arXiv:2603.05055v1 [cs.LO] 5 Mar 2026

模态片段

Nick Bezhanishvili，荷兰阿姆斯特丹大学 ILLCBalder ten Cate，荷兰阿姆斯特丹大学 ILLCArunavo Ganguly，瑞典于默奥大学计算机科学系Arne Meier，德国莱布尼茨汉诺威大学理论计算机科学研究所

我们综述命题逻辑和模态逻辑中基受限片段的系统性研究方法，重点探讨表达能力和计算复杂性如何取决于允许使用的算子。命题逻辑的情形已得到充分研究，并为此提供了概念上的范本：Post 格通过布尔克隆对各个片段进行组织，并支持对标准推理任务进行复杂性分类。对于模态片段，我们将两条历史上彼此独立的研究脉络汇集起来：一套通用框架，其中模态片段由任意模态公式定义的“联结词”基来参数化（该框架最初由 Kuznetsov 和 Raţˇa 等逻辑学家于20世纪70年代提出并研究）；以及我们称为简单模态片段的一类更易处理的片段，它由布尔函数和选定的模态算子来参数化，借助 Post格方法可以系统地获得可判定性和二分结果。此外，我们汇集并拓展了关于命题片段和简单模态片段从例子中学习的可教性与精确可学习性研究成果，最后指出若干开放问题。

1 引言

对命题逻辑片段的研究由来已久，其传统可追溯至 Emil Post 的早期工作 [Pos41]，Jablonski等人 [JGK70],以及 Harry Lewis 的工作 [Lew79], 。这类研究以布尔函数基为参数，考察基本算法任务的表达能力和计算复杂性如何取决于所选的基。Post 格对布尔函数基进行了系统分类，成为理解这类依赖关系的基础工具。

这一视角随后扩展到了更丰富的逻辑系统，包括模态逻辑。事实上，后来出现了两条大体独立的研究路线，以系统化的方式研究模态逻辑片段。第一条路线由 Alexander Kuznetsov [Kuz71] 和 Metodie Raţˇa [Raţ71] 于20世纪70年代开创。在这条研究路线中，模态逻辑片段由一组“联结词”构成的基给出，这些联结词由任意模态公式指定。这类片段的一个例子是“偶然性片段”

$$\phi ::= x \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid \bullet\phi,$$

其中 $\bullet\phi$ 由 $\Diamond\phi \wedge \Diamond\neg\phi$定义。等价地，可以将此类片段视为由一个有限的公式集（本例中为： x、 $\neg x$、 $x \wedge y$和 $\Diamond x \wedge \Diamond\neg x$）在一致代入下闭包得到。Kuznetsov 和 Raţˇa（以及后来其他研究者）关注所有此类片段构成的格的结构，也关注诸如表达完备性 （给定一个片段，它是否表达力完备？）和表达包含（给定两个片段，其中一个是否包含另一个，模等价意义下？）等元问题的可判定性。然而，由于这一框架具有普遍性，许多已取得的结果往往要么是否定性的（例如，证明某些元问题不可判定），要么适用范围有限（例如，仅适用于 S5S5这类局部表格逻辑）。

20世纪90年代，Jeavons及其合作者 [JC95、JCP98], 以及 Nadia Creignou 和她的同事 [Cre95、CH96、CH97、CKS01], 重振了由 Lewis [Lew79]和 Schaefer [Sch78], 开创的研究路线，最终对 Schaefer 定理 [ABI+09]进行了更精细的表述。这推动了关于时态逻辑片段 [BHSS06] 和模态逻辑 [BSS+06]的研究，并由此开启了

作者联系信息：Nick Bezhanishvili，ILLC，阿姆斯特丹大学，荷兰；Balderten Cate，ILLC，阿姆斯特丹大学，荷兰；Arunavo Ganguly，计算机科学系，于默奥大学，瑞典；ArneMeier，理论计算机科学研究所，莱布尼茨汉诺威大学，德国。

上述第二条独立的模态片段研究路线。该研究路线采用了一种限制更多但也更易处理的框架。在这里，模态片段由一组布尔函数以及一个（单独指定的）模态算子子集来参数化。本文将这类模态片段称为简单的。上述偶然性片段并非这种形式，但例如“单调片段”

$$\phi ::= x \mid \top \mid \bot \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \Diamond\phi \mid \Box\phi$$

是。这第二条研究路线在技术上更接近 Post 的原始设定，并且事实证明，它更适合进行算法分析，这得益于 Post 格。由此，在这一框架下，人们得到了许多二分定理，为与模态片段相关的判定问题提供了完整的复杂性分类。近年来，这第二条研究路线已从基本模态逻辑扩展到其他逻辑形式体系，包括时态逻辑、混合逻辑和团队逻辑，进一步彰显了布尔基视角的稳健性。

本文的目的有三：(i) 将这两条研究路线整合为统一的概念叙述；(ii) 综述两种传统中的重要成果；(iii) 展望未来研究方向。我们还介绍了一些新成果，探讨如何通过例子学习和教授命题逻辑与模态逻辑不同片段中的公式。

概要。 在第2节中，我们回顾复杂性类和布尔克隆的相关背景。在第3节中，我们回顾命题逻辑片段的相关结果，这些结果为本文下一部分奠定了背景。在第4节中，我们考察模态逻辑片段，并回顾上述两种研究传统中的相关结果。在第5节中，我们简要讨论其他一些逻辑系统，研究者也对其片段进行了类似研究。最后，我们在第6节列出若干开放问题，并以此作结。

2 预备知识

2.1 相关复杂性类

本文将综述关于命题逻辑和模态逻辑各种片段的算法问题复杂度的二分结果。这些结果会用到若干标准复杂性类，我们在此简要回顾。

复杂性类 P由所有可在 确定性多项式时间内求解的问题组成；NP 和 coNP 分别是可在非确定性多项式时间内求解的问题类及其补类；PSPACE 是可在多项式空间内求解的问题类（无论是确定性还是非确定性多项式空间；根据萨维奇定理，两者等价）；EXPTIME 是可在确定性 $2^{n^{O(1)}}$ 时间内求解的问题类；类 $\Theta_2^{\mathrm{p}} = \mathrm{P}^{\mathrm{NP}[\log]}$ 定义为通过对一个 NP语言进行对数次预言机调用得到的类。已证明该类与 $\mathrm{P}^{||\mathrm{NP}}$相同；后者允许不受限制但非自适应（即并行）的查询 [BH91，Hem89]。计数类#P 是与 NP中的判定问题相关联的问题类。更准确地说，它要求计算一台非确定性图灵机在给定输入下的接受路径数。

在 P 之下，有 NL 类，其中的算法可在非确定性对数空间内求解；还有 L 类，由可在确定性对数空间内求解的问题组成。在 L 和 P 之间，我们还发现 ⊕L（奇偶L），它由这样的判定问题组成：存在一台非确定性对数空间图灵机，当且仅当给定输入是一个是实例时，该机器在此输入上的接受运行数为奇数。

以下列出 L 以下的各种电路类，其中以下这些与我们相关：AC^0 是由一族常数深度、多项式规模的布尔电路所判定的语言类，这些电路包含 ∧门、∨门和 ¬门，且前两种门的扇入不受限；$\mathrm{AC}^0[2]$

通过加入扇入不受限的奇偶校验（模 2）门扩展了 AC^0；NC^1 由多项式规模、深度为$O(\log n)$且扇入有界的电路组成。除非另有说明，对于这些电路类，我们都假定其满足对数空间一致性。于是，上述复杂性类构成以下层级：

$$\mathsf{AC}^0 \subsetneq \mathsf{AC}^0[2] \subsetneq \mathsf{NC}^1 \subseteq \mathsf{L} \begin{matrix}\mathsf{NL}\\ \oplus\mathsf{L}\end{matrix} \mathsf{P} \begin{matrix}\mathsf{NP}\\ \mathsf{coNP}\end{matrix} \Theta_2^{\mathsf{P}} \subseteq \mathsf{PSPACE} \subseteq \mathsf{EXPTIME}.$$

对于这些复杂性类中的每一个，都可以基于各种类型的归约来定义适当的“困难性”和“完备性”概念。对于低于 L 的复杂性类，并不存在一种典范的归约类型，不同论文使用不同类型的归约。在此背景下，有时必须使用更细粒度的可归约性概念，例如如下所述。语言 L 是 AC^0 多对一可归约 到语言 B 的，如果存在一个函数 f，可由对数时间一致的 AC^0 电路族计算，使得 $x \in L$ 当且仅当 $f(x) \in B$。在评述文献中的此类困难性结果时，我们并不总是精确说明所使用的归约类型。相反，我们将请读者参阅相应论文以了解全部细节。

有关完整定义与背景，请参见 [AB09] 或 [Vol99]。

2.2 克隆

非正式地说，集合 A 上的克隆 是 A 上有限元运算的一个集合，它包含所有投影函数，并且在任意复合下封闭。形式上，集合 A上的有限元运算 是任意函数 $f\colon A^n \to A$，且满足 $n > 0$。一个投影 是有限元运算 $f\colon A^n \to A$，由$f(x_1, \ldots\ldots, x_n) = x_k$定义，其中 $k \le n$为某个固定值。这样的函数通常记作 π_k^n。我们将 A 上所有此类有限元运算的集合记为有限运算$_A$。

定义 2.1 (克隆)。 A 上的一个克隆 是一个子集 $C \subseteq$ 有限运算$_A$，满足：

(1) C 包含所有投影 π_k^n（对所有 k和 n，满足 $k \le n$），并且(2) C 在复合下封闭：对于所有 g_1、$\ldots g_m$、$f \in C$，其中 f是一个 m元运算，而每个 g_i都是一个 n元运算，存在一个 n元运算 $h \in C$，使得 $h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots x_n) \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$。

上述性质在集合论交下保持不变。

事实 2.2。 设 A 是任意集合。

(1) 整个集合 有限运算$_A$ 是 A上的一个克隆；(2) 对于任意克隆集族$\{C_i \mid i \in I\}$，其交集 $C = \bigcap_{i\in I} C_i$仍是一个克隆。

事实 2.2 给出了 由一组有限元运算生成的克隆的概念。形式化地，对于任意$O \subseteq$有限运算$_A$，定义 $[O]\colon = \bigcap\{C \mid O \subseteq C$且 C是一个克隆 $\}$。

尽管克隆的集合论并不一定是克隆，但集合论并可以与闭包运算 $[\cdot]$ 结合，以定义克隆上的并运算：令 $\bigsqcup_{i\in I} C_i = [\bigcup_{i\in I} C_i]$。由于 $[\cdot]$ 运算对集合论交 $\cap$满足分配律，克隆的交定义为：$\bigsqcap_{i\in I} C_i = [\bigcap_{i\in I} C_i] = \bigcap_{i\in I} C_i$.运算 $\sqcap$和 $\sqcup$为所有克隆构成一个格结构。

事实 2.3。 令 C_A 表示集合 A上的所有克隆的集合。那么，$(C_A, \sqcup, \sqcap)$ 构成一个完备格。该格诱导的偏序是集合论包含关系 （$\subseteq$） 。

回顾一下，在泛代数 [AGNS22], 中，代数是一个元组 $\mathbf{A} = (A, f_1, \ldots, f_n)$，其中 A 是一个集合，而 $f_i\colon A^{k_i} \to A$，其中 $k_i \ge 0$ 是 f_i的元数。由 A 生成的克隆，也记作 $[\mathbf{A}]$，是指由 A 的函数生成的克隆，即 $[\mathbf{A}] = [\{f_1, \ldots, f_n\}]$。此定义假设所有函数 f_i 的元数都为正，因此它们属于有限元运算。在

若代数包含零元函数（即常量），则将其视为常值一元函数（即对所有输入都返回相同值的一元函数）。

例2.4。 考虑代数 $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, +, 0, 1)$。根据定义，由加法函数和常值函数 $c_0, c_1 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$在 $\mathbb{N}$ 上生成的克隆，就是由 $\mathcal{A}$ 生成的克隆。事实上，它恰好是所有具有整数系数的线性函数的集合。类似地，考虑二元布尔代数 $\mathcal{B} = (\{0, 1\}\ \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$。由 $\mathcal{B}$ 生成的克隆恰好是整个有限运算集$^{\{0,1\}}$。

注2.5。 上述克隆定义遵循文献中的标准处理方式，不考虑零元运算（或者说，将它们视为常值一元运算）。经过一些调整，可以扩展克隆理论框架，将零元运算纳入其中，并视为一等成员。这种观点与泛代数中代数的定义方式更加一致，因为在泛代数中允许存在零元项（也称为常量）。在这一扩展观点下，每个不含零元运算的克隆都可以视为某个允许零元运算的克隆的子克隆。因此，例如，*Post* 格（定义见下一小节，参见图 *1*）将会略微扩大。本文讨论的大多数结果都可以自然地推广到这一扩展框架中。

Th为提高可读性，采用以下记号：对于 $O, O' \subseteq$ 有限运算$_A$，定义

$$O \preceq O' \iff [O] \subseteq [O'].$$

我们还记 $O \equiv O'$，当 $O \preceq O'$ 且 $O' \preceq O$时。我们在第 3节和第 4 节中都会使用这一记号，以精简定理陈述。关系 $\preceq$ 是一个预序。运算 $[\cdot]$在 有限运算$_A$上是单调的，但不一定严格单调；也就是说，若 $O, O' \subseteq$ 有限运算$_A$ 且 $O \subseteq O'$则 $[O] \subseteq [O']$，但 $O \subsetneq O'$ 并不一定意味着 $[O] \subsetneq [O']$。

关于克隆理论的一般性介绍，可参阅 Pippenger 的教材 [Pip97，第 1 节。4]。

2.3 布尔克隆

布尔克隆是集合 {0,1}上的克隆。根据例 2.4，我们也可以将布尔克隆等价地定义为由二元布尔代数生成的克隆的任意子克隆。所有布尔克隆构成的格，即 $C^{\{0,1\}}$，称为 *Post* 格，以 Emil Leon Post 命名；Post 的开创性著作 [Pos41] 完整地描述了其结构。Post 格如图 1所示。下面列出关于它的一些关键事实；这些事实早在 Post 的早期著作中就已确立，并将在后文发挥重要作用。

事实 2.6（布尔克隆是有限生成的）。 对于每个 $C \in C^{\{0,1\}}$，存在有限集 $O \subseteq$有限运算$^{\{0,1\}}$，使得 $C = [O]$。特别地，布尔克隆只有可数多个。

事实 2.7（布尔克隆的所有向下闭集都是有限生成的）。 每个布尔克隆的向下闭集都是某个有限布尔克隆集的向下闭包。

这里，我们所说的布尔克隆的向下闭集，是指满足以下条件的集合 $\mathcal{F}$：对于所有克隆 $C \subseteq C'$，$C' \in \mathcal{F}$蕴含 $C \in \mathcal{F}$；而集合 $\mathcal{F}$的向下闭包，是最小的向下闭集$\mathcal{F}'$，使得 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$。例如，给定布尔克隆 $\mathcal{F}$的所有真子克隆组成的集合是一个向下闭集，因此其极大元只能有有限多个。事实 2.7源于布尔克隆关于 $\supseteq$是良拟序的这一事实。

事实 2.8（一致克隆成员问题是可判定的）。 以下两个问题是可判定的：

- 给定有限集 $O \subseteq$ 有限运算$^{\{0,\ 1\}}$ 和 $f \in$ 有限运算$^{\{0,\ 1\}}$，是否有 $f \in [O]$?
- 给定有限集 $O, O' \subseteq$ 有限元运算$^{\{0,1\}}$，是否有 $O \preceq O'$?

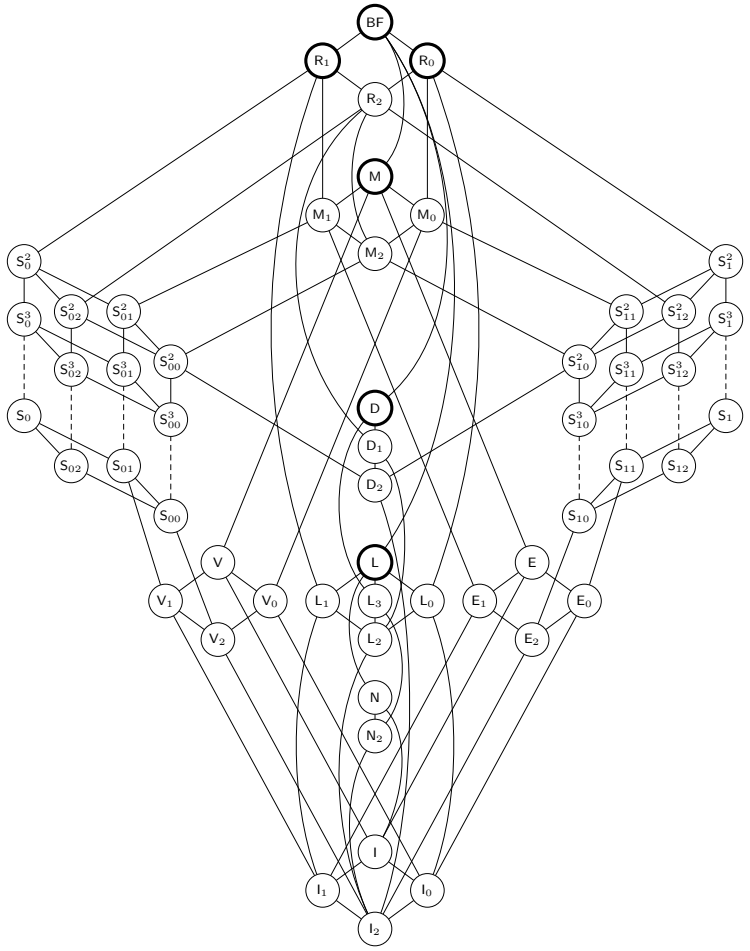


图 1. Post 格

不难看出，上述两个问题在计算上等价。其确切复杂度取决于有限元运算的表示方式：若以真值表指定，则可在多项式时间内求解（事实上，属于复杂度类 NC^1）；若以布尔电路或布尔公式指定，则它们是 coNP-完全的（对于固定的集合 O）或 Θ_2^p-完全的（对于 O 作为输入的一部分） [Vol09，Jer21]。

事实 2.7、2.6和2.8 共同推出：

事实 2.9 (所有布尔克隆的向下封闭集都是可判定的)。 设 $\mathcal{F}$ 是任意一个布尔克隆的向下闭集。给定一个布尔函数有限集 O，可以判定 $[O] \in \mathcal{F}$ 是否成立。对于布尔克隆的向上封闭集，同样如此。

上述事实表明，Post 格具有良好的性质。相比之下，正如我们将在第 5.1 节讨论的，对于集合 A 满足 $|A| > 2$ 的情形，格 C_A 不再具有这些良好性质。

正如我们将在第3节看到的，布尔克隆与命题逻辑的句法片段之间存在密切对应关系。我们将广泛利用这种对应关系。

类	定义	基（底）
BF	所有布尔函数	$\{x \wedge y,\ \neg x\}$
R_0	$\{f \mid f$ 是 $\bot$再生的$\}$	$\{x \wedge y,\ x \oplus y\}$
R_1	$\{f \mid f$ 是 $\top$再生的$\}$	$\{x \vee y,\ x \leftrightarrow y\}$
R_2	$R_0 \cap R_1$	$\{x \vee y, x \wedge (y \leftrightarrow z)\}$
M	$\{f \mid f$ 是单调的$\}$	$\{x \vee y, x \wedge y, \bot, \top\}$
M_0	$M \cap R_0$	$\{x \vee y,\ x \wedge y,\ \bot\}$
M_1	$M \cap R_1$	$\{x \vee y,\ x \wedge y,\ \top\}$
M_2	$M \cap R_2$	$\{x \vee y, x \wedge y\}$
S_0	$\{f \mid f$ 是 $\bot$-分离的$\}$	$\{x \to y\}$
S_1	$\{f \mid f$ 是 $\top$-分离的$\}$	$\{x \nrightarrow y\}$
S_0^n	$\{f \mid f$ 是 $\bot$-分离的，次数为 $n\}$	$\{x \to y, T_2^{n+1}\}$
S_1^n	$\{f \mid f$ 是 $\top$-分离的，次数为 $n\}$	$\{x \nrightarrow y, T_n^{n+1}\}$
S_{00}	$S_0 \cap R_2 \cap M$	$\{x \vee (y \wedge z)\}$
S_{00}^n	$S_0^n \cap R_2 \cap M$	$\{x \vee (y \wedge z),\ T_2^3\}$ 如果 $n = 2$， $\{T_2^{n+1}\}$ 如果 $n \geq 3$
S_{01}	$S_0 \cap M$	$\{x \vee (y \wedge z)\ \top\}$
S_{01}^n	$S_0^n \cap M$	$\{T_2^{n+1}, \top\}$
S_{02}	$S_0 \cap R_2$	$\{x \vee (y \nrightarrow z)\}$
S_{02}^n	$S_0^n \cap R_2$	$\{x \vee (u \nrightarrow z)\ T_2^{n+1}\}$
S_{10}	$S_1 \cap R_2 \cap M$	$\{x \wedge (y \vee z)\}$
S_{10}^n	$S_1^n \cap R_2 \cap M$	$\{x \wedge (y \vee z),\ T_2^3\}$ if $n = 2$, $\{T_2^{n+1}\}$ if $n \geq 3$
S_{11}	$S_1 \cap M$	$\{x \wedge (y \vee z)\ \bot\}$
S_{11}^n	$S_1^n \cap M$	$\{T_n^{n+1}, \bot\}$
S_{12}	$S_1 \cap R_2$	$\{\mathrm{aimp}(x, y, z)\}$
S_{12}^n	$S_1^n \cap R_2$	$\{$反蕴含$(x, y, z)\ T_n^{n+1}\}$
D	$\{f \mid f$ 是自对偶$\}$	$\{$多数$(x, \overline{y}, \overline{z})\}$，$\{$多数 $\neg\}$
D_1	$D \cap R_2$	$\{$多数$(x, y, \overline{z})\}$
D_2	$D \cap M$	$\{$多数$(x, y, z)\}$
L	$\{f \mid f$ 是线性的$\}$	$\{x \oplus y,\ \top\}$
L_0	$L \cap R_0$	$\{x \oplus y\}$
L_1	$L \cap R_1$	$\{x \leftrightarrow y\}$
L_2	$L \cap R_2$	$\{\oplus^3(x, y, z)\}$
L_3	$L \cap D$	$\{x \oplus y \oplus z \oplus \top\}$
V	$\{f \mid f$ 是析取或常量$\}$	$\{x \vee y, \bot, \top\}$
V_0	$M_0 \cap V$	$\{x \vee y,\ \bot\}$
V_1	$M_1 \cap V$	$\{x \vee y, \top\}$
V_2	$M_2 \cap V$	$\{x \vee y\}$
E	$\{f \mid f$ 是合取或常量$\}$	$\{x \wedge y, \bot, \top\}$
E_0	$M_0 \cap E$	$\{x \wedge y,\ \bot\}$
E_1	$M_1 \cap E$	$\{x \wedge y,\ \top\}$
E_2	$M_2 \cap E$	$\{x \wedge y\}$
N	$\{f \mid f$ 至多依赖于一个变量$\}$	$\{\neg x, \bot, \top\}$
N_2	$L_3 \cap N$	$\{\neg x\}$
I	$\{f \mid f$ 是一个投影或一个常量$\}$	$\{\bot,\ \top\}$
I_0	$R_0 \cap I$	$\{\bot\}$
I_1	$R_1 \cap I$	$\{\top\}$
I_2	$R_2 \cap I$	$\{\}$

表1。列出了所有布尔克隆及其基。对于 $n \geq m \in \mathbb{N}$，阈值函数 $T_m^n := \bigvee_{S \subseteq \{1,\ldots,n\}} \bigwedge_{i \in S} x_i$ 需要将 n 中的 m 位设为 $\top$。$|S|=m$

缩写	对应公式	缩写	对应公式
maj	$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z)$	$\wedge$	$(x \wedge y)$
aimp	$x \wedge (y \to z)$	$\vee$	$(x \vee y)$
oxor	$x \vee (y \oplus z)$	$\leftrightarrow$	$(x \leftrightarrow y)$
$\oplus$	$(\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$	$\to$	$(x \to y)$
$\oplus^3$	$x \oplus y \oplus z$	$\nrightarrow$	$(x \wedge \neg y)$
$\neg$	$\neg x$	$\bot$	$(x \wedge \neg x)$
		$\top$	$(x \vee \neg x)$

图 2. 缩写列表

3 古典命题逻辑片段

本节将考察经典命题逻辑（下文简称命题逻辑）的句法片段，这些片段是通过固定一组允许使用的联结词得到的。要描述这些片段的语法，我们需要引入一些记号。具体而言，我们以显而易见的方式，为每个布尔函数 f关联一个布尔联结词 $\circ_f$（其语义也将在下文简要介绍）。现在，对于一组 O 布尔函数，我们将 PL_O 定义为这样一种命题语言：只允许使用 O 中的函数作为联结词。换言之，PL_O 是这样一种命题语言，其公式由以下语法生成

$$\phi ::= x \mid \circ_f(\phi_1, \ldots, \phi_n)$$

其中，x是一个命题变量（取自某个固定的可数无限集），$f \in O$是一个 n元布尔函数。对于给定的命题变量有限集 prop，我们也用 PL_O[prop] 表示所有仅使用 prop 中命题变量的 PL_O公式所构成的集合。因此，O布尔函数集的每种选择都会产生一种不同的语言 PL_O。这些语言的语义符合预期：给定一个真值赋值 V，对于所有命题变量 x，$[\![x]\!]_V = V(x)$；并且 $[\![\circ_f(\phi_1, \ldots\ldots, \phi_n)]\!]_V = f([\![\phi_1]\!]_V, \ldots\ldots, [\![\phi_n]\!]_V)$。稍微滥用一下记号，我们也用 $[\![\phi]\!]$ 表示这样一个布尔函数：它将每个真值赋值 V 映射到真值$[\![\phi]\!]_V$。按照惯例，若两个公式 ϕ，ϕ' 满足 $[\![\phi]\!] = [\![\phi']\!]$，则称它们等价。

为增强可读性，我们对布尔函数使用了一些缩写，完整列表请参阅表 2 。注意，$\top$ 和 $\bot$ 在此被视为（常量）一元运算（参见备注 2.5）。

例 3.1。 公式 $p \wedge q$ 属于命题片段PL$\{\wedge\}$。它不属于命题片段PL$\{\vee\}$，并且（很容易证明）它也不等价于后一个片段中的公式。

PL_O-公式的大小 可以用两种方式衡量：使用 DAG 式表示，或使用树式表示。形式上：

$$\begin{aligned} |x|_{\mathrm{tree}} &:= 1 \\ |f(\phi_1, \ldots, \phi_n)|_{\mathrm{tree}} &:= 1 + \Sigma_i |\phi_i|_{\mathrm{tree}} \end{aligned}$$

w而 $|\phi|_{\text{dag}}$ 是 ϕ的不同子公式的数量，即 $|\phi|_{\text{dag}} = |\textsc{subf}(\phi)|$ 其中 e

$$\textsc{subf}(\phi) = \begin{cases} \{x\} & \text{for } \phi \text{ of the form } x \\ \{\phi\} \cup \bigcup_i \textsc{subf}(\phi_i) & \text{for } \phi \text{ of the form } f(\phi_1, \ldots, \phi_n) \end{cases}$$

换言之， $|\phi|_{\text{tree}}$ 是ϕ中命题变量和联结词出现次数的总和。用布尔电路来描述， $|\phi|_{\text{dag}}$ 对应于计算 ϕ的布尔电路的规模，其中电路中每个 ϕ的子公式对应一个节点；而 $|\phi|_{\text{tree}}$ 对应于每个节点的扇出至多为 1 的布尔电路的规模。

在接下来的小节中，我们将考察语言 PL_O（基于集合 O）的不同性质：表达能力和简洁性、推理任务的复杂性，以及可教性和可学习性。

3.1 表达能力和简洁性

我们称 PL_O 在表达力上包含于 $\text{PL}_{O'}$，如果 PL_O 中的每个公式都等价于 $\text{PL}_{O'}$中的某个公式。若 PL_O 和 $\text{PL}_{O'}$ 在表达力上互相包含，我们就称它们表达等价。于是，不难看出：

事实 3.2。 对于任意布尔函数集 O, O'，当且仅当 $O \preceq O'$ 时，PL_O 在表达能力上包含于$\text{PL}_{O'}$。此外，对于任意给定的有限集 O, O'，判断这一关系是否成立是可判定的。

换言之，PL_O 的表达能力由 O生成的克隆决定。事实上，这一事实直接源于克隆的定义： $[O]$ 恰好是可由 PL_O公式定义的布尔函数集。事实 3.2 的一个直接推论是，所有命题语言 PL_O （对于 O 任意布尔函数集）按表达包含关系构成一个预序，其诱导的偏序与 Post 格同构。另一个推论是：

事实 3.3。 对于每个布尔函数集 O，都存在一个有限子集 $O' \subseteq O$，使得PL_O 与$\text{PL}_{O'}$表达等价。

众所周知， $\wedge$ 和 $\neg$ 也是命题逻辑中真值函数完备的算子集。形式上，如果每个布尔函数 f（x_1，……， x_n）（其中 $n \geq 1$）都能由 PL_O中的公式 ϕ（x_1，……， x_n）定义，且该公式不含 x_1，……， x_n以外的布尔变量，那么我们就称 PL_O 是表达力完备的。

事实 3.4。 对于每个布尔函数集 O，PL_O 表达力完备，当且仅当$\{\wedge, \neg\} \preceq O$。此外，给定一个有限集 O，可以判定这一条件是否成立。

需要指出的是，如果要求相对于具有 $n \geq 0$ 的布尔函数$f(x_1$、……、 $x_n)$ 实现表达完备性（而不只是相对于 $n > 0$），那么 $\wedge$ 和 $\neg$ 就不会构成表达力完备的算子集，还需要进一步加入 $\top$ （或 $\bot$）。

更一般地，由事实 2.9 可知，命题片段的每个性质 PL_O 都是可判定的，前提是该性质具有单调性，且仅取决于 $[O]$。

接下来，我们来探讨简洁性问题，它涉及定义给定布尔函数所需公式的大小。为说明简洁性问题，假设 O和 O'是两个布尔函数集合，且 PL_O 和 $\text{PL}_{O'}$ 表达等价。这并不意味着这两种语言具有相同的简洁性。事实上，如果 O' 包含更多算子，就有可能更高效地表达某些公式。若采用有向无环图表示，不难看出，PL_O 和 $\text{PL}_{O'}$之间存在可在线性时间内完成的转换。实际上，只需将 PL_O公式中每次出现的函数替换为其对应的 $\text{PL}_{O'}$公式，即可将其转换为 $\text{PL}_{O'}$ 公式。反方向也一样。这样得到的有向无环图大小只会线性膨胀。然而，树大小方面的对应问题就不那么简单了。令人惊讶的是，

然而，Pratt [Pra75] 证明了，所有表达完备语言的简洁性都相同，差异至多为多项式级：

定理 3.5（[Pra75]）。设 O 和 O' 是布尔函数的有限集，且 PL_O 和 $\mathrm{PL}_{O'}$ 表达力完备。那么，即使以树大小衡量，PL_O 和 $\mathrm{PL}_{O'}$ 之间也存在多项式时间保真翻译。

这里，所谓保真翻译，是指从 PL_O-公式 ϕ 到 PL_O-公式 ϕ' 的翻译，其中二者使用相同的变量集，并且满足 $[[\phi]] = [[\psi]]$。特别地，例如，定理3.5 意味着，$\mathrm{PL}_{\{\wedge,\neg,\leftrightarrow\}}$-公式可以在多项式时间内（按树大小计算）改写为等价的 $\mathrm{PL}_{\{\wedge,\neg\}}$-公式。

定理3.5 还可以这样理解：它告诉我们，只要 PL_O 表达力完备，它就是最大简洁的，具体而言：不存在有限集 O'，使得 $\mathrm{PL}_{O\cup O'}$ 能够提供更简洁的定义（差距至多为多项式）。定理3.5 仅适用于表达力完备的语言，但也有一些其他类似结果适用范围更广。若有限集 O 布尔函数稳健，则满足以下条件：对于所有满足 O' 的布尔函数有限集 $[O'] = [O]$，都存在从 $\mathrm{PL}_{O'}$ 到 PL_O 的多项式时间（按树大小计算）保真翻译。直观地说，当 PL_O 稳健时，这意味着在所有与 $\mathrm{PL}_{O'}$ 表达等价的语言$_O$中，语言 PL_O 是最大简洁的（同样，差距至多为多项式）。

定理 *3.6*（[*Tho12b*]）。设 O 是一个布尔函数有限集。若 $O \preceq \{\wedge, \top, \bot\}$、$O \preceq \{\vee, \top, \bot\}$、$O \preceq \{\oplus, \top, \bot\}$，或 $\{\wedge, \vee\} \preceq O$，则 O 是稳健的。否则，只要 $\wedge \in O$ 或 $\vee \in O$ 成立，O 也同样稳健。

事实证明，这一定理是证明某些命题语言 PL 中各种算法问题复杂度下界和上界的有力工具$_O$，因为它使我们能够改用不同的联结词基底，同时将公式的树大小变化限制在多项式范围内。定理 3.6 的前半部分指出，对于某些克隆（即 E、V、L或M_2），使用哪种基并无区别。在针对克隆限制进行问题分类时，人们往往会关注这类稳健情形，这通常称为基底独立性。稳健性这一概念也称为高效实现[Sch10，引理 4] 或简短表示 [CV15，第 3]节。

3.2 可表达性与最小化的复杂度

在本小节及接下来的小节中，我们将考察与语言 PL_O 相关的各种算法任务的计算复杂性。特别是，我们将考察复杂度如何取决于 O的选择。回顾一下，公式既可以表示为有向无环图，也可以表示为树。相应地，我们可以从两种角度研究算法问题。下文陈述的结果既适用于以树大小衡量复杂度的情况，也适用于以 DAG 大小衡量复杂度的情况。

首先，我们考虑在 PL_O 中测试可表达性的算法问题。PL_O 的可表达性问题如下：给定一个 $\mathrm{PL}_{\wedge,\ \neg}$ 公式 ϕ，ϕ 是否等价于一个 PL_O- 公式。

定理3.7（[BS07]）。设 O 是一个布尔函数集合。如果 $\{\wedge,\ \oplus\} \preceq O$ 或 $\{\vee,\ \leftrightarrow\} \preceq O$，则 PL_O 的可表达性问题可在多项式时间内解决；否则，该问题是NP完全的。

根据上述定义，可表达性问题的输入被指定为一个布尔公式（使用树表示或 DAG 表示）。另一种选择是假定它由真值表指定。在这种情况下，可表达性可在多项式时间内求解（实际上，在非确定性对数空间内），对于所有语言 PL_O [BS00]。

鉴于前文关于简洁性的讨论，自然也会问：给定的公式能否等价地由一个短PL_O-公式来表达。该最小化问题针对 PL_O 将此形式化如下：给定一个 PL_O-公式 ϕ和一个整数 k， ϕ 是否等价于一个 PL_O-公式，其大小至多为 k? 完整命题逻辑的最小化问题在一般情况下是 Σ_2^p-完全的。在 [HS11], 中，作者建立了如下二分分类（该分类再次既适用于输入公式的树大小，也适用于其 DAG 大小）。

定理 3.8（[HS11]）。设 O 是一个布尔函数集合。若 $O \preceq \{\vee, \top, \bot\}$ 或 $O \preceq \{\wedge, \top, \bot\}$ 或$O \preceq \{\oplus, \top, \bot\}$ 则PL_O 的最小化问题可在多项式时间内求解。否则，该问题至少是coNP-困难的。

3.3 逻辑推理任务的复杂度

现在我们将考察各种逻辑推理任务。除非另有说明，本节中的所有结果在复杂度按输入公式的树大小或有向无环图大小衡量时均成立。

PL_O 的可满足性问题是这样一个判定问题：给定一个 PL_O 公式 ϕ，判断是否存在满足该公式的真值赋值。

定理 3.9（[Lew79]）。设 O 是一个布尔函数集合。若$\{\nrightarrow\} \preceq O$，则$\mathrm{PL}_O$ 的可满足性问题是NP完全的。否则，该问题可在多项式时间内求解。

后来有人证明， [Rei01] 对于公式的树表示，上述二分分类可以加强为一个L/NP完全二分分类。换言之，对于片段 PL_O ，其可满足性问题的复杂度总是属于L ，否则就是NP完全问题。另一方面，在 DAG 表示下，上述二分分类被细化为四分分类：

定理 3.10（[RW99]）。设 O 是一个布尔函数集合。在公式的树表示下，PLO的可满足性问题的复杂度为

- 若 $O \preceq \{\vee, \leftrightarrow\}$ 或 $O \preceq \{\mathrm{maj}\ \neg\}$ 或 $O \preceq \{\neg, \top, \bot\}$，则属于 L
- 否则，如果 $O \preceq \{\wedge, \top, \bot\}$ 或 $O \preceq \{\vee, \top, \bot\}$，则为NL-完全问题
- 否则，当 $O \preceq$L-完备时，若 $O \preceq \{\oplus, \top, \bot\}$
- 否则，当 $O \preceq$P-完备时，若 $O \preceq \{\wedge, \vee, \top, \bot\}$
- 否则NP-完备（在所有其余情况下）

参数化复杂性领域研究的可满足性问题的一种细化形式是加权可满足性。这里，赋值的权重是被设为真的变量数量，因此所关注的参数化问题是：给定一个公式和整数 k，判断是否存在权重恰好为 k的满足赋值。文献 [CV15], 给出了按 Post 格划分的完整分类，区分了属于W[SAT]-完备（某个特定的参数化复杂性类 [FG06]）或属于P的情形。

与可满足性对偶的是重言式问题，针对 PL_O，该问题是判断给定的 PL_O-公式 ϕ是否对 ϕ中的每个真值赋值都是满足赋值。通过简单的对偶化论证，我们可以从定理3.9 得到：

定理 3.11（[RW99，Rei01]）。设 O 是一个布尔函数集合。若$\{\rightarrow\} \preceq O$ 则 PL_O 的重言式问题属于coNP完全；否则，该问题可在多项式时间内解决。

我们在上文描述的定理 3.9 的细化结果，在公式的树表示和 DAG 表示下均成立，它们也可自然地对偶化为重言式问题 [RW99，Rei01]。

可满足性问题与重言式问题的一个常见推广，是对满足赋值的个数进行计数这一问题。事实上，一个公式可满足，当且仅当该数量为

正数；而一个公式是重言式，当且仅当该数量为 2^k （其中 k 是命题变量的个数）。所谓计数问题（针对 PL_O），是指对给定命题变量有限集中的给定公式计算其满足赋值个数的问题。对于完整的命题逻辑（即 $\mathrm{PL}_{\{\wedge,\neg\}}$），众所周知，该问题对于计数复杂度类#P（即所有对多项式时间非确定性图灵机的接受运行次数进行计数的计数问题所构成的类）是完全的。人们还可以考虑与之相关的判定问题，即模 *2* 计数（即检验满足赋值的个数模 2 是否等于 1）以及阈值计数问题（即检验：对于给定公式 ϕ（其命题变量取自给定的有限集）以及给定自然数 k（以二进制给出），是否至少存在 k 个满足赋值）。在 [RW99] 中，对这三个问题分别得到了二分定理。这里我们只陈述他们对纯计数问题的二分分类。

定理 3.12（[RW99]）。给定一组布尔函数 O。如果

- $O \preceq \{\wedge, \top, \bot\}$，或
- $O \preceq \{\vee, \top, \bot\}$，或
- $O \preceq \{\oplus, \bot\}$，或
- $O \preceq \{\mathrm{maj}\ \neg\}$

那么计 数问题对于PL_O 可在多项式时间内求解，否则是#P-完全的。

PL_O 的蕴含问题是这样一个判定问题：对于给定的 PL_O 公式 $\phi_1,\ldots,\phi_n$ 和 ψ，判断每个满足 $\phi_1,\ldots,\phi_n$ 的真值赋值是否也满足 ψ。

定理 3.13（[BMTV09，定理 4.1]）。设 O 是一个布尔函数集合。*PL*PL_O 的蕴含问题的复杂度为

- coNP-完全，如果 $\{(x \wedge y) \vee z\} \preceq O$ 或 $\{(x \vee y) \wedge z\} \preceq O$ 或 {多数} $\preceq O$，
- ⊕L-完全，如果 $\{\oplus\} \preceq O \preceq \{\leftrightarrow, \bot\}$，
- 属于$\mathrm{AC}^0[2]$ 且MOD_2-困难（在适当的归约下），如果$\{\neg\} \preceq O \preceq \{\neg, \bot\}$，并且
- 在其他所有情况下都属于AC^0。

这里，MOD_2 是由所有包含字母 1 的出现次数为奇数的词 $w \in \{0,1\}^*$ 构成的语言；MOD_2-困难性意味着存在一个从 MOD_2到所讨论问题的 $\leq_m^{\mathrm{AC}^0}$-归约。电路复杂性中有一个众所周知的结果：这个语言（显然属于 $\mathrm{AC}^0[2]$）不属于 AC^0。特别是，这表明所讨论的问题不属于AC^0。

另外，请回想一下，蕴含问题的输入是一个前提集合 $\phi_1,\ldots,\phi_n$ 以及一个结论 ψ。“单前提”这一更受限版本的蕴含问题已在[RW99]中进行了分析。前者给出的二分分类在 [BMTV09], 中得到了进一步细化，正如我们前面所述。

接下来，PL_O 的等价问题 是指：给定一对 PL_O公式，判断它们是否具有相同的满足真值赋值集合。

定理 3.14（[BMTV09，推论 5。2]）。设 O 为一组布尔函数。对于PL_O，等价问题是

- coNP-完全的，当$\{x \wedge y) \vee z\} \preceq O$或$\{x \vee y) \wedge z\} \preceq O$或{多数} $\preceq O$时，
- 当$\{\neg\} \preceq O \preceq \{\neg, \bot\}$时，在适当的归约下是$\mathrm{AC}^0[2]$-完全的，并且
- 在所有其他情况下，属于AC^0。

我们接下来要考虑的 PL_O 推理问题是同构问题。给定两个 PL_O 公式，$\phi(x_1、\ldots\ldots、x_n)$ 和 $\phi'(y_1、\ldots\ldots、y_n)$，问题是是否存在一个置换 π: $\{x_1、\ldots\ldots、x_n\} \to \{y_1、\ldots\ldots、y_n\}$，使得 $\phi[\pi]$ 和 ψ 具有相同的满足真值赋值集合，其中 $\phi[\pi]$ 是通过将每个 x_i 一致地替换为 $\pi(x_i)$ 从 ϕ 得到的。

定理 3 .15 ([Rei03])。设 O 为一组布尔函数。PL_O 的同构问题是

- 在 L 中，若 $O \preceq \{\vee, \top, \bot\}$ 或 $O \preceq \{\wedge, \top, \bot\}$ 或 $O \preceq \{\oplus, \top\}$，
- 否则为coNP难问题。

最后，我们来考察 PL_O中或许最简单的推理问题，即求值问题。该问题是：给定一个不含变量的 PL_O公式 ϕ，判断 ϕ 求值结果是否为真。当公式表示为有向无环图时，$\mathrm{PL}^{\{\wedge,\neg\}}$ 被称为布尔电路值问题（*CVP*），众所周知这是一个 P 完全问题。若公式表示为树，则由 [Bus87、BM95] 的结果可知，该问题属于 NC_1，前提是 O只包含一元和二元布尔联结词，且公式采用中缀表示法。Schnoor [Sch05] 进一步将这些结果推广至布尔函数的任意集合（采用前缀表示法），其中布尔函数的元数也可以任意。

定理 3.16 ([Sch10]). 设 O 是一个包含 $\top$ 和 $\bot$ 的布尔函数集合。当公式以树的形式表示时，PL_O 的求值问题是

- 可在常数时间内求解，当 $O \equiv \{\top, \bot\}$ 时，
- NLOGTIME-完全（在适当的归约下），当 $O \equiv \{\vee, \top, \bot\}$ 时，
- coNLOGTIME-完全（在适当的归约下），当 $O \equiv \{\wedge, \top, \bot\}$ 时，
- 等价于 MOD_2（在适当的归约下），当 $\{\neg, \top, \bot\} \preceq O \preceq \{\oplus, \top, \bot\}$ 时，
- NC^1-完全，否则

这里，NLOGTIME 是可在非确定性对数时间内求解的问题类（参见 [Sch10，HV95] 以获得精确定义）。针对有向无环图情形的类似分析见 [RW05]。

3.4 可教性与可学习性

设 ϕ为一个PL_O公式。一个带标签的示例是二元组（V，lab），其中 V是一个真值赋值，且lab $\in \{0, 1\}$。若 $[\![\phi]\!]_V = \mathrm{lab}$，则称 ϕ 符合该带标签的示例。因此，例如，设 ϕ 为公式 $p \wedge q$，并设 V_p 与 V_{pq} 分别是使 p以及 p 与 q为真的真值赋值。则（V_p，0）与（V_{pq}，1）是 ϕ 所符合的带标签样例。

带标签样例可用于说明公式；反之，公式也可以从带标签样例中学习得到。可教性与可学习性指的就是带标签样例的这两种用途。我们将对二者加以讨论。

可教性。 我们称一组带标签样例唯一刻画一个 PL_O公式 ϕ（相对于 PL_O），如果 ϕ 符合这些带标签样例，且每个符合这些带标签样例的 PL_O公式都与 ϕ等价。进一步细化后，我们称一组带标签样例唯一刻画一个 PL_O[命题]公式 ϕ（相对于 PL_O[命题]），如果 ϕ符合这些带标签样例，且每个符合这些带标签样例的 PL_O[命题]公式都与 ϕ等价。

显然，每个公式 $\phi \in \mathrm{PL}_O$[命题] 都可以由其全部 2^n 个带标签样例唯一刻画（相对于 PL_O[命题]），其中 $n = |$命题$|$。当 $O = \{\wedge$时，$\neg\}$，不难看出，要唯一刻画一个公式，就需要全部 2^n 带标签样例。不过，对于其他集合 O，较少的例子或许就足够了。

例 3.17. 公式 $\phi = p \wedge q$ 相对于$\mathrm{PL}^{\{\wedge\}}$ 由以下带标签样例集合唯一刻画：$\{(V_{pq}, 1), (V_p, 0), (V_q, 0)\}$。其中，$V_{pq}$是使 p和 q为真的真值赋值，且使所有其他命题变量为假；V_p 和 V_q的情况也类似。同一个公式 ϕ并未被给定的带标签样例集合（或任何带标签样例集合）相对于 $\mathrm{PL}^{\{\wedge,\vee\}}$ 唯一刻画，但它相对于$\mathrm{PL}_{\{\wedge,\vee\}}[\{p, q\}]$却被这些样例唯一刻画。

能够唯一刻画公式 ϕ 的一组带标签样例也称为ϕ的教学集。直观而言，如果 E 是 ϕ的教学集，那么给定 E 作为输入后，一名勤奋的学生（拥有无限的计算资源）就能够推导出与公式 ϕ 等价的公式。

上述例子引出了一个问题：要唯一刻画一个关于 $\mathrm{PL}_O[\mathrm{prop}]$ 的公式，需要多少个带标签样例？特别是，什么时候只需多项式数量的例子就足够了？

定理 3.18（出自 [Dal99], 参见 [Gan24]）。设 O 是一个布尔函数集合。若

- $O \preceq \{\wedge, \top, \bot\}$ 或
- $O \preceq \{\vee, \top, \bot\}$ 或
- $O \preceq \{\oplus, \top, \bot\}$

那么，每个 $\mathrm{PL}_O[prop]$-公式（其中 $prop$ 是命题变量的有限集）都能由一组 $|prop|+1$ 带标签样例相对于 $\mathrm{PL}_O[prop]$ 唯一刻画。否则，不存在这样的多项式p，使得每个 $\mathrm{PL}_O[prop]$-公式 ϕ 都能由一组 $p(|prop|, |\phi|_{\mathrm{dag}})$ 带标签样例相对于 $\mathrm{PL}_O[prop]$ 唯一刻画。

上述结果有两个缺点：它所产生的带标签样例集不一定能相对于 PL_O唯一刻画 ϕ。它只能相对于 $\mathrm{PL}_O[\mathrm{prop}]$唯一刻画 ϕ。此外，例子的数量随 $|\mathrm{prop}|$线性增长，因此对于给定公式 ϕ，其数量并无统一上界。我们可以问，何时能够相对于 PL_O唯一刻画一个公式ϕ。以下定理给出了答案：

定理 3.19。 设 O 是一个布尔函数集。以下各项等价：
(1) $O \preceq \{\wedge, \vee, \top, \bot\}$ 或 $O \preceq \{\neg, \bot\}$。(2) 每个 $\phi \in \mathrm{PL}_O$ 都能由有限个带标签样例相对于PL_O唯一刻画；(3) 存在函数 f，使得对于所有有限命题集，每个 $\phi \in \mathrm{PL}_O[\text{命题}]$ 都能由一组 $f(|\phi|_{\mathrm{dag}})$ 带标签样例相对于$\mathrm{PL}_O[\text{命题}]$ 唯一刻画。

定理的证明 3.19 见附录 A。显然，若将 $|\phi|_{\mathrm{dag}}$ 替换为 $|\phi|_{\mathrm{tree}}$，该结论仍然成立。

定理 3.20。 设 O 是一个布尔函数集合。如果

- $O \preceq \{\wedge, \top, \bot\}$ 或
- $O \preceq \{\vee, \top, \bot\}$ 或
- $O \preceq \{\neg, \bot\}$。

那么，每个 PL_O-公式 ϕ都可以通过至多 $|\phi|_{\mathrm{dag}} + 1$ 个带标签样例唯一刻画，且相对于 PL_O而言。否则，不存在多项式 p，使得每个 PL_O-公式 ϕ 都可以通过至多 $p(|\phi|_{\mathrm{dag}})$ 个带标签样例唯一刻画，且相对于 PL_O而言。

证明。定理的第一部分直接由 [Dal99] 中的结果得出。对于“否则”部分：假设每个 PL_O-公式都可以通过至多$p(\mathrm{dag}\phi)$ 个带标签样例唯一刻画。由定理 3.19 可得， $O \preceq \{\neg, \bot\}$ 或 $O \preceq \{\wedge, \vee, \top, \bot\}$。定理 3.18 还意味着， $O \preceq \{\wedge, \top, \bot\}$ 或 $O \preceq \{\vee, \top, \bot\}$ 或 $O \preceq \{\oplus, \top, \bot\}$。观察 Post 格可知，满足这些约束的唯一 O 是满足以下条件的那些： $O \preceq \{\wedge, \top, \bot\}$、 $O \preceq \{\vee, \top, \bot\}$ 且 $O \preceq \{\neg, \bot\}$。□

可学习性。 Dalmau [Dal99] 系统地梳理了 PL 的可学习性$_O$-公式在不同函数集合下 O 根据不同的可学习性概念。在陈述这些结果之前，我们先简要回顾计算学习理论的一些基本概念。

一个概念表示类是一个三元组 $\mathbf{C} = (C, E, \lambda)$，由一个集合 C组成，其元素称为“概念表示”（或简称为概念）；以及一个集合 E 组成，其元素称为“例子”，

以及一个赋值函数 $\lambda\colon C \to \mathrm{P}(E)$。如果 $\lambda(c) = \lambda(c')$，则称两个概念 c，c' 等价。分级概念表示类是由自然数 n参数化的一族概念表示类 $\mathbf{C}_n$。在计算学习理论中，人们研究的是：对于特定的概念类或分级概念类，是否存在能够从例子中学习概念的高效算法。

我们可以自然地将 PL_O 视为一个分级概念表示类，其中参数 n 对应于命题变量的数量。更具体地说，对于 $n > 0$，我们取带有 $\mathrm{prop} = \{p_1, \ldots\ldots, p_n\}$ 的 $\mathrm{PL}_O[\mathrm{prop}]$，并将其视为一个概念类，其中概念表示是关于 prop 的 PL_O 公式，例子是 prop 的所有命题赋值。关于诸如 $\{\wedge\}$ 这样的受限基的命题公式，构成了计算学习理论中研究最为深入的一些分级概念表示类。

在精确学习框架 [Ang87], 中，学习算法可以访问一个预言机，该预言机能够回答关于某个未知目标概念的查询，而学习者的任务是在等价意义下识别该目标概念。一种常见的预言机查询类型是成员查询。成员查询预言机（例如 $\mathrm{MQ}(c)$）接收输入 $e \in E$，若 $e \in \lambda(c)$ 则返回“是”，否则返回“否”。若存在算法 L，使得对每一个 $c \in C$，当 L 可以访问 $\mathrm{MQ}(c)$时，它在 c的大小的多项式时间内终止，并输出一个与 c等价的概念，则概念类 C 可借助成员查询被高效地可精确学习。同一界定适用于分级概念类，此时运行时间须被目标概念的大小与 n的一个多项式所界定。以下结果以 DAG 大小作为概念大小度量。[1]

定理3.21（[Dal99]）。设 O 是一个布尔函数集合。如果

- $O \preceq \{\wedge, \top, \bot\}$ 或
- $O \preceq \{\vee, \top, \bot\}$ 或
- $O \preceq \{\oplus, \top, \bot\}$

那么 $\mathrm{PL}_O[prop]$ 可通过 $|prop| + 1$ 个成员查询高效地精确学习。否则，$\mathrm{PL}_O[prop]$ 无法通过多项式数量的成员查询精确学习。

请注意，虽然在 [Dal99], 中，下界是以密码学假设为条件陈述的，但它实际上无条件成立，这可直接由定理 3.18得出，因为通过成员查询高效精确学习意味着存在多项式大小的唯一刻画。除了 通过成员查询进行精确学习之外，计算学习理论文献还提出并研究了许多其他可学习性的概念，包括 通过成员查询和等价查询进行精确学习以及 概率近似正确（*PAC*）学习模型。这里不再详细定义这些概念。Dal99] 中的结果也适用于这些其他学习框架中的可学习性。具体来说：

定理 3.22（[Dal99]）。设 O 为一组布尔函数。如果

- $O \preceq \{\wedge, \top, \bot\}$ 或
- $O \preceq \{\vee, \top, \bot\}$ 或
- $O \preceq \{\oplus, \top, \bot\}$

那么，命题逻辑$_O$[命题] 可通过 |命题| + 1 等价查询在多项式时间内精确学习，因此也可在多项式时间内 *PAC* 可学习。否则，在某些密码学假设下，它无法通过成员查询在多项式时间内 *PAC* 可预测（因此也无法通过成员查询和等价查询在多项式时间内精确学习）。

[1]文献 [Dal99] 指出，这些结果对树大小也成立。然而，事实证明该表述存在缺陷，而且这些下界仅适用于 DAG 大小。

4 模态逻辑的片段

本节中，我们将上一节采用的同一套通用方法应用于模态逻辑。

4.1 模态片段

固定一个可数无限的命题变量集合（x_1、 x_2、.....）。模态公式是由以下语法生成的公式:

$$\phi ::= x \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \Diamond\phi \mid \Box\phi,$$

其中 x 是一个命题变量（来自某个固定的可数无限集合）。我们也将所有模态公式的集合称为完整模态语言，并将其记作 ML。

为了能够呈现下面的一些结果，我们还需要考虑多模态公式。这些公式由以下语法生成:

$$\phi ::= x \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \Diamond_i\phi \mid \Box_i\phi,$$

其中 x 是一个命题变量，且其中 $i \in \mathbb{N}$。我们也将所有多模态公式的集合称为完整多模态语言，并记作 ML^ω。 k-模态公式（对于 $k \in \mathbb{N}$）是指仅包含模态算子 $\Diamond_i$ 和/或 $\Box_i$ 且满足 $1 \leq i \leq k$的多模态公式。我们用 ML^k 表示所有 k-模态公式的集合。注意，ML^k-公式是在 Kripke 模型 $M = (W, R_1, \ldots, R_k, V)$ 上解释的，这些模型具有 k个可及关系；而 ML^ω-公式是在具有无限多个可及关系的 Kripke 模型 $M = (W, (R_i)_{i\in\mathbb{N}}, V)$ 上解释的。

我们还需要引入一个记号，即用于语法上的代换。形式上，代换是通过归纳方式定义的。设 $\sigma = (x_1/\phi_1, \ldots x_n/\phi_n)$ 是从命题变量到模态公式的部分映射。那么

$$\begin{aligned} x^\sigma &:= x \text{ for } x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}. \\ x_i^\sigma &:= \phi_i \\ (\varphi \wedge \psi)^\sigma &:= \varphi^\sigma \wedge \psi^\sigma \\ (\varphi \vee \psi)^\sigma &:= \varphi^\sigma \vee \psi^\sigma \\ (\neg\varphi)^\sigma &:= \neg\varphi^\sigma \\ (\Diamond\varphi)^\sigma &:= \Diamond\varphi^\sigma \\ (\Box\varphi)^\sigma &:= \Box\varphi^\sigma \end{aligned}$$

例如，$(\Box x \wedge \Diamond x)^{(x/\Diamond(y\wedge z))} = \Box\Diamond(y \wedge z) \wedge \Diamond\Diamond(\{v5)$。

现在，固定一组模态公式 Φ。我们将满足以下条件的最小集合记为 ML_Φ：

(1) 每个命题变量都是 ML_Φ 中的公式；(2) 若 $\phi(x_1、 \ldots\ldots、 x_n) \in \Phi$ 且 $\psi_1、 \ldots\ldots、 \psi_n \in \mathrm{ML}_\Phi$，则 $\circ\phi(\psi_1、 \ldots\ldots、 \psi_n) \in \mathrm{ML}_\Phi$。

每个 ML_Φ 公式 ϕ 都可以展开为一个普通模态公式 $\mathrm{expand}(\phi) \in \mathrm{ML}$，具体做法是递归地将形如 $\circ\phi(\psi_1、 \ldots\ldots、 \psi_n) \in \mathrm{ML}_\Phi$ 的子公式替换为 $\phi(x_1/\psi_1,\ldots,x_n/\psi_n)$。因此，例如，$\mathrm{expand}(\circ_{x_1\wedge x_2}(p, \circ_{\Diamond x}(q))) = p \wedge \Diamond q$。[2] 展开操作为我们提供了一种为 ML_Φ 公式赋予语义的方法：我们规定 $M, w \models \phi$ 当且仅当 $M, w \models \mathrm{expand}(\phi)$。

例 4.1。 令 $\Phi = \{\Diamond x, x_1 \wedge x_2\}$。那么，$\mathrm{ML}_\Phi$-公式的展开恰好是所有仅使用 $\wedge$ 和 $\Diamond$书写的模态公式。换言之，我们可以将ML_Φ 视为定义了一个模态逻辑片段，其中的公式仅使用 $\wedge$ 和 $\Diamond$。类似地，

- 对于 $\Phi = \{\neg x, x \wedge y, x \vee y, \Diamond x, \Box x\}$，$\mathrm{ML}_\Phi$ 定义了完整模态语言；

[2]我们可以假设所有命题变量的集合具有一种典范序，这样就能始终明确哪个变量对应算子的第一个参数，等等。

- 对于 $\Phi = \{\top, \bot, x \wedge y, x \vee y, \Diamond x, \Box x\}$，$\mathrm{ML}_\Phi$ 定义了单调片段；
- 对于 $\Phi = \{\neg x, x \wedge y, x \vee y, \bullet x\}$，其中 $\bullet x$ 是 $\Diamond x \wedge \Diamond \neg x$ 的简称，ML_Φ 定义了一种模态片段，它只允许表达陈述的偶然性，而不能表达其可能性或必然性；
- 对于 $\Phi = \{\neg x, x \wedge y, x \vee y, x \vee \Diamond x, x \wedge \Box x\}$，$\mathrm{ML}_\Phi$ 定义了一种模态片段，它对应于从**S4** 到**K4**的民间翻译的像；
- 对于 $\Phi = \{\bot, x \wedge y, \Box(x \vee y)\ \Box(x \to y)\}$，$\mathrm{ML}_\Phi$ 定义了一种模态片段，它对应于从直觉主义逻辑到模态逻辑的哥德尔-麦金西-塔斯基翻译的像。

为了进一步简化记号，我们将用 $\Diamond$ 表示 $\Diamond x$，用 $\Box$ 表示 $\Box x$，用 $\wedge$ 表示 $x \wedge y$，等等。例如，这使我们能够将例 4.1中的前两个片段分别记作 $\mathrm{ML}^{\{\neg,\wedge,\vee,\Diamond,\Box\}}$ 和 $\mathrm{ML}^{\{\top,\bot,\wedge,\vee,\Diamond,\Box\}}$。请注意，此处命题变量的选择无关紧要，因为它并不影响所得片段（该片段在代换下封闭）。

多模态片段 ML^ω_Φ 与 ML^k_Φ 可类似地定义，其中 Φ 现在可以分别是一组多模态公式，或一组 k 模态公式。为简单起见，我们将主要关注单模态情形，但也会讨论这些定义与观察如何推广到多模态情形。

一个 ML_Φ 公式（或 ML^ω_Φ 公式或 ML^k_Φ 公式）的大小同样可以用两种方式度量：采用 DAG 式表示，或采用树式表示。形式地说：

$$\begin{aligned} |x|_{\text{tree}} &= 1 \\ |\circ_\chi(\psi_1, \ldots, \psi_n)|_{\text{tree}} &= 1 + \Sigma_i |\psi_i|_{\text{tree}} \end{aligned}$$

而 $|\phi|_{\text{dag}} = |\mathrm{subf}(\phi)|$ where

$$\textsc{subf}(\phi) = \begin{cases} \{x\} & \text{for } \phi \text{ of the form } x \\ \{\phi\} \cup \bigcup_i \textsc{subf}(\psi_i) & \text{for } \phi \text{ of the form } \circ_\chi(\psi_1, \ldots, \psi_n) \end{cases}$$

请注意，在这两种情况下，算子 $\circ_\chi$ here 都被视为原子：无论公式 χ itself 如何，它们对公式大小的贡献都是 1。与命题情形一样，$|\phi|_{\text{tree}}$ can be exponentially larger than $|\phi|_{\text{dag}}$。以下示例对此作了说明。

例 4.2. 首先，令 $\chi(x, y) = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$，它定义了异或函数。考虑归纳定义的公式 ϕ_n：

$$\phi_1 = \circ_\chi(p, p)$$

$$\phi_{n+1} = \circ_\chi(\phi_n, \phi_n)$$

容易看出，$|\phi_n|_{\text{dag}} = n + 2$ *whereas* $|\phi_n|_{\text{tree}} = 2^n - 1$。

还值得指出，$|\phi|_{\text{tree}}$ *can be exponentially smaller than* $|\text{展开}(\phi)|_{\text{tree}}$。事实上，令 $\gamma(x) = \Diamond x \wedge \Diamond \neg x$，并考虑归纳定义的公式 ϕ_n：

$$\phi_1 = \circ_\gamma(p)$$

$$\phi_{n+1} = \circ_\gamma(\phi_n)$$

容易看出 $|\phi_n|_{\text{dag}} = |\phi_n|_{\text{tree}} = n + 1$。另一方面，$|\text{展开}(\phi_n)|_{\text{tree}} = 5 \cdot 2^n - 4$。事实上，所有与 ML-公式等价于 展开$(\phi_n)$ 的公式，其树大小至少为 2^n，如 *[DFvdHI14]*所示。

我们说，相对于正规模态逻辑 Λ，ML_Φ 表达力包含 于 ML_Ψ （记号：$\mathrm{ML}_\Phi \preceq^\Lambda \mathrm{ML}_\Psi$），如果每个公式 $\phi \in \mathrm{ML}_\Phi$ 都与某个公式 $\psi \in \mathrm{ML}_\Psi$是 Λ-等价的，即$\Lambda \vdash \phi \leftrightarrow \psi$。此外，我们说 ML_Φ 与 ML_Ψ 相对于 Λ是表达等价 的，如果 $\mathrm{ML}_\Phi \preceq^\Lambda \mathrm{ML}_\Psi$ 且 $\mathrm{ML}_\Psi \preceq^\Lambda \mathrm{ML}_\Phi$；并且我们说 ML_Ψ 相对于 Λ是表达力完备 的，如果 $\mathrm{ML}_\Phi \preceq^\Lambda \mathrm{ML}_\Psi$ 对每一个 模态公式集 Φ成立。显然，所有模态片段的族

在 $\preceq^{\Lambda}$ 下构成一个预序集，而表达完全片段是该预序中的极大元。

例 4.3. 如果我们用 $\Diamond\Diamond$ 作为公式 $\Diamond\Diamond x$ 的简写，那么相对于模态逻辑 S4，$\mathrm{ML}^{\{\Diamond\Diamond,\wedge,\neg\}}$ 与 $\mathrm{ML}^{\{\Diamond,\wedge,\neg\}}$ 表达等价，因为 $\mathbf{S4} \vdash \Diamond x \leftrightarrow \Diamond\Diamond x$。另一方面，很容易看出 $\mathrm{ML}_{\{\Diamond\Diamond,\wedge,\neg\}} \not\preceq^{\mathbf{K}} \mathrm{ML}_{\{\Diamond,\wedge,\neg\}}$，因此，特别是，$\mathrm{ML}^{\{\Diamond\Diamond,\wedge,\neg\}}$ 相对于 **K** 并非表达力完备。

4.2 通过模态克隆得到的模态片段

对于命题片段，我们看到，片段 PL_O 的表达能力完全由布尔克隆 $[O]$决定，而且 $[O]$ 恰好是由 PL_O-公式定义的所有布尔函数的集合。对于模态片段，也存在类似的克隆关联，但这种关联并非显而易见：命题语义将每个命题公式与一个布尔函数对应起来。另一方面，对于模态公式，正如 Kuznetsov 在早期论文中所指出的 [Kuz71，Kuz79],并不存在唯一的公式到函数对应。不过，仍然可以借助模态逻辑的代数语义以规范的方式将模态片段与克隆关联起来。下面我们将简要回顾相关内容。本节将重点讨论单模态逻辑，但所有内容都可以自然推广到多模态情形。

首先回顾一下，正规模态逻辑是一个由 Λ 模态公式组成的集合，它包含所有命题重言式，在分离规则和一致代入下封闭，包含公理模式 $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$（K公理）和 $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$（对偶公理模式），并且在必然化规则下封闭；也就是说，如果 $\varphi \in \Lambda$，那么 $\Box\varphi \in \Lambda$。正规模态逻辑的例子包括K（最小正规模态逻辑，它相对于所有Kripke框架构成的类是完备的）；K4（通过公理 $\Diamond\phi \to \Diamond\Diamond\phi$ 扩展K，并且相对于所有传递克里普克框架构成的类是完备的）；S4（在K4的基础上进一步加入公理 $\Diamond\phi \to \phi$，并且相对于所有传递且自反的Kripke框架构成的类是完备的）；以及S5（在S4的基础上进一步加入公理 $\phi \to \Box\Diamond\phi$，并且相对于所有可及关系为等价关系的框架构成的类是完备的）。下面还会重点介绍另一种逻辑GL，它通过公理 $\Box(\Box\phi \to \phi) \to \Box\phi$ 扩展K，并且相对于传递且逆良基的框架构成的类是完备的。关于正规模态逻辑的完全性结果，请参阅[BRV01, CZ97]。

我们将使用记号 $\Lambda \vdash \phi$ 作为 $\phi \in \Lambda$的另一种说法。

一个模态代数 是一个代数结构 $(A, \wedge, \vee, \neg, \top, \bot, \Diamond)$，由布尔代数 $(A, \wedge, \vee, \neg, \top, \bot)$ 扩展一个算子 $\Diamond$： $A \to A$而成，并满足 $\Diamond\bot = \bot$ 和 $\Diamond(x \vee y) = \Diamond x \vee \Diamond y$。我们可以以典范方式为每一个正规模态逻辑关联一个模态代数$\mathbf{A}_\Lambda$，它被称为 Λ的*Lindenbaum-Tarski*代数 。具体而言，对每个模态公式 $\phi \in \mathrm{ML}$，令$\mathrm{equiv}_\Lambda(\phi)$表示模态公式$\{\psi \in \mathrm{ML} \mid \Lambda \vdash \phi \leftrightarrow \psi\}$的等价类。于是

$$\mathcal{A}_\Lambda = (A_\Lambda, \wedge, \vee, \neg, \top, \Diamond)$$

其中 $A_\Lambda = \{\text{等价}_\Lambda(\phi) \mid \phi \in \mathrm{ML}\}$，且这些运算的定义使得 $\text{等价}_\Lambda(\phi) \wedge \text{等价}_\Lambda(\psi) = \text{等价}_\Lambda(\phi \wedge \psi)$，等等。读者可以验证，（对于正规模态逻辑 Λ）这确实是一个恰当的定义 [BRV01，CZ97]。

在代数语义下，我们可以将每个模态公式视为在A_Λ上定义的一个运算：对于每个模态公式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$，我们用 $[\![\phi]\!]_\Lambda$表示 n元函数 f_ϕ： $A_\Lambda^n \to A_\Lambda$，其定义如下

$$f_\phi(\mathrm{equiv}_\Lambda(\phi_1), \ldots, \mathrm{equiv}_\Lambda(\phi_n)) = \mathrm{equiv}_\Lambda(\phi^{(x_1/\phi_1, \ldots, x_n/\phi_n)}) .$$

现在我们将 模态克隆 (相对于所选的模态逻辑 Λ)定义为 $[\mathcal{A}_\Lambda]$ (由 Lindenbaum-Tarski 代数生成的克隆)的任意子克隆。由事实 2.3 可知，集合

所有模态克隆构成一个关于包含关系的格。因此，我们可以讨论模态克隆格。现在我们再次得到模态片段与模态克隆之间的对应关系。对于模态公式集合 Φ，令 $[[\Phi]]_\Lambda = \{[[\phi]]_\Lambda \mid \phi \in \Phi\}$。

事实 4.4. 固定一个正规模态逻辑 Λ。

(1) 对于所有模态公式的集合 Φ，$[[\mathrm{ML}_\Phi]]_\Lambda = [[\Phi]]_\Lambda]$ 是一个模态克隆。(2) 每个模态克隆都等于某个模态公式集合 Φ 对应的 $[[\mathrm{ML}_\Phi]]_\Lambda$。(3) 存在唯一的极大模态克隆，即 $[[\mathrm{ML}_{\{\Diamond,\wedge,\neg\}}]]_\Lambda$。

换句话说，模态片段与模态克隆之间存在双向对应关系。因此，原则上可以通过模态克隆的视角来研究有关模态片段的问题。具体而言：

事实 4.5. 对于所有正规模态逻辑 Λ 以及模态公式集合 Φ、Ψ，以下各项等价：

(1) $\mathrm{ML}_\Phi \preceq^\Lambda \mathrm{ML}_\Psi$(2)

$[[\Phi]]_\Lambda] \subseteq [[\Psi]]_\Lambda]$

遗憾的是，对于大多数正规模态逻辑 Λ，模态克隆格的结构远不如 Post 格规整，性质也远不如它良好。回顾第 2.3 节：(i) 每个布尔克隆都由有限个布尔函数生成，因此布尔克隆只有可数多个；(ii) 每个布尔克隆的向下封闭集都是有限个布尔克隆所生成的向下闭包；(iii) 布尔克隆之间的包含关系是可判定的。模态克隆不具备这些性质：

事实 4.6。关于**K**，存在连续统多个两两不可比较的模态克隆。因此，关于**K**的模态克隆并非都能由有限集生成。

证明。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 δ_n 表示模态公式 $\Diamond^n\top \wedge \neg\Diamond^{n+1}\top$的简写；该公式在 Kripke 模型的世界 w中成立，当且仅当从 w出发的最长路径长度为 n。对每个$S \subseteq \mathbb{N}$，令 $\Phi_S = \{\delta_{2n} \mid n \in S\} \cup \{\delta_{2n+1} \mid n \notin S\}$。容易看出，$\delta_n$ 不等价于任何由满足 $m \neq n$的公式 δ_m 构成的有限布尔组合。因此，对于 $S \neq S'$，有$[[\Phi_S]]_{\mathbf{K}}] \not\subseteq [[\Phi_{S'}]]_{\mathbf{K}}]$。这表明模态克隆有连续统多个，而且一般而言，模态克隆并非由有限集生成。我们指出，同样的论证也适用于许多其他正规模态逻辑，例如**GL**。 □

定理 4.7 ([RR00])。所有关于 **GL** 的非极大模态克隆组成的（向下闭合）集合，并非任何有限个模态克隆的向下闭包。事实上，关于 **GL**，存在无穷多个前极大模态克隆。

这里，如果一个模态克隆是前极大的（相对于正规模态逻辑 Λ），那么它是非极大的，并且不严格包含于任何其他非极大模态克隆之中。

我们将关于 Λ 的模态克隆包含问题定义为：给定有限个模态公式 Φ 和 Ψ，判断 $[[\Phi]]_\Lambda] \subseteq [[\Psi]]_\Lambda]$是否成立）。[Raţ83、RR00] 证明，许多模态逻辑（如**S4** 和**GL**）中的模态克隆包含问题是不可判定的；但在**S5**等逻辑中，该问题是可判定的。事实上，Raţˇa [Raţ83] 针对 **S4**的扩张证明了一项广泛的否定性结果，而该结果可进一步强化，使其适用于更广泛的 **K4** [Cat09]的扩张。

定理 4.8（[Raţ83，Cat09]）。设 Λ 是任意一个扩展 **K4** 的正规模态逻辑。那么，关于 Λ 的模态克隆包含问题可判定，当且仅当 Λ 是局部表格化的。

我们回顾一下，正规模态逻辑 Λ 是局部表格化的，当且仅当对于每个命题变量的有限集，由这些变量构成的公式在（相对于 Λ 的）等价类只有有限多个

变量。S5 是局部表格逻辑的一个例子，而大多数其他常见的模态逻辑（如 **K**、**K4**、**S4** 和 **GL**）都不是局部表格化的 [CZ97，第 12 节。4]。定理4.8 表明，对于所有 Λ非局部表格化逻辑，模态片段的表达力包含问题都是不可判定的。由于局部表格逻辑非常罕见，这可以视为一个强有力的否定性结果。对于不扩展**K4**的逻辑，关于克隆包含问题的可判定性，我们知之甚少。特别是：

问题 4.9. 关于 **K**，模态克隆的包含问题是否可判定？

4.3 通过布尔克隆构造简单模态片段

我们已经看到，对于非局部表格化逻辑，所有模态片段构成的预序相当难以处理。这促使我们进一步限制所考察的模态片段的类型。下面我们将对此进行探讨。若一组模态公式 Φ 满足以下条件：其中的公式可以是 (i) $\Diamond x$，或 (ii) $\Box x$，或 (iii) 纯命题公式，则称其为简单的。若 ML_Φ 简单，则称其为简单模态片段。

例 4.10. 例 *4.1* 中的前两个模态片段是简单的，而其余三个不是。

我们还可以根据简单集合 Φ 是否包含 $\Diamond$ 和/或 $\Box$，进一步区分出四种类型。更确切地说，对于 $M \subseteq \{\Diamond, \Box\}$，如果一个 Φ 由 M 中的模态算子以及任意数量的纯命题公式组成，则称其为 M- 简单。如果 Φ 是 M- 简单的，则模态片段 ML_Φ 是 M- 简单的。下文有时会不严谨地考虑形如 $\mathrm{ML}^{M\cup O}$ 的简单模态片段，其中 $M \subseteq \{\Diamond, \Box\}$，且 O 是一组布尔函数。更确切地说，这应理解为 $\mathrm{ML}^{M\cup\Phi\}}$，其中 Φ 对每个布尔函数 $f \in O$ 都包含一个任意选定的对应命题公式 ϕ_f。

据我们所知，[HSS10] 最早系统地研究了我们在此称为简单模态片段的内容。我们将在第 [HSS10], 节讨论其中与这类片段的可满足性问题复杂度有关的结果。4.5。

对于一组 Φ 模态公式，令 $\beta(\Phi)$ 表示由 Φ 中的命题公式定义的布尔函数集合。简单模态片段 ML_Φ 的表达能力自然由布尔克隆 $[\beta(\Phi)]$决定。然而，两者之间的关系并非完全直接：有时即使 $\mathrm{ML}_\Phi \preceq^\Lambda \mathrm{ML}_\Psi$，$[\beta(\Phi)]$ 也未必包含于 $[\beta(\Psi)]$。

Exa例 4.11。考虑模态逻辑 **GL**。在该逻辑中，以下等价式成立 *d:*

$$\mathbf{GL} \vdash (\Box\phi \vee \Diamond\Box\phi) \leftrightarrow \top$$

由此可知，在 **GL** 中，$\top$ 可由 $\Diamond$、$\Box$、$\vee$ 定义。不过请注意，仅凭 $\vee$ 无法定义 $\top$。因此，$\mathrm{ML}_{\{\Box,\Diamond,\top\}} \preceq^{\mathbf{GL}} \mathrm{ML}^{\{\Box,\Diamond,\vee\}}$，尽管 $\top \notin [\vee]$。

考虑布尔函数集上的运算 Clos^Λ_M，其中对于 $M \subseteq \{\Diamond, \Box\}$，$\mathrm{Clos}^\Lambda_M(O) = \{f \in$ 有限运算 $_{\{0,1\}} \mid \Lambda \vdash \phi_f \leftrightarrow \phi$ 对于某个 $\phi \in \mathrm{ML}^{M\cup O}\}$，即所有可由 $\mathrm{ML}^{M\cup O}$-公式定义的布尔函数的集合。示例 4.11 实际上表明 $\top \in \mathrm{Clos}^{\mathbf{GL}}{}_{\{\Diamond,\Box\}}(\{\vee\})$。

事实 4.12. 固定一个一致正规模态逻辑 Λ 以及一个集合 $M \subseteq \{\Diamond, \Box\}$。

(1) 对于所有布尔函数集 F，$Clos^\Lambda_M(F)$ 是一个布尔克隆，*(2)* $Clos^\Lambda_M$是一个闭包运算，即 $F \subseteq Clos^\Lambda_M(F) = Clos^\Lambda_M(Clos^\Lambda_M(F))$。*(3)* 对于 M-简单公式集 Φ, Ψ，我们有 $ML_\Phi \preceq^\Lambda ML_\Psi$ 当且仅当 $Clos^\Lambda_M(\beta(\Phi)) \subseteq Clos^\Lambda_M(\beta(\Psi))$。

这表明，为了理解简单模态片段格的结构，我们可以借助 Post格，但还需要研究相关的闭包运算。我们将

接下来。为了陈述下面的结果，我们需要以下定理。鉴于它与Makinson定理 [CZ97（定理 8） 67] 有关，该定理指出，每个模态逻辑的框架要么由一个自反点构成， $F_\circ$ 要么由一个非自反点构成 $F_\bullet$，我们将下面的定理称为广义*Makinson*定理。它对以 $F_\bullet$ 为框架的逻辑作出了更细致的分类。下文中， $F_\circ$ 表示由一个自反世界构成的Kripke框架，而 $F_\bullet$ 表示由一个非自反世界构成的Kripke框架。还需回顾的是，对于每个 $n \geq 0$

$$\Diamond^{\leq n}\phi = \bigvee_{k \leq n} \Diamond^k \phi,$$

其中 $\Diamond^0\phi = \phi$ 且 $\Diamond^{k+1}\phi = \Diamond(\Diamond^k\phi)$。此外 $\Box^0\phi = \phi$ 且 $\Box^{k+1}\phi = \Box(\Box^k\phi)$。

定理4.13（广义 Makinson 定理）。 每个正规模态逻辑 Λ 恰好属于以下类型之一：

A型： $F_\circ \models \Lambda$，**B型：** $F_\bullet \models \Lambda$ 且 $\Lambda \vdash \Box^n\bot$ 对某个 $n \geq 1$，**C 型：** $F_\bullet \models \Lambda$，$\Lambda \nvdash \Box^n\bot$ 对所有 $n \geq 1$，且 $\Lambda \vdash \Diamond^{\leq n}\Box\bot$ 对某个 $n \geq 1$。

证明。容易看出，这三种类型彼此互斥。因此，只需证明每一个正规逻辑都属于这三种类型之一。该证明将用到模态逻辑的拓扑代数语义中的一些基本概念与构造。关于这些概念的细节，我们参阅[BRV01、CZ97、Esa19、Ven04] 。假设 Λ 既不是B型，也不是C 型。我们证明它是A型。由于 Λ 不是A型或B型，我们有：对所有 $n \geq 1$， $\Lambda \nvdash \Box^n\bot$ 成立，且对所有 $n \geq 1$，$\Lambda \nvdash \Diamond^{\leq n}\Box\bot$ 成立。我们要证明 $F_\circ$ 是一个 Λ-框架。于是，公式集$\{\neg\Diamond^{\leq n}\Box\bot : n \geq 1\}$是 Λ-一致的。由此（根据Lindenbaum引理）可知，存在一个 Λ-极大一致集 Γ，使得对每个 $n \geq 1$ 都有 $\Diamond^{\leq n}\Box\bot \notin \Gamma$ （参见例如 [BRV01，第 4]章）。根据典范模型的真值引理，这意味着对每个 $n \geq 1$ 都有$\mathrm{M}_\Lambda, \Gamma \not\models \Diamond^{\leq n}\Box\bot$ 。但这意味着：对每个 $n \geq 1$ 以及每个使得 $\Gamma_0 = \Gamma$ 且 $\Gamma_i R \Gamma_{i+1}$的序列 Γ_0， ....., Γ_n，都存在一个点 Δ 使得 $\Gamma_n R \Delta$。因此， $R^\omega[\Gamma] = \{\Delta : \exists \Gamma_0, \ldots \Gamma_n, \Gamma_0 = \Gamma, \Gamma_n = \Delta \,\&\, \Gamma_i R \Gamma_{i+1}$ 对每个 $i \leq n-1\}$中的每个点都有一个后继。因此，容易看出 $F_\circ$ 是 $R^\omega[\Gamma]$的一个p-态射像。

众所周知，典范模型可以赋予一种由形如 $[\![\phi]\!] = \{\Gamma : \Gamma \models \varphi\}$ [BRV01, Esa19, Ven07] 的集合生成的拓扑。注意，由于集合 $[\![\phi]\!]$ 的补集等于 $[\![\neg\phi]\!]$，因此每个这样的集合都是闭开集，也就是说，既是闭集也是开集。此外，众所周知，在该拓扑下闭合的生成子框架（即满足 U 且 $x \in U$ 和 xRy 蕴含 $y \in U$ 的子集）保持公式的有效性。也就是说，每个闭生成子框架都是 Λ [Esa19, Ven04] 的一个（描述性一般）框架。现在我们考虑集合 $R^\omega[\Gamma]$ 的拓扑闭包 $\overline{R^\omega[\Gamma]}$。显然，按照定义，它在拓扑意义下是闭的。根据 [Ven04] ，该集合是一个 R-生成子框架。因此，$\overline{R^\omega[\Gamma]}$ 是一个 Λ-框架。

现在假设 $x \in \overline{R^\omega[\Gamma]}$。如果 $x \in R^\omega[\Gamma]$，那么正如我们所观察到的， x 有一个后继。现在假设$x \in R^\omega[\Gamma] - R^\omega[\Gamma]$。假设 x没有后继。那么 $x \models \Box\bot$。但是， $[\![\Box\bot]\!]$是由公式 $\Box\bot$定义的闭开集，它包含 x，且与 $R^\omega[\Gamma]$的交集为空。这与 x属于 $R^\omega[\Gamma]$的拓扑闭包相矛盾。因此， x有一~~个后继~~，并且 $R^\omega[\Gamma]$ 中的每个点都有一个后继。现在不难看出，将 $R^\omega[\Gamma]$~~中~~的每个点映射到 $F_\circ$ 上，我们得到 $F_\circ$ 是 $R^\omega[\Gamma]$的~~一个~~p-态射像，这意味着 $F_\circ$ 是某个 Λ-描述框架 $R^\omega[\Gamma]$的 p-态射像。~~因此~~， $F_\circ$ 是一个 Λ-框架。所以 Λ 属于 A型。□

几乎所有常见的正规模态逻辑，例如 **K**，都属于 A 型。一个显著的例外是 **GL**，它属于 C 型。事实上，**GL** $\vdash \Box\bot \vee \Diamond\Box\bot$。B 型逻辑往往不太有趣。尤其是，每个 B 型逻辑都是局部表格化的。

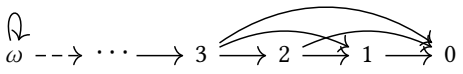


图3. 框架 $G = (\mathbb{N} \cup \{\omega\} > \cup \{(\omega, \omega)\})$

注4.14。 我们注意到，在上述 **K4** 之上，存在一个最小的非 A 型逻辑。该逻辑为 $L_\circ$ 由上述 **K4** 加上所谓的扬科夫 - 法恩公式公理化而成，该公式来自 $F_\circ$ [BRV01，第 3 节。4] 以及 [CZ97，第 9] 章（注意，此类公式可以在 **K4**之上定义，但不能在 **K**之上定义）。有根框架 F 的扬科夫-法恩公式，恰好公理化了最小的、其框架中不包含 F 的逻辑。

我们还注意到，逻辑 $L_\circ$ 并不是 GL。为说明这一点，考虑图3 G 所示的框架：它由一条由非自反点构成的向下传递链组成，例如带有 $>$ 的自然数，以及一个额外的自反点 ω；该点可以“看到”所有其他点。显然， $G \not\models$ 不是 GL，因为它包含一个自反点。然而，容易看出， G 的生成子框架的有限有界态射像，是由非自反点构成的有限链。这意味着， $F_\circ$ 的扬科夫-法恩公式在 G 上有效，因为 $F_\circ$ 不是 G的生成子框架的有界态射像；关于模态逻辑中基于框架的公式的理论，请参阅 [CZ97，第 9] 章。因此， G是该逻辑的一个框架，而不是 GL框架，这意味着 $L_\circ$ 与 GL 是不同的逻辑。也容易看出，对于任意 $n \in \omega$，框架 G 都反驳 $\Box^n \bot$ 。因此， $L_\circ$ 不是 B型，故根据定理4.13，它属于 C型。

定理4.15. 设 Λ 为任意一致正规模态逻辑，设 $M \subseteq \{\Diamond, \Box\}$，并设 C 为任意布尔克隆。

(1) 如果Λ 为A型，则$\mathrm{Clos}^{\Lambda}_{M}(C) = C$，即$\mathrm{Clos}^{\Lambda}_{M}$是布尔克隆上的恒等函数 .

(2) *If* Λ *is of Type B, then* $\mathrm{Clos}^{\Lambda}_{M}(C) = \begin{cases} C & \text{if } M = \emptyset \\ C \sqcup \{\bot\} & \text{if } M = \{\Diamond\} \\ C \sqcup \{\top\} & \text{if } M = \{\Box\} \\ C \sqcup \{\top, \bot\} & \text{if } M = \{\Diamond, \Box\} \end{cases}$

(3) *If* Λ *is of Type C, then* $C \subseteq \mathrm{Clos}^{\Lambda}_{M}(C) \subseteq \begin{cases} C & \text{if } M = \emptyset \\ C \sqcup \{\bot\} & \text{if } M = \{\Diamond\} \\ C \sqcup \{\top\} & \text{if } M = \{\Box\} \\ C \sqcup \{\top, \bot\} & \text{if } M = \{\Diamond, \Box\} \end{cases}$

证明。A型：设 C为任意布尔克隆，并设 $f \in \mathrm{Clos}^{\Lambda}_{M}(C)$，其中 $M \subseteq \{\Diamond, \Box\}$。根据定义，存在 $\chi \in \mathrm{ML}^{M \cup \Phi}$ 使得 $\Lambda \vdash \phi_f \leftrightarrow \chi$，其中 $\Phi = \{\phi_f \mid f \in C\}$。由此可得$F_\circ \models \phi_f \leftrightarrow \chi_\circ$ 设 χ' 由 χ通过移除所有模态算子而得到（即递归地将形如 $\Diamond\theta$或 $\Box\theta$的子公式替换为 θ）。于是我们有 $F_\circ \models \chi \leftrightarrow \chi'_\circ$ 因此，我们有 $F_\circ \models \phi_f \leftrightarrow \chi'_\circ$ 注意 ϕ_f与 χ' 均为命题公式。由此可得 χ' 与ϕ 作为命题公式是等价的。由于 χ' 由对应于 Φ中公式的运算构成，故 f属于布尔克隆 $C_\circ$

B型：从右向左的包含关系直接由以下事实得出： $\Lambda \vdash \top \leftrightarrow \Box^n x$ 和$\Lambda \vdash \bot \leftrightarrow \Diamond^n x_\circ$ 对于从左向右的包含关系，我们推理如下。由于 Λ 属于B型，因此有 $F_\bullet \models \Lambda_\circ$ 现在，设 C为任意一组布尔函数，并设 $f \in \mathrm{Clos}^{\Lambda}_{M}(C)$，其中 $M \subseteq \{\Diamond, \Box\}$。根据定义，存在一个 $\chi \in \mathrm{ML}^{M \cup \Phi}$，使得 $\Lambda \vdash \phi_f \leftrightarrow \chi$，其中 $\Phi = \{\phi_f \mid f \in C\}$。由此可得 $F_\bullet \models \phi_f \leftrightarrow \chi_\circ$ 令 χ' 由 χ 得到，方法是将所有形如 $\Diamond\theta$ 的子公式替换为 $\bot$

并将所有形如 $\Box\theta$ 的子公式替换为 $\top$。于是有 $F_\bullet \models \chi \leftrightarrow \chi'$。因此，有 $F_\bullet \models \chi' \leftrightarrow \psi$。注意，$\phi_f$和 χ' 都是命题公式。由此可得，作为命题公式， χ' 和ϕ 等价。由于 χ' 由分别对应于 Φ 中公式的运算构成，并且还包括在 $\Diamond \in M$时的 $\bot$ 以及在 $\Box \in M$时的 $\top$，因此，根据定理第2项的表述， f属于相应的布尔克隆。

C 型：与 B型逻辑情形下从左到右的包含关系证明相同的论证同样适用。（不过请注意，从右到左的包含关系证明并不适用于 C 型逻辑。）□

上述结果表明，对于所有正规模态逻辑 Λ，简单模态片段构成一个结构清晰的预序集；与命题片段的情形一样，该结构可从 Post 格的结构推导出来。具体而言：

推论 4.16。 设有一个正规模态逻辑 Λ。

(1) 在表达等价意义下，简单模态片段 ML_Φ 只有可数多个。(2) 不存在无限的简单模态片段反链，即相对于 $\preceq^\Lambda$两两不可比较的简单模态片段族。(3) 每个简单模态片段 ML_Φ，相对于 Λ，都与某个有限子集 $\Psi \subseteq \Phi$ 对应的ML_Ψ 表达等价。(4) 给定一个简单集合 Φ，判断ML_Φ 是否相对于 Λ表达力完备是可判定的。

证明。 前三项可直接由上述结果以及第 2.3 节讨论的 Post 格的已知性质推出。对于第四项，我们可以如下论证：固定$M \subseteq \{\Diamond, \Box\}$，并令 $\mathcal{F}$为所有满足以下条件的布尔克隆 C 的集合：$\mathrm{ML}^{M\cup C}$ 对 不能相对于 Λ 完备表达。则 $\mathcal{F}$是一个向下封闭集，因此根据事实 2.9 是可判定的。 □

对于 A 型或 B 型的正规模态逻辑，我们还可以得到：

推论 4.17。 固定一个 A 型或 B 型正规模态逻辑 Λ，并令 $M \subseteq \{\Diamond, \Box\}$。给定两个有限的$M$-简单集合 Φ, Ψ，可以判定 $\mathrm{ML}_\Phi \preceq^\Lambda \mathrm{ML}_\Psi$ 是否成立。

类似结果是否也适用于 C 型逻辑，我们将其留作一个开放问题。

简单多模态片段。 只要注意以适当的方式定义简单集合，上述定义和观察都可以自然地推广到多模态片段。我们将一组 ML^k 模态公式称为简单，如果满足以下三个条件：

- Φ 由纯命题公式和/或形如 $\Diamond_i x$ 或 $\Box_i x$的公式组成，
- 对于所有 $i, j \le k$, $\Diamond_i x \in \Phi$ 当且仅当 $\Diamond_j x \in \Phi$，并且
- 对于所有 $i, j \le k$, $\Box_i x \in \Phi$ 当且仅当 $\Box_j x \in \Phi$。

ML^ω 的情况也类似。稍微滥用一下记号，我们将一组 ML^k 公式，或一组 ML^ω 公式 Φ 称为 $M \subseteq \{\Diamond, \Box\}$-简单，如果 Φ 是简单的，并且 $\Diamond_i x \in \Phi$ 当且仅当 $\Diamond \in M$，而 $\Box_i x \in \Phi$ 当且仅当 $\Box \in M$。按照这一定义的简单性，以上所有结论对于形如 ML^ω_Φ 或 ML^k_Φ 的多模态片段仍然成立（前提是 $k \ge 1$）。

4.4 表达能力与简洁性

现在，我们简要回顾一下第 4.2 节讨论的模态克隆与模态片段表达能力之间的联系所导出的主要事实。在此之前，我们先介绍一些相关概念和算法问题。若模态片段 ML_Φ 是预完备的，Λ则称 ML_Φ 在$_\Psi$ 中预完备，如果 ML_Φ 的表达能力并不完备，并且对于任意满足 ML_Ψ 的表达能力严格包含于 ML_Ψ 的模态片段 ML_Ψ，ML_Ψ 的表达能力都是完备的。

定理 4.18。 令 Λ 为任意正规模态逻辑。对于 Λ，以下结论成立：
(1) 对所有模态公式集 Φ，ML_Φ 表达力完备当且仅当 $\{\Diamond, \wedge, \neg\} \preceq^\Lambda \Phi$。(2) 存在连续统多个两两表达上不可比的模态片段 ML_Φ。(3) 存在无穷多个表达上预完备的模态片段，相对于 GL*[RR00]*。

此外，考虑以下两个算法问题：

可表达性问题（对于 Λ）：
输入：一个模态公式 φ 以及模态公式的有限集 Φ.输出：若 φ Λ等价于某个 ML_Φ公式，则为是；否则为否。

表达完备性问题（对于 Λ）：
输入： 一组有限的模态公式 Φ.
输出： 若 ML_Φ 表达力完备，则是；否则否。

注意，可表达性问题等价于这样一个问题：对于给定的两组模态公式 Φ，Ψ，判断 $\mathrm{ML}_\Phi \preceq^\Lambda \mathrm{ML}_\Psi$。此外，注意到根据事实 4.18，表达完备性问题可归约为可表达性问题。第 4.2 节的结果意味着：

定理 4.19。 设 Λ 为任意一种模态逻辑，且满足$\mathbf{K4} \subseteq \Lambda$。若 Λ 是局部表格化的，则可表达性问题和表达完备性问题对于 Λ都是可判定的。否则，对于 Λ，可表达性问题是不可判定的。

对于非传递模态逻辑（即不包含在**K4**之上的逻辑），关于上述算法问题，目前所知甚少。

对于 简单模态片段，情况则大不相同。事实上，由第 4.3 节的结果可知，对于所有正规模态逻辑，限制在简单模态片段时，表达完备性问题是可判定的；对于所有 A 型或 B 型正规模态逻辑，限制在 M-简单模态片段时，可表达性问题是可判定的，其中 $M \subseteq \{\Diamond, \Box\}$。

接下来，我们来考察简洁性。回想一下，所有表达力完备的命题片段在多项式范围内具有相同的简洁性（即，对于任意一对这样的片段，就树大小而言，它们之间都存在多项式时间保真翻译）。最近一项引人注目的结果[BKS24] 指出，对于模态逻辑 **K**，就简洁性而言，表达力完备的简单模态片段恰好分为两类。

定理 4.20（[BKS24]）。设 Φ 是任意简单模态公式集。如果 ML_Φ 关于 **K**表达力完备，那么以下情形恰有一种成立：

- 就 **K** 而言，ML_Φ 与 $\mathrm{ML}_{\{\Diamond, \wedge, \neg, \top\}}$ 之间存在多项式时间保真翻译。
- 就树大小而言，ML_Φ 与 $\mathrm{ML}_{\{\Diamond, \wedge, \neg, \top, \leftrightarrow\}}$ 之间存在多项式时间保真翻译（相对于 **K**）。

此外，就树大小而言，$\mathrm{ML}_{\{\Diamond,\wedge,\neg,\top,\leftrightarrow\}}$ 相对于**K**比$\mathrm{ML}_{\{\Diamond,\wedge,\neg,\top\}}$ 指数级更简洁。

上述定理涉及表达力完备的简单模态片段，并且由此可知，其中存在“最大简洁”的模态片段。对于未必简单的模态片段，是否也有相同结论，这是一个有趣的问题：

问题 4.21。是否存在一个模态公式的有限集 Φ，使得对于每个模态公式的有限集 Ψ，都存在从 ML_Ψ 到 ML_Φ 的多项式时间保真翻译？

例如，若在基本模态语言中加入“偶然性”算子 $(\Diamond x \wedge \Diamond\neg x)$，则已知其表达能力会变得指数级更简洁 [DFvdHI14]。这超出了定理4.20 的适用范围，因为 $\Diamond x \wedge \Diamond\neg x$ 并不简单。

4.5 简单模态片段的逻辑推理任务复杂度

现在我们将回顾若干关于算法推理任务的结果。这些结果仅涉及简单模态片段，因为目前只有在这一情形下，才已知有用的技术可以证明这类结果。其中一些结果涉及多模态逻辑。对于一个正规模态逻辑 Λ，我们用 Λ_k 表示包含 Λ 所有公理副本的正规 k模态逻辑，其中每个 k 模态算子各对应一份。例如，$\mathbf{K}_2$ 是所有 Kripke 模型构成的双模态逻辑，而$\mathbf{S5}_2$ 则是两个可及关系均为等价关系的 Kripke 模型构成的双模态逻辑。

关于模态逻辑变体及其片段复杂度的一般性阐述可见于 [Mei11]。

一致性与可证性。 所谓 ML_Φ 相对于正规模态逻辑 Λ 的 Λ-一致性问题，是指判定给定的 ML_Φ 公式 ϕ 是否 Λ 一致的问题。这是命题可满足性问题的模态等价问题，并且（对于 Kripke 完备的模态逻辑 Λ）它与模态可满足性问题重合。

定理 m 4.22（[HSS10]）。 设 ML_Φ 是至少包含下列之一的简单模态片段 $\Diamond$，$\Box$.

1. 若 $\{x \wedge \neg y\} \preceq \Phi$ 或 $\{x \wedge (y \vee z)\ \bot, \Diamond, \Box\} \preceq \Phi$，则 ML_Φ 的 K 一致性是 *PSPACE* 完全的。*2.* 若 $\{\wedge, \Diamond, \Box\} \preceq \Phi \preceq \{\wedge, \top, \bot, \Diamond, \Box\}$，则 ML_Φ 的 K 一致性是 *coNP* 完全的。*3.* 否则，ML_Φ 的 K 一致性可在多项式时间内求解，

简单多模态片段和简单 k-模态片段也同样如此 $(k \geq 1)$。

[HSS10]还对 KD（及其多模态版本）给出了类似的分类结果。此外，对于 T、K4、S4 和 S5，也给出了近乎完整的分类，只留下 $\{\oplus\} \preceq \Phi \preceq \{\oplus, \bot, \Diamond, \Box\}$ 这些情况尚未解决。在 $\mathbf{S5}_k$ 的情况下，与一般情况不同，一致性问题的复杂度有时会随 k的取值而变化。 [HSS10]还解释了如何通过对偶化，将一致性问题的此类分类转化为对应的可证性问题（或者等价地，对于 Kripke 完备的模态逻辑，转化为有效性问题）的分类。

使用 *TBox* 进行推理。 接下来，我们介绍一些与知识表示相关的推理任务，这些任务已在 [MS13] 中研究过。这些任务最初是用描述逻辑定义的，但我们将在此用（多）模态逻辑对其进行等价的重新表述。ML_Φ-蕴涵 是一种蕴涵$\phi \to \psi$ 其中 ϕ, ψ 是 ML_Φ公式。ML_Φ-*TBox* 是 ML_Φ-蕴涵的有限集。

例 4.23。 一个$\mathrm{ML}^{\{\Diamond,\vee\}}$-*TBox* 的例子是集合$\{\Diamond(p_1 \vee p_2) \to p_3, (p_2 \vee p_3) \to (p_4 \vee \Diamond p_5)\}$。注意， $\Diamond$ 的绑定优先级高于 $\to$，因此第一个蕴涵可写为$(\Diamond(p_1 \vee p_2)) \to p_3$ 。

如果一个 Kripke 模型 M在全局上满足（或简称满足）TBox T，记作 $M \models T$，那么对于所有世界 w 以及所有 $(\phi \to \psi) \in T$，都有 $M, w \models \phi \to \psi$。

若干与知识表示相关的推理任务在 [MS13]中得到研究。我们在此仅重点讨论其中三项。所谓*TBox* 可满足性问题 对于 ML_Φ，我们指如下问题：给定一个 ML_Φ-TBox，是否存在一个 Kripke 模型 M使得 $M \models T$。所谓 *TBox* 包含问题 （另见 [Mei12，Mei14]）对于 ML_Φ，我们指如下问题：给定一个 ML_Φ-TBox T以及一个 ML_Φ-蕴涵 $\phi \to \psi$，是否对每一个模型 M，都有

	$M = \emptyset$	$M = \{\Diamond_i \mid i \in \mathbb{N}\}$	$M = \{\Box_i \mid i \in \mathbb{N}\}$	$M = \{\Diamond_i, \Box_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
如果.....则为 EXPTIME 完全。	–	$\{\vee, \top, \bot\} \preceq O$ 或 $\{\neg\} \preceq O$	$\{\wedge, \top, \bot\} \preceq O$ 或 $\{\neg\} \preceq O$	$\{\top, \bot\} \preceq O$ 或 $\{\neg\} \preceq O$
NP 完全 if . ..	$\{\wedge, \vee, \top, \bot\} \preceq O$ 或 $\{x \oplus y \oplus z \oplus \top\} \preceq O$	–	–	–
如果.....则为 P 完全。	$O \equiv \{\wedge, \top, \bot\}$ 或 $O \equiv \{\vee, \top, \bot\}$	$\{\top, \bot\} \preceq O \preceq \{\wedge, \top, \bot\}$	$\{\top, \bot\} \preceq O \preceq \{\vee, \top, \bot\}$	–
如果.....则为 NL 完全。	$\{\neg\} \preceq O \preceq \{\neg, \top, \bot\}$ 或 $O \equiv \{\top, \bot\}$	–	–	–
平凡.....	否则	否则	否则	否则

图4. 关于逻辑 $\mathbf{K}_\omega$ 简单多模态片段的 TBox 可满足性复杂度$\mathrm{ML}^\omega_{M \cup O}$，其中 $M \subseteq \{\Diamond_i, \Box_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ 且 O 由纯命题公式组成。另见 [MS13，表 3]。

$M \models T$蕴涵 $M \models \phi \to \psi$? 最后，*TBox* 下的可满足性问题 对于 ML_Φ 是如下问题：给定一个 ML_Φ-TBox T以及一个 ML_Φ-公式 ϕ，是否存在一个模型 $M \models T$以及一个世界 w使得 $M, w \models \phi$。

这些刻画了知识表示中的基本推理任务。同样的定义也适用于多模态片段 ML^ω_Φ。事实上，这才是知识表示中更相关的情形，因为描述逻辑 ALC 对应于完整多模态语言 ML^ω，而例如，描述逻辑 EL 对应于多模态片段 $\mathrm{ML}^\omega{}_{\{\wedge, \top, \Diamond\}}$。

关于多模态逻辑 $\mathbf{K}_\omega$下的 TBox 可满足性问题， [MS13] 中得到的分类总结于图 4。对于 *TBox* 包含 和 *TBox* 下的可满足性， [MS13、Mei12、Mei14],中也得到了类似的分类，这里不再赘述。[3]

4.6 简单模态片段的可教性与可学习性

回忆一下，在（经典）命题逻辑的语境中，带标签的示例是一个对 (V, lab)，其中 V 是一个真值赋值，且 $\mathrm{lab} \in \{1, -\}$。在模态逻辑 Λ 的语境中，自然可以将带标签的示例视为 (M, w, lab) 这种形式，其中 M 是基于 Λ-框架的有限 Kripke 模型， w 是 M 中的一个世界，且 $\mathrm{lab} \in \{1, 0\}$。模态公式 ϕ 与此类带标签示例相符，当且仅当 $M, w \models \phi$ 且 $\mathrm{lab} = 1$，或者 $M, w \not\models \phi$ 且 $\mathrm{lab} = 0$。若一组 E 此类带标签示例能够相对于片段 $\mathrm{ML}_\Phi[\mathrm{prop}]$ 和逻辑 Λ 唯一刻画公式 ϕ，则 ϕ 与 E 相符，并且每个与 E 相符的公式 $\psi \in \mathrm{ML}_\Phi[\mathrm{prop}]$ 都与 ϕ 在 Λ 下等价。

[3]请注意，无论选择 Φ为何，TBox 可满足性都可归约为 TBox 包含（因为 T不可满足，当且仅当 T蕴含 $p \to q$，其中 p是新鲜的命题变量， q），也可归约为 TBox 下的可满足性（因为 T可满足，当且仅当 p在 T下可满足，其中 p是新鲜的命题变量）。另请参见 [MS13，第 57] 页，了解更多问题及它们之间的相互归约。

定理 4.24。 固定 $\Lambda = \mathbf{K}$。设 Φ 是一个至少包含 $\Diamond, \Box$ 中一个的简单模态公式集。则以下各项等价：

(1) 每个 $\phi \in ML_\Phi[prop]$ （其中 *prop* 是一个非空的有限命题变量集）都可由一组有限的带标签样例相对于 $ML_\Phi[prop]$ 唯一刻画。*(2)* 概念类 $ML_\Phi[prop]$ （其中 *prop* 是一个非空的有限命题变量集）可通过成员查询有效地精确学习。*(3)* $\Phi \preceq \{\wedge, \vee, \top, \bot, \Diamond\}$ 或 $\Phi \preceq \{\wedge, \vee, \top, \bot, \Box\}$ 或 $\Phi \preceq \{\wedge, \vee, \Diamond, \Box\}$ 或 $\Phi \preceq \{\neg, \bot, \Diamond, \Box\}$ 或 $\Phi \preceq \{\wedge, \top, \Diamond, \Box\}$ 或 $\Phi \preceq \{\vee, \bot, \Diamond, \Box\}$。

证明见附录B。

定理4.24 所讨论问题的一个自然细化是：哪些简单模态片段具有多项式规模的唯一刻画？另一个相关但不一定等价的开放问题是：哪些简单模态片段可以通过成员查询被高效地精确学习？

5 其他逻辑

本节将重点介绍一些关于非经典逻辑和非模态逻辑表达能力的结果。我们陈述依赖逻辑 [Vää07], 混合逻辑 [At07], 有限值逻辑 [Mal93], 直觉主义逻辑 [BJ06] 和线性时序逻辑 [DGL16]的结果。对于每种逻辑，我们都提供简明的引言；不过，建议读者阅读上述引用的文献，以便全面理解。

5.1 有限值逻辑

一种 k值逻辑是指其表达式表示取自真值集合 $A = \{a_1, \ldots\ldots, a_k\}$ 的真值的逻辑。因此，这种逻辑中的每个联结词以及每个公式都可以视为在 A上进行的有限元运算。因此，为了研究不同（句法片段） k值逻辑的相对表达能力，必须考察集合 $A = \{a_1, \ldots\ldots, a_k\}$ 上的克隆。这些克隆也可称为 k值克隆。注意，布尔克隆是 k值克隆的特殊情形，即 $k = 2$。

遗憾的是，对于 $|A| > 2$，所有克隆构成的格 C_A A 比 Post 格丰富得多。具体来说，它的基数为连续统 [YM59], ，而类似图 1 所示的完备表示尚不为人所知（尽管对于一些受限子格，已有部分结果，例如三元素集 [Zhu11]上的自对偶函数克隆格）。

好在，对于 k值克隆，克隆成员问题和克隆包含问题仍然是可判定的。

事实 5.1。 以下问题均可判定：

(1) 给定有限集 $O \subseteq$有限运算$_{\{a_1,\ldots,a_k\}}$和 $f \in$有限运算$_{\{a_1,\ldots,a_k\}}$，是否有 $f \in [O]$?(2) 给定有限集 O、$O' \subseteq$有限运算$_{\{a_1,\ldots,a_k\}}$，是否有 $O \preceq O'$?

请注意，上述两个问题在计算上彼此等价。其可判定性论证与表格模态逻辑相同：要检验一个 n元运算 f是否属于 $[O]$，只需生成所有元数至多为 n 且属于 $[O]$的函数；具体做法是从投影开始，并通过递归饱和过程对 O 中的运算进行闭包运算，直到不再生成元数至多为 n 的新函数。事实上，对于任意有限域，若输入函数以真值表形式给出，则克隆成员函数是EXPTIME完全的 [BJS99], ；若输入函数以电路形式简洁给出，则该问题是2EXPTIME完全的 [Vol09]。

表达完备性的判据已在 [Kuz56、Yab58、Mal65、Ros65、Yab86]等文献中得到广泛研究。尤其是，Kusnetsov [Kuz56] 首次为 k值逻辑建立了一个可判定的表达完备性判据。

5.2 直觉主义逻辑

直觉主义命题逻辑（IPC）从证明论的角度来看，是通过去掉排中律（即，$\vdash p \vee \neg p$）[CZ97]而得到的经典命题逻辑的子逻辑。它刻画了直觉主义推理，其中真是根据构造性可证性来理解的，而非经典二值性。IPC 的代数语义由 Heyting代数给出IPC Heyting代数 [CZ97，Esa19]。因此，与我们将正规模态逻辑 Λ的模态克隆定义为由 Lindenbaum-Tarski代数$\mathcal{A}_\Lambda$生成的克隆的子克隆的方式相同，IPC 的克隆也可以定义为由自由 Heyting代数（基于可数无限生成元集）生成的克隆的子克隆。由此，我们再次得到 IPC 的克隆与 IPC 片段之间的对应关系IPC以及片段$\mathbf{IPC}_\Phi$ （对于 Φ一组IPC公式）。

例 5.2. $\mathbf{IPC}^{\{\to\}}$ 是IPC 的句法片段，由仅使用联结词 $\to$ 从命题变量构造的公式组成，也称为蕴涵片段。类似地，$\mathbf{IPC}^{\{\to,\wedge\}}$ 称为蕴涵合取片段，而$\mathbf{IPC}^{\{\to,\wedge,\bot\}}$ 称为蕴涵合取否定片段。

关于这类片段，已有多项研究成果。例如，最近已在 $\mathbf{IPC}^{\{\to,\wedge\}}$和 $\mathbf{IPC}^{\{\to,\wedge,\bot\}}$ 中，完整刻画了具有 Craig 插值性质的扩张，见 [Dek20]。

我们对模态片段所考虑的所有问题，现在也可以用同样的方式针对IPC 的片段加以考察。尽管目前所知相对有限，但 [Raţ71] 取得了一项重要的肯定结果，即表达完备性 问题（也就是说，给定一个公式有限集 Φ，是否每个公式都能在 IPC 中证明等价于 $\mathbf{IPC}_\Phi$中的某个公式）是可判定的。证明方法是表明，形如$\mathbf{IPC}_\Phi$的表达上预完备片段在等价意义下只有有限多个。值得将此结果与定理 4.7进行对比：根据该定理，相对于GL，表达上预完备的模态片段有无穷多个。

5.3（线性）时序逻辑

线性时序逻辑（LTL）的公式由有限集命题变量AP构成，并且在命题算子 $\wedge, \neg$ 以及时序模态算子 U, S, F, G和X下封闭。形式上，

$$\varphi ::= p \mid \varphi \wedge \psi \mid \neg\varphi \mid \varphi U \psi \mid \varphi S \psi \mid X\varphi$$

线性时序逻辑公式的满足性通过无限序列来定义，其元素来自 2^{AP}。可满足关系 $\models$，例如，按照命题变量和算子的约定进行定义（详见 [BRV01] 第 6.3 章）。模态算子定义如下；设 $w = w_0、\ w_1、\ w_2 \ldots$是一个（无限）序列，并记 $w^i = w_i、\ w_{i+1}、\ w_{i+2}$，即序列$w$从 w_i开始的后缀。

$$\begin{aligned}
&w \models X\varphi, \text{ if } w^1 \models \varphi \\
&w \models \varphi U \psi, \text{ if } \exists i (w^i \models \psi \text{ and for any } 0 \leq k < i \ (w^k \models \varphi)) \\
&w \models \varphi S \psi, \text{ if } \exists k, v (v^k = w, v \models \varphi \text{ and for any } 0 \leq i < k \ (v^i \models \psi)) \\
&w \models F\varphi \text{ if } \exists i (w^i \models \varphi) \\
&w \models G\varphi \text{ if } \forall i (w^i \models \varphi)
\end{aligned}$$

时态算子实际上是模态算子，因为无限序列对应于一类特定的 Kripke 框架。此外，时态算子 U 无法在基本模态逻辑中定义（见 [BRV01]），这证明了 LTL 是一种更丰富的模态语言。

这种更丰富的模态语言的可满足性问题已知是PSPACE 完全。此外，在 [SC85] 中已证明该问题要么是NP 完全，要么是PSPACE 完全，具体取决于公式中允许使用的时态算子。与可满足性问题密切相关的是模型检验问题。

T定理 5.3（[BSS+09]）。设 $M \subseteq \{F, G, X, U, S\}$ 且设 O 为一组布尔函数 .
（1）若 $O \preceq \{\vee, \leftrightarrow\}$ 或 $O \preceq \{\neg, maj\}$，则 $LTL_{M,O}$ 的可满足性问题是平凡的。（2）若 $O \preceq \{\wedge, \vee, \top, \bot\}$ 或 $O \preceq \{\neg, \top, \bot\}$，则 $LTL_{M,O}$ 的可满足性问题可在多项式时间内求解。（3）若 $\{x \wedge \neg y\} \preceq O$，则当 $M \subseteq \{F, G\}$ 或 $M = \{X\}$ 时，$LTL_{M,O}$ 的可满足性问题是 *NP* 完全的，否则为 *PSPACE* 完全。（4）否则，$\{\oplus\} \preceq O \preceq \{\oplus, \bot\}$，在此情况下，$LTL_{M,O}$ 的可满足性问题的复杂度未知。

针对 LTL 片段模型检验问题的分类也已在[BMS+11]中提出。此外，时态逻辑 CTL 和 CTL* 也从这一角度得到了研究 [MMTV09、MMTV15、KMM19]。最后，对时态逻辑片段进行的参数化研究显示，就公式树宽和路径宽这两个参数而言，整体情况并不乐观。对于一个称为 W[1],的参数化复杂性类，大多数片段仍然很难；只有涉及 X 算子的片段被证明是固定参数可解的。

5.4 混合逻辑

混合逻辑 [At07] 的出发点是这样一种观察：基本模态语言（在 Kripke 结构上解释）可以视为一阶逻辑的一个片段。具体而言，混合语言是在基本模态语言的基础上扩展而成的，其中加入了能够增强语言表达能力的算子，使其更接近一阶逻辑的全部表达能力。混合逻辑中两个重要的算子是 @ 算子（也称满足算子）和 ↓-绑定符。二者结合后，我们可以写出诸如$\downarrow x.\Diamond\Diamond x$这样的公式：该公式在 Kripke 模型中的世界 w成立，当且仅当 w能够沿着可及关系经过两步到达自身。带有↓-绑定符的混合逻辑的可满足性问题已知是不可判定的。在 [MMS+10]中，作者研究了限制可用的布尔联结词以及可用的模态算子和混合算子对任意框架、传递框架、全框架以及基于等价关系的框架（即对应于模态逻辑 K、K4、T 和 S5 的框架）上的可判定性和可满足性问题复杂度所产生的影响。我们可以将此视为定理 4.22 所给出的简单模态片段可满足性分类的混合逻辑对应物。最后，在后续论文 [GMM+12]中，作者证明，在 线性序上，可满足性问题仍然是非初等的，但在 $\mathbb{N}$上，其复杂度降至 PSPACE 完全。他们将由不同模态算子和混合算子组合产生的严格片段分为 NP 完全和易处理两类（即属于 NC^1或对数空间）。

5.5 非单调逻辑

经典推理是单调的，这意味着添加更多信息后，我们能够推导出与之前相同甚至更多的结论。然而，常识推理通常是非单调的：添加新信息可能会使先前的结论失效。非单调逻辑旨在刻画这类推理。非单调逻辑的例子包括默认

逻辑 [Rei80], 自认知逻辑 [Moo93], 限界理论 [McC80], 以及各种形式的溯因推理 [Kak10]。本文不打算在此深入探讨这些内容，但我们希望提供一些文献线索，其中在这一研究背景下，相关分类是按照 Post 格给出的。具体而言，默认逻辑 [BMTV12], 自认知逻辑 [CMVT12],限界理论 [Tho12a], 溯因 [CST12]。近期，研究者甚至分析了溯因背景下的一种参数化视角 [MMS21]。此外，基于逻辑的论证 [BH00], 是一种用于人工智能现代领域的形式体系，近期也已从这一视角进行了研究 [MMS23]。

5.6 模态依赖逻辑

模态依赖逻辑最近由 [Vä08] 通过在模态逻辑中加入依赖原子dep(·)而引入。从语义上看，模态依赖逻辑沿用了经典（一阶）依赖逻辑的方法 [Vää07]。其核心思想是，评估公式时不再以 Kripke 模型中的单个世界为依据，而是以一组世界为依据，这组世界称为团队。从这个角度看，依赖原子$\mathrm{dep}(p_1,\ldots,p_n,q)$表示命题 q的真值由给定团队中命题 $p_1,\ldots,p_n$的真值函数性地决定。

在 [MV13], 中，作者研究了模态依赖逻辑的扩展版本，这些版本由任意布尔联结词集合参数化。具体而言，他们研究了模型检验问题的计算复杂性，并得出了一个完整分类，适用于语言的所有片段：这些片段允许使用模态 $\Diamond$ 和 $\Box$ 、依赖原子以及任意布尔函数集作为联结词。

6 结论

本文综述了相关研究，这些研究系统考察了由给定算子集生成的命题逻辑和模态逻辑的句法片段。我们对命题情形的讨论主要作为背景介绍：它提供了相应的概念和技术模板，为模态片段中的相关问题提供动机并帮助界定这些问题。

在命题逻辑方面，整体图景已经确立。特别是，Post 格提供了一条清晰的组织原则：表达能力由所生成的布尔克隆决定，并且一系列元问题和算法任务（例如可满足性、重言式、计数、蕴涵/等价、求值、最小化）都可以根据基在 Post 格中的位置得到简洁的复杂性分类。

在模态逻辑方面，最一般的类比框架允许基由任意模态公式定义的“联结词”构成；这一框架通过林登鲍姆–塔斯基代数和模态克隆体现出代数上的自然性，但很快会变得难以驾驭：Post 格的许多吸引人的性质在模态克隆格中并不成立。特别是在局部表格化情形之外，包含问题和可表达性问题通常都是不可判定的。简单的 模态片段——即通过选取布尔函数联结词以及模态算子的指定子集得到的片段——构成了一个性质良好的特殊情形。它们保留了足够的结构，能够利用 Post 格的组织能力，从而为许多标准问题带来可判定性和系统的分类结果；同时，它们的表达能力也足以涵盖模态逻辑、描述逻辑、时态逻辑及相关系统中研究的广泛片段。

我们还加入了学习理论维度，汇集并扩展了关于命题片段和（简单）模态片段从例子中可教性／可学习性的研究成果。

最后，我们重点介绍几个在本文中指出的，或根据本文所述内容自然引出的开放问题。

(1) **超越传递情形的模态克隆**。对于传递模态逻辑，哪些逻辑能够对模态克隆进行有效分析，进而分析由模态联结词生成的

片段（分别参见定理4.8 和定理4.19）。相比之下，对于非传递逻辑，整体情况尚不明确。特别是，相对于 K 的模态克隆的包含问题的可判定性仍然悬而未决。

（2）“仿射”之谜与反复出现的分类缺口。第 3.3 节和第 5 节所综述的一些分类结果并不完整，因为其中缺少一些较小的情形，而作者一直未能完成完整分类。有趣的是，这些缺口通常出现在仿射克隆中，即 $\{\oplus^3\} \preceq O \preceq \{\oplus, \top, \bot\}$ 的情形。有一份出版物清单列出了这类克隆中尚未解决的情形，例如 [BMS+11、BSS+09、CST12、CSTW11、MMS+10、Rei01、Tho12a]。作为研究这类仿射情形的第一步，近期的一项工作 [KM25] 回答了 [HSS10]中提出的问题之一。然而，围绕仿射克隆的谜团仍有待解决。

(3) **超越简单模态片段** 如果一个模态公式 是浅的 ，即命题字母的每次出现都至多处于一个模态算子的作用域内，则称该公式为浅公式。如果命题字母的每次出现都处于数量相等的模态算子的作用域内，则称该模态公式为 统一深度的 。每个简单集合都由浅的、统一深度的公式构成，但反之不成立。特别是，例 4.1 中的第三个和第五个例子都是浅的、统一深度的，但并不简单。关于简单模态片段的一些正面结果，能否推广到由浅的、统一深度的公式集所定义的模态片段？特别是，对于浅的、统一深度的集合，包含问题是否可判定？

(4) **简单模态片段的双模拟** Yde Venema（私人通信）提出了以下问题，据我们所知，该问题仍未解决。对于若干特定的模态片段和描述逻辑片段，人们引入了经过适当定制的双模拟变体，以刻画它们的表达能力；例如参见 [KdR97、 KdR99]。是否存在一种通用的、由布尔基参数化的双模拟概念（或者更一般地说，模型比较游戏），能够刻画所有简单模态片段之间的表达等价？一种可行的途径是，将双模拟的模态往返条件与支配布尔可表达性的代数不变量（即多态运算）结合起来 [Jea98、 JCG97]。游戏余单子的范畴框架 [AR24、 ALR25] 或许能为构建这样一种“基感知”双模拟游戏提供合适的支架。

致谢

作者谨向 AndreiRussu、Alexei Muravitsky 和 Alex Citkin 致谢，感谢他们就 Alexander Kuznetsov 和 Metodie Raţˇa 的研究成果进行了有益的交流；感谢 Victor Dalmau 和 Raoul Koudijs 对可学习性和可教性相关研究成果提出的反馈（这些成果是 Arunavo Ganguly 理学硕士论文的一部分）；并感谢 Heribert Volmer 进行了有益的交流。

参考资料

[AB09] Sanjeev Arora 和 Boaz Barak。《计算复杂性：一种现代方法》。剑桥大学出版社，2009年。[ABCST92] Martin Anthony、Graham Brightwell、Dave Cohen 和 John Shawe-Taylor。通过例子进行精确规范。载于第五届计算学习理论年度研讨会论文集，COLT ’92，第311–318页，美国纽约州纽约市，1992年。计算机协会。[ABI+09] Eric Allender、Michael Bauland、Neil Immerman、Henning Schnoor 和 Heribert Vollmer。可满足性问题的复杂度：细化 Schaefer 定理。《计算机与系统科学杂志》，75(4):245–254，2009年。[AGNS22] Hajnal Andréka、Zalán Gyenis、István Németi 和 Ildikó Sain。《普适代数逻辑：献给科学统一性的纪念文集》。Birkhäuser，2022年1月。

[ALR25] Samson Abramsky、Thomas Laure 和 Luca Reggio。存在博弈与正博弈：一种余单子论与公理化视角。技术报告，2025年。ArXiv：2503.01247。[Ang87] Dana Angluin。查询与概念学习。《机器学习》，2(4):319–342，1987年。[AR24] Samson Abramsky 和 Luca Reggio。游戏余单子导论。《ACM SIGLOG 新闻》，11(3):5–48，2024年8月。[At07] Carlos Areces 和 Balder ten Cate。14 混合逻辑。载于 Patrick Blackburn、Johan Van Benthem 和 Frank Wolter 编，《模态逻辑手册》，《逻辑与实践推理研究》第3卷，第821–868页。爱思唯尔，2007年。[BH91] Samuel R. Buss 和 Louise Hay。关于对可满足性问题的真值表可归约性。《信息与计算》，91(1):86–102，1991年。[BH00] Philippe Besnard 和 Anthony Hunter。迈向基于逻辑的论证理论。载于 Henry A. Kautz 和 Bruce W. Porter 编，《第十七届全国人工智能会议暨第十二届人工智能创新应用会议论文集》，2000年7月30日至8月3日，美国得克萨斯州奥斯汀，第411–416页。AAAI出版社／麻省理工学院出版社，2000年。[BHSS06] Michael Bauland、Edith Hemaspaandra、Henning Schnoor 和 Ilka Schnoor。广义模态可满足性。载于 STACS，《计算机科学讲义》第3884卷，第500–511页。Springer，2006年。[BJ06] Nick Bezhanishvili 和 Dick De Jong。直觉主义逻辑，2006年。
https://eprints.illc.uva.nl/id/eprint/200/1/PP- 2006-25.text.pdf。[BJS99] Claus Bergmann、David Juedes 和 Giora Slutzki。项等价的计算复杂性。《代数与计算国际期刊》，9(2):113–128，1999年。[BKS24] Christoph Berkholz、Dietrich Kuske 和 Christian Schwarz。模态逻辑更简洁，当且仅当某种形式的双条件可用。载于 Olaf Beyersdorff、Mamadou Moustapha Kanté、Orna Kupferman 和 Daniel Lokshtanov 编，《第41届理论计算机科学国际研讨会（STACS 2024）》，《莱布尼茨国际信息学论文集》（LIPIcs）第289卷，第12:1–12:17页，德国达格施图尔，2024年。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心。[BM95] Martin Beaudry 和 Pierre McKenzie。电路、矩阵与非结合计算。《计算机与系统科学杂志》，50(3):441–455，1995年。[BMS+11] Michael Bauland、Martin Mundhenk、Thomas Schneider、Henning Schnoor、Ilka Schnoor 和 Heribert Vollmer。LTL 模型检测的可处理性：好片段、坏片段与丑片段。《ACM 计算逻辑汇刊》，12(2):13:1–13:28，2011年。[BMTV09] Olaf Beyersdorff、Arne Meier、Michael Thomas 和 Heribert Vollmer。命题蕴涵的复杂度。《信息处理快报》，109(18):1071–1077，2009年8月。[BMTV12] Olaf Beyersdorff、Arne Meier、Michael Thomas 和 Heribert Vollmer。默认逻辑片段推理的复杂度。《逻辑与计算杂志》，22(3):587–604，2012年。[BRV01] Patrick Blackburn、Maarten de Rijke 和 Yde Venema。《模态逻辑》。《剑桥理论计算机科学丛书》。剑桥大学出版社，2001年。[BS00] Clifford Bergman 和 Giora Slutzki。关于代数簇和代数准簇的若干问题的复杂度。《SIAM计算杂志》，30(2):359–382，2000年。[BS07] Elmar Bohler 和 Henning Schnoor。布尔电路在不同门集上的描述能力的复杂度。《计算系统理论》，41(4):753–777，2007年。[BSS+06] Michael Bauland、Thomas Schneider、Henning Schnoor、Ilka Schnoor 和 Heribert Vollmer。线性时序逻辑广义可满足性的复杂度。《电子计算复杂性讨论会》，TR06-153，2006年。[BSS+09] Michael Bauland、Thomas Schneider、Henning Schnoor、Ilka Schnoor 和 Heribert Vollmer。线性时序逻辑广义可满足性的复杂度。《计算机科学中的逻辑方法》，第 5 卷，第 1 期，2009年1月。[Bus87] Samuel R. Buss。布尔公式求值问题属于对数时间交替计算。载于《第十九届ACM计算理论研讨会论文集》，STOC ’87，第123–131页，美国纽约州纽约市，1987年。计算机协会。[Cat09] Balder ten Cate。关于模态逻辑与无星正则表达式的可表达性问题的注记。《信息处理快报》，109(10):509–513，2009年。[CH96] Nadia Creignou 和 Miki Hermann。广义可满足性计数问题的复杂度。《信息与计算》，125(1):1–12，1996年。[CH97] Nadia Creignou 和 Jean-Jacques Hébrard。关于生成广义可满足性问题的所有解。《理论与应用信息学》，31(6):499–511，1997年。[CK22] Balder ten Cate 和 Raoul Koudijs。用例子刻画模态公式。《ACM计算逻辑汇刊》，2022年6月。[CKO24] Balder ten Cate、Raoul Koudijs 和 Ana Ozaki。关于例子在描述逻辑概念中的作用与局限。载于 Kate Larson 编，《第三十三届国际人工智能联合会议论文集》

人工智能，IJCAI-24，第3567–3575页。国际人工智能联合会议组织，2024年8月。主会场。[CKS01] Nadia Creignou、Sanjeev Khanna和Madhu Sudan。《布尔约束满足问题的复杂性分类》，SIAM离散数学及其应用专著第7卷。SIAM，2001年。[CMVT12] Nadia Creignou、Arne Meier、Heribert Vollmer和Michael Thomas。自认知逻辑片段的推理复杂性。《ACM 计算逻辑汇刊》，13(2):17:1–17:22，2012年。[Cre95] Nadia Creignou。最大广义可满足性问题的二分定理。《计算机与系统科学杂志》，51(3):511–522，1995年。[CST12] Nadia Creignou、Johannes Schmidt和Michael Thomas。Post框架中命题溯因的复杂性分类。《逻辑与计算杂志》，22(5):1145–1170，2012年。[CSTW11] Nadia Creignou、Johannes Schmidt、Michael Thomas和Stefan Woltran。Post框架中基于逻辑的论证的复杂性。《论证计算》，2(2-3):107–129，2011年。[CV15] Nadia Creignou和Heribert Vollmer。加权可满足性问题的参数化复杂性：判定、枚举与计数。《Fundamenta Informaticae》，136(4):297–316，2015年。[CZ97] Alexander V. Chagrov和Michael Zakharyaschev。《模态逻辑》，牛津逻辑指南丛书第35卷。牛津大学出版社，1997年。[Dal99] Víctor Dalmau。对大多数门基而言，布尔公式难以学习。载于Osamu Watanabe和Takashi Yokomori编，《算法学习理论》，第301–312页，柏林、海德堡，1999年。Springer柏林海德堡。[Dek20] P. M. Dekker。直觉主义命题演算蕴涵片段中的插值与Beth可定义性，2020年。理学学士论文，阿姆斯特丹大学。[DFvdHI14] Hand van Ditmarsch、Jie Fan、Wiebe van der Hoek和Petar Iliev。模态逻辑中关于公式大小的一些指数下界。载于《模态逻辑进展》，2014年。[DGL16] Stéphane Demri、Valentin Goranko和Martin Lange。《计算机科学中的时态逻辑：有限状态系统》，第58卷。剑桥大学出版社，2016年。[Esa19] Leo Esakia。Heyting代数，逻辑研究趋势——Studia Logica丛书第50卷。Springer，2019年。编者：Bezhanishvili, G.和Holliday, W. H. [FG06] Jörg Flum和Martin Grohe。《参数化复杂性理论》。理论计算机科学丛书：EATCS系列。Springer，2006年。[Gan24] Arunavo Ganguly。利用Post格刻画公式。硕士论文，逻辑、语言与计算研究所，2024年。[GMM+12] Stefan Göller、Arne Meier、Martin Mundhenk、Thomas Schneider、Michael Thomas和Felix Weiß。线性框架和自然数上的单调混合逻辑的复杂性。载于Thomas Bolander、Torben Braüner、Silvio Ghilardi和Lawrence S. Moss编，《模态逻辑进展9：第九届“模态逻辑进展”会议论文集》，2012年8月22日至25日于丹麦哥本哈根举行，第261–278页。College Publications，2012年。[Hem89] Lane A. Hemachandra。强指数层级坍缩。《计算机与系统科学杂志》，39(3):299–322，1989年。[HS11] Edith Hemaspaandra和Henning Schnoor。广义布尔公式的最小化。载于《第二十二届国际人工智能联合会议论文集——第一卷》，IJCAI'11，第566–571页。AAAI出版社，2011年。[HSS10] Edith Hemaspaandra、Henning Schnoor和Ilka Schnoor。广义模态可满足性。《计算机与系统科学杂志》，76(7):561–578，2010年。[HV95] Lane A. Hemaspaandra和Heribert Vollmer。恶魔记法：#P之外的计数类及其他定义冒险。《SIGACT新闻》，26(1):2–13，1995年。[JC95] Peter Jeavons和David A. Cohen。易处理约束的代数刻画。载于COCOON，计算机科学讲义第959卷，第633–642页。Springer，1995年。[JCG97] Peter G. Jeavons、David A. Cohen和Marc Gyssens。约束的闭包性质。《ACM杂志》，44(4):527–548，1997年。[JCP98] Peter Jeavons、David A. Cohen和Justin Pearson。约束与泛代数。《人工智能数学年刊》，24(1-4):51–67，1998年。[Jea98] Peter Jeavons。组合问题的代数结构。《理论计算机科学》，200(1–2):185–204，1998年。[Jer21] Emil Jerábek。克隆成员问题的复杂性。《计算理论与系统》，65(5):839–868，2021年。[JGK70] Sergej W. Jablonski、Gari Petrovič Gawrilow和Waleri B. Kudrjawcew。《布尔函数与Post类》。Akademie-Verlag，1970年。[Kak10] Antonis C. Kakas。溯因。载于《机器学习百科全书》，第3–9页。Springer，2010年。

[KdR97] Natasha Kurtonina和Maarten de Rijke。无否定模拟。《逻辑与计算杂志》，7(4):501–522，1997年。[KdR99] Natasha Kurtonina和Maarten de Rijke。一阶描述逻辑中概念表达式的表达能力。《人工智能》，107(2):303–333，1999年。[KM25] Andreas Krebs和Arne Meier。对称性何时导致NP 困难性：S5 框架上的仿射 ML-SAT。CoRR，abs/2512.17378，2025年。[KMM19] Andreas Krebs、Arne Meier和Martin Mundhenk。CTL 算子的模型检测特征。《信息学学报》，56(6):487–519，2019年。[Kuz56] Alexander V. Kuznetsov。代数系统恒等性与函数完备性问题。载于《第三届全苏数学大会论文集》，第2卷，第145–146页，莫斯科，1956年。俄文。[Kuz71] Alexander V. Kuznetsov。超直觉主义逻辑中的函数可表达性。《数学研究》，6(4):75–122，1971年。[Kuz79] Alexander V. Kuznetsov。关于识别不可演绎性与不可表达性的工具。载于《逻辑演绎》，第5–33页。科学出版社，莫斯科，1979年。[Lew79] Harry Lewis。命题演算系统的可满足性问题。《数学系统理论》，1979年。[Mal65] Alexander I. Maltsev。《算法与递归函数》。科学出版社，莫斯科，1965年。俄文。[Mal93] Grzegorz Malinowski。《多值逻辑》。牛津大学出版社，1993年。[McC80] John McCarthy。限界理论——一种非单调推理形式。《人工智能》，13(1-2):27–39，1980年。[Mei11] Arne Meier。《模态逻辑变体及其片段的复杂性》。Cuvillier，2011年。博士论文，莱布尼茨汉诺威大学。[Mei12] Arne Meier。ALC 包含关系的广义复杂性。CoRR，abs/1205.0722，2012年。[Mei14] Arne Meier。ALC 包含关系的广义复杂性。载于Bernd Steinbach编，《布尔领域的最新进展》，第3.2章。剑桥学者出版社，2014年。[MMS+10] Arne Meier、Martin Mundhenk、Thomas Schneider、Michael Thomas、Volker Weber和Felix Weiss。混合逻辑片段的可满足性复杂性——第一部分。《应用逻辑杂志》，8(4):409–421，2010年。混合逻辑特刊。[MMS21] Yasir Mahmood、Arne Meier和Johannes Schmidt。Schaefer 框架中溯因的参数化复杂性。《逻辑与计算杂志》，31(1):266–296，2021年。[MMS23] Yasir Mahmood、Arne Meier和Johannes Schmidt。Schaefer 框架中基于逻辑的论证的参数化复杂性。《ACM 计算逻辑汇刊》，24(3):26:1–26:25，2023年。[MMTV09] Arne Meier、Martin Mundhenk、Michael Thomas和Heribert Vollmer。CTL 和 CTL* 片段的可满足性复杂性。《国际计算机科学基础杂志》，20(5):901–918，2009年。[MMTV15] Arne Meier、Martin Mundhenk、Michael Thomas和Heribert Vollmer。勘误：CTL 和 CTL* 片段的可满足性复杂性。《国际计算机科学基础杂志》，26(8):1189，2015年。[Moo93] Robert C. Moore。重新审视自认知逻辑。《人工智能》，59(1-2):27–30，1993年。[MS13] Arne Meier和Thomas Schneider。描述逻辑ALC的广义可满足性。《理论计算机科学》，505:55–73，2013年。计算模型理论与应用2011。[MV13] Julian-Steffen Müller和Heribert Vollmer。模态依赖逻辑的模型检测：通过Post格实现的一种方法。载于Leonid Libkin、Ulrich Kohlenbach和Ruy de Queiroz编，《逻辑、语言、信息与计算》，第238–250页，柏林、海德堡，2013年。Springer柏林海德堡。[Pip97] Nicholas Pippenger。《可计算性理论》。剑桥大学出版社，1997年。[Pos41] Emil L. Post。《数理逻辑的二值迭代系统》（AM-5）。普林斯顿大学出版社，1941年。[Pra75] Vaughan R. Pratt。基对布尔表达式大小的影响。载于第16届年度计算机科学基础研讨会（SFCS 1975），第119–121页，1975年。[Raţ71] Metodie Raţa。直觉主义命题逻辑中函数完备性的判据。《苏联科学院院报》，1971年。[Raţ83] Metodie Raţa。模态逻辑S4中函数可表达性问题的不可解性。《苏联科学院院报》268 (4) (1983) 814–817（俄文），1983年。[Rei80] Raymond Reiter。默认推理的逻辑。《人工智能》，13(1-2):81–132，1980年。[Rei01] Steffen Reith。《广义可满足性问题》。博士论文，维尔茨堡尤利乌斯-马克西米利安大学，德国，2001年。[Rei03] Steffen Reith。命题演算系统若干等价问题的复杂性。载于Branislav Rovan和Peter Vojtáš编，《2003年计算机科学的数学基础》，第632–641页，柏林、海德堡，2003年。Springer柏林海德堡。[Ros65] Ivo Rosenberg。《有限集上多元函数的结构》。《法国科学院院报》，260:2817–2819，1965年。

[RR00] Metodie Raţˇa 和 Andrei Russu。《哥德尔–勒布可证性逻辑中按可表达性完备的公式系统的某些性质》。《离散数学与应用》，10(6):553–570，2000年。[RW99] Steffen Reith 和 Klaus Wagner。《由布尔函数子类定义的问题的复杂度》。技术报告，1999年。技术报告 TR196，计算机科学系，维尔茨堡大学。[RW05] Steffen Reith 和 Klaus W. Wagner。《由布尔电路定义的问题的复杂度》。载于《信息学数学基础》论文集，第141–156页，2005年。[SC85] A. Prasad Sistla 和 Edmund M. Clarke。《命题线性时态逻辑的复杂度》。《ACM学报》，32(3):733–749，1985年7月。[Sch78] Thomas J. Schaefer。《可满足性问题的复杂度》。载于计算理论研讨会，第216–226页。ACM，1978年。[Sch05] Henning Schnoor。《布尔公式求值问题的复杂度》。技术报告，理论计算机科学，汉诺威莱布尼茨大学，2005年。[Sch10] Henning Schnoor。《布尔公式模型检测的复杂度》。《国际计算机科学基础杂志》，21(3):289–309，2010年。[Tho12a] Michael Thomas。《Post 格中限定推理的复杂度》。《计算理论与系统》，50(3):401–419，2012年。[Tho12b] Michael Thomas。《论 Post 格的适用性》。《信息处理快报》，112(10):386–391，2012年。[Vää07] Jouko Väänänen。《依赖逻辑：一种独立友好逻辑的新方法》，第70卷。剑桥大学出版社，2007年。[Ven04] Yde Venema。《次直不可约布尔代数算子的对偶刻画》。《逻辑学研究》，77(1):105–115，2004年。[Ven07] Yde Venema。《代数与余代数》。载于 Patrick Blackburn、J. F. A. K. van Benthem 和 Frank Wolter 编，《模态逻辑手册》，《逻辑与实践推理研究》第3卷，第331–426页。北荷兰出版社，2007年。[Vol99] Heribert Vollmer。《电路复杂性导论：一种统一方法》。施普林格出版社，1999年。[Vol09] Heribert Vollmer。《判定布尔函数能否由基于受限基的电路计算的复杂度》。《计算系统理论》，44:82–90，2009年1月。[Vä08] Jouko Väänänen。《模态依赖逻辑》。载于 Krzysztof R. Apt 和 Robert van Rooij 编，《博弈与交互的新视角》，《逻辑与博弈文献》第4卷，第237–254页。阿姆斯特丹大学出版社，2008年。[Yab58] Sergey Vsevolodovich Yablonskiy。《离散逻辑中的函数构造》。《斯捷克洛夫数学研究所学报》，51:5–142，1958年。俄文。[Yab86] Sergey Vsevolodovich Yablonskiy。《离散数学导论》。科学出版社，莫斯科，1986年。俄文。[YM59] Yuri I. Yanov 和 Albert A. Muchnik。《关于无有限基的 k值闭类的存在性》。载于《苏联科学院院报》，第127卷，第44–46页，1959年。[Zhu11] Dmitriy Zhuk。《三值逻辑中自对偶函数的克隆格》。载于《第41届 IEEE 国际多值逻辑研讨会论文集》，ISMVL 2011，第193–197页，2011年5月。

定理 3.19 的证明

定理 3.19 的正向（即从 1 到 2 的方向）将由以下两个结果给出：

定理 A.1 ([ABCST92])。 对于任意 PL$^{\{\wedge,\vee,\top,\bot\}}$-公式 ϕ，以下各项等价：
(1) ϕ 由PL$^{\{\wedge,\vee,\top,\bot\}}$ 中的 m 正例和 n 反例唯一刻画。(2) ϕ 等价于一个含有 m 项的析取范式，也等价于一个含有 n 子句的合取范式。

定理 A.2。 每个PL$^{\{\neg,\top\}}$ 公式 ϕ 都有一个大小为 2 的唯一刻画。

证明。设 V_p 是满足 $V_p(x) = 1 \Longleftrightarrow x = p$的赋值。类似地，设 $V_\top$ 是一个赋值，使得对每个 x，都有 $V_\top(x) = 1$；再设 $V_\bot$ 是一个赋值，使得对每个 x，都有$V_\bot(x) = 0$。

由此可知，$\{(V_p, 1), (V_\bot, 0)\}$ 唯一刻画了 p，而 $\{(V_p, 0), (V_\bot, 1)\}$ 唯一刻画了 $\neg p$。$\top$ 由 $\{(V_\top, 1), (V_\bot, 1)\}$ 唯一刻画，而 $\bot$ 由 $\{(V_\top, 0), (V_\bot, 0)\}$ 唯一刻画。□

通过建立恰当的下界来证明反方向。

定理 A.3。 对于每个有限集 $prop$，以及每个 $\mathrm{PL}_{\{\oplus^3\}}[prop]$-公式 ϕ，每个关于 ϕ *w.r.t.* $\mathrm{PL}_{\{\oplus^3\}}[prop]$ 的唯一刻画都必须至少包含 $|prop|-1$ 个例子。

证明。设 ϕ 是任意一个 $\mathrm{PL}_{\oplus^3}[\mathrm{prop}]$-公式，并反设存在一个相对于 $\mathrm{PL}_{\oplus^3}[\mathrm{prop}]$、针对 ϕ 的唯一刻画集 S，且满足 $|S| < n-1$，其中 $n = |\mathrm{prop}|$。首先，我们将把 S 扩展为一个集合 S'，使其相对于稍大的命题片段 $\mathrm{PL}_{\oplus}[\mathrm{prop}]$ 唯一刻画 ϕ。令 $S' = S \cup \{(v_\top, 1)\}$，其中 $V_\top$ 表示将每个变量都赋值为 1 的赋值。显然，每个 $\mathrm{PL}_{\oplus^3}[\mathrm{prop}]$-公式在 $V_\top$ 中都为真，因此 ϕ 符合 S'。我们声称，S' 相对于 $\mathrm{PL}_{\oplus}[\mathrm{prop}]$ 唯一刻画 ϕ。事实上，每个 $\mathrm{PL}_{\oplus}[\mathrm{prop}]$-公式都计算某个子集 $T \subseteq \{1, \ldots, n\}$ 的奇偶校验，即函数 $x \mapsto \bigoplus_{i \in T} x_i$。在 $V_\top$ 处求值时，结果为 $|T| \bmod 2$，因此，与正例 $(V_\top, 1)$ 一致要求 $|T|$ 为奇数（即奇校验）。每个奇校验函数都可以通过将变量分组为三元组并迭代该运算，得到一个 3XOR 表示。因此，在 $\mathrm{PL}_{\oplus}[\mathrm{prop}]$, 中，例子 $(V_\top, 1)$ 恰好将考察范围限制为可由 $\mathrm{PL}_{\oplus^3}[\mathrm{prop}]$ 定义的函数。由于 S 在 $\mathrm{PL}_{\oplus^3}[\mathrm{prop}]$, 中唯一刻画 ϕ，因此 S' 在 $\mathrm{PL}_{\oplus}[\mathrm{prop}]$ 中唯一刻画 ϕ。注意，$|S'| < n$。

接下来，我们利用 $\mathrm{PL}_{\oplus}[\mathrm{prop}]$ 公式具有自然的线性代数解释这一事实。我们可以通过 $x_i = v(p_i)$ 将一个赋值视为向量 $x \in \mathbb{F}_2^n$，其中 $\mathbb{F}_2$ 是二元域。我们将函数 f_a 称为奇偶函数，其中 $a \in \mathbb{F}_2^n$，其定义为

$$f_a(x) = a \cdot x \pmod 2,$$

其中 $a \cdot x$ 是 $\mathbb{F}_2$ 上的点积。现在，我们可以自然地将 $S' = \{(V_1, lab_1) \ldots, (V_m, lab_m)\}$ 视为线性方程组。更准确地说，令 X 为 $m \times n$ 矩阵，其中 $X_{i,j} = V_i(p_j)$，并令 b 为由标签 $lab_1, \ldots, lab_m$ 组成的长度为 n 的向量。那么，适用于 S' 的 $\mathrm{PL}_{\oplus}[\mathrm{prop}]$ 公式恰好对应于满足以下条件的奇偶函数 f_a

$$Xa = b \qquad \text{over } \mathbb{F}_2$$

因为 $m < n$，矩阵 X 的秩严格小于 n。线性代数中一个众所周知的事实是，如果线性系统 $Xa = b$ 是相容的且秩为 $< n$，那么解并不唯一。因此，必定存在多个适用于 $\mathrm{PL}_{\oplus}[\mathrm{prop}]$ 的公式。□

我们还需要为其他几个命题片段给出类似的下界。为此，我们将使用一种适当的归约概念，使我们能够将这些下界迁移过去。

定义 A.4 （PC 归约）。设 $C_1 = (C_1, E_1, \lambda_1)$ 和 $C_2 = (C_2, E_2, \lambda_2)$ 是两个概念类。从 C_1 到 C_2 的一个 (f, h) 归约是一对函数，其中 $f\colon\ C_1 \to C_2$，且 $h\colon\ E_1 \to E_2$，满足

（1）对于所有的 $c \in C_1$ 和 $e \in E_1$，$e \in \lambda_1(c)$ 当且仅当 $h(e) \in \lambda_2(f(c))$；以及（2）对于每个 $e \in E_2$，要么对于所有 $c \in C_1$，e 属于 $\lambda_2(f(c))$，要么对于不存在任何 $c \in C_1$ 时，e 属于 $\lambda_2(f(c))$，否则存在一个 $e' \in E_1$，使得 $\{c \in C_1 \mid e \in \lambda_2(f(c))\} = \{c \in C_1 \mid e' \in \lambda_1(c)\}$。

我们记作 $C_1 \leq_{pc} C_2$，表示这样的归约存在。

直观地说，第一项表明，函数对 (f, h) 将 C_1 嵌入 C_2,；第二项则表明，在区分不同的 C_1-概念时，C_2-例子并不比 C_1-例子更有优势。以下命题可由定义直接得出：

命题 A.5. 设 $C_1 = (C_1, E_1, \lambda_1)$ 和 $C_2 = (C_2, E_2, \lambda_2)$ 是两个概念类，且 $C_1 \leq C_2$。若对于某个概念 $c \in C_1$，C_1 中的每个带标签样例唯一刻画集的大小都至少为 n，则概念 $f(c)$ 在 C_2 中也满足这一性质。

命题 A.6. $\mathrm{PL}_O[PROP] \preceq \mathrm{PL}_{O'}[PROP]$ 当 $O \preceq O'$ 时成立。

我们现在将运用这些归约。

命题 A.7. 以下成立：

(1) $\mathrm{PL}_{\{\oplus^3\}}$[命题] $\leq_{pc} \mathrm{PL}_{\{\mathrm{oxor}\}}$[命题 $\cup\{w\}$].

(2) $\mathrm{PL}_{\{\oplus^3\}}$[命题] $\leq_{pc} \mathrm{PL}_{\{\mathrm{aimp}\}}$[命题 $\cup\{w\}$]。

证明。(1) $f(\varphi) = \begin{cases} \text{每个 } \mathrm{PL}_{\{\oplus\}} \text{ 公式都可以写成 } p_{i_1} \oplus \cdots \oplus p_{i_n} \text{（其中 } n \text{是奇数）。令} \\ w \vee (w \oplus p), \text{ 若 } \varphi = p, \text{ 其中 } p \text{是一个命题变量。} \\ w \vee (q \oplus \alpha_1(\theta)), \text{ 若 } \varphi \text{等价于 } \theta \oplus q, \text{ 且不含重复项。} \end{cases}$ $h(V) = V \cup \{(w,\ 0)\}$

显然，在 w 为假的赋值下，$f(\phi)$ 与 ϕ 等价；而在满足 w 的赋值下，$f(\phi)$ 总为真。因此，命题演算归约的两个条件均得到满足

(2) 由于 $\{\oplus^3\} \preceq \{\wedge,\ \rightarrow\}$，只需给出一个从 $\mathrm{PL}_{\wedge,\ \rightarrow}$[prop] 到 $\mathrm{PL}_{\mathrm{aimp}}$[prop $\cup\{w\}$]的命题演算归约。令 $f(\varphi) = w \wedge (w \rightarrow f'(\varphi))$，其中

$$f'(\varphi) = \begin{cases} p & \text{if } \varphi = p, \text{ where } p \text{ is a propositional variable.} \\ f'(\theta) \wedge (w \rightarrow f'(\eta)) & \text{if } \varphi = \theta \wedge \eta. \\ w \wedge (f'(\theta) \rightarrow f'(\eta)) & \text{if } \varphi = \theta \rightarrow \eta. \end{cases}$$

此外，令 $h(V) = V \cup \{\{w,\ 1\}\}$。显然，在$w$ 为真的赋值下，$f(\phi)$与 ϕ等价；而在 w 为假的赋值下，$f(\phi)$恒为假。因此，命题演算归约的两个条件均得到满足。□

定理 3.19。 设 O 是一个布尔函数集。以下各项等价：

(1) $O \preceq \{\wedge, \vee, \top, \bot\}$ 或 $O \preceq \{\neg, \bot\}$。(2) 每个 $\phi \in \mathrm{PL}_O$ 都能由有限个带标签样例在PL_O 中唯一刻画；(3) 存在一个函数 f，使得对于所有有限的 prop 集，每个 $\phi \in \mathrm{PL}_O[\mathit{prop}]$ 都能由一组 $f(|\phi|_{\mathrm{dag}})$ 带标签样例在$\mathrm{PL}_O[\mathit{prop}]$ 中唯一刻画。

证明。从 1 到 2 的蕴涵由定理 A.1 和定理 B.3 连同命题 A.5 与命题 A.6 给出。从 2 到 3 的蕴涵是直接的。从 3 到 1 的蕴涵用逆否法证明。对 Post 格的直观检视表明，当 $O \not\preceq \{\wedge, \vee, \top, \bot\}$ 且 $O \not\preceq \{\neg, \top\}$ 时，要么 $\{\oplus^3\} \preceq O$要么 $\{\mathrm{aimp}\} \preceq O$要么 $\{\mathrm{oxor}\} \preceq O$。第一种情形由定理 A.3 处理，第二种和第三种情形则由命题 A.5 和命题 A.7 得出。□

B 定理的证明 4.24

定理 4.24 的证明建立在若干先前结果之上。

定理 B.1（[CK22]）。设 PROP 为命题变量的任一非空有限集。则下列结论成立：

(1) $\mathrm{ML}_{\{\Diamond,\Box,\wedge,\vee\}}[\mathit{prop}], \mathrm{ML}_{\{\Box,\wedge,\vee,\top,\bot\}}[\mathit{prop}]$ 和 $\mathrm{ML}_{\{\Diamond,\wedge,\vee,\top,\bot\}}[\mathit{prop}]$ 均具有有限刻画。此外，这些有限刻画可以有效计算。(2) $\mathrm{ML}_{\{\Diamond,\Box,\wedge,\bot\}}[\mathit{prop}]$ 和 $\mathrm{ML}_{\{\Diamond,\Box,\vee,\top\}}[\mathit{prop}]$ 均不具有有限刻画。

定理 B.2（[CKO24]）。设 PROP 是一个由有限个命题变量组成的有限集。那么，$\mathrm{ML}_{\{\Diamond,\Box,\wedge,\top\}}[\mathit{PROP}]$和 $\mathrm{ML}_{\{\Diamond,\Box,\vee,\bot\}}[\mathit{PROP}]$ 均具有有限刻画。此外，这些有限刻画可以有效计算。[4]

[4]事实上，被引用的论文只给出了 $\mathrm{ML}_{\{\Diamond,\Box,\wedge,\top\}}$[命题] 的结果，但另一个结果可通过直接的对偶化论证得出，正如 [CK22定理 3 的证明中所述。9]

定理 B.3。 设 $prop$ 是任意非空的命题变量有限集。那么，$\mathrm{ML}_{\{\Diamond,\Box,\neg,\top\}}[prop]$具有有限刻画。此外，这些有限刻画可以有效计算。

证明。此片段中的每个公式都属于以下四种形式之一，其中 $n \geq 0$ 且每个 $\circ_i \in \{\Diamond, \Box\}$:

(1) $\circ_1 \ldots \circ_n p$(2) $\circ_1 \ldots \circ_n \neg p$(3) $\circ_1 \ldots \circ_n \top$，其中 $n = 0$ 或 $\circ_n = \Diamond$(4) $\circ_1 \ldots \circ_n \bot$，其中 $n = 0$ 或 $\circ_n = \Box$

我们将 n 称为该公式的深度 。

深度为 n 的类型 1 公式具有这样的特征：它们符合正例 $(M_1, 0)$ 和负例 $(M_2, 0)$，其中 M_1 是链 $0 \to 1 \to \ldots \to n$ ^{p}（非传递的），而 M_2 是链 $0 \to 1 \to \ldots \to n$（非传递的）。因此，这样的公式 ϕ 可以通过选取这两个带标签的示例，再加上有限多个额外例子来与同一 n取值下的其他类型 1 公式区分开来。类型 2 公式也可以进行类似的分析，只需将两个示例的标签互换。深度为 n 的类型 3 公式具有这样的特征：它们符合正例 $(M_1, 0)$、$(M_2, 0)$、$(M_3, 0)$ 和 $(M_4, 0)$性质，其中 $M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = 0 \to 1 \to \cdots n$ 且 $M_4 = 0 \to 1 \to \cdots n \to n+1$。因此，同样可以通过选取这两个带标签的示例，再加上有限多个额外例子，将这样的公式 ϕ 与同一 n取值下的其他类型 3 公式区分开来。注意，正例 $(M_1, 0)$ 排除了所有类型 1 公式，而该正例排除了所有类型 2 和 4 公式；正例 $(M_3, 0)$ 和 $(M_4, 0)$ 合起来则排除了所有深度严格大于 n 的类型 3 公式，其中 $\circ_n = \Diamond$ 或 $\circ_n = \Box$，分别如此。类型 4 的公式也可以进行类似分析，只需将相同的四个例子用作反例，而非正例。□

定理 4.24 证明的其余部分包括若干归约，以及一如既往地对 Post 格进行仔细分析。具体而言，我们将再次使用附录 A中引入的命题演算归约。

引理 B.4。 设 O 为任意布尔函数集，$prop$ 为任意有限命题变量集。以下结论成立：

(1) $\mathrm{PL}_O[\text{命题}] \leq_{pc} \mathrm{ML}_{O\cup\{\Diamond\}}[\{p\}]$
(2) $\mathrm{PL}_O[\text{命题}] \leq_{pc} \mathrm{ML}_{O\cup\{\Box\}}[\{p\}]$

提醒读者，当我们写 $\mathrm{ML}_{O\cup\{\Diamond\}}$ 或 $\mathrm{ML}_{O\cup\{\Box\}}$ 时，默认将 O 中的布尔函数替换为表示它们的任意命题公式）。

证明。1. 令 $\mathrm{prop} = \{p_0 \ldots, p_{n-1}\}$。命题演算归约由（$f, g$）给出，其中

$$f(\phi) = \phi[p_0 \mapsto p, p_1 \mapsto \Diamond p, p_2 \mapsto \Diamond\Diamond p, \ldots, p_{n-1} \mapsto \Diamond^{n-1} p]$$
$$g(V) = (\mathbb{L}_n(V), 0)$$

其中，对于任意命题赋值 V，$\mathbb{L}_n(V)$ 表示（非传递）链

$$0 \to 1 \to \ldots \to n-1,$$

其中，世界 i满足 p，当且仅当 $V(p_i) = 1$。显然，$g(V) \models f(\phi)$ 当且仅当 $V \models \phi$。此外，对于每个带指定世界的克里普克模型 (M, w)，令 $V_{M,w}$为由 $V_{M,w}$给出的命题赋值，其中 $p_i = 1$ 当且仅当$M, w \models \Diamond^i p$。那么显然，$M, w \models f(\phi)$ 当且仅当 $V_{M,w} \models \phi$。因此，(f, g) 是一个有效的命题演算归约。2. 证明类似，只需用 $\Box$ 替换 $\Diamond$。 □

在组合 合并附录 A 中关于 $\mathrm{PL}_{\oplus^3}$、$\mathrm{PL}_{\mathrm{oxor}}$ 和 $\mathrm{PL}_{\mathrm{aimp}}$ 的结果A，可得：

命题 *B.5*。$ML_{\oplus^3,\Diamond}[\{p\}], ML_{\oplus^3,\Box}[\{p\}], ML_{\mathrm{oxor},\Diamond}[\{p\}], ML_{\mathrm{oxor},\Box}[\{p\}], ML_{\mathrm{aimp},\Diamond}[\{p\}]$，和 $ML_{\mathrm{aimp},\Box}[\{p\}]$ 不具有有限刻画。事实上，在这些片段中的每一个片段里，原子公式 p 都不能由有限样例集唯一刻画。

证明。 附录 A 中的结果表明，在各个命题片段 $\mathrm{PL}_{\oplus^3}[\mathrm{PROP}], \mathrm{PL}_{\mathrm{oxor}}[\mathrm{PROP}], \mathrm{PL}_{\mathrm{aimp}}[\mathrm{PROP}]$，中，原子公式 p_0 已经需要 $\Omega(|\mathrm{PROP}|)$ 个带标签的样例。根据命题 A.5 以及引理 B.4的证明（因为无论选择哪个 p_0，该归约总是将 p 映射到 PROP），模态公式 p 在所述六个模态片段中的每一个片段里，都不能由有限样例集唯一刻画。 □

现在我们可以开始证明定理4.24。

定理 4.24。 固定 $\Lambda = \mathbf{K}$。设 Φ 是一个简单模态公式集，且至少包含 $\Diamond$、$\Box$ 中的一个。则以下各项等价：

(1) 每个 $\phi \in ML_\Phi[prop]$（其中 *prop* 是一个非空有限命题变量集）都可由有限个带标签样例相对于 $ML_\Phi[prop]$ 唯一刻画。*(2)* 概念类 $ML_\Phi[prop]$（其中 *prop* 是一个非空有限命题变量集）可通过成员查询有效地精确学习。*(3)* $\Phi \preceq \{\wedge, \vee, \top, \bot, \Diamond\}$ 或 $\Phi \preceq \{\wedge, \vee, \top, \bot, \Box\}$ 或 $\Phi \preceq \{\wedge, \vee, \Diamond, \Box\}$ 或 $\Phi \preceq \{\neg, \bot, \Diamond, \Box\}$ 或$\Phi \preceq \{\wedge, \top, \Diamond, \Box\}$ 或 $\Phi \preceq \{\vee, \bot, \Diamond, \Box\}$。

证明。 众所周知，一个概念类能够通过成员查询有效地（但不一定高效地）精确学习，当且仅当该概念类具有有限刻画，并且存在一种有效算法，能够为每个概念计算出一个唯一刻画它的带标签样例有限集。一个方向上，利用带成员查询的有效精确学习算法，可以为任意概念构造有限刻画，即由算法在识别出所讨论的概念之前提出的成员查询中出现的例子组成。确切地说，这还假设我们能够有效判断给定例子对于给定概念是正例还是反例；这一假设在我们的情形中确实成立。反过来，任何能够构造有限唯一刻画的有效算法，都可以导出一个蛮力精确学习算法：我们只需枚举所有假设，然后逐一检查，通过成员查询测试这些假设各自的唯一刻画中的例子。由此便证明了从 2 到 1 的方向。结合定理 B.1 和定理 B.3，这也表明 3 蕴含 2。

只需证明 1 蕴涵 3。这一蕴涵将通过逆否法证明。仔细考察 Post格可知，对于每个模态公式的简单集合 Φ，以下两种情况必有一种成立：

- $\Phi \preceq \{\Diamond, \wedge, \vee, \top, \bot\}$ 或 $\Phi \preceq \{\Box, \wedge, \vee, \top, \bot\}$ 或 $\Phi \preceq \{\Diamond, \Box, \wedge, \vee\}$ 或 $\Phi \preceq \{\Diamond, \Box, \neg, \top\}$ 或$\Phi \preceq \{\Diamond, \Box, \wedge, \top\}$ 或 $\Phi \preceq \{\Diamond, \Box, \vee, \bot\}$。
- $\{\Diamond,$ 反蕴含$\} \preceq \Phi$ 或 $\{\Diamond,$ 异或$\} \preceq \Phi$ 或 $\{\Diamond, \oplus^3\} \preceq \Phi$ 或 $\{\Box,$ 异或$\} \preceq \Phi$ 或 $\{\Box,$ 反蕴含$\} \preceq \Phi$ 或 $\{\Box, \oplus^3\} \preceq \Phi$ 或 $\{\Diamond, \Box, \wedge, \bot\} \preceq \Phi$ 或 $\{\Diamond, \Box, \vee, \top\} \preceq \Phi$。

由于第一种情况不适用，我们必定处于第二种情况。我们已经注意到，$ML_{\oplus^3,\Diamond}[\mathrm{prop}], ML_{\oplus^3,\Box}[\mathrm{prop}], ML_{\mathrm{oxor},\Diamond}[\mathrm{prop}], ML_{\mathrm{oxor},\Box}[\mathrm{prop}], ML_{\mathrm{aimp},\Diamond}[\mathrm{prop}]$，和 $ML_{\mathrm{aimp},\Box}[\mathrm{prop}]$不具有有限刻画。显然，只要 $\Phi \preceq \Phi'$，$ML_\Phi[\mathrm{prop}] \preceq ML_{\Phi'}[\mathrm{prop}]$ 就成立，因此前六种可能性便都已涵盖。类似地，如果 $\{\Diamond, \Box, \wedge, \bot\} \preceq \Psi$ 或 $\{\Diamond, \Box, \vee, \top\} \preceq \Psi$，那么由定理 B.1 可知，$ML_\Psi[\mathrm{prop}]$ 不具有有限刻画。 □