arXiv:2603.05047v1 [math.CV] 5 Mar 2026

亚纯函数的布洛赫常数与朗道常数

MD FIROZ ALI 和 SHAESTA AZIM

摘要。设 $\mathcal{M}_1(\lambda)$ 为所有在单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\}$ 内具有 $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ 处简单极点且满足归一化条件 $f'(0) = 1$ 的亚纯函数 f 的类。分别用 $B(\lambda)$ 和 $L(\lambda)$ 表示该类的布洛赫常数与朗道常数。本文首先证明，布洛赫常数 $B(1)$ 和朗道常数 $L(1)$ 均为无穷大。利用这些结果和共形映射方法，我们证明对于任意 $p \in (0, 1)$， $B(p)$ 和 $L(p)$ 同样为无穷大，从而推翻了近期的一个猜想。最后，我们将研究扩展到具有两个单极点的亚纯函数类，并证明其相应的布洛赫常数与朗道常数也仍为无穷大。

1. 引言

令 $\mathbb{C}$ 表示复平面。对于 $a \in \mathbb{C}$ 和 $r > 0$，我们将以 a 为圆心、半径为 r 的圆盘记作 $\mathbb{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$，其边界记作$\partial\mathbb{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}$。我们用 $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0, 1)$表示单位圆盘。令 $\mathcal{A}(\mathbb{D})$表示定义在 $\mathbb{D}$上的所有解析函数组成的类，并令 $\mathcal{A}_1 = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}) : f'(0) = 1\}$。

在几何函数论中，求出布洛赫常数的精确值仍是长期悬而未决的问题之一。这个问题源于布洛赫的发现：对于任意函数 $f \in \mathcal{A}_1$，都存在 $\mathbb{D}$的一个子域，在其上f 是单叶的，且其在 f 下的像是一个圆盘，称为单叶圆盘。1929年，兰道 [17] 定义布洛赫常数 B 为 $B = \inf\{B_f : f \in \mathcal{A}_1\}$，其中$B_f$ 表示包含在 $f(\mathbb{D})$中的最大单叶圆盘的半径。在同一篇文章中，兰道还引入了两个相关常数：朗道常数 $L = \inf\{L_f : f \in \mathcal{A}_1\}$，其中 L_f 表示包含在 $f(\mathbb{D})$中的最大圆盘的半径；以及单叶布洛赫常数，

$$\mathcal{U} = \inf\{B_f : f \in \mathcal{A}_1 \text{ and } f \text{ is univalent}\}.$$

兰道 [17] 给出了这些常数的数值估计，并证明了 $0.39 \leq B \leq L < 0.555$ 和 $\mathcal{U} > 0.566$。

若函数 $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ 的半范数定义为

$$\|f\| := \sup_{z\in\mathbb{D}}(1 - |z|^2)|f'(z)|,$$

是有限的。1942年，塞德尔和沃尔什 [22]证明了： B_f 有限当且仅当$||f||$ 有限；这一点最先由 Pommerenke [24]指出。在同一篇论文中，

2010 数学主题分类。主要分类号 30D30、30D99。关键词和短语。布洛赫函数、布洛赫常数、朗道常数、亚纯函数。

Pommerenke [24] 引入了局部单叶布洛赫常数 B_ℓ，其定义为

$$B_\ell = \inf\{B_f : f \in \mathcal{A}_1, \text{ and } f'(z) \neq 0 \text{ for } z \in \mathbb{D}\}$$

并证明了 $B_\ell > 1/2$。这些常数满足基本不等式链 $B \leq B_\ell \leq L \leq \mathcal{U}$。关于布洛赫函数的更多细节，我们参阅 [15]。

从历史上看，对这些常数精确值的探求产生了大量文献。1937年，Ahlfors和Grunsky [2] 导出了布洛赫常数的一个上界，由下式给出

$$B \leq \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}}} \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(11/12)}{\Gamma(1/4)} \approx 0.4719,$$

他们猜想该值即为 B的精确值。随后，Ahlfors [3] 改进了 B 和 L的下界，证明了 $B \geq \sqrt{3}/4$ 和 $L \geq 1/2$。1943年，Rademacher [20] 进一步改进了 L的上界：

$$L \leq \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)} \approx 0.5433,$$

并同样猜想其是精确的。Chen和Gauthier [13] 确立了 B 目前最佳的下界为

$$B > \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \times 10^{-4}.$$

更近一些，2004年，Chen和Shiba [14]改进了 L的下界，并证明了 $L > \frac{1}{2} + 2 \times 10^{-8}$。2009年，Carroll和Cerda [11] 得到了上界$\mathcal{U} \leq 0.6563937$ ，同年Skinner [25] 得到了 $\mathcal{U}$相应的下界 $\mathcal{U} > 0.5708858$ 。这些估计是文献中目前最好的。局部单叶函数已知的最佳下界为 $B_\ell > \frac{1}{2} + 2 \times 10^{-8}$，由Chen和Shiba [14] 于2004年给出。

在亚纯函数的背景下研究布洛赫常数，是几何函数论的另一个重要前沿。1982年，Minda [19]证明，复平面 $\mathbb{C}$ 上局部单叶亚纯函数族的布洛赫常数恰为 $\pi/2$。在同一项研究中，Minda还证明，更广泛的全体亚纯函数类在 $\mathbb{C}$ 上的布洛赫常数介于 $[\pi/3, 2\text{arctan}(1/\sqrt{2})]$之间。2000年，Bonk和Eremenko [10]解决了这一问题，证明该函数类的布洛赫常数的精确值为$\text{arctan}(\sqrt{8})$。

–

令 $\mathcal{M}(\lambda)$ 表示单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内在 $\lambda \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ 处具有简单极点的所有亚纯函数 f 的类。我们将 $\mathcal{M}_1(\lambda)$ 定义为满足归一化条件 $f'(0) = 1$ 的 $\mathcal{M}(\lambda)$ 子类。对于任意 $f \in \mathcal{M}_1(\lambda)$，令 $L_f(\lambda)$ 和 $B_f(\lambda)$ 分别表示包含在像 $f(\mathbb{D})$ 内的最大圆盘和最大单叶圆盘的半径。于是，类 $\mathcal{M}_1(\lambda)$ 的兰道常数和布洛赫常数定义如下

$$L(\lambda) = \inf\{L_f(\lambda) : f \in \mathcal{M}_1(\lambda)\} \quad \text{and} \quad B(\lambda) = \inf\{B_f(\lambda) : f \in \mathcal{M}_1(\lambda)\}.$$

我们注意到，如果 $\lambda = \rho e^{i\alpha}$ 且 $f \in \mathcal{M}_1(\lambda)$，那么旋转 $f_\alpha(z) := e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z)$ 属于类 $\mathcal{M}_1(\rho)$。由于 $L_f(\lambda) = L_{f_\alpha}(\rho)$ 且 $B_f(\lambda) = B_{f_\alpha}(\rho)$，因此可得 $L(\lambda) = L(\rho)$ 且 $B(\lambda) = B(\rho)$。因此，不失一般性，我们可以假设 $0 < \lambda \leq 1$。

对于 $\lambda = p \in (0,1)$，我们采用记号 $\mathcal{A}(p) := \mathcal{M}(p)$ 和 $\mathcal{A}_1(p) := \mathcal{M}_1(p)$。$\mathcal{A}_1(p)$ 中函数的朗道常数与布洛赫常数的概念由 Bhowmik 和 Sen [5]引入。事实上，Bhowmik 和 Sen [5] 针对满足 $f'(0) \neq 0$ 的函数类 $\mathcal{A}(p)$ 定义了 $L(p)$ 和 $B(p)$。但从解析角度看，为与经典函数类$\mathcal{A}_1$保持一致，对归一化子类 $\mathcal{A}_1(p)$ 来定义它们更为方便。对于函数类 $\mathcal{A}(p)$，Bhowmik 和 Sen [4] 证明了

$$B(p) \geq (8 - \sqrt{63})^2 p^2 |f'(0)| \quad \text{and} \quad L(p) \geq \frac{(9 - 4\sqrt{5}) p^2 |f'(0)|}{8}.$$

随后，这些界在 [5], 中得到改进，从而给出如下更精确的估计。

定理 A. [5] 设 B 与 L 为函数类 $\mathcal{A}_1$的布洛赫常数与朗道常数。则

$$B(p) \geq \frac{4p|f'(0)|B}{(1+p)^2} \quad \text{and} \quad L(p) \geq \frac{4p|f'(0)|L}{(1+p)^2}.$$

在定理 A 中，若允许 $p \to 1^-$ （归一化条件为 $f'(0)=1$），则$B(1) \geq B$ 且 $L(1) \geq L$。此外，Bhowmik 和 Sen [5] 指出，不难证明 $B(1) = B$ 以及 $L(1) = L$，这使他们猜想定理 A 中给出的界正是 $B(p)$ 与 $L(p)$ 的精确值。

近年来，关于调和函数和对数调和函数的布洛赫常数与朗道常数的研究日益受到关注。有关文献的详细综述，请参阅以下论文及其中的参考文献 [6, 12, 18, 23]。

本文首先证明，布洛赫常数 $B(1)$和朗道常数 $L(1)$均为无穷大。基于这一结果，我们证明 Bhowmik 和 Sen 的猜想 [5] ——关于布洛赫常数 $B(p)$和朗道常数 $L(p)$精确值的猜想——并不成立。此外，我们将对布洛赫常数与朗道常数的研究扩展到这样一类亚纯函数：它们在单位圆盘内解析，唯有两个指定的简单极点除外。

2. 关于 $\mathcal{M}_1(\lambda)$类的布洛赫常数与朗道常数

为阐明我们的主要发现，我们先考察一个具体情形；该情形是本研究的主要动机。这个例子展示了我们的结果所推广的几何现象。

若函数 $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ 在 $\partial\mathbb{D}$ 上有一个简单极点，且 $f(\mathbb{D})$ 的补集是一个无界凸域，则称其为凹函数。对于 $\alpha \in (1, 2],$，令 $Co(\alpha)$ 表示在无穷远处张角为 $\pi\alpha$ 的凹单叶函数类。若函数 $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ 满足以下条件，则属于 $Co(\alpha)$:

(i) $f \in \mathcal{A}_1$ 满足 $f(0) = 0$ 且 $f(1) = \infty$, (ii) f 在 $\mathbb{D}$ 中是单叶的，并且 $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})$ 是一个凸域,

(iii) ∞ 处的张角小于或等于 $\pi\alpha, \quad \alpha \in (1, 2]$。
对于这一类函数，Avkhadiev 和 Wirths [1] 证明，所有像区域的交集是一个特定的半平面：

$$\bigcap_{f\in Co(\alpha)} f(\mathbb{D}) = \Omega_\alpha := \left\{ w : \ \mathrm{Re}\ w > -\frac{1}{2\alpha} \right\}.$$

由此结果可直接得出，每个 $f \in Co(\alpha)$ 都包含半平面 Ω_α。由于 Ω_α 包含半径任意大的圆盘，例如，$\mathbb{D}(r, \ r) \subset$ 对任意$r > 0$都有 Ω_α，因此，类 $Co(\alpha)$ 的布洛赫常数与朗道常数必然是无限的。

我们的第一个结果表明，若函数 f 在单位圆盘 $\mathbb{D}$内解析，且在边界点 $z = 1$ 处有一个简单极点，则包含在 $f(\mathbb{D})$ 内的最大单叶圆盘的半径为无限大。

定理 2.1. 若 $f \in \mathcal{M}_1(1)$，则半径 $B_f(1)$和 $L_f(1)$均为无限大。

证明. 要证明 $B_f(1)$ 为无限大，只需证明布洛赫半范数

$$||f|| = \sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)|f'(z)|$$

无界。如果 $f \in \mathcal{M}_1(1)$ 在 $z = 1$ 处有一个简单极点，因此在该极点的去心邻域内，f 可表示为

$$f(z) = \frac{h(z)}{z - 1}$$

其中 h 在 $z = 1$ 处解析，且 $h(1) \neq 0$。沿正实轴 $t \to 1^-$ 计算半范数，可得以下下界：

$$\begin{aligned}
||f|| &= \sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)|f'(z)| \\
&\geq \limsup_{t\to 1^-} (1 - t^2)|f'(t)| \\
&= \limsup_{t\to 1^-} (1 - t^2) \left| \frac{h'(t)(t - 1) - h(t)}{(t - 1)^2} \right| \\
&= \limsup_{t\to 1^-} \frac{1 + t}{1 - t} \left| h'(t)(t - 1) - h(t) \right| \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

这意味着 $B_f(1)$ 为无穷大。由不等式 $L_f(\lambda) \geq B_f(\lambda)$，可立即得出 $L_f(1)$ 为无穷大。

□

推论2.1. 那么，对于类 $\mathcal{M}_1(1)$，布洛赫常数 $B(1)$ 和朗道常数 $L(1)$ 均为无穷大。

推论2.2. 如果 $f \in \mathcal{A}_1$ 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内解析，且在$\lambda \in \partial\mathbb{D}$处有一个简单极点，那么包含于像 $f(\mathbb{D})$ 中的最大单叶圆盘 $B_f(\lambda)$ 的半径，以及最大圆盘 $L_f(\lambda)$ 的半径，均为无穷大。

在继续讨论后续结果之前，我们先考察另一个特定例子；它为下一个定理提供了必要的直观认识。设 $\mathcal{S}(p), \quad 0 < p < 1,$

为 $\mathcal{A}(p)$ 中所有满足归一化条件 $f(0) = 0 = f'(0) - 1$ 的单叶函数类。若 $f \in \mathcal{S}(p)$，则众所周知， [16, 定理41，第249页，第II卷]$f(\mathbb{D})$ 包含以下互不相交的区域:

$$D_1 = \left\{ w \in \mathbb{C} : |w| < \frac{p}{(1+p)^2} \right\} \text{ and } D_2 = \left\{ w \in \mathbb{C} : |w| > \frac{p}{(1-p)^2} \right\}.$$

外部域 D_2 的存在意味着 $f(\mathbb{D})$ 包含一个无穷远邻域。因此，对于任意 $R > 0$，都可以选取一个中心 $a \in f(\mathbb{D})$，使得距离 $d(a, \partial D_2) > R$，从而确保圆盘 $\mathbb{D}(a, R)$ 包含在 $f(\mathbb{D})$ 内。由于 f 是单叶的，任何这样的圆盘必然都是 schlicht 的。因此，对于每个 $f \in \mathcal{S}(p)$，半径 $B_f(p)$ 都是无穷大。相应地，类 $\mathcal{S}(p)$ 的布洛赫常数 $B(p)$ 和朗道常数 $L(p)$ 都不是有限的。我们的下一个结果表明，即使省去单叶性要求，这一结论仍然成立。

定理2.2。 对于任意 $p \in (0,1)$，类 $\mathcal{A}_1(p)$的布洛赫常数 $B(p)$ 和朗道常数$L(p)$ 均为无穷大。

证明。 对于 $p \in (0, 1)$，令 Ω_p 表示沿实轴从 p 到 1 割开的单位圆盘，即，

$$\Omega_p = \mathbb{D} \setminus [p, 1).$$

令 $k(z) = z/(1+z)^2$ 表示科比函数（旋转）及其 K 反函数。对于$r = 4p/(1+p)^2$,，函数 $\eta(z) = K(rk(z))$ 将 $\mathbb{D}$ 共形地映到 Ω_p。令$\zeta(z)$表示 $\eta(z)$ 的反函数，我们注意到

$$\zeta'(0) = \frac{(1+p)^2}{4p}.$$

令 $f \in \mathcal{A}_1(p)$ 并考虑其限制 $f_1 \equiv f|_{\Omega_p}$。对于每个这样的 f_1，存在一个函数 $g \in \mathcal{A}_1$，使得 g 在点 $\zeta(p) \in \partial\mathbb{D}$处有一个简单极点，从而

$$f_1(z) = \frac{4p}{(1+p)^2} g \circ \zeta(z), \ z \in \Omega_p. \tag{2.1}$$

由 (2.1) 可知，裂域 Ω_p 在 f_1 下的像满足

$$f(\Omega_p) = f_1(\Omega_p) = \frac{4p}{(1+p)^2} g(\mathbb{D}) =: G. \tag{2.2}$$

令 $B_f(p)$ 和 B_g 分别表示包含在$f(\mathbb{D})$ 和 $g(\mathbb{D})$ 内的最大单叶圆盘的半径。由于 $g \in \mathcal{A}_1$ 在点$\zeta(p) \in \partial\mathbb{D}$处有一个简单极点，且 g，由推论2.2可知 B_g 为无限大。因此，由 (2.2) 可得 $B_f(p)$ 也为无限大。由于这对所有 $f \in \mathcal{A}_1(p)$ 均成立，布洛赫常数 $B(p)$ 也为无限大。朗道常数 $L(p)$ 非有限这一点可立即得出。

□

注2.1. 在定理2.2中，由于 f 在 $\mathbb{D} \setminus \{p\}$ 中解析，且线段$(p, 1)$构成边界 $\partial\Omega_p$的一部分，故像 $f((p, 1))$包含于 G 或其边界 ∂G之中。因此，单位圆盘在 f 下的像满足如下包含关系

$$G \subset f(\mathbb{D}) \subset \overline{G}. \tag{2.3}$$

值得注意的是，复合 $g \circ \zeta$ 的单叶性等价于 g的单叶性。设 B_{f_1} 表示包含于 f_1 (Ω_p)内的最大单叶圆盘的半径。因此，由(2.1)和(2.2)，我们可以得出

$$B_{f_1} = \frac{4p}{(1+p)^2} B_g.$$

由 (2.3)，可以进一步得出

$$B_f(p) = B_{f_1} = \frac{4p}{(1+p)^2} B_g.$$

通过类似的几何论证，若 $L_f(p)$ 与 L_g 分别表示包含于 $f(\mathbb{D})$ 与 $g(\mathbb{D})$ 中的最大圆盘（不必为单叶）的半径，则应用 (2.2) 与 (2.3)，可以得出

$$L_f(p) = \frac{4p}{(1+p)^2} L_g.$$

2.1. 布洛赫常数（类 Σ）。设 Σ表示定义在去心单位圆盘 $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ 上、在原点处具有留数为 1 的简单极点的全体单叶函数所成的类。每个 $g \in \Sigma$ 都具有如下形式的洛朗级数展开

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^n, \quad 0 < |z| < 1.$$

几何函数论中的一个基本结果是：任一 $g \in \Sigma$将 $\mathbb{D}^*$映到某个紧连通集 E的补集上。设 $g \in \Sigma$，并设 $g(\mathbb{D}^*) = \mathbb{C} \setminus E$。由于集合 E 是紧的，其补集是一个无穷远邻域。因此，对任意 $R > 0$，可以选取中心 $a \in \mathbb{C} \setminus E$，使得 dist$(a, E) > R$，从而保证圆盘 $\mathbb{D}(a, R)$ 包含于像 $g(\mathbb{D}^*)$ 之内。此外，g 的单叶性保证每一个这样的圆盘都是单叶的。由此可知，对每个 $g \in \Sigma$，最大单叶圆盘 B_g 的半径为无穷。因此，布洛赫常数 B 与朗道常数 L 对于类 Σ 而言都不是有限的。

3. 具有两个单极点的函数的布洛赫常数

令 $\mathcal{M}(\lambda, \mu)$ 为单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内在 $z = \lambda$，$\mu \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ 处有两个简单极点的所有亚纯函数 f 的类，令 $\mathcal{M}_1(\lambda, \mu)$ 为 $\mathcal{M}(\lambda, \mu)$ 中满足归一化条件 $f'(0) = 1$ 的所有亚纯函数 f 的子类。对于 $f \in \mathcal{M}_1(\lambda, \mu)$，令 $L_f(\lambda, \mu)$ 和 $B_f(\lambda, \mu)$ 分别表示包含于 $f(\mathbb{D})$ 中的最大圆盘和最大单叶圆盘的半径。此外，令

$$L(\lambda, \mu) = \inf\{L_f(\lambda, \mu) : f \in \mathcal{M}_1(\lambda, \mu)\}$$

$$\text{and } B(\lambda, \mu) = \inf\{B_f(\lambda, \mu) : f \in \mathcal{M}_1(\lambda, \mu)\}$$

分别为类 $\mathcal{M}_1(\lambda, \mu)$ 的兰道常数和布洛赫常数。

以下引理阐述了一类具有多条割线的区域的共形映射性质，扩展了 Robinson [21] 的经典结果。

引理 3.1。令 $k(z)=z/(1-z)^2$ 表示科比函数， $K(z)$ 表示其逆函数。对于 $x\in(0$、$1)$ 和 $\theta\in[0,2\pi)$，定义参数

$$\rho=\rho(x):=\frac{4x}{(1+x)^2},\quad \xi(\rho,\theta):=1-2\rho\sin^2\frac{\theta}{2}-2i\rho\sin^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{1}{\rho\sin^2\frac{\theta}{2}}-1}. \tag{3.1}$$

(i) 函数 $\omega_\rho(z)=-e^{i\theta}K(\rho k(z))$ 将单位圆盘 $\mathbb{D}$ 共形地映 *onto* 割圆盘 $\mathbb{D}\setminus L(x,\theta)$，其中 $L(x,\theta)=\{te^{i\theta}:\ x\le t<1\}$。此外，边界对应关系如下：

$$\omega_\rho(-1)=xe^{i\theta}\quad and\quad \omega_\rho\left(\xi(\rho,\theta)\right)=-1.$$

(ii) 对于 $p,p_1\in(0,1)$，设 $r=\rho(p)$、$r_1=\rho(p_1)$ 和 $-K(rk(p_1e^{i\theta}))=qe^{i\phi}$。则复合函数

$$h(z)=-K(rk(-e^{i\theta}K(r_1k(z))))=-K(rk(\omega_{r_1}(z)))$$

将单位圆盘 $\mathbb{D}$ 共形地映射到区域 $\Omega(p,p_1,\theta):=\mathbb{D}\setminus\{[p,1)\cup C(p_1,\theta)\}$，其中第二条割线由曲线 $C(p_1,\theta):=\{-K(rk(te^{i\theta})):\ p_1\le t<1\}$定义。此外，边界对应关系如下：

$$h(-1)=qe^{i\phi}\quad and\quad h\left(\xi(r_1,\theta)\right)=p.$$

证明。*(i)* 由 [21, 引理 1] 可知，函数 $K(\rho k(z))$ 将单位圆盘映射到 $\mathbb{D}\setminus(-1,\ -x)$。对于固定的 $\theta\in[0,2\pi)$，函数 $\omega_\rho(z)=-e^{i\theta}K(\rho k(z))$ 将单位圆盘 $\mathbb{D}$ 映射到区域 $\mathbb{D}\setminus L(x,\ \theta)$，其中 $L(x,\ \theta)=\left\{te^{i\theta}:\ x\le t<1\right\}$.

函数 $K(\rho k(z))$ 将点 -1 映射到 $-x$，由此得到 $\omega_\rho(-1)=xe^{i\theta}$。此外，求解边界方程 $-e^{i\theta}K(\rho k(z))=-1$，可得 z 的原像为 $\omega_\rho(\xi(\rho,\ \theta))=-1$，其中 $\xi(\rho,\ \theta)$ 定义于 (3.1) 中。

(ii) 根据 (i) 中确立的性质，辅助函数 $-e^{i\theta}K(r_1k(z))$ 将单位圆盘 $\mathbb{D}$ 映射到区域 $\mathbb{D}\setminus L(p_1,\ \theta)$ 上。由于变换 $w\mapsto -K(rk(w))$ 将单位圆盘 $\mathbb{D}$ 映射到沿实轴割开的圆盘 $\mathbb{D}\setminus[p,1)$，并将径向线段 $L(p_1,\ \theta)$ 映射到曲线 $C(p_1,\ \theta)$ 上，因此这一二次映射将 $\mathbb{D}\setminus L(p_1,\ \theta)$ 映射到区域 $\Omega(p,\ p_1,\ \theta)=\mathbb{D}\setminus\{[p,1)\cup C(p_1,\ \theta)\}$ 因此，复合函数

$$h(z)=-K(rk(-e^{i\theta}K(r_1k(z))))=-K(rk(\omega_{r_1}(z)))$$

是从 $\mathbb{D}$ 到 $\Omega(p,\ p_1,\ \theta)=\mathbb{D}\setminus\left\{[p,1)\cup C(p_1,\ \theta)\right\}$. 的共形映射

边界对应关系可通过直接计算得到。由于 $\omega_{r_1}(-1)=p_1e^{i\theta}$ 且 $-K(rk(p_1e^{i\theta}))=qe^{i\phi}$，我们得到 $h(-1)=qe^{i\phi}$。类似地，利用 $\omega_{r_1}(\xi(r_1,\ \theta))=-1$ 以及 $-K(rk(-1))=p$这一事实，我们得出 $h(\xi(r_1,\ \theta))=p$。

□

定理 3.1。对于任意不同的 λ、$\mu\in\mathbb{D}\setminus\overline{\{0\}}$，类 $\mathcal{M}_1(\lambda,\mu)$ 的布洛赫常数 $B(\lambda,\mu)$ 为无穷大。

证明。如果任一极点 λ 或 μ 位于边界 $\partial\mathbb{D}$上，那么根据推论2.2，布洛赫常数 $B(\lambda,\ \mu)$ 是无穷大。现在我们假设两个极点都位于穿孔圆盘内，即 $\lambda,\ \mu\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$。这些极点的相对位置导致两种不同的情形。

情形1：极点 λ 和 μ 不在同一条径向直线上。 在这种情况下，不失一般性，设 $\lambda = p \in (0, 1)$ 且 $\mu = qe^{i\phi}$ 满足 $\phi \neq 0$。令 r ，并令映射 $-K(rk(z))$ 如引理 3.1 中所定义，该映射将$\mathbb{D}$ 变换到 $\mathbb{D} \setminus [p, 1)$。我们将 $p_1e^{i\theta}$ 定义为 $\mu = qe^{i\phi}$ 在该映射下的原像。因此，引理 3.1 中的函数 $h(z)$ 将单位圆盘共形地映 onto 单连通域 $\Omega(p, p_1, \theta) = \mathbb{D} \setminus \{[p, 1) \cup C(p_1, \theta)\}$。

若 $f \in \mathcal{M}_1(p, qe^{i\phi})$，则限制 $f_1 \equiv f|_{\Omega(p,p_1,\theta)}$ 是解析的。设 H 表示 h 的逆。显然 $H(z)$ 是一个共形映射，且

$$H(p) = \xi(r_1, \theta) \in \partial\mathbb{D} \text{ and } H(qe^{i\phi}) = -1,$$

其中 r_1 与 $\xi(r_1, \theta)$ 的定义如引理 3.1 所述。复合 $f_1 \circ h$ 在 $\mathbb{D}$ 中是解析的，但 h 映射到 f_1 的极点的那些点除外。通过选取适当的缩放常数 $c > 0$，我们定义 $g = c(f_1 \circ h)$，使得 $g'(0) = 1$。函数 g 在 $\mathbb{D}$ 中是解析的，并在边界点 $H(p) \in \partial\mathbb{D}$ 和 $-1 \in \partial\mathbb{D}$ 处具有单极点。由表示

$$f_1(z) = \frac{1}{c} g \circ H(z), \quad z \in \Omega(p, p_1, \theta). \tag{3.2}$$

由此可得

$$f(\Omega(p, p_1, \theta)) = f_1(\Omega(p, p_1, \theta)) = \frac{1}{c} g(\mathbb{D}) \subset f(\mathbb{D}). \tag{3.3}$$

由于 g 在单位圆盘中是解析的，并在 $z = -1 \in \partial\mathbb{D}$ 处有一个简单极点，根据推论 2.2，包含在 $g(\mathbb{D})$ 中的最大单叶圆盘的半径不是有限的。因此， $B(\lambda, \mu)$ 不是有限的。

情形 2：极点 λ 和 μ 位于同一条径向直线上。在这种情况下，不失一般性，设 $\lambda = p$ 和 $\mu = q$ 满足 $0 < p < q < 1$。对于$f \in \mathcal{M}_1(p, q)$，令

$$F_f(z) = \frac{(f \circ \psi)(z)}{(f \circ \psi)'(0)}, \quad \text{where } \psi(z) = \frac{p + q - 2z}{2 - (p + q)z}$$

是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的一个自同构。如果

$$z_1 := \frac{p - q}{2 - q(p + q)} \quad \text{and} \quad z_2 := \frac{q - p}{2 - p(p + q)}$$

则简单计算可得 $\psi(z_1) = q$ 以及 $\psi(z_2) = p$。因此，函数F_f 在 $\mathbb{D}$ 中解析，并且在点 $z = z_1, z_2$ 处具有简单极点，其中

$$F_f(\mathbb{D}) = \frac{1}{(f \circ \psi)'(0)} f(\mathbb{D}).$$

由于 $z_1 < 0$ 和 $z_2 > 0$， F_f 在 z_1 和 z_2 处的极点位于原点的两侧，实际上处于不同的径向直线上。应用**情形 1**的结果，像 $F_f(\mathbb{D})$ 包含任意半径的圆盘。由于 $f(\mathbb{D})$ 是 $F_f(\mathbb{D})$ 的缩放版本，因此可知 $B(p, q)$ 同样为无穷大。

□

推论 3.1. 对于任意不同的 λ、$\mu \in \mathbb{D} \setminus \overline{\{0\}}$，类 $\mathcal{M}_1(\lambda, \mu)$ 的朗道常数 $L(\lambda, \mu)$ 为无穷。

声明：

数据可用性： 本文不适用数据共享，因为本研究期间未生成或分析任何数据集。

作者贡献： 所有作者对该问题的调查贡献均等。作者署名顺序按姓氏字母顺序排列。所有作者均已阅读并批准最终稿件。

利益冲突： 作者声明不存在任何利益冲突。

参考文献

[1] F. G. Avkhadiev, K. J. Wirths, 无穷远处具有有界张角的凹单叶函数, Lobachevskii. J. Math. 17 (2005), 3–10.[2] L. V. Ahlfors, H. Grunsky, 关于布洛赫常数, Math. Z. 42 (1937), 671–673.[3] L. V. Ahlfors, 施瓦茨引理的推广, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 359– 364.[4] B. Bhowmik, S. Sen, 亚纯函数的朗道常数与布洛赫常数, Monatsh. Math. 201 (2023), 359–373.[5] B. Bhowmik, S. Sen, 亚纯函数改进的朗道常数与布洛赫常数, Canad Math Bull. 66 (2023), 1269–1273.[6] B. Bhowmik, S. Sen, 调和映射的布洛赫型定理, Mediterr. J. Math., bf 22, Art. no. 1, (2025).[7]A. Bloch, Valiron先生关于整函数的定理与一致化理论, C. R. Acad. Sci. Paris 178 (1924), 2051–2052.[8]A. Bloch, Valiron先生关于整函数的定理与一致化定理, Ann. Fac. Sci. Univer. 17 (1926), 1–22.[9] M. Bonk, 关于布洛赫常数, Proc. Amer. Math. Soc. 110 (1990), 889–894.[10] M. Bonk, A. Eremenko, 亚纯函数的覆盖性质、负曲率与球面几何, Ann. Math. (2) 152 (2000), 551–592.[11] T. Carroll, J. O. Cerda, 单叶布洛赫–朗道常数、调和对称性与保角粘合, J. Math. Pures Appl. 92 (2009), 396–406.[12] J. Chang, S. Ponnusamy, J. Qiao, F. Qie, 对数调和映射的复合与从属及对数调和布洛赫型类, J. Math. Anal. Appl. 557 (2026), Art. 130332.[13] H. Chen, P. M.Gauthier, 关于布洛赫常数, J. Anal. Math. 69 (1996), 275–291.[14] H. Chen, M. Shiba, 关于局部单叶布洛赫常数, J. Anal. Math. 94 (2004), 159-170.[15] J. A. Cima, 布洛赫函数的基本性质, Int. J. Math. Math. Sci. 3 (1979), 369–413.[16]A. W. Goodman, 单叶函数, 第I卷 (Mariner Publishing Co., 坦帕, 佛罗里达州)(1983).[17] E. Landau, 关于布洛赫常数及两个相关世界常数, Math. Z. 30 (1929), 608–643.[18] M. S. Liu, W. J. Luo, S. Ponnusamy, 亚纯调和映射的布洛赫型定理, Appl. Anal. 103 (2024), 2612–2624.[19] C. D. Minda, 亚纯函数的布洛赫常数, Math. Z. 181 (1982), 83–92.[20] H. Rademacher, 关于布洛赫–朗道常数, Am. J. Math 65 (1943), 387–390.[21] R. M. Robinson, 单叶函数的布洛赫常数 $\mathcal{U}$, Bull. Amer. Math. Soc. 41 (1935), 535–540.[22] W. Seidel and J. L. Walsh, 关于单位圆内解析函数的导数及其单叶半径与 p价数, Trans. Amer. Math. Soc., 52 (1942), 128–216.[23] S. Sen, 像包含一个圆盘的函数的朗道型定理, J. Math. Anal. Appl. 555 (2026), Art. 130068.

[24] C. Pommerenke, 关于布洛赫函数, 伦敦数学会杂志 **2**(1970),689–695.[25] B. Skinner, 单叶布洛赫常数问题, 复变函数与椭圆方程 **54** (2009), 951–955.

Md Firoz Ali，杜尔加布尔国家理工学院，西孟加拉邦，印度电子邮件地址：ali.firoz89@gmail.com，fali.maths@nitdgp.ac.in

Shaesta Azim，杜尔加布尔国家理工学院，西孟加拉邦，印度 IA
E电子邮件地址：taefaazim547@gmail.com