$ 个六边形称为花形六边形，如图17中所有边都为紫色的六边形所示。注意，花形六边形的每个顶点都与另一个花形六边形的一个顶点配对。这意味着，到博弈结束时，Maker 将占据花形六边形上顶点总数的一半，即 $\frac{1}{2} \cdot \frac{6n}{3} = n$ 个顶点。

记 m_1 为至少含有 $s = 3$ 个 Maker的顶点的花形六边形的数量，记 m_2 为其余花形六边形（即含有少于 3 个 Maker的顶点的六边形）的数量。那么我们有$6m_1 + 2m_2 \geq n$，其中 $m_1 + m_2 = n/3$，由此得出 $m_1 \geq n/12$。因此，按照花形配对，Maker 可以保证至少有 $2n/3 + n/12 = 3n/4$ 个优良六边形。 □

注意，定理 19 中的下界是通过花形配对所能达到的最佳结果，因为可以让 Maker 在每个配对中各获得一个顶点，使优良六边形的数量恰好为 $3n/4$。

由定理 22 可直接得到以下上界。

推论 20. $SC(\mathcal{G}, 3) \leq \frac{5}{6}n$。

6.3 边长为 $s = 4$ 的六边形

由定理 19 可得 $\mathrm{SC}(\mathcal{G}, 4) \leq n/4 + o(n)$。

定理 21. $\frac{n}{10} \leq SC_2(\mathcal{G}, 4)$。

证明。 我们为 Maker 给出一种配对策略。为此，我们使用图 18 所示的六边形三元组铺砌。每一行中的三元组从左到右两两配对。每对三元组内部的配对方式如图 19 所示，其中绿色、红色和紫色线条表示配对顶点。

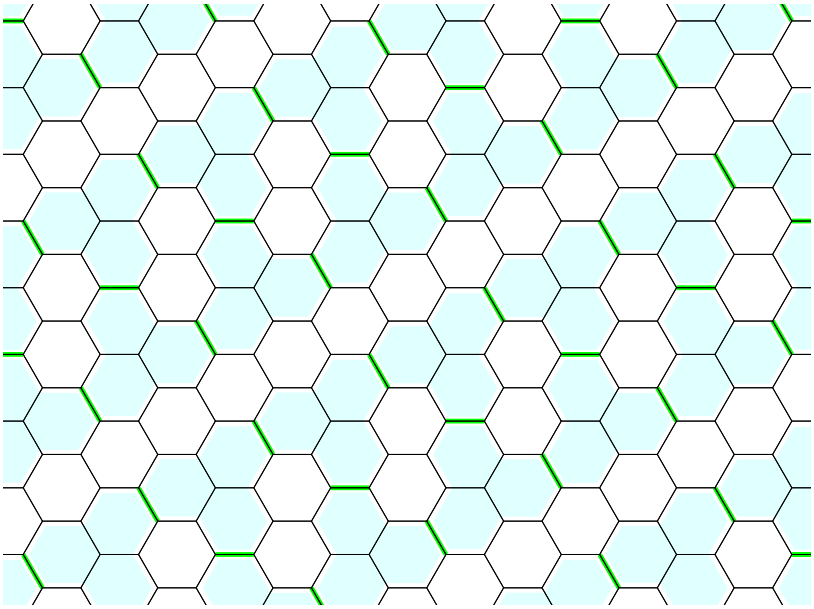


图 18：用六边形三元组进行铺砌，用于定理 21 的证明。

还需证明，Maker 能在每一对六边形三元组中至少获得一个六边形，这将使其每十个六边形获得一分。为此，首先注意到，紫色配对确保 Maker 将占据两个三元组之一的中心顶点。

从现在起，我们把注意力集中在包含 Maker 中心的三个六边形上。红色配对中的两个顶点之一将由 Maker 占据。如果是上方的顶点，那么 Maker 就能在上方的六边形上得分。不过，如果是下方的顶点，那么下方的橙色配对就能确保她在两个下方六边形中的一个上得分。 □

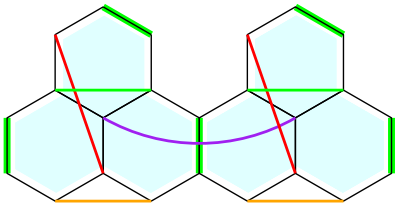


图 19：两个耦合三重六边形内的配对。

定理 22. $\frac{n}{6} \leq \mathcal{SC}(\mathcal{G}, 4)_{\hexagon}$

证明。 我们用 2×2 六边形子网格铺砌六边形网格，如图 20 所示。Maker 将对红对采用配对策略（图中显示这些红对由相邻子网格共享），并对每个子网格的其余顶点采用更为精细的策略。

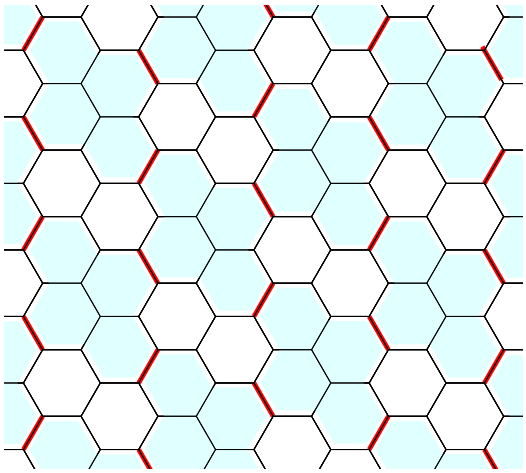


图 20：供 Maker 使用的铺砌， $s = 4$六边形博弈。

在每个 2×2 六边形子网格上，Maker 将作为后手进行回应，即她会反复等待 Breaker 在该子网格中落子后再回应。在她的第一步中，Maker 将占据两个标黄的中心顶点之一，如左侧的图 21 所示。不失一般性，我们可以假定它是标有“M”的那个。然后在她的第二步中，她占据中间图里三个标黄顶点中的一个，例如标有“M”的那个。这样，Maker 的前两步对两个相邻六边形是共用的。最后，在第三步中，Maker 将占据这两个六边形上剩余四个顶点中的一个（右图标为黄色），从而在其中一个六边形上得分（同时考虑到 Maker 会在每一红对上占据一个顶点）。

请注意，在 Maker 的每一步中，标记为黄色的候选顶点数量都严格多于截至当时 Breaker 在该子网格中占据的顶点数量。 □

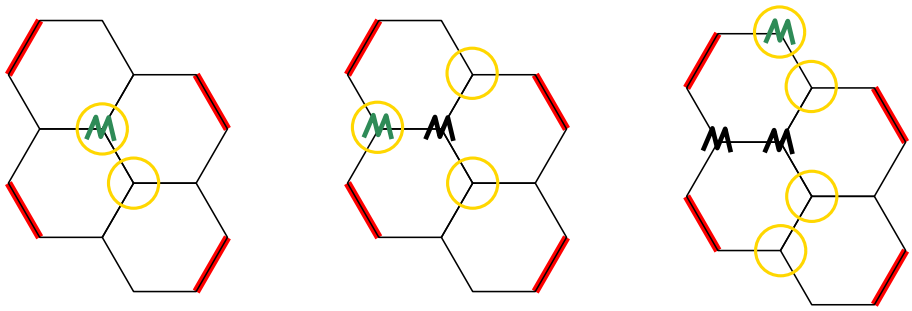


图 21：在带有 $s = 4$ 的六边形博弈中，Maker 在 2×2 六边形子网格上的策略 .

结论

本文在 [1] 的初步研究基础上，进一步加深了对计分位置博弈的理解。我们研究了网格上的博弈，并运用了若干技巧，得出了最优策略和配对策略的上界与下界。由于其中大多数界并不紧，仍有许多开放问题有待解决。尤其值得注意的是，下界和上界之间差距相对较小的一些情形，例如 SC($\mathcal{G}_{\hexagon}$，3)。

我们特别感兴趣的一个问题是配对 Maker 的完整菱形游戏。我们猜想 $\mathrm{SC}_2(\mathcal{G}, 4) = 0$。鉴于我们已经确立了一种策略，保证 Maker 的得分至少为 $n/78 + o(n)$，确定是否存在一种能让 Maker 获得任意正得分的配对策略，将会非常有意思。这个问题似乎很难，因为除穷举探索外，目前还没有解决此类问题的一般方法。

致谢

本研究得到 ANR 项目 P-GASE（ANR-21-CE48-0001-01）的支持，也得到 COST 行动 CA22145 GameTable 的支持。Miloˇs Stojakovi´c 部分得到塞尔维亚共和国科学基金资助，资助项目 #7462：时空中的图：复杂动力系统机器学习的图嵌入（TIGRA）；同时也部分得到塞尔维亚共和国科学、技术发展与创新部的资助（资助编号 451-03-33/2026-03/200125 和 451-03-34/2026-03/200125）。

参考文献

[1] G. Bagan、Q. Deschamps、E. Duchene、B. Durain、B. Effantin、V. Gledel、N. Oijid 和 A. Parreau，《Incidence：一种在图上的计分位置博弈》，*Discrete Math.* 347（2024），113570。

[2] J. Beck，《组合博弈：井字棋理论》，剑桥大学出版社，2008。

[3] J. Beck，论 Kaplansky 游戏的一个推广，*Discrete Math.* 42 (1982)，27–35。

[4] M. Bednarska，T. ̇Luczak，随机策略近乎最优的偏置位置游戏，*Combinatorica* 20 (2000)，477–488。[5] J. Bensmail，F. McInerney，论顶点捕获博弈，理论计算机科学 923 (2022)，27–46。[6] V. Chv´atal，P. Erd˝os，偏置位置游戏，*Ann. Discrete Math.*2 (1978)，221–229。[7] C. Dowden，M. Kang，M. Mikala˘cki，M. Stojakovi´c，Toucher-Isolator 游戏，*TheElectronic Journal of Combinatorics* 26 (2019)，#P4.6。[8] E. Duchˆene，V. Gledel，F. Mc Inerney，N. Nisse，N. Oijid，A. Parreau，M. Stojakovi´c，图的边集上 Maker–Breaker 游戏的复杂性，离散应用数学 361 (2025)，502–522。[9] P. Erd˝os，J.L. Selfridge，论组合游戏，*J. Combin. Theory Ser. A*14 (1973)，298–301。[10] A.W. Hales，R.I. Jewett，正则性与位置博弈，*Trans. Amer. Math. Soc.* 106 (1963)，222–229。[11] D. Hefetz，M. Krivelevich，M. Stojakovi´c，T. Szab´o，位置博弈。Birkh¨auser，巴塞尔，2014。[12] D.J. Kleitman，B.L. Rothschild，Kaplansky 游戏的一个推广，*Discrete Math.*2 (1972)，173–178。[13] E. R¨aty，圈上的达成游戏，*arXiv* 预印本 *arXiv:1907.11152* (2019)。[14] E. R¨aty，树上的 Toucher-Isolator 游戏，*arXiv* 预印本 *arXiv:2001.10498* (2020)。[15] M. Stojakovi´c，T. Szab´o，随机图上的位置博弈，*Random Structures &Algorithms* 26 (2005)，204–223。