arXiv:2603.05038v1 [math.NT] 5 Mar 2026

（扩展）线性化双重洗牌李代数的稳定子解释

Annika Burmester 和 Khalef Yaddaden

Abstract. Brown 引入的线性化双 shuffle 李代数反映了多重 ζ 值按深度分次的结构。在此前的一篇论文中，第一作者引入了这一李代数的扩展，以容纳多重 q-zeta 值和多重艾森斯坦级数。受 Enriquez 和 Furusho 对双 shuffle 李代数所作稳定子解释的启发，本文为这两个李代数都给出了稳定子解释，并证明这些稳定子保持了从第一个线性化李代数到第二个线性化李代数的扩展。

Contents

引言 1

1. 线性化双 shuffle 李代数 5 1.1. 代数设定 5 1.2. 线性化双 shuffle 李代数的稳定子解释 7 2. 线性化平衡李代数 14 2.1. 代数设定 14 2.2. 线性化平衡李代数的稳定子解释 16 3. 稳定子之间的李代数嵌入 22 附录 A. 李代数作用回顾 23

参考文献 25

Introduction

多重 ζ 值。令 $\mathcal{Z}$ 为多重 ζ 值的 $\mathbb{Q}$-代数，则 $\mathcal{Z}$ 由以下元素张成

$$\zeta(k_1,\dots,k_d)=\sum_{n_1>\cdots>n_d>0}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_d^{k_d}},\qquad k_1\geq 2,\ k_2,\dots,k_d\geq 1.$$

这里， $k_1+\cdots+k_d$ 是权， d 是深度。

Date: 2026年2月。2020 *Mathematics Subject Classification.* 11M32、05A30、17B70。
Key words and phrases. 多重 ζ 值、q-模拟、线性化双重洗牌关系、稳定子李代数。

代数 $\mathcal{Z}$ 的一个关键特征是两种不同的乘积表达式。首先，设 $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ 为由字母表 $X=\{x_0,x_1\}$ 生成的非交换自由代数。$\mathbb{Q}\langle X\rangle$ 上的洗牌积 由 $1\sqcup w=w\sqcup 1=w$ 给出，并且

$$av\sqcup bw=a(v\sqcup bw)+b(av\sqcup w),\qquad a,b\in X,\ v,w\in\mathbb{Q}\langle X\rangle.$$

令 $\mathfrak{h}^0$ 为 $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ 的子空间，它由 1 以及所有以 x_0 开头并以 x_1 结尾的字张成。

命题 I. 存在一个满射代数态射

$$(\mathfrak{h}^0,\sqcup)\to\mathcal{Z},\quad x_0^{k_1-1}x_1\cdots x_0^{k_d-1}x_1\mapsto\zeta(k_1,\dots,k_d),$$

它可以唯一延拓到 $\mathbb{Q}\langle X\rangle$，使得 $x_0\mapsto 0$ 和 $x_1\mapsto 0$。

注意，洗牌积关于权和深度是齐次的。接下来，考虑由字母表 $Y=\{y_1,y_2,\dots\}$ 生成的非交换自由代数 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$。$\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ 上的 拟 ***shuffle*** 积 定义为 $1*w=w*1=w$ 和

$$y_iv*y_jw=y_i(v*y_jw)+y_j(y_iv*w)+y_{i+j}(v*w),\qquad i,j\geq 1,\ v,w\in\mathbb{Q}\langle Y\rangle.$$

令 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle^0$ 为 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ 的子空间，它由所有不以 y_1 开头的字张成。

命题 II. 存在一个满射代数态射

$$(\mathbb{Q}\langle Y\rangle^0,*)\to\mathcal{Z},\quad y_{k_1}\cdots y_{k_d}\mapsto\zeta(k_1,\dots,k_d),$$

它有唯一延拓到 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$，使得 $y_1\mapsto 0$。

注意，拟 shuffle 积关于权是齐次的，而关于深度仅具滤过性。该领域的一个核心公开问题是由 Ihara、Kaneko 和 Zagier 提出的以下著名猜想。

猜想 III. 代数 $\mathcal{Z}$ 中的所有代数关系，均可通过正则化映射比较来自 [IKZ06, 定理 1] 的扩展映射 $(\mathbb{Q}\langle X\rangle,\sqcup)\to\mathcal{Z}$ 与 $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle,*)\to\mathcal{Z}$ 而得到。

特别是，根据猜想 III，代数 $\mathcal{Z}$ 将按权分次。此外，代数$\mathcal{Z}$ 配备了一个递增深度滤过

$$\mathrm{Fil}_D^d\,\mathcal{Z}:=\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\zeta(k_1,\dots,k_r)\mid r\leq d),$$

so

$$\mathbb{Q}=\mathrm{Fil}_D^0\,\mathcal{Z}\subset\mathrm{Fil}_D^1\,\mathcal{Z}\subset\mathrm{Fil}_D^2\,\mathcal{Z}\subset\cdots.$$

我们关注相伴深度分次代数

$$\mathrm{gr}_D\,\mathcal{Z}:=\mathbb{Q}\oplus\bigoplus_{d\geq 1}\mathrm{Fil}_D^d\,\mathcal{Z}/\,\mathrm{Fil}_D^{d-1}\,\mathcal{Z}.$$

用 $\zeta_D(k_1,\dots,k_d)$ 表示 $\mathrm{gr}_D\,\mathcal{Z}$ 中 $\zeta(k_1,\dots,k_d)$ 的等价类。

洗牌积是权齐次的，因此由命题 I 可得一个满射代数态射

$$(\mathbb{Q}\langle X\rangle,\sqcup)\to\mathrm{gr}_D\,\mathcal{Z},\quad x_0^{k_1-1}x_1\cdots x_0^{k_d-1}x_1\mapsto\zeta_D(k_1,\dots,k_d).$$

拟 shuffle 积关于深度仅为过滤的，而相应的深度分次乘积是 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ 上的洗牌积，我们将其记为 $\sqcup_Y$。命题 II 中给出的映射诱导出一个满射代数态射

$$(\mathbb{Q}\langle Y\rangle,\sqcup_Y)\to\mathrm{gr}_D\,\mathcal{Z},\quad y_{k_1}\cdots y_{k_d}\mapsto\zeta_D(k_1,\dots,k_d).$$

与猜想 III 类似，我们预期如下结论。

猜想 IV. 代数 $\mathrm{gr}_D \mathcal{Z}$ 中的所有代数关系均通过对映射 $(\mathbb{Q}\langle X\rangle, \sqcup) \to \mathrm{gr}_D \mathcal{Z}$ 与 $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \sqcup_Y) \to \mathrm{gr}_D \mathcal{Z}$的比较而得到。

这一猜想促使人们给出线性化双 *shuffle* 李代数 $\mathfrak{ls}$ 的定义，该定义最早见于 [Bro21], ，参见定义 1.2 与定理 1.3。

猜想 V. 存在一个代数同构

$$\mathrm{gr}_D \mathcal{Z}/(\zeta_D(2)) \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{ls})^\vee.$$

特别地，李代数 $\mathfrak{ls}$ 预期为 $\mathrm{gr}_D \mathcal{Z}/(\zeta_D(2))$ 的不可分解元的分次对偶。注意，李代数 $\mathfrak{ls}$ 也可从其双分次对偶李余代数的角度加以研究。事实上，Maassarani 在 [Maa22] 中证明了该李余代数同构于二面体李余代数，后者由 Goncharov 在 [Gon98, Gon01] 中于多重多对数与混合 Tate 动机的背景下加以研究。

在第 1 节中，我们证明，$\mathfrak{ls}$ 本质上是双代数余乘法 Δ_Y 的稳定子；该余乘法与 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ 上的洗牌积 $\sqcup_Y$ 对偶，且这里考虑的是双代数余乘法 Δ_X 的本原元李代数 $\mathfrak{Lie}(X)$ 的作用；该余乘法与 $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ 上的洗牌积 $\sqcup$ 对偶。这一方法深受 [EF18] 中工作的启发。更准确地说，我们有以下主要结果：

定理 VI（定理 1.16）。 我们有一个双分次空间的同构

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y) = \mathfrak{ls} \oplus \mathbb{Q}x_0 \oplus \mathbb{Q}x_1.$$

稳定子 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)$ 的明确构造见定义 1.6。我们想强调的是，稳定子的构造在 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)$ 上诱导出自然的李代数结构。特别地，定理 1.16 蕴含空间 $\mathfrak{ls}$ 是一个李代数，参见定理 1.3。这为 [Bro21，定理 5.5] 中最初陈述的结果提供了另一种证明。

多重 q-ζ 值。 对于任意参数 $0 < q < 1$，令 $\mathcal{Z}_q$ 为多重q-ζ 值的 $\mathbb{Q}$-代数，它可以通过多种方式定义。一种直接的定义是

$$\mathcal{Z}_q = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}} \left\{ \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{q^{n_1 s_1}}{(1-q^{n_1})^{s_1}} \cdots \frac{q^{n_r s_r}}{(1-q^{n_r})^{s_r}} \;\middle|\; s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ s_r \geq 1 \right\}.$$

关于空间 $\mathcal{Z}_q$ 的等价定义及更多背景信息，请参阅 [BK20], [Bur23]。下文我们将聚焦于 $\mathcal{Z}_q$ 的一个特定张成集，即平衡多重 q-ζ 值 $\zeta_q(s_1, \ldots, s_r)$，其中 $s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $s_r \geq 1$。其具体构造见 [Bur24], ，此处我们只说明其主要性质。对于 $\zeta_q(s_1, \ldots, s_r)$，权 为$s_1 + \cdots + s_r + \#\{s_i = 0\}$，深度 为 $r - \#\{s_i = 0\}$。

令 $\mathbb{Q}\langle B\rangle$ 为由字母表 $B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$ 生成的非交换自由代数。在 $\mathbb{Q}\langle B\rangle$ 上的平衡拟交错积 定义为 $1 *_b w = w *_b 1 = w$ 和

$$b_i v *_b b_j w = b_i(v *_b b_j w) + b_j(b_i v *_b w) + \delta_{ij>0} b_{i+j}(v *_b w), \quad i, j \geq 0,\ v, w \in \mathbb{Q}\langle B\rangle.$$

考虑由所有不以 b_0 结尾的字张成的子空间 $\mathbb{Q}\langle B\rangle^0$ 。子空间 $\mathbb{Q}\langle B\rangle^0$ 是由 $(b_0^m b_k)_{m\geq 0,\ k\geq 1}$ 自由生成的 $\mathbb{Q}\langle B\rangle$ 的子代数。

我们定义代数反自同构 τ： $\mathbb{Q}\langle B\rangle^0 \to \mathbb{Q}\langle B\rangle^0$ 如下：

$$\tau(b_0^m b_k) = b_0^{k-1} b_{m+1}$$

对所有 $m \geq 0$、 $k \geq 1$。映射 τ 是一个对合。

命题 VII. 存在一个满射的、 τ-不变的代数态射

$$(\mathbb{Q}\langle B\rangle^0, *_b) \to \mathcal{Z}_q, \quad b_{s_1}\cdots b_{s_r} \mapsto \zeta_q(s_1,\dots,s_r),$$

它具有唯一延拓至 $\mathbb{Q}\langle B\rangle$ ，使得 $b_0 \mapsto 0$。

注意，平衡拟交错积按权齐次，而在深度方面仅具滤过性。映射 τ 按权和深度齐次。

作为猜想 III 的类比，我们有以下结论。

猜想 VIII. $\mathcal{Z}_q$ 中的所有代数关系均由平衡拟交错积以及平衡多重 q-ζ 值的 τ-不变性导出。

特别地，猜想 VIII 将意味着代数 $\mathcal{Z}_q$ 按权分次。此外，代数 $\mathcal{Z}_q$ 带有递增深度滤过

$$\mathrm{Fil}_D^d\,\mathcal{Z}_q := \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\zeta_q(s_1,\dots,s_r) \mid r - \#\{s_i = 0\} \le d),$$

且相伴深度分次代数由下式给出

$$\mathrm{gr}_D\,\mathcal{Z}_q := \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{d\ge 1} \mathrm{Fil}_D^d\,\mathcal{Z}_q / \mathrm{Fil}_D^{d-1}\,\mathcal{Z}_q.$$

我们用 $\zeta_{q,D}(s_1,\dots,s_r)$ 表示 $\mathrm{gr}_D\,\mathcal{Z}_q$ 中 $\zeta_q(s_1,\dots,s_r)$ 的等价类。

映射 τ 关于权和深度是齐次的，因此由命题 VII 可知，$\mathrm{gr}_D\,\mathcal{Z}_q$ 中具有 τ-不变性，其由下述显式恒等式给出

$$\zeta_{q,D}(\{0\}^{m_1},k_1,\dots,\{0\}^{m_d},k_d) = \zeta_{q,D}(\{0\}^{k_d-1},m_d+1,\dots,\{0\}^{k_1-1},m_1+1),$$

对于 $k_j \ge 1$, $m_j \ge 0$。平衡拟交错积关于深度是滤过的，其相伴的深度分次乘积是 $\mathbb{Q}\langle B\rangle$ 上的洗牌积，我们将其记为 $\sqcup_B$。因此，命题 VII 中的映射诱导出一个满射代数态射

$$(\mathbb{Q}\langle B\rangle, \sqcup_B) \to \mathrm{gr}_D\,\mathcal{Z}_q, \quad b_{s_1}\cdots b_{s_r} \mapsto \zeta_{q,D}(s_1,\dots,s_r).$$

这两个性质促使我们定义线性化平衡李代数 $\mathfrak{lq}$，该代数在 [Bur25], 中引入，参见定义 2.5 和定理 2.6。根据构造，存在一个满射代数态射

$$\mathcal{U}(\mathfrak{lq})^\vee \twoheadrightarrow \mathrm{gr}_D\,\mathcal{Z}_q/\big(\zeta_{q,D}(2),\zeta_{q,D}(4),\zeta_{q,D}(6)\big).$$

请注意，与关于多重 ζ 值的猜想 V 不同，我们知道此映射不是单射。

在第 2 节中，我们证明，对于李代数 $\mathfrak{Lie}(B)$ 的作用而言， $\mathfrak{lq}$ 本质上是对合 τ 的稳定子；该李代数由双代数余乘法 Δ_B下的本原元构成，而此余乘法与洗牌积 $\sqcup_B$对偶。主要结果如下。

定理 IX (定理 2.16)。 存在一个双分次空间的同构

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau) = \mathfrak{lq} \oplus \mathbb{Q}b_0.$$

关于稳定子 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)$ 的明确界定，请参见定义 2.10。与前文一样，稳定子 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)$ 自然具有李代数结构。因此，由定理 2.16 可得 $\mathfrak{lq}$ 为李代数的另一种证明，参见定理 2.6。该结论最初由 [Bur25] 证明。

在第 3 节中，我们将前几节研究的两个稳定子 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)$ 和 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)$ 联系起来。事实上， [Bur25, 定理 7.10] 已证明存在一个单射

李代数态射 $\theta\colon \mathfrak{ls} \hookrightarrow \mathfrak{lq}$。此外，分别由定理 1.16 和 2.16 得到的包含 $\mathfrak{ls} \subset \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)$ 和 $\mathfrak{lq} \subset \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)$ 都是李代数包含。下面的结果表明，映射 θ 可扩展到这些稳定子上。

定理 X (定理3.2)。 单射李代数态射 $\theta\colon \mathfrak{ls} \hookrightarrow \mathfrak{lq}$ 诱导出一个单射李代数态射

$$\theta^{(10)} : \big(\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y), \{-,-\}\big) \longrightarrow \big(\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau), \{-,-\}_A\big).$$

这一结果可概括为以下由单射李代数态射组成的交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{ls} & \xhookrightarrow{\quad\theta\quad} & \mathfrak{lq} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y) & \xhookrightarrow{\quad\theta^{(10)}\quad} & \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau). \end{array}$$

致谢。 本项目部分由第一作者的 JSPS KAKENHI 资助项目 24KF0150 以及德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）项目编号 491392403（TRR 358）资助；第二作者则获得 JSPS KAKENHI 资助项目 23KF0230 的资助。作者感谢 Benjamin Enriquez 和 Hidekazu Furusho 提出的宝贵意见。

1. The linearized double shuffle Lie algebra

1.1. 代数设定。 考虑由 $X := \{x_0, x_1\}$生成的非交换自由 $\mathbb{Q}$代数 $\mathbb{Q}\langle X\rangle$。它配备了一个双代数结构，其余乘法为 $\Delta_X\colon \mathbb{Q}\langle X\rangle \to \mathbb{Q}\langle X\rangle \otimes \mathbb{Q}\langle X\rangle$，这是由下式给出的代数态射

$$\Delta_X(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i, \quad \text{for } i \in \{0,1\}. \tag{1.1}$$

接下来，考虑由 $Y := \{y_1, y_2, \ldots\}$ 生成的非交换自由 $\mathbb{Q}$-代数 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$。它具有一个双代数结构，其余乘法为 $\Delta_Y\colon \mathbb{Q}\langle Y\rangle \to \mathbb{Q}\langle Y\rangle \otimes \mathbb{Q}\langle Y\rangle$，该代数态射定义为

$$\Delta_Y(y_n) = y_n \otimes 1 + 1 \otimes y_n, \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}_{>0}. \tag{1.2}$$

该 $\mathbb{Q}$-代数态射

$$i_Y : \mathbb{Q}\langle Y\rangle \to \mathbb{Q}\langle X\rangle, \quad y_n \mapsto x_0^{n-1}x_1$$

是单射。因此，我们常常——滥用一下记号——将 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ 与其在 $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ 中的像$i_Y(\mathbb{Q}\langle Y\rangle)$ 视为相同。$\mathbb{Q}$-线性空间的直和分解

$$\mathbb{Q}\langle X\rangle = \mathbb{Q}\langle Y\rangle \oplus \mathbb{Q}\langle X\rangle x_0$$

诱导出一个满射的 $\mathbb{Q}$-线性映射

$$\pi_Y : \mathbb{Q}\langle X\rangle \to \mathbb{Q}\langle Y\rangle, \quad x_0^{k_1-1}x_1\cdots x_0^{k_d-1}x_1x_0^r \mapsto \begin{cases} y_{k_1}\cdots y_{k_d}, & r = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，我们有一个 a $\mathbb{Q}$-线性同构

$$\mathbb{Q}\langle Y\rangle \simeq \mathbb{Q}\langle X\rangle / \mathbb{Q}\langle X\rangle x_0. \tag{1.3}$$

令 $\mathfrak{Lie}(X)$ 为由字母表 X 生成的自由 $\mathbb{Q}$-李代数。$\mathbb{Q}$-代数 $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ 同构于 $\mathfrak{Lie}(X)$ 的包络代数。因此，$\mathfrak{Lie}(X)$ 可视为 $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ 中关于式 (1.1) 的余乘法 Δ_X 的本原元所成的李代数。也就是说，

$$\mathfrak{Lie}(X) = \{\psi \in \mathbb{Q}\langle X\rangle \mid \Delta_X(\psi) = \psi \otimes 1 + 1 \otimes \psi\}.$$

李代数 $\mathfrak{Lie}(X)$ 按权分次，也就是说，它带有一种分次，其中 x_0 和 x_1 的次数均为 1，并且有如下分解

$$\mathfrak{Lie}(X) = \bigoplus_{m\geq 1} \mathfrak{Lie}(X)[m].$$

李代数 $\mathfrak{Lie}(X)$ 也按权和深度双分次，也就是说，它带有一种双分次，其中 x_0 的双次数为 (1,0)，x_1 的双次数为 (1,1)，并且有如下分解

$$\mathfrak{Lie}(X) = \bigoplus_{m\geq 1,\ n\leq m} \mathfrak{Lie}(X)[m,n]. \tag{1.4}$$

对于 $\psi \in \mathfrak{Lie}(X)$，令 d_ψ 为 $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ 的导子，定义如下

$$d_\psi(x_0) = 0, \quad \text{and} \quad d_\psi(x_1) = [x_1, \psi].$$

三元组 $(\mathfrak{Lie}(X)\ [-,-], d)$ 是一个后李代数，因此由命题-定义 A.4 可得 $\mathfrak{Lie}(X)$ 上另一个李括号，定义如下

$$\{\psi_1, \psi_2\} = d_{\psi_1}(\psi_2) - d_{\psi_2}(\psi_1) + [\psi_1, \psi_2]. \tag{1.5}$$

李括号 (1.5) 通常称为井原括号。

引理 1.1。元素 x_0、x_1 在李代数$(\mathfrak{Lie}(X)\ \{-,-\})$中是中心的。

证明。对于任意 $\psi \in \mathfrak{Lie}(X)$，我们计算得

$$\{\psi, x_1\} = d_\psi(x_1) - d_{x_1}(\psi) + [\psi, x_1] = [x_1, \psi] + [\psi, x_1] = 0.$$

此外，我们有

$$\{\psi, x_0\} = d_\psi(x_0) - d_{x_0}(\psi) + [\psi, x_0] = -d_{x_0}(\psi) + [\psi, x_0].$$

因此，我们要证明

$$-d_{x_0}(\psi) + [\psi, x_0] = 0.$$

由于 $-d_{\mathfrak{b}} + [-, x_0]$ 是 $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ 上的导子，只需对 $\psi \in X$ 验证此等式。我们有 e

$$\begin{aligned} -d_{x_0}(x_1) + [x_1, x_0] &= -[x_1, x_0] + [x_1, x_0] = 0, \\ -d_{x_0}(x_0) + [x_0, x_0] &= 0. \end{aligned}$$

□

定义 1.2。空间 $\mathfrak{s}$ 由所有满足以下条件的 $\psi \in \mathbb{Q}\langle X\rangle$ 构成

(i) $(\psi \mid x_i) = 0$ for $i = 0, 1$,

(ii) $\Delta_X(\psi) = \psi \otimes 1 + 1 \otimes \psi$,

(iii) $\Delta_Y(\pi_Y(\psi)) = \pi_Y(\psi) \otimes 1 + 1 \otimes \pi_Y(\psi)$,

(iv) $(\psi \mid x_0^{n-1} x_1) = 0$ for $n \geq 2$ even.

在 [Bro21中，定理5.5], 以下内容在没有详细证明的情况下被陈述。

定理 1.3。这一对 $(\mathfrak{s}, \{-,-\})$ 是一个 $\mathbb{Q}$-李代数。

1.2. 线性化双 shuffle 李代数的稳定子解释。 本节旨在通过证明 $\mathfrak{ls}$ 本质上是余乘法 Δ_Y相对于李代数 $(\mathfrak{Lie}(X)\ \{-,-\})$ 的一个作用的稳定子，来证明定理 1.3。

对于 $\psi \in \mathfrak{Lie}(X)$，令 s_ψ 为由下式给出的 $\mathbb{Q}$-线性自同态:

$$s_\psi := \ell_\psi + d_\psi,$$

其中， ℓ_ψ 是由 ψ左乘给出的 $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ 的自同态。

引理 1.4 ([Rac02], (3.1.9.2))。 存在一个 $\mathbb{Q}$-李代数作用，由$(\mathfrak{Lie}(X)\ \{-,-\})$ 通过$\mathbb{Q}$-线性自同态作用于 $\mathbb{Q}\langle X\rangle$，其定义如下:

$$(\mathfrak{Lie}(X), \{-,-\}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\langle X\rangle), \quad \psi \mapsto s_\psi.$$

证明。 由于 $(\mathfrak{Lie}(X)\ \{-,-\})$ 是由一个后李结构诱导的，我们可以对任意 $\psi \in \mathfrak{Lie}(X)$ 应用命题 A.5 (b)，令 $\mathsf{end}_\psi = s_\psi$ ，从而得到上述结论。□

注意，s_ψ 是 $\mathbb{Q}\langle X\rangle x_0$的自同态。因此，由于 (1.3)，可知存在唯一的 $\mathbb{Q}$-线性自同态 s_ψ^Y ，它作用于 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ ，使得下图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}\langle X\rangle & \xrightarrow{s_\psi} & \mathbb{Q}\langle X\rangle \\ {\scriptstyle \pi_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Y} \\ \mathbb{Q}\langle Y\rangle & \xrightarrow{s_\psi^Y} & \mathbb{Q}\langle Y\rangle \end{array}$$

彼此交换。利用这一事实和引理 1.4，可以证明如下结论。

命题 1.5 ([Rac02], §4.1.1and [EF18], 引理 2.2)。 存在一个 $\mathbb{Q}$-李代数作用，即由 $\mathbb{Q}$-线性自同态给出的作用，作用在 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ 上: $(\mathfrak{Lie}(X)\ \{-,-\})$

$$(\mathfrak{Lie}(X), \{-,-\}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\langle Y\rangle), \quad \psi \mapsto s_\psi^Y.$$

记 $\mathsf{Cop}(\mathbb{Q}\langle Y\rangle)$ 为 $\mathbb{Q}$-线性态射 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle \to \mathbb{Q}\langle Y\rangle^{\otimes 2}$ 的空间。命题 1.5 中给出的作用导出 $(\mathfrak{Lie}(X)\ \{-,-\})$ 在空间 $\mathsf{Cop}(\mathbb{Q}\langle X\rangle)$ 上的一个作用，该作用由 $\mathbb{Q}$-线性自同态给出，即 ([EF18, §2.5])

$$\begin{aligned} (\mathfrak{Lie}(X), \{-,-\}) &\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Cop}(\mathbb{Q}\langle Y\rangle)), \\ \psi &\longmapsto \Big(D \mapsto \big(s_\psi^Y \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes s_\psi^Y\big) \circ D - D \circ s_\psi^Y\Big). \end{aligned} \tag{1.6}$$

定义 1.6。 [1] $\mathsf{Cop}(\mathbb{Q}\langle Y\rangle)$ 关于 (1.6) 中作用的稳定子李代数，是 $(\mathfrak{Lie}(X)\ \{-,-\})$ 的李子代数，定义如下:

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y) := \left\{\psi \in \mathfrak{Lie}(X) \mid (s_\psi^Y \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes s_\psi^Y) \circ \Delta_Y = \Delta_Y \circ s_\psi^Y\right\}.$$

换言之， $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)$ 恰由满足以下条件的元素 $\psi \in \mathfrak{Lie}(X)$ 构成： s_ψ^Y 是双代数 $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle,$ $\Delta_Y)$ 的余导子。

命题 1.7。 我们有以下子空间的包含关系： $\mathfrak{Lie}(X)$

$$\mathfrak{ls} \subset \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y).$$

[1] 更一般的陈述可参见命题-定义 A.2。

为了证明这个命题，我们先介绍一些预备定义和结果。设 D_f^Y 是由下式给出的 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ 上的 $\mathbb{Q}$-线性自同态

$$D_f^Y := s_f^Y - r_{\pi_Y(f)},$$

其中 $r_{\pi_Y(f)}$ 表示以 $\pi_Y(f)$ 进行右乘。

引理 1.8 （[Rac02，命题 4.1。4]）。自同态 D_f^Y 是 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ 的一个导子。

事实上，由于 [Rac02，注 4.1.5], ，它是导子 D_f 在 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ 上的限制，其中 D_f 是 $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ 的导子，由下式给出

$$D_f := d_f + \mathrm{ad}_f,$$

其中令 $\mathrm{ad}f := [f, -]$。

定义 R_Y 为 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ 的代数反自同构，由 $y_n \mapsto y_n$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ 给出。容易验证

$$\Delta_Y \circ R_Y = (R_Y \otimes R_Y) \circ \Delta_Y. \tag{1.7}$$

Let f 设其为 $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ 中的一个齐次权 p元素。这样的元素可写作

$$f = \sum_{i=0}^{p} f_i x_0^i,$$

其中 f_i 是 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$的齐次权 $p-i$ 元素，对任意 $i \in \{0, \ldots, p\}$均成立。对于 f，定义相应的序列 $(f_{i,\ j})_{i\in\{0,\ldots,p-1\},\ j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 如下

$$f_{i,0} = f_i + \overline{f}_i \text{ and } f_{i,j} = f_i y_j + y_j \overline{f}_i, \text{ for } j \geq 1,$$

其中 $\overline{f}_i := (-1)^p R_Y(f_i)$。

记 S_X 为霍普夫代数 $(\mathbb{Q}\langle X\rangle,\ \Delta_X)$的反元，也就是说，它是 $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ 的代数反自同构，由 $x_i \mapsto -x_i$ $(i \in \{0, 1\})$给出。

引理 1.9 ([Fur11，引理 A。2])。假设 f满足 $S_X(f) = -f$。那么，对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，有

$$D_f^Y(y_n) = \sum_{i=0}^{p} f_{i,i+n}.$$

令 γ_0 为 $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ 的导子，由 $x_0 \mapsto 1$ 和 $x_1 \mapsto 0$给出。定义 $\mathrm{sec}: \mathbb{Q}\langle Y\rangle \to \mathbb{Q}\langle X\rangle$ 为如下线性映射

$$w \mapsto \sum_{i\geq 0} \frac{(-1)^i}{i!} \gamma_0^i(w) x_0^i.$$

人们立即验证 $\pi_Y \circ \mathrm{sec} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}\langle Y\rangle}$。事实上，还有如下结论 .

引理 1.10 ([Rac02，命题 4.2.2])。映射 $\mathrm{sec}: \mathbb{Q}\langle Y\rangle \to \ker(\gamma_0)$ 是$\pi_{Y\,|\ker(\gamma_0)} : \ker(\gamma_0) \to \mathbb{Q}\langle Y\rangle$的逆。

通过直接计算可以验证

$$\gamma_0(y_1) = 0 \text{ and } \gamma_0(y_n) = (n-1)y_{n-1}, \text{ for } n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}.$$

该限制 将 γ_0 限制到 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ 也定义了一个导子，我们将滥用记号记为 γ_0 ，正如我们 ll.

引理 1.11. 我们有

$$\Delta_Y \circ \gamma_0 = (\gamma_0 \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \gamma_0) \circ \Delta_Y.$$

证明。只需在 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ 的生成元上验证这个恒等式。对于 y_1，这是显然的。对于 $n \geq 2$，我们有

$$\begin{aligned}\Delta_Y \circ \gamma_0(y_n) &= (n-1)\Delta_Y(y_{n-1}) = (n-1)y_{n-1} \otimes 1 + 1 \otimes (n-1)y_{n-1} \\ &= (\gamma_0 \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \gamma_0)(y_n \otimes 1 + 1 \otimes y_n) = (\gamma_0 \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \gamma_0) \circ \Delta_Y(y_n).\end{aligned}$$ □

$\mathfrak{Lie}(Y)$ 表示字母表 Y 上的自由 $\mathbb{Q}$-李代数。与 $\mathfrak{Lie}(X)$ 类似，$\mathbb{Q}$-李代数 $\mathfrak{Lie}(Y)$ 可识别为 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ 中关于 (1.2) 中余乘法 Δ_Y 的本原元所构成的李子代数。也就是说，

$$\mathfrak{Lie}(Y) = \{\phi \in \mathbb{Q}\langle Y\rangle \mid \Delta_Y(\phi) = \phi \otimes 1 + 1 \otimes \phi\}.$$

推论1.12。若 $w \in \mathfrak{Lie}(Y)$，则 $\gamma_0(w) \in \mathfrak{Lie}(Y)$。

证明。由引理 1.11 可立即得出，因为 $\mathfrak{Lie}(Y)$ 恰好由关于 Δ_Y 的本原元构成。□

对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，令 γ_n 为 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ 上由 $y_k \mapsto \delta_{k,\,n}$ 定义的导子，其中 $\delta_{k,\,n}$ 为克罗内克δ。以下结果在 Rac02 的命题 2.3 中已有部分表述，但我们认为有必要澄清其证明。8],

引理1.13. 设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

(a) $\gamma_n([\mathfrak{Lie}(Y)\ \mathfrak{Lie}(Y)]) = 0$. *(b)* 对任意 $w \in \mathfrak{Lie}(Y)$，有 $\gamma_n(w) = (w|y_n)$。

证明。(a) 由于 $[\mathfrak{Lie}(Y)\ \mathfrak{Lie}(Y)]$ 是 $\mathfrak{Lie}(Y)$ 的李子代数，且 γ_n 是一个导子，只需在 $[\mathfrak{Lie}(Y)\ \mathfrak{Lie}(Y)]$ 的生成元上检验所需的恒等式。对于 $k,\ l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，我们有

$$\gamma_n([y_k, y_l]) = [\gamma_n(y_k), y_l] + [y_k, \gamma_n(y_l)] = [\delta_{k,n}, y_l] + [y_k, \delta_{l,n}] = 0,$$

最后一个等号源于 1 是中心的这一事实。

(b) 由于 $w \in \mathfrak{Lie}(Y)$，它是关于 y_k 的李多项式。因此，$w - \sum_k (w|y_k)y_k$ 是 $[\mathfrak{Lie}(Y)\ \mathfrak{Lie}(Y)]$ 的一个元素。因此，根据 (a)，我们有

$$\gamma_n\left(w - \sum_k (w|y_k)y_k\right) = 0.$$

由 γ_n 的线性性以及恒等式 $\gamma_n(y_k) = \delta_{k,\,n}$，即可得到结论。

□

引理 1.14. 设 $g \in \mathfrak{Lie}(Y)$ 为齐次权 p 元素，并令 $f = \mathrm{sec}(g)$。

(a) 对于 $i \in \{0, \ldots, p\}$，我们有

$$f_i \in \mathfrak{Lie}(Y)\ and\ \overline{f}_i \in \mathfrak{Lie}(Y).$$

此外，若 $S_X(f) = -f$，则

(b) 对于 $i \in \{0, \ldots, p\}$，我们有

$$f_{i,0} = \big(1 + (-1)^p\big)(-1)^{p-i}\binom{p-1}{i}(g|y_p)y_{p-i}.$$

(c) 对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，我们有

$$\Delta_Y \circ D_f^Y(y_n) - (D_f^Y \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes D_f^Y) \circ \Delta_Y(y_n) = \sum_{i=0}^{p} f_{i,0} \otimes y_{i+n} + y_{i+n} \otimes f_{i,0}.$$

证明。 (a) 设 $i \in \{0, \dots, p\}$。由于 $f = \mathsf{sec}(g)$，因此

$$f_i = \frac{(-1)^i}{i!} \gamma_0^i(g).$$

由于 $g \in \mathfrak{Lie}(Y)$，根据推论1.12可得 $f_i \in \mathfrak{Lie}(Y)$。此外，由于 $f_i = (-1)^p R_Y(f_i)$，且 $\overline{R_Y}$满足恒等式 (1.7)，因此 $f_i \in \mathfrak{Lie}(Y)$。

(b) 设 $i \in \{0, \dots, p\}$。由 (a) 可知，对任意 $k \in \{0, \dots, p\}$，有 $f_k, f_k \in \mathfrak{Lie}(Y)$。因此，根据引理1.13(b)，得到

$$\begin{aligned} \gamma_{i+1}\left(\sum_{k=0}^{p} f_{k,k+1}\right) &= \sum_{k=0}^{p} \left(\gamma_{i+1}(f_k) y_{k+1} + f_k \gamma_{i+1}(y_{k+1}) + \gamma_{i+1}(y_{k+1}) \overline{f}_k + y_{k+1} \gamma_{i+1}(\overline{f}_k)\right) \\ &= f_{i,0} + \sum_{k=0}^{p} (f_k + \overline{f}_k | y_{i+1}) y_{k+1} \end{aligned} \tag{1.8}$$

回顾 [Fur11 的证明，引理 A.4]，可得

$$\sum_{k=0}^{p} (f_k + \overline{f}_k | y_{i+1}) y_{k+1} = \left(1 + (-1)^p\right)(-1)^{p-i-1} \binom{p-1}{i} (g | y_p) y_{p-i},$$

利用如下事实：对任意 $k \in \{0, \dots, p\}$，f_k 是权 $p-k$ 齐次的；此外，还利用恒等式 $f_k | y_{i+1}) = (-1)^p (\overline{f}_k | y_{i+1})$ 和 $f_{p-i-1} = (-1)^{p-i-1} (p-i-1)! \, \gamma_0^{p-i-1}(g)$。
由于 $D_f^Y(y_1) = 0$，由引理 1.9 可得

$$\sum_{k=0}^{p} f_{k,k+1} = 0.$$

因此，式 (1.8) 的左端等于零，从而证明了该断言。

p(c) 由于 $S_X(f) = -f$，由引理 1.9 可知 $D_f^Y(y_n) = \sum f_{i,\ i+n}$。因此，$i=0$

$$\begin{aligned} \Delta_Y \circ D_f^Y(y_n) &= \sum_{i=0}^{p} \Delta_Y(f_{i,i+n}) = \sum_{i=0}^{p} \Delta_Y(f_i)\Delta_Y(y_{i+n}) + \Delta_Y(y_{i+n})\Delta_Y(\overline{f}_i) \\ &= \sum_{i=0}^{p} (f_i \otimes 1 + 1 \otimes f_i)(y_{i+n} \otimes 1 + 1 \otimes y_{i+n}) + (y_{i+n} \otimes 1 + 1 \otimes y_{i+n})(\overline{f}_i \otimes 1 + 1 \otimes \overline{f}_i) \\ &= \sum_{i=0}^{p} (f_{i,i+n} \otimes 1 + 1 \otimes f_{i,i+n} + f_{i,0} \otimes y_{i+n} + y_{i+n} \otimes f_{i,0}), \end{aligned}$$

其中第三个等式由 (a) 得出。另一方面，我们有

$$\begin{aligned}(D_f^Y \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes D_f^Y) \circ \Delta_Y(y_n) &= (D_f^Y \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes D_f^Y)(y_n \otimes 1 + 1 \otimes y_n) \\ &= D_f^Y(y_n) \otimes 1 + 1 \otimes D_f^Y(y_n) \\ &= \sum_{i=0}^{p} f_{i,i+n} \otimes 1 + 1 \otimes f_{i,i+n}.\end{aligned}$$

差 $\Delta_Y \circ D_f^Y(y_n) - (D_f^Y \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes D_f^Y) \circ \Delta_Y(y_n)$ 于是等于上述公式。

□

命题 *1.7* 的证明。 设 $\psi \in \mathfrak{ls}$ 为齐次权 p 元素。由定义我们有

$$\mathfrak{ls} \subset \bigoplus_{m \geq 2} \mathfrak{Lie}(X)[m] \subset \ker(\gamma_0).$$

由引理 1.10 可知 $\psi = \mathrm{sec}(\pi_Y(\psi))$。由 $\mathfrak{ls}$ 的定义，我们有 $\pi_Y(\psi) \in \mathfrak{Lie}(Y)$ 与 $\psi \in \mathfrak{Lie}(X)$，故 $S_X(\psi) = -\psi$。因此，引理 1.14 的假设成立。将引理 1.14 应用于 $g = \pi_Y(\psi)$ 与 $f = \psi$，由 (b) 可得

$$\psi_{i,0} = \big(1 + (-1)^p\big)(-1)^{p-i}\binom{p-1}{i}(\pi_Y(\psi)|y_p)y_{p-i} = 0,$$

对任意 $i \in \{0, \ldots, p\}$。这是因为在 $\mathfrak{ls}$ 中我们有

$$(\pi_Y(\psi)|y_p) = (\psi|x_0^{p-1}x_1) = 0,$$

对于 even p。对于奇数 p， $\psi_{i,0}$ 恒为零。因此，由引理 1.14 (c) 可得

$$\Delta_Y \circ D_\psi^Y(y_n) = (D_\psi^Y \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes D_\psi^Y) \circ \Delta_Y(y_n).$$

最后，由于 $\pi_Y(\psi) \in \mathfrak{Lie}(Y)$，右乘 $\pi_Y(\psi)$ 是 $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \Delta_Y)$ 的余导子。由于 $s_\psi^Y = D_\psi^Y + r_{\pi_Y(\psi)}$，可知 s_ψ^Y 是 $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \Delta_Y)$ 的余导子，从而证明了所需结果。□

接下来，我们旨在证明一个与命题 1.7 中包含关系在某种程度上互为逆命题的结果。也就是说，我们有如下结论。

引理 1.15。 **</style}我们有以下关于** (X) 的子空间的等式

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y) \subset \Big(\mathfrak{Lie}(X) \cap \pi_Y^{-1}(\mathfrak{Lie}(Y))\Big) := \{\psi \in \mathfrak{Lie}(X) \mid \pi_Y(\psi) \in \mathfrak{Lie}(Y)\}.$$

证明。 设 $\psi \in \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)$。特别地，可得

$$(s_\psi^Y \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes s_\psi^Y) \circ \Delta_Y(1) = \Delta_Y \circ s_\psi^Y(1). \tag{1.9}$$

此外，容易验证 $s_\psi^Y(1) = \pi_Y(\psi)$。因此，由等式 (1.9) 可得

$$\pi_Y(\psi) \otimes 1 + 1 \otimes \pi_Y(\psi) = \Delta_Y(\pi_Y(\psi)),$$

从而证明了 $\pi_Y(\psi) \in \mathfrak{Lie}(Y)$。 □

定理 1.16。 我们有以下关于 $\mathfrak{Lie}(X)$ 的双分次子空间的等式

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y) = \mathfrak{ls} \oplus \mathbb{Q}x_0 \oplus \mathbb{Q}x_1.$$

在定理 1.16 的证明中，我们将用到以下技术引理。

引理 1.17. 对于 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，和

$$\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}\left(y_{m-k}\otimes y_{k+2}+y_{k+2}\otimes y_{m-k}-y_{m-k+1}\otimes y_{k+1}-y_{k+1}\otimes y_{m-k+1}\right)$$

当且仅当 m 为奇数时才会消失。

证明。首先，通过直接计算可知

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}\left(y_{m-k}\otimes y_{k+2}+y_{k+2}\otimes y_{m-k}-y_{m-k+1}\otimes y_{k+1}-y_{k+1}\otimes y_{m-k+1}\right)\\
&=-\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\left(y_{m-k+1}\otimes y_{k+1}+y_{k+1}\otimes y_{m-k+1}\right)\\
&=-\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{m-k}y_{k+1}\otimes y_{m-k+1}-\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}y_{k+1}\otimes y_{m-k+1}\\
&=-\sum_{k=0}^{m}\left((-1)^{m-k}+(-1)^k\right)\binom{m}{k}y_{k+1}\otimes y_{m-k+1}
\end{aligned}$$

若 m 为奇数，则对任意 $k\in\{0,\dots,m\}$，$(-1)^{m-k}+(-1)^k=0$。因此和为零。否则，若 m 为偶数，则对任意 $k\in\{0,\dots,m\}$，$(-1)^{m-k}+(-1)^k=2(-1)^k$，因此前一个和等于

$$2\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}y_{k+1}\otimes y_{m-k+1},$$

由于族 $(y_{k+1}\otimes y_{m-k+1})_{k\in\{0,\dots,m\}}$ 的自由性，该式不为零。 □

定理 *1.16* 的证明。根据各对 $(m,\ n)$ 的不同，我们可以区分以下情形：

情形 1 $(m,\ n)=(1,\ 0)$。我们来证明

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)[1,0]=\mathfrak{ls}[1,0]\oplus\mathbb{Q}x_0.$$

由 $\mathfrak{ls}$ 的定义，立即可得 $\mathfrak{ls}[1,0]=0$。另一方面，分解(1.4)蕴含包含 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)[1,0]\subset\mathbb{Q}x_0$。反向包含源于 $s^Y_{x_0}$ 是余导子这一事实。事实上，可以注意到 $s^Y_{x_0}=D^Y_{x_0}$。因此，$s^Y_{x_0}$ 是导子，并且只需验证恒等式

$$(s^Y_{x_0}\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes s^Y_{x_0})\circ\Delta_Y=\Delta_Y\circ s^Y_{x_0}$$

在 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ 的生成元 y_k 上成立，这可以通过直接计算来验证，该计算利用了对任意 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 都有 $s^Y_{x_0}(y_k)=0$ 这一事实。

情形 2 $(m,n)=(1,1)$。我们来证明

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)[1,1]=\mathfrak{ls}[1,1]\oplus\mathbb{Q}x_1.$$

由 $\mathfrak{ls}$ 的定义，立即可得 $\mathfrak{ls}[1,1]=0$。另一方面，分解 (1.4) 蕴含包含 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)[1,1]\subset\mathbb{Q}x_1$。反向包含由 $s^Y_{x_1}$ 是余导子这一事实得出。事实上，可以注意到 $x_1=\mathsf{sec}(y_1)$，并且由于 $S_X(x_1)=-x_1$，引理 1.14 (c) 的恒等式对 $f=x_1$ 成立。更确切地说，在该恒等式中我们有 $p=1$、$f_0=y_1$ 和 $f_1=0$。因此，$f_{0,0}=0=f_{1,0}$，这蕴含等式

$$\Delta_Y\circ D^Y_f(y_n)-(D^Y_f\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes D^Y_f)\circ\Delta_Y(y_n)=0.$$

因此，我们证明了 $D^Y_{x_1}$ 是余导子。此外， $\pi_Y(x_1) = y_1$ 关于 Δ_Y 是本原元，故 $r_{\pi_Y(x_1)}$ 也满足余导子性质。从而，$s^Y_{x_1} = D^Y_{x_1} + r_{\pi_Y(x_1)}$ 本身是余导子。

情形 3 $m \geq 2$ 和 $n \geq 2$。我们来证明

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)[m,n] = \mathfrak{ls}[m,n].$$

事实上，分解 (1.4) 以及 $\mathfrak{ls}$ 的定义表明，双分次线性空间$\mathfrak{Lie}(X) \cap \pi_Y^{-1}(\mathfrak{Lie}(Y))$ 和 $\mathfrak{ls}$ 在双次数 $(m,\ n)$ 上重合。根据引理 1.15 和命题 1.7 中的包含关系，即可得到该等式。

情形 4 $m \geq 2$ 为奇数且 $n = 1$。我们来证明

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)[m,1] = \mathfrak{ls}[m,1].$$

事实上，分解 (1.4) 以及 $\mathfrak{ls}$的定义表明，双分次线性空间$\mathfrak{Lie}(X) \cap \pi_Y^{-1}(\mathfrak{Lie}(Y))$ 和 $\mathfrak{ls}$ 在双次数 $(m,\ 1)$ 上重合。根据引理 1.15 和命题 1.7 中的包含关系，即可得到该等式。

情形 5 $m \geq 2$ 为偶数且 $n = 1$。我们来证明

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)[m,1] = \mathfrak{ls}[m,1].$$

根据 $\mathfrak{ls}$ 的定义，我们有 $\mathfrak{ls}[m,1] = 0$。另一方面，回顾

$$\mathfrak{Lie}(X)[m,1] = \mathbb{Q} \cdot \mathrm{ad}^{m-1}_{x_0}(x_1)$$

并且由于 $\pi_Y(\mathrm{ad}^{m-1}_{x_0}(x_1)) = y_m$ 是 Δ_Y-本原元，因此，$\mathfrak{Lie}(X)\cap\pi_Y^{-1}(\mathfrak{Lie}(Y))$ 的双分次分量中双次数为 $(m,1)$ 的部分等于 $\mathbb{Q}\cdot\mathrm{ad}^{m-1}_{x_0}(x_1)$，其中包含 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)[m,1]$。直接验证可得

$$s^Y_{\mathrm{ad}^{m-1}_{x_0}(x_1)}(1) = y_m \text{ and } s^Y_{\mathrm{ad}^{m-1}_{x_0}(x_1)}(y_2) = y_2y_m + \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}(y_{m-k}y_{k+2} - y_{m-k+1}y_{k+1}),$$

其中最后一个等号得益于恒等式

$$\mathrm{ad}^{m-1}_{x_0}(x_1) = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}x_0^{m-k-1}x_1x_0^k.$$

因此，

$$\begin{aligned}(1.10)\quad \Delta_Y \circ s^Y_{\mathrm{ad}^{m-1}_{x_0}(x_1)}(y_2) &= \Delta_Y\left(y_2y_m + \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}(y_{m-k}y_{k+2} - y_{m-k+1}y_{k+1})\right)\\
&= \left(y_2y_m + \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}(y_{m-k}y_{k+2} - y_{m-k+1}y_{k+1})\right)\otimes 1\\
&+ 1\otimes\left(y_2y_m + \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}(y_{m-k}y_{k+2} - y_{m-k+1}y_{k+1})\right) + y_2\otimes y_m + y_m\otimes y_2\\
&+ \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}(y_{m-k}\otimes y_{k+2} + y_{k+2}\otimes y_{m-k} - y_{m-k+1}\otimes y_{k+1} - y_{k+1}\otimes y_{m-k+1})\end{aligned}$$

and

$$
\begin{aligned}
(1.11)\quad & \left(s^Y_{\mathrm{ad}_{x_0}^{m-1}(x_1)} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes s^Y_{\mathrm{ad}_{x_0}^{m-1}(x_1)}\right) \circ \Delta_Y(y_2) \\
& = s^Y_{\mathrm{ad}_{x_0}^{m-1}(x_1)}(y_2) \otimes 1 + s^Y_{\mathrm{ad}_{x_0}^{m-1}(x_1)}(1) \otimes y_2 + y_2 \otimes s^Y_{\mathrm{ad}_{x_0}^{m-1}(x_1)}(1) + 1 \otimes s^Y_{\mathrm{ad}_{x_0}^{m-1}(x_1)}(y_2) \\
& = \left(y_2 y_m + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} (y_{m-k} y_{k+2} - y_{m-k+1} y_{k+1}) \right) \otimes 1 + y_m \otimes y_2 + y_2 \otimes y_m \\
& + 1 \otimes \left(y_2 y_m + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} (y_{m-k} y_{k+2} - y_{m-k+1} y_{k+1}) \right)
\end{aligned}
$$

由于 m 是偶数，根据引理 1.17，恒等式 (1.10) 的最后一行不为零。这意味着恒等式 (1.10) 和 (1.11) 不相等。因此， $s^Y{}_{\mathrm{ad}_{x_0}^{m-1}(x_1)}$ 不是余导子。因此，$s_{\mathrm{ad}_{x_0}^{m-1}(x_1)} \notin \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)[m,1]$，这意味着 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)[m,1] = 0$。

最后，由于 $\mathfrak{Lie}(X)$ 的每个双分次分量上，双分次子空间 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)$ 与 $\mathfrak{is} \oplus \mathbb{Q}x_0 \oplus \mathbb{Q}x_1$ 都相等，结论得证。□

定理 *1.3* 的证明。由引理 1.1，空间

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)[1] = \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)[1,0] \oplus \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)[1,1] = \mathbb{Q}x_0 \oplus \mathbb{Q}x_1$$

包含于 $\mathbb{Q}$-李代数 $(\mathfrak{Lie}(X)\ \{-,-\})$ 的中心。因此，投影到权重 1 分量

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y) \to \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)[1] \tag{1.12}$$

是一个 $\mathbb{Q}$-李代数态射，其中 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)[1]$ 是一个阿贝尔 $\mathbb{Q}$-李代数。由此可知，(1.12) 中态射的核是 $\mathbb{Q}$-李代数 $(\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)\ \{-,-\})$ 的一个理想。另一方面，由定理 1.16 可知，

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y) = \mathfrak{is} \oplus \mathbb{Q}x_0 \oplus \mathbb{Q}x_1.$$

这意味着

$$\ker\left(\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y) \to \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)[1]\right) = \mathfrak{is},$$

从而证明了结论。 □

推论 1.18。 我们有以下李子代数的包含关系：（$\mathfrak{Lie}$（X） $\{-,-\}$）

$$\{\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y), \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)\} \subset \mathfrak{is}.$$

证明。 这直接由定理 1.16 以及引理 1.1 得出。 □

2. The linearized balanced Lie algebra

2.1. 代数设定。 设 $B := \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$ 为一个字母表， $\mathbb{Q}\langle B\rangle$ 是由 B 生成的非交换自由 $\mathbb{Q}$-代数。它带有一个双代数结构，其中余乘法$\Delta_B : \mathbb{Q}\langle B\rangle \to \mathbb{Q}\langle B\rangle \otimes \mathbb{Q}\langle B\rangle$ 是由下式定义的代数态射：

$$\Delta_B(b_i) = b_i \otimes 1 + 1 \otimes b_i, \qquad i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{2.1}$$

令 $\mathbb{Q}\langle B\rangle^0$ 为由不以 b_0结尾的字张成的 $\mathbb{Q}\langle B\rangle$ 的子空间。直和分解 $\mathbb{Q}\langle B\rangle = \mathbb{Q}\langle B\rangle^0 \oplus \mathbb{Q}\langle B\rangle b_0$ 诱导出一个典范满射

$$\pi_0 : \mathbb{Q}\langle B\rangle \to \mathbb{Q}\langle B\rangle^0.$$

因此，我们有一个 $\mathbb{Q}$-线性同构

$$\mathbb{Q}\langle B\rangle^0 \simeq \mathbb{Q}\langle B\rangle/\mathbb{Q}\langle B\rangle b_0. \tag{2.2}$$

注意， $\mathbb{Q}\langle B\rangle^0$ 也是 $\mathbb{Q}\langle B\rangle$的子代数。

令 $\mathfrak{Lie}(B)$为由字母表 B生成的自由 $\mathbb{Q}$-李代数。代数 $\mathbb{Q}\langle B\rangle$ 同构于 $\mathfrak{Lie}(B)$的包络代数。因此， $\mathfrak{Lie}(B)$可视为 $\mathbb{Q}\langle B\rangle$中关于(2.1)中的余乘法 Δ_B 的本原元所构成的李代数。也就是说，

$$\mathfrak{Lie}(B) = \{\psi \in \mathbb{Q}\langle B\rangle \mid \Delta_B(\psi) = \psi\otimes 1 + 1\otimes\psi\}.$$

李代数 $\mathfrak{Lie}(B)$按权分次，其中 b_0 的权为1，且对每个 $i\geq 1$ ，字母 b_i 的权为 i。我们得到如下分解

$$\mathfrak{Lie}(B) = \bigoplus_{m\geq 1} \mathfrak{Lie}(B)[m],$$

其中， $\mathfrak{Lie}(B)[m]$ 表示权为 m的齐次子空间。李代数 $\mathfrak{Lie}(B)$也按权和深度双分次，其中字母 b_0 的双次数为$(1,\ 0)$，而对 $i\geq 1$ ，字母 b_i 的双次数为$(i,\ 1)$。与前面一样，我们得到如下分解

$$\mathfrak{Lie}(B) = \bigoplus_{m\geq,\ n\leq m} \mathfrak{Lie}(B)[m,n],$$

其中 $\mathfrak{Lie}(B)[m,n]$ 表示双次数为 (m,n) 的齐次子空间。

对于 $\mathbb{Q}\langle B\rangle$ 中的字 $w = b_0^{m_1}b_{k_1}\cdots b_0^{m_d}b_{k_d}b_0^{m_{d+1}}$，其中 $k_1,\dots,k_d\geq 1,\ m_1,\dots,m_{d+1}\geq 0$，以及指标 $\mathbf{l}=(l_1,\dots,l_d)\in\mathbb{Z}^d_{>0}$，我们使用如下记号

$$w(\mathbf{l}) = b_0^{m_1}b_{l_1}\cdots b_0^{m_d}b_{l_d}b_0^{m_{d+1}}.$$

特别地，若 $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_d)$，则 $w(\mathbf{k}) = w$。对于 $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_d),\mathbf{l}=(l_1,\dots,l_d)$，若 $l_i\leq k_i$ 对于 $i\in\{1,\dots,d\}$ 成立，我们记$\mathbf{l}\leq\mathbf{k}$。此外，我们将其简记为

$$|\mathbf{k}| = k_1+\cdots+k_d, \qquad \binom{\mathbf{k}-1}{\mathbf{l}-1} = \prod_{i=1}^{d}\binom{k_i-1}{l_i-1}.$$

对于 $w = b_0^{m_1}b_{k_1}\cdots b_0^{m_d}b_{k_d}b_0^{m_{d+1}}\in\mathbb{Q}\langle B\rangle$，定义导子 $\partial_w\colon \mathbb{Q}\langle B\rangle\to\mathbb{Q}\langle B\rangle$ 如下

$$\begin{aligned}
\partial_w(b_0) &= 0,\\
\partial_w(b_i) &= \sum_{\mathbf{l}\leq\mathbf{k}}(-1)^{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|}\binom{\mathbf{k}-1}{\mathbf{l}-1}[b_{i+|\mathbf{k}|-|\mathbf{l}|}, w(\mathbf{l})], \qquad i\geq 1.
\end{aligned}$$

若对于某个 $m\geq 1$ 有 $w = b_0^m$，则我们定义

$$\partial_w(b_0) = 0, \qquad \partial_w(b_i) = [b_i, w].$$

我们定义

$$\{\psi_1,\psi_2\}_A = \partial_{\psi_1}(\psi_2) - \partial_{\psi_2}(\psi_1) + [\psi_1,\psi_2], \quad \psi_1,\psi_2\in\mathfrak{Lie}(B).$$

[BK25，定理 4.13] 可直接推出以下结论。

Proposition 2.1. 对于 ψ_1、$\psi_2\in\mathbb{Q}\langle B\rangle$，我们有以下等式，成立于 $\mathrm{Der}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\langle B\rangle)$

$$\partial_{\{\psi_1,\psi_2\}_A} = [\partial_{\psi_1},\partial_{\psi_2}].$$

因此，可以将命题-定义 A.4 应用于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{Lie}(B)$ 和 $\psi_1\triangleright\psi_2 = \partial_{\psi_1}(\psi_2)$，从而推得 $(\mathfrak{Lie}(B)\ \{-,-\}_A)$ 是一个李代数。

注 2.2. 导子 ∂ 在 $\mathbb{Q}\langle b_0,\ b_1\rangle$ 上的限制等于与 Ihara 括号相对应的导子；具体而言，对于 $\psi \in \mathfrak{Lie}(b_0,\ b_1)$，有

$$\partial_\psi(b_0) = 0, \qquad \partial_\psi(b_1) = [b_1, \psi].$$

特别地。 具体而言，李括号 $\{-,-\}_A$ 在 $\mathfrak{Lie}(b_0, b_1)$ 上的限制恰好是井原括号 .

引理 2.3。 李括号 $\{-,-\}_A$ 保持子空间 $\mathfrak{Lie}(b_1, b_2, \ldots) \subset \mathfrak{Lie}(B)$。

证明。这是由以下观察得出的：导子 ∂ 以及李括号$\{-,-\}_A$ 都不会改变 b_0 的数量。□

引理 2.4. 元素 b_0 在李代数中是中心的$(\mathfrak{Lie}(B)\ \{-,-\}_A)$.

证明。 对于任意 $\phi \in \mathbb{Q}\langle B\rangle$，我们计算

$$\{\phi, b_0\} = \partial_\phi(b_0) - \partial_{b_0}(\phi) + [\phi, b_0] = -\partial_{b_0}(\phi) + [\phi, b_0].$$

因此，只需验证

$$-\partial_{b_0}(\phi) + [\phi, b_0] = 0.$$

映射 $-\partial_{b_0} + [-, b_0]$ 是 $\mathbb{Q}\langle B\rangle$上的导子，因此我们只需对$\phi \in B$证明此等式。对于 $i \geq 1$，我们计算

$$\begin{aligned} -\partial_{b_0}(b_i) + [b_i, b_0] &= -[b_i, b_0] + [b_i, b_0] = 0, \\ -\partial_{b_0}(b_0) + [b_0, b_0] &= 0. \end{aligned}$$

□

定义 2.5. 令 $\mathfrak{tq}$ 为满足以下条件的所有 $\psi \in \mathbb{Q}\langle B\rangle$ 的集合：

(i) $(\psi \mid b_0) = 0$,

(ii) $\Delta_B(\psi) = \psi \otimes 1 + 1 \otimes \psi$,

(iii) $\tau(\pi_0(\psi)) = \pi_0(\psi)$,

(iv) $(\psi \mid b_0^m b_k) = 0$，其中 $k+m$ 为偶数,

其中 τ 是 $\mathbb{Q}\langle B\rangle^0$ 的代数反自同构，由下式给出：

$$\tau(b_0^m b_k) = b_0^{k-1} b_{m+1}$$

对任意整数 $m \geq 0, k \geq 1$。

定理 2.6. [Bur25，定理 4.3] 这一对 $(\mathfrak{tq}, \{-,-\}_A)$ 是一个 $\mathbb{Q}$-李代数。

2.2. **线性化平衡李代数的稳定子解释**。 我们通过证明 $\mathfrak{tq}$ 本质上是相对于李代数 $(\mathfrak{Lie}(B)$ $\{-,-\}_A)$ 的作用下对合 τ的稳定子，为定理 2.6 给出另一种证明。

对于 $\psi \in \mathfrak{Lie}(B)$，令 σ_ψ 为 $\mathbb{Q}\langle B\rangle$ 上的 $\mathbb{Q}$-线性自同态，其定义为

$$\sigma_\psi := \ell_\psi + \partial_\psi. \tag{2.3}$$

其中， ℓ_ψ 是 $\mathbb{Q}\langle B\rangle$ 上由 ψ左乘法给出的自同态。

引理 2.7. 存在一个 $\mathbb{Q}$-李代数作用 $(\mathfrak{Lie}(B)\ \{-,-\}_A)$，它通过 $\mathbb{Q}$-线性自同态作用于 $\mathbb{Q}\langle B\rangle$，定义为

$$(\mathfrak{Lie}(B), \{-,-\}_A) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\langle B\rangle), \quad \psi \mapsto \sigma_\psi.$$

证明。 由于 $(\mathfrak{Lie}(B)\{-,-\}_A)$ 是由后李结构诱导的，因此对于任意 $\psi \in \mathfrak{Lie}(B)$，我们可以对 end $_\psi = \sigma_\psi$ 应用命题 A.5 (b)。 □

注意，σ_ψ 是 $\mathbb{Q}\langle B\rangle b_0$ 的自同态。因此，根据 (2.2)，我们得到唯一的 $\mathbb{Q}$-线性自同态 σ_ψ^0，其作用于 $\mathbb{Q}\langle B\rangle^0$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}\langle B\rangle & \xrightarrow{\sigma_\psi} & \mathbb{Q}\langle B\rangle \\ {\scriptstyle\pi_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_0} \\ \mathbb{Q}\langle B\rangle^0 & \xrightarrow{\sigma_\psi^0} & \mathbb{Q}\langle B\rangle^0 \end{array} \tag{2.4}$$

可交换。

命题 2.8. 存在一个 $\mathbb{Q}$-李代数作用 $(\mathfrak{Lie}(B)\ \{-,-\}_A)$，其通过 $\mathbb{Q}$-线性自同态作用于 $\mathbb{Q}\langle B\rangle^0$，定义如下

$$(\mathfrak{Lie}(B), \{-,-\}_A) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\langle B\rangle^0), \quad \psi \mapsto \sigma_\psi^0.$$

证明。 这由引理 2.7 及图 (2.4) 得出。 □

引理 2.9. 命题 *2.8* 中给出的作用在自同态空间 $\mathrm{End}(\mathbb{Q}\langle B\rangle^0)$ 上诱导出一个 $(\mathfrak{Lie}(B)\ \{-,-\}_A)$ 的作用，定义如下

$$\psi \longmapsto \left(t \mapsto \sigma_\psi^0 \circ t - t \circ \sigma_\psi^0\right), \tag{2.5}$$

其中 $\psi \in \mathfrak{Lie}(B)$ 且 $t \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}\langle B\rangle^0)$。

证明。 对任意 $\psi \in \mathfrak{Lie}(B)$ 和 $t \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}\langle B\rangle^0)$，令 $\psi \cdot t$：
$= \sigma_\psi^0 \circ t - t \circ \sigma_\psi^0$。对于 $\phi, \psi \in \mathfrak{Lie}(B)$ 和 $t \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}\langle B\rangle^0)$，有

$$\begin{aligned} \phi \cdot (\psi \cdot t) - \psi \cdot (\phi \cdot t) &= \phi \cdot (\sigma_\psi^0 \circ t - t \circ \sigma_\psi^0) - \psi \cdot (\sigma_\phi^0 \circ t - t \circ \sigma_\phi^0) \\ &= \sigma_\phi^0 \circ \sigma_\psi^0 \circ t - \sigma_\phi^0 \circ t \circ \sigma_\psi^0 - \sigma_\psi^0 \circ t \circ \sigma_\phi^0 + t \circ \sigma_\psi^0 \circ \sigma_\phi^0 \\ &\quad - \sigma_\psi^0 \circ \sigma_\phi^0 \circ t + \sigma_\psi^0 \circ t \circ \sigma_\phi^0 + \sigma_\phi^0 \circ t \circ \sigma_\psi^0 - t \circ \sigma_\phi^0 \circ \sigma\psi^0 \\ &= [\sigma_\phi^0, \sigma_\psi^0] \circ t - t \circ [\sigma_\phi^0, \sigma_\psi^0] \\ &= \pi_0 \circ [\sigma_\phi, \sigma_\psi] \circ t - t \circ \pi_0 \circ [\sigma_\phi, \sigma_\psi]. \end{aligned}$$

由引理 2.7，我们有 $[\sigma_\phi, \sigma_\psi] = \sigma_{\{\phi,\psi\}_A}$。因此，我们推得

$$\begin{aligned} \phi \cdot (\psi \cdot t) - \psi \cdot (\phi \cdot t) &= \pi_0 \circ \sigma_{\{\phi,\psi\}_A} \circ t - t \circ \pi_0 \circ \sigma_{\{\phi,\psi\}_A} \\ &= \sigma_{\{\phi,\psi\}_A}^0 \circ t - t \circ \sigma_{\{\phi,\psi\}_A}^0 \\ &= \{\phi, \psi\}_A \cdot t. \end{aligned}$$

因此，(2.5) 中的映射是一个李代数态射。 □

定义 2.10. 关于 (2.5) 中作用的 $\tau \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}\langle B\rangle^0)$ 的稳定子[2] 李代数是 $(\mathfrak{Lie}(B)\ \{-,-\}_A)$ 的李子代数，由下式给出

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau) := \left\{\psi \in \mathfrak{Lie}(B) \mid \sigma_\psi^0 \circ \tau = \tau \circ \sigma_\psi^0\right\}.$$

换言之，$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)$ 恰好由满足 σ_ψ^0 与 τ 对易的元素 $\psi \in \mathfrak{Lie}(B)$ 组成。根据构造，$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)$ 是 $(\mathfrak{Lie}(B)\ \{-,-\}_A)$ 的李子代数。

命题 2.11. 我们有以下 $\mathfrak{Lie}(B)$ 的子空间之间的包含

$$\mathfrak{lq} \subset \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau).$$

[2]读者可参见命题-定义 A.2，了解更一般的陈述。

为证明该命题，我们首先引入若干映射和结果。对于 $\mathbb{Q}\langle B\rangle^0$ 中的一个字 $w = b_0^{m_0}b_{k_1}\cdots b_0^{m_d}b_{k_d}$，其中 $k_1,\dots,k_d \geq 1$, $m_1,\dots,m_d \geq 0$，以及一个指标 $\mathbf{n} = (n_1,\dots,n_d) \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$，我们使用记号

$$w(\overline{\mathbf{n}}) = b_0^{n_1}b_{k_1}\cdots b_0^{n_d}b_{k_d}.$$

特别地，若 $\mathbf{m} = (m_1,\dots,m_d)$，则 $w(\mathbf{m}) = w$。映射 $\mathsf{sec}: \mathbb{Q}\langle B\rangle^0 \to \mathbb{Q}\langle B\rangle$ 定义为

$$\mathrm{sec}(w) = \sum_{\mathbf{n}\leq\mathbf{m}} (-1)^{|\mathbf{m}|+|\mathbf{n}|}\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} w(\overline{\mathbf{n}})b_0^{|\mathbf{m}|-|\mathbf{n}|}, \text{ for } w = w(\overline{\mathbf{m}}) \in \mathbb{Q}\langle B\rangle^0.$$

记 $\gamma_0 : \mathbb{Q}\langle B\rangle \to \mathbb{Q}\langle B\rangle$ 为由 $\gamma_0(b_0) = 1$ 和 $\gamma_0(b_a) = 0$（其中 $a \geq 1$）给出的导子。那么，我们有

$$\ker(\gamma_0) = \mathbb{Q}\langle \mathrm{ad}_{b_0}^m(b_k) \mid k \geq 1, m \geq 0\rangle.$$

命题 2.12。 [Bur25，命题 5.2] 我们有

(a) $\pi_0 \circ \text{节} = \text{标识}_{\mathbb{Q}\langle B\rangle^0}$,

(b) 节 $\circ\pi_0 =$ 标识 $_{\ker(\gamma_0)}$.

令 ρ: $\mathbb{Q}\langle B\rangle^0 \to \mathbb{Q}\langle B\rangle^0$ 为由下式给出的 $\mathbb{Q}$-线性自同态

$$\rho(b_0^{m_1}b_{k_1}\cdots b_0^{m_d}b_{k_d}) = \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_d=k_1+\cdots+k_d \\ n_1+\cdots+n_d=m_1+\cdots+m_d \\ l_s\geq 1,\ n_s\geq 0}} (-1)^{l_d+n_d-1}\prod_{s=1}^{d-1}\binom{k_s-1}{l_s-1}\binom{m_s}{n_s} b_0^{n_d}b_{l_d}b_0^{n_1}b_{l_1}\cdots b_0^{n_{d-1}}b_{l_{d-1}}.$$

映射 ρ 本质上是 τ 与反元的复合

$$S : \mathbb{Q}\langle B\rangle \to \mathbb{Q}\langle B\rangle, \quad b_{s_1}\cdots b_{s_r} \mapsto (-1)^r b_{s_r}\cdots b_{s_1}$$

霍普夫代数 $(\mathbb{Q}\langle B\rangle,\ \Delta_B)$。具体而言，考虑复合映射 $S_0 = \pi_0 \circ S \circ \mathsf{sec}$。于是，对于任意 $w \in \mathbb{Q}\langle B\rangle^0$，我们有

$$\rho(w) = (-1)^{\mathrm{wt}(w)+\mathrm{dep}(w)}\big(S_0 \circ \tau \circ S_0 \circ \tau\big)(w).$$

命题 2.13。 [Bur25，命题 5.4] 若 $\psi \in \mathfrak{lq}$，则有

$$\rho(\pi_0(\psi)) = \pi_0(\psi).$$

对于 $w = b_0^{m_1}b_{k_1}\cdots b_0^{m_d}b_{k_d}b_0^{m_{d+1}} \in \mathbb{Q}\langle B\rangle$，我们定义

$$\begin{aligned}
\partial_w^R(b_0) &= \partial_w^L(b_0) = 0,\\
\partial_w^R(b_a) &= \sum_{\mathbf{l}\leq\mathbf{k}} (-1)^{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|}\binom{\mathbf{k}-1}{\mathbf{l}-1} b_{a+|\mathbf{k}|-|\mathbf{l}|}w(\mathbf{l}),\\
\partial_w^L(b_a) &= \sum_{\mathbf{l}\leq\mathbf{k}} (-1)^{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|}\binom{\mathbf{k}-1}{\mathbf{l}-1} w(\mathbf{l})b_{a+|\mathbf{k}|-|\mathbf{l}|}.
\end{aligned}$$

特别地，我们有

$$\partial_w = \partial_w^R - \partial_w^L. \tag{2.6}$$

此外，对于任意 $w \in \mathbb{Q}\langle B\rangle^0$，我们定义映射 $\partial_w^0 : \mathbb{Q}\langle B\rangle^0 \to \mathbb{Q}\langle B\rangle^0$ 如下

$$\partial_w^0(\pi_0(v)) = \pi_0(\partial_{\mathrm{sec}(w)}(v)), \qquad v \in \mathbb{Q}\langle B\rangle. \tag{2.7}$$

类似地，我们定义映射 $\partial^R{}_w{}^0$、$\partial^L{}_w{}^0$: $\mathbb{Q}\langle B\rangle^0 \to \mathbb{Q}\langle B\rangle^0$。

Propos题 2.14。 [Bur25，命题 5。5] 对于非空词 v、$w \in \mathbb{Q}\langle B\rangle^0$，有

(a) $\left(\tau \circ \partial^{R,0}_{\tau(w)} \circ \tau\right)(v) = \partial^{R,0}_{w}(v) + \sec(w)v - \tau\left(\sec(\tau(w))\tau(v)\right)$,

(b) $\left(\tau \circ \partial^{L,0}_{\tau(w)} \circ \tau\right)(v) = \partial^{L,0}_{\rho(w)}(v)$.

命题 *2.11* 的证明。 我们证明，对于 $\psi \in \mathfrak{lq}$，下列从$\mathbb{Q}\langle B\rangle$到 $\mathbb{Q}\langle B\rangle^0$的 $\mathbb{Q}$-线性映射等式

$$\tau \circ \sigma^0_\psi \circ \tau \circ \pi_0 = \pi_0 \circ \sigma_\psi.$$

由于 π_0的满射性，这直接蕴含 $\sigma^0_\psi \circ \tau = \tau \circ \sigma^0_\psi$，从而得到所声称的包含关系 $\mathfrak{lq} \subset \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)$。若 $v \in \mathbb{Q}\langle B\rangle b_0$，则

$$\tau \circ \sigma^0_\psi \circ \tau \circ \pi_0(v) = 0 = \pi_0 \circ \sigma_\psi(v).$$

设 v 为 $\mathbb{Q}\langle B\rangle^0$中的一个非空词。由于 $\tau \circ \pi_0 = \pi_0 \circ \tau$在 $\mathbb{Q}\langle B\rangle^0$ 上，且根据(2.4)中给出的 σ^0_ψ 的定义，我们有

$$\left(\tau \circ \sigma^0_\psi \circ \tau \circ \pi_0\right)(v) = \left(\tau \circ \sigma^0_\psi \circ \pi_0 \circ \tau\right)(v) = \left(\tau \circ \pi_0 \circ \sigma_\psi \circ \tau\right)(v).$$

因此，由（2.3）和（2.6）可得

$$\left(\tau \circ \sigma^0_\psi \circ \tau \circ \pi_0\right)(v) = (\tau \circ \pi_0 \circ \ell_\psi)(\tau(v)) + \left(\tau \circ \pi_0 \circ \partial^R_\psi\right)(\tau(v)) - \left(\tau \circ \pi_0 \circ \partial^L_\psi\right)(\tau(v)).$$

由命题 2.12，对于 $\psi \in \mathfrak{lq}$，有 $\sec(\pi_0(\psi)) = \psi$。因此，根据 ∂^R 的定义，$\partial^{L,0}_{\psi}$，$\partial^{L,0}_{\psi}$ 如（2.7）所示，可得

$$\begin{aligned}\left(\tau \circ \sigma^0_\psi \circ \tau \circ \pi_0\right)(v) &= \left(\tau \circ \pi_0\right)(\psi\tau(v)) + \left(\tau \circ \partial^{R,0}_{\pi_0(\psi)}\right)(\tau(v)) - \left(\tau \circ \partial^{L,0}_{\pi_0(\psi)}\right)(\tau(v)) \\ &= \tau\left(\psi\tau(v)\right) + \partial^{R,0}_{\pi_0(\psi)}(v) + \sec(\pi_0(\psi))v - \tau\left(\sec(\pi_0(\psi))\tau(v)\right) - \partial^{L,0}_{\rho(\pi_0(\psi))}(v),\end{aligned}$$

其中第二个等式由命题 2.14 得出。再次应用命题 2.12，并利用 $\pi_0(\psi)$ 的 ρ-不变性（参见命题 2.13），可得

$$\begin{aligned}\left(\tau \circ \sigma^0_\psi \circ \tau \circ \pi_0\right)(v) &= \tau\left(\psi\tau(v)\right) + \partial^{R,0}_{\pi_0(\psi)}(v) + \psi v - \tau\left(\psi\tau(v)\right) - \partial^{L,0}_{\pi_0(\psi)}(v) \\ &= \partial^0_{\pi_0(\psi)}(v) + \ell_\psi(v) \\ &= \left(\pi_0 \circ \partial_\psi\right)(v) + \ell_\psi(v) \\ &= \left(\pi_0 \circ \sigma_\psi\right)(v).\end{aligned}$$

□

下一个结果几乎是命题 2.11 的逆命题。

引理2.15. 我们有 $\mathfrak{Lie}(B)$ 的子空间之间的如下等式

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau) \subset \{\psi \in \mathfrak{Lie}(B) \mid \tau(\pi_0(\psi)) = \pi_0(\psi)\}.$$

证明. 对于 $\psi \in \mathfrak{Lie}(B)$，我们计算

$$\sigma^0_\psi \circ \tau(1) = \sigma^0_\psi(1) = \pi_0 \circ \sigma_\psi(1) = \pi_0 \circ \ell_\psi(1) + \pi_0 \circ \partial_\psi(1) = \pi_0(\psi), \tag{2.8}$$

$$\tau \circ \sigma^0_\psi(1) = \tau \circ \pi_0 \circ \ell_\psi(1) + \tau \circ \pi_0 \circ \partial_\psi(1) = \tau(\pi_0(\psi)). \tag{2.9}$$

对于 $\psi \in \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)$、(2.8) 和 (2.9) 根据定义一致，因此我们得到所需的包含关系 n.

□

定理 2.16。 我们有 $\mathfrak{Lie}(B)$ 的以下双分次子空间等式

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau) = \mathfrak{lq} \oplus \mathbb{Q}b_0.$$

证明。空间 $\mathfrak{Lie}(B)$ 按权和深度双分次，其中 b_0 的双次数为 $(1,0)$，b_i 的双次数为 $(i,1)$，适用于 $i \geq 1$。我们根据双次数 (m,n) 考虑几种情况。

情形 1 $(m,n) = (1,0)$。我们证明

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)[1,0] = \mathfrak{lq}[1,0] \oplus \mathbb{Q}b_0. \tag{2.10}$$

根据 $\mathfrak{lq}$的定义，我们有 $\mathfrak{lq}[1,0] = 0$。另一方面，我们有 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)[1,0] \subset \mathfrak{Lie}(B)[1,0] = \mathbb{Q}b_0$。我们计算 $\sigma_{b_0}(w) = \ell_{b_0}w + \partial_{b_0}(w) = b_0 w + [w, b_0] = wb_0$。因此，$\sigma_{b_0}(w)$到 $\mathbb{Q}\langle B\rangle^0$ 的投影恒为零，

$$\sigma_{b_0}^0 \equiv 0.$$

特别地，$\sigma_{b_0}^0$ 与 τ 交换，从而 $b_0 \in \mathfrak{Lie}(B)$包含于 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)$。我们得到等式(2.10)。

情形 2 $m \geq 2$ 与 $n \geq 2$。我们有

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)[m,n] = \mathfrak{lq}[m,n].$$

这由命题 2.11和引理2.15以及如下观察得到：$\mathfrak{lq}$ 与$\{\psi \in \mathfrak{Lie}(B) \mid \tau(\pi_0(\psi)) = \pi_0(\psi)\}$ 在双次数(m,n)上重合。

情形 3 $m \geq 2$ 为奇数且 $n = 1$。采用与情形 2 相同的论证，我们得到

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)[m,1] = \mathfrak{lq}[m,1].$$

情形 4 $m \geq 2$ 为偶数且 $n = 1$。我们证明

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)[m,1] = \mathfrak{lq}[m,1].$$

根据 $\mathfrak{lq}$ 的定义，我们有 $\mathfrak{lq}[m,1] = 0$。另一方面，根据构造，我们有$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)[m,1] \subset \mathfrak{Lie}(B)[m,1] = \bigoplus_{k=1}^m \mathbb{Q} \cdot \mathrm{ad}_{b_0}^{m-k}(b_k)$。令 $\psi = \sum_{k=1}^m \lambda_k \mathrm{ad}_{b_0}^{m-k}(b_k)$，其中某个 λ_1、.....、$\lambda_m \in \mathbb{Q}$，并假设 $\psi \in \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)$。我们证明这意味着 $\psi = 0$。于是，我们有 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)[m,1] = 0$，从而得到所声称的等式。

我们计算

$$\begin{aligned}
\sigma_\psi^0 \circ \tau(b_1) &= \sigma_\psi^0(b_1) \\
&= \sum_{k=1}^m \lambda_k \pi_0\Big(\mathrm{ad}_{b_0}^{m-k}(b_k) b_1 + \sum_{l=1}^k (-1)^{k+l} \binom{k-1}{l-1} [b_{1+k-l}, \mathrm{ad}_{b_0}^{m-k}(b_l)] \Big) \\
&= \sum_{k=1}^m \lambda_k \Bigg(\sum_{n=0}^{m-k} (-1)^{m-k-n} \binom{m-k}{n} b_0^n b_k b_0^{m-k-n} b_1 + \sum_{l=1}^k (-1)^{k+l} \binom{k-1}{l-1} b_{1+k-l} b_0^{m-k} b_l \\
&\quad - \sum_{k=1}^l \sum_{n=0}^{m-k} (-1)^{m+l-n} \binom{k-1}{l-1} \binom{m-k}{n} b_0^n b_l b_0^{m-k-n} b_{1+k-l} \Bigg),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

因此

$$\begin{aligned}\tau\circ\sigma_\psi^0(b_1)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\Bigg(&\sum_{n=0}^{m-k}(-1)^{m-k-n}\binom{m-k}{n}b_{m-k-n+1}b_0^{k-1}b_{n+1}\\&+\sum_{l=1}^{k}(-1)^{k+l}\binom{k-1}{l-1}b_0^{l-1}b_{m-k+1}b_0^{k-l}b_1\\&-\sum_{k=1}^{l}\sum_{n=0}^{m-k}(-1)^{m+l-n}\binom{k-1}{l-1}\binom{m-k}{n}b_0^{k-l}b_{m-k-n+1}b_0^{l-1}b_{n+1}\Bigg).\end{aligned}\tag{2.12}$$

由于我们假定了 $\psi\in\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)$，两个表达式(2.11)与(2.12)必须一致。特别地，任意字的系数也

$$b_0^{t_1}b_sb_0^{t_2}b_1,\qquad s+t_1+t_2=m,\ t_1\geq 1,$$

必须在两个表达式中一致。在(2.11)中，该系数由

$$\lambda_s\Big((-1)^{t_2}\binom{t_1+t_2}{t_1}-(-1)^{t_2}\binom{t_1+t_2}{t_1}\Big)=0,\tag{2.13}$$

而在(2.12)中，该系数等于

$$\begin{aligned}\lambda_{t_1+t_2+1}\Big((-1)^{t_2}\binom{t_1+t_2}{t_1}-(-1)^{m-t_2-1}\binom{t_1+t_2}{t_1}\Big)&=\Big(1-(-1)^{m-1}\Big)\lambda_{t_1+t_2+1}(-1)^{t_2}\binom{t_1+t_2}{t_1}\\&=2\lambda_{t_1+t_2+1}(-1)^{t_2}\binom{t_1+t_2}{t_1}\end{aligned}\tag{2.14}$$

最后的等式由 m为偶数得出。由于(2.13)与(2.14)必须一致，我们推出 $\lambda_{t_1+t_2+1}=0$。由于 $t_1\geq 1$, $t_2\geq 0$ 是任意选取的，我们得到

$$\lambda_k=0\quad\text{ for }k=2,\dots,m,$$

因而 $\psi=\lambda_1\,\mathsf{ad}_{b_0}^{m-1}(b_1)$。对于 $m\geq 2$，元素 $\pi_0(\mathsf{ad}_{b_0}^{m-1}(b_1))=b_0^{m-1}b_1$ 不是 τ-不变的，因此我们由引理2.15推出 $\lambda_1=0$。于是，我们得到 $\psi=0$。

由于双分次空间 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)$与 $\mathfrak{lq}\oplus\mathbb{Q}b_0$ 在所有分量上重合，我们得到所需的等式。□

定理 *2.6* 的证明。 由引理 2.4， $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)[1,0]=\mathbb{Q}b_0$ 包含在李代数（$\mathfrak{Lie}(B)$ $\{-,-\}_A$）的中心中。因此，投影

$$\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)\to\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)[1,0]$$

是一个李代数态射，其中 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)[1,0]$ 被视为阿贝尔李代数。由定理 2.16，我们有 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)=\mathfrak{lq}\oplus\mathbb{Q}b_0$，因此

$$\ker(\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)\to\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)[1,0])=\mathfrak{lq}.$$

我们据此得出， $\mathfrak{lq}$是一个李代数，因为它是一个李代数态射的核。 □

推论 2.17。 我们有以下李子代数的包含关系：$(\mathfrak{Lie}(B)\ \{-,-\}_A)$

$$\{\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau),\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)\}_A\subset\mathfrak{lq}.$$

证明。 这可由定理 2.16 和引理 2.4 直接推出。 □

注 2.18. 存在一个空间 $\mathfrak{bm}_0 \subset \mathbb{Q}\langle B\rangle$，在 [Bur23]，中有其明确描述；据推测，它是 $\mathcal{Z}_q/(\zeta_q(2)\ \zeta_q(4)\ \zeta_q(6))$ 的不可分解元的分次对偶。因此，预期 $\mathfrak{bm}_0$ 构成一个李代数，并且 [Bur23] 中也给出了李括号的显式公式。我们预期 $\mathfrak{bm}_0$ 也可解释为 τ 的稳定子（相对于另一种李代数作用）。我们希望这能用于证明 $\mathfrak{bm}_0$ 是一个李代数。

3. Lie algebra injection between the stabilizers

定义单射 $\mathbb{Q}$-代数态射

$$\theta_X : \mathbb{Q}\langle X\rangle \hookrightarrow \mathbb{Q}\langle B\rangle, \quad x_i \mapsto b_i, \text{ for } i \in \{0,1\},$$

以及单射 $\mathbb{Q}$-代数反态射

$$\theta_Y : \mathbb{Q}\langle Y\rangle \hookrightarrow \mathbb{Q}\langle B\rangle^0, \quad y_n \mapsto b_n, \text{ for } n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

感　　谢 [Bur25 定理 7.10]，这些映射诱导出一个单射 $\mathbb{Q}$-李代数态射

$$\theta : (\mathfrak{ls}, \{-,-\}) \hookrightarrow (\mathfrak{lq}, \{-,-\}_A), \quad \psi \mapsto \theta_X(\psi) + \theta_Y(\pi_Y(\psi)). \tag{3.1}$$

受包含关系 $\mathfrak{ls} \subset \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)$ 和 $\mathfrak{lq} \subset \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)$ 的启发，我们旨在构造一个单射 $\mathbb{Q}$-李代数态射 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y) \hookrightarrow \mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)$，它扩张了 $\theta\colon \mathfrak{ls} \hookrightarrow \mathfrak{lq}$。

根据引理 1.1，空间 $\mathfrak{ls} \oplus \mathbb{Q}x_1$ 在 Ihara 括号 $\{-,-\}$ 下也是一个 $\mathbb{Q}$-李代数。

命题 3.1. 来自 (3.1) 的映射 θ 可扩张为一个单射 $\mathbb{Q}$-李代数态射

$$\begin{aligned}\theta^{(1)} : \big(\mathfrak{ls} \oplus \mathbb{Q}x_1, \{-,-\}\big) &\to \big(\mathfrak{lq}, \{-,-\}_A\big),\\ \psi \oplus \lambda x_1 &\mapsto \theta(\psi) + \lambda b_1.\end{aligned}$$

证明。由于 $\theta\colon (\mathfrak{ls}, \{-,-\}) \to (\mathfrak{lq}, \{-,-\}_A)$ 是一个李代数态射，并且根据引理 1.1，任意 $\psi \in \mathbb{Q}\langle X\rangle$ 都有 $\{\psi, x_1\} = 0$；要证明 $\theta^{(1)}\colon (\mathfrak{ls} \oplus \mathbb{Q}x_1, \{-,-\}) \to (\mathfrak{lq}, \{-,-\}_A)$ 是一个李代数态射，只需验证

$$\{\theta(\psi), b_1\}_A = 0, \quad \forall \psi \in \mathfrak{ls}.$$

首先注意到，根据注 2.2，李括号 $\{-,-\}_A$ 等于 $\mathbb{Q}\langle b_0, b_1\rangle$ 上的 Ihara 括号。取某个元素 $\psi \in \mathfrak{ls}$。由于 $\theta_X(\psi) \in \mathbb{Q}\langle b_0, b_1\rangle$，由引理 1.1 可得

$$\{\theta_X(\psi), b_1\}_A = 0. \tag{3.2}$$

由于 $(\mathfrak{lq}, \{-,-\}_A)$ 是一个 $\mathbb{Q}$-李代数，且 $b_1, \theta(\psi) \in \mathfrak{lq}$，由 (3.2) 可推得

$$\{\theta_Y(\pi_Y(\psi)), b_1\}_A = \{\theta(\psi), b_1\}_A \in \mathfrak{lq}. \tag{3.3}$$

注意，由于 $\psi \in \mathfrak{Lie}(X)$，我们有 $(\psi \mid x_1^n) = 0$，对 $n \geq 2$ 均成立。因此，$\psi \in \mathfrak{ls}$ 满足

$$0 = (\psi \mid x_1^n) = (\pi_Y(\psi) \mid y_1^n) = (\theta_Y(\pi_Y(\psi)) \mid b_1^n), \quad \forall n \geq 1.$$

因此，

$$\text{each word in } \theta_Y(\pi_Y(\psi)) \in \mathbb{Q}\langle b_1, b_2, \ldots\rangle \text{ contains at least one letter } b_i \text{ with } i > 1. \tag{3.4}$$

多亏了引理 2.3，元素 $\{\theta_Y(\pi_Y(\psi))\ b_1\}_A$ 也属于 $\mathbb{Q}\langle b_1, b_2, \ldots\rangle$；又由于李括号 $\{-,-\}_A$ 关于深度是齐次的，由 (3.4) 可得

$$\text{each word in } \{\theta_Y(\pi_Y(\psi)), b_1\}_A \text{ contains at least one letter } b_i \text{ with } i > 1. \tag{3.5}$$

因此，根据 τ 的定义，由 (3.5) 可得

$$\text{each word in } \tau\big(\{\theta_Y(\pi_Y(\psi)), b_1\}_A\big) \text{ must contain the letter } b_0. \tag{3.6}$$

因此，由 (3.5) 和 (3.6) 可推得，对于任意字 $w \in \mathbb{Q}\langle B\rangle$,

$$(\{\theta_Y(\pi_Y(\psi)), b_1\}_A \mid w) = (\tau\big(\{\theta_Y(\pi_Y(\psi)), b_1\}_A\big) \mid w) \Longrightarrow (\{\theta_Y(\pi_Y(\psi)), b_1\}_A \mid w) = 0. \tag{3.7}$$

另一方面，由 (3.3) 以及 $\mathfrak{lq}$ 的定义， $\{\theta_Y(\pi_Y(\psi))\ b_1\}_A$ 是 τ-不变的，这意味着 (3.7) 的左端成立。于是由上述蕴含关系可得

$$\{\theta_Y(\pi_Y(\psi)), b_1\}_A = 0,$$

因为它对 $\mathbb{Q}\langle B\rangle$中的任意字均为零。因此

$$\{\theta(\psi), b_1\}_A = \{\theta_Y(\pi_Y(\psi)), b_1\}_A = 0.$$

最后，由于 θ 是单射，且空间 $\operatorname{im}\theta = \theta^{(1)}(\mathfrak{ls})$ 与 $\mathbb{Q}b_1 = \theta^{(1)}(\mathbb{Q}x_1)$ 的交是平凡的，我们得到 $\theta^{(1)}$的单射性。□

定理 3.2. 由 (3.1) 给出的映射 θ 在稳定子 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y)$ 与 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau)$ 之间诱导一个单射 $\mathbb{Q}$-李代数态射。即，

$$\begin{aligned}\theta^{(10)} : \big(\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y), \{-,-\}\big) &\to \big(\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau), \{-,-\}_A\big)\\ \psi \oplus \lambda_1 x_1 \oplus \lambda_0 x_0 &\mapsto \theta(\psi) + \lambda_1 b_1 \oplus \lambda_0 b_0,\end{aligned}$$

其中用到定理 *1.16* 中的等式 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(X)}(\Delta_Y) = \mathfrak{ls}\oplus\mathbb{Q}x_1\oplus\mathbb{Q}x_0$ 以及定理 *2.16* 中的 $\mathfrak{stab}_{\mathfrak{Lie}(B)}(\tau) = \mathfrak{lq} \oplus \mathbb{Q}b_0$ 。

证明。 由命题 3.1，我们有一个单射李代数态射

$$\theta^{(1)} : \mathfrak{ls} \oplus \mathbb{Q}x_1 \hookrightarrow \mathfrak{lq}, \quad \psi \oplus \lambda_1 x_1 \mapsto \theta(\psi) + \lambda_1 b_1.$$

由引理 1.1 和 2.4 可知， $\{-, x_0\}$和 $\{-, b_0\}_A$都是零映射。因此，映射 $\theta^{(1)}$ 可扩张为一个按上述方式定义的李代数态射 $\theta^{(10)}$ 。
最后，由于空间 $\operatorname{im}\theta^{(1)} = \theta^{(10)}(\mathfrak{ls}\oplus\mathbb{Q}x_1)$ 和 $\mathbb{Q}b_0 = \theta^{(10)}(\mathbb{Q}x_0)$ 的交集是平凡的，映射 $\theta^{(10)}$ 的单射性可由 $\theta^{(1)}$的单射性推出。□

Appendix A. Review of Lie algebra actions

定义 A.1。 设 $(\mathfrak{g}, \langle-,-\rangle)$ 是一个 $\mathbb{Q}$-李代数， V 是一个 $\mathbb{Q}$-向量空间。如果存在一个 $\mathbb{Q}$-李代数态射，则称李代数$\mathfrak{g}$通过自同态作用在空间 V 上

$$\mathrm{end} : (\mathfrak{g}, \langle-,-\rangle) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V), \quad \psi \mapsto \mathrm{end}_\psi$$

其中，自同态空间 $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V)$ 配备了括号

$$[u, v] := u \circ v - v \circ u, \quad \forall u, v \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V).$$

命题-定义 A.2. 设$(\mathfrak{g}, \langle-,-\rangle)$ 是一个作用于 $\mathbb{Q}$-向量空间 V上的 $\mathbb{Q}$-李代数，其作用由自同态给出 $\mathrm{end} : (\mathfrak{g}, \langle-,-\rangle) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V)$。设 $v \in V$。空间

$$\mathfrak{stab}(v) := \{\psi \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{end}_\psi(v) = 0\}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的李子代数，称为元素 v的稳定子李代数 。

证明。 对于 $\psi, \phi \in \mathfrak{stab}(v)$，有

$$\mathrm{end}_{\langle\psi,\phi\rangle}(v) = \mathrm{end}_\psi \circ \mathrm{end}_\phi(v) - \mathrm{end}_\phi \circ \mathrm{end}_\psi(v) = \mathrm{end}_\psi(0) - \mathrm{end}_\phi(0) = 0,$$

从而证明了 $\langle\psi, \phi\rangle \in \mathfrak{stab}(v)$。 □

对于一个 $\mathbb{Q}$-代数 A，记 $\mathrm{Der}^{\mathbb{Q}\text{-alg}}(A)$ 为代数导子的空间，也就是说，满足以下条件的线性自同态 δ of A

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b), \quad \forall a, b \in A.$$

可以立即验证，$\mathrm{Der}^{\mathbb{Q}\text{-alg}}(A)$ 在括号

$$[\delta_1, \delta_2] := \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1.$$

定义 A.3. 设 $(\mathfrak{g}, \langle -, - \rangle)$ 是一个 $\mathbb{Q}$-李代数，且 A 是一个 $\mathbb{Q}$-代数。如果存在一个 $\mathbb{Q}$-李代数态射，则称李代数 $\mathfrak{g}$ 通过导子作用于代数 A

$$\mathrm{der} : (\mathfrak{g}, \langle -, - \rangle) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-alg}}(A), \quad \psi \mapsto \mathrm{der}_\psi.$$

命题-定义 A.4 ([EFLMK15, 命题 2.2。])。 设 $(\mathfrak{g}, \langle -, - \rangle)$ 是一个 $\mathbb{Q}$-李代数，且 $\triangleright : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是一个双线性映射。令

$$\langle \psi, \phi \rangle_\triangleright := \langle \psi, \phi \rangle + \psi \triangleright \phi - \phi \triangleright \psi, \qquad \psi, \phi \in \mathfrak{g}.$$

若对所有 $\psi, \phi, \lambda \in \mathfrak{g}$

(i) $\psi \triangleright$ 是 $(\mathfrak{g}, \langle -, - \rangle)$ 上的导子，

(ii) $\langle \psi, \phi \rangle_\triangleright \triangleright \lambda = (\psi \triangleright \phi - \phi \triangleright \psi) \triangleright \lambda$，

则 $(\mathfrak{g}, \langle -, - \rangle, \triangleright)$ 称为一个后李代数。在此情形下，数对 $(\mathfrak{g}, \langle -, - \rangle_\triangleright)$ 构成一个李代数。

关于后李代数的更全面论述，读者可参阅 [BCK24] 的 §3。

命题 A.5. 设 $(\mathfrak{g}, \langle -, - \rangle, \triangleright)$ 是一个后李代数。记 $U(\mathfrak{g})$ 为 $(\mathfrak{g}, \langle -, - \rangle)$ 的万有包络 $\mathbb{Q}$-代数。则

(a) $\mathbb{Q}$-李代数 $(\mathfrak{g}, \langle -, - \rangle_\triangleright)$ 通过导子作用于 $\mathbb{Q}$-代数 $U(\mathfrak{g})$

$$\mathrm{der} : (\mathfrak{g}, \langle -, - \rangle_\triangleright) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{Q}\text{-alg}}(U(\mathfrak{g})), \quad \mathrm{der}_\psi := \psi \triangleright -,$$

(b) $\mathbb{Q}$-李代数 $(\mathfrak{g}, \langle -, - \rangle_\triangleright)$ 通过自同态作用于 $\mathbb{Q}$-线性空间 $U(\mathfrak{g})$ s

$$\mathrm{end} : (\mathfrak{g}, \langle -, - \rangle_\triangleright) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(U(\mathfrak{g})), \quad \mathrm{end}_\psi := \ell_\psi + \mathrm{der}_\psi,$$

对任意 $\psi \in \mathfrak{g}$，其中 $\ell_\psi \in \mathrm{End}\mathbb{Q}(U(\mathfrak{g}))$ 是代数 $U(\mathfrak{g})$ 中由元素 ψ 给出的左乘法。

证明。 (a) 对任意 $\psi \in \mathfrak{g}$，由命题—定义 A.4 的条件 (i) 可知 $\mathrm{der}_\psi \in \mathrm{Der}^{\mathbb{Q}\text{-alg}}$；并且对 $\psi, \phi \in \mathfrak{g}$，恒等式

$$\mathrm{der}_{\langle \psi, \phi \rangle} = [\mathrm{der}_\psi, \mathrm{der}_\phi]$$

由条件 (ii) 可得。

(b) 令 $\psi,\ \phi \in \mathfrak{g}$ 以及 $w \in U(\mathfrak{g})$。我们有

$$\begin{aligned}
[\mathrm{end}_\psi, \mathrm{end}_\phi](w) &= \mathrm{end}_\psi \circ \mathrm{end}_\phi(w) - \mathrm{end}_\phi \circ \mathrm{end}_\psi(w) \\
&= (\ell_\psi + \mathrm{der}_\psi) \circ (\ell_\phi + \mathrm{der}_\phi)(w) - (\ell_\phi + \mathrm{der}_\phi) \circ (\ell_\psi + \mathrm{der}_\psi)(w) \\
&= \psi\phi w + \psi \mathrm{der}_\phi(w) + \mathrm{der}_\psi(\phi w) + \mathrm{der}_\psi \circ \mathrm{der}_\phi(w) \\
&\quad - \phi\psi w - \phi \mathrm{der}_\psi(w) - \mathrm{der}_\phi(\psi w) - \mathrm{der}_\phi \circ \mathrm{der}_\psi(w) \\
&= (\psi\phi - \phi\psi)w + (\mathrm{der}_\psi \circ \mathrm{der}_\phi - \mathrm{der}_\phi \circ \mathrm{der}_\psi)(w) + \psi \mathrm{der}_\phi(w) \\
&\quad + \phi \mathrm{der}_\psi(w) + \mathrm{der}_\psi(\phi)w - \phi \mathrm{der}_\psi(w) - \psi \mathrm{der}_\phi(w) - \mathrm{der}_\phi(\psi)w \\
&= (\psi\phi - \phi\psi + \mathrm{der}_\psi(\phi) - \mathrm{der}_\phi(\psi))w + (\mathrm{der}_\psi \circ \mathrm{der}_\phi - \mathrm{der}_\phi \circ \mathrm{der}_\psi)(w) \\
&= (\langle \psi, \phi \rangle + \mathrm{der}_\psi(\phi) - \mathrm{der}_\phi(\psi))w + [\mathrm{der}_\psi, \mathrm{der}_\phi](w) \\
&= \langle \psi, \phi \rangle_\triangleright w + \mathrm{der}_{\langle \psi, \phi \rangle_\triangleright}(w) = \mathrm{end}_{\langle \psi, \phi \rangle_\triangleright}(w),
\end{aligned}$$

其中，第四个等号源于 der_ψ 和 der_ϕ 是导子；第六个等号源于在 $U(\mathfrak{g})$ 中，我们有 $\langle \psi, \phi \rangle = \psi\phi - \phi\psi$；第七个等号则源于 (a)。□

References

[BCK24] A. Burmester、N. Confurius 和 U. K¨uhn, *AGZT – lectures on formal multiple zeta values*, 研讨班讲义，2024。[BK20] H. Bachmann 和 U. K¨uhn, *A dimension conjecture for q-analogues of multiple zeta values*, 载于《量子场论与算术中的周期》，Springer 数学与统计学论文集，第 314 卷，Springer，2020 年，第 237–258 页。[BK25] A. Burmester 和 U. K¨uhn, *On post-Lie structures for free Lie algebras*, arXiv 预印本 arXiv:2504.19661，2025。[Bro21] F. Brown, *Depth-graded motivic multiple zeta values*, Compositio Mathematica 157 (2021)，529–572。[Bur23] A. Burmester, *An algebraic approach to multiple q-zeta values*, 博士论文，汉堡大学，2023。[Bur24] , *Balanced multiple q-zeta values*, Advances in Mathematics 439 (2024)，42 页。[Bur25] ,

An extension of the linearized double shuffle Lie algebra 2508 05024, , arXiv 预 2025

印本 arXiv: . .[EF18] B. Enriquez 和 H. Furusho, *A stabilizer interpretation of double shuffle Lie algebras*, International Mathematics Research Notices 2018 (2018)，第 22 期，6870–6907。[EFLMK15] K. Ebrahimi-Fard、A. Lundervold 和 H. Munthe-Kaas, *On the Lie enveloping algebra of a post-Lie algebra* **25** 2015 1139 1165 , Journal

of Lie Theory（），–。[Fur11] H. Furusho, *Double shuffle relation for associators*, 数学年刊 174 (2011)，341–360。[Gon98] A. B. Goncharov, *Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes*, Mathematical Research Letters 5 (1998)，497–516。[Gon01] ,

The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of $\pi_1^{(l)}$ $(\mathbb{P}^1 \setminus (\{0, \infty\} \cup \mu_n))$, Duke Mathematical Journal 110 (2001)，第 3 期，397–487。[IKZ06] K. Ihara、M. Kaneko 和 D. Zagier,

Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, Compositio Mathematica 142 (2006)，第 2 期，307–338。[Maa22] M. Maassarani, *Bigraded Lie algebras related to MZVs*, 数学科学研究所刊物 58 (2022)，第 4 期，757–791。[Rac02] G. Racinet, *Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité*, IH ´ES 数学出版物 95 (2002)，第 1 期，185–231。

Faculty of Mathematics, Bielefeld University, 33615 Bielefeld, Germany.

Email address: aburmester@math.uni-bielefeld.de

Laboratoire Mathématique Nicolas Oresme (UMR 6139), University of Caen-Normandie, 6 Boulevard Maréchal Juin, 14000 Caen, France.

Email address: khalef.yaddaden@unicaen.fr