4-球面中 2-分量平凡链环的布鲁尼性质跨越 3-圆盘

Weizhe Niu

摘要

我们证明，S^4 中的 2-分量平凡链环存在无穷多个布鲁尼性质的跨越 3-圆盘同痕类。

arXiv:2603.05063v1 [math.GT] 5 Mar 2026

1 引言

设$L \subset S^4$ 是一个m分量 2-链环。L 的跨越圆盘的集合是一个光滑嵌入的并，由 3-圆盘 组成

$$D = \bigsqcup_{i=1}^{m} D_i^3 \subset S^4 \qquad \text{with} \qquad \partial D = L.$$

令U_m 表示S^4中具有m 个分支的标准无链环。U_m的开管状邻域的补空间微分同胚于 $\#_m S^1 \times D^3$，记作 $\#_{i=1}^m A_i$，其中$A_i = S^1 \times D^3$。在补空间中，存在一族标准跨越圆盘

$$D_m^{\text{std}} = \{D_i\}_{i=1,\dots,m}, \qquad D_i = \{pt\} \times D^3 \subset A_i.$$

对于$m = 1$, [1] 给出了平凡结的无穷多个不同痕的跨越圆盘。我们关注$m = 2$ 的情形，并记$D^{\text{std}} := D_2^{\text{std}}$。

本文构造了无链环U_2 的无穷多对不同痕的跨越圆盘；它们具有**布鲁尼性质**，即每个圆盘本身都是同痕标准的。这些圆盘是将标准圆盘经哑铃微分同胚群作用后所得的像

$$\Phi_{\mathcal{B}(tv_B v_R t u^k t^{-1})} \in \pi_0\text{Diff}(\#_2 S^1 \times D^3, \partial), \qquad k \in \mathbb{Z}^+,$$

该微分同胚群定义于 [6]（参见 [6] 的命题 5.12；哑铃图示的简要回顾见第 3 节）。$k = 1$时的情形见图1。关键的工具是 [6] 中的广义W_3 不变量:

$$W_3^{\Delta}\colon \pi_0\text{Diff}(\natural_2 S^1 \times D^3, \partial) \to \Lambda := \mathbb{Q}\langle t_1, t_3, u_1, u_3\rangle / \mathcal{H}$$

它取决于适当嵌入的 3-球 $\Delta \subset X = \natural_2 S^1 \times D^3$ 的选取。这里， $\mathcal{H}$ 表示 [6] 中定理 3.16 所定义的六边形关系；见 5)。我们取

$$\Delta_1 = D_1, \qquad \Delta_2 = D_2,$$

并将相应的不变量记作 $W_3^{\Delta_1}$ 和 $W_3^{\Delta_2}$。此前，W_3 的推广主要见于边界连通和中，例如参见 [4] 和 [6]。利用.....之间的关系

$$X = \natural_2 S^1 \times D^3 \qquad \text{and} \qquad Y = \#_2 S^1 \times D^3,$$

我们能够在 $\pi_0\text{Diff}(Y\ \partial)$ 的一个子群上构造诱导不变量 $W_3'^{\Delta_i}$（第 2 节），并用它检测内部连通和 Y 中的哑铃微分同胚。本文的主要结果如下:

定理 A. 对于$k \geq 1$，哑铃微分同胚 $\Phi_{\mathcal{B}(tv_B v_R t u^k t^{-1})} \in \pi_0\text{Diff}(\#_2 S^1 \times D^3, \partial)$ 非平凡且两两非同痕。此外，它们可由诱导不变量$W_3'^{\Delta_i}$检测（等价地，通过第 2 节的构造由$W_3^{\Delta_i}$检测）。

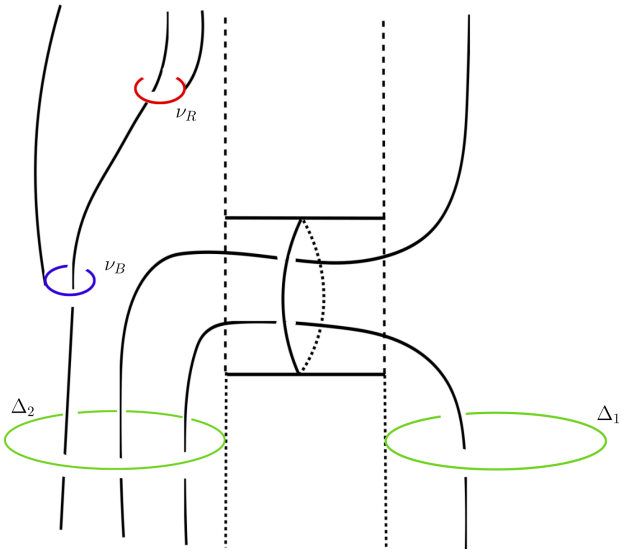


图1：嵌入于 $\natural_2 S^1\times D^3\subset \#_2 S^1\times D^3$ 中的哑铃 $\mathcal{B}(t\nu_B\nu_R tut^{-1})$。

定理 B. 无链环U_2 存在无穷多组布鲁尼安跨越圆盘

$$\Phi_{\mathcal{B}(t\nu_B\nu_R tu^k t^{-1})}(D^{\mathrm{std}}) \qquad (k=1,2,\dots),$$

它们两两非同痕。

为看出这些集合具有布鲁尼性质，请注意，对 A_i 进行封帽，即粘合一份 $S^2\times D^2$ 的副本，便得到

1. 对于 $i=1$，所得哑铃与 $\mathcal{B}(t\nu_B\nu_R)$ 同痕。
2. 对于 $i=2$，所得哑铃与 $\mathcal{B}(\nu_B\nu_R u^k)$ 同痕。

在这两种情形下，上述杠铃图在 $S^1\times D^3$ 中都是平凡的（参见 [6] 的第 2 节）。

备注。 这些跨越圆盘在$S^4\subset D^5$ 中观察时变成了同痕标准，因为这些哑铃图$\mathcal{B}$（$t\nu_B\nu_R tu^k t^{-1}$）可以解开。这与 [7]的结果一致。

本文结构如下。第 2 节将跨越圆盘与Y 的微分同胚联系起来，并构造诱导不变量$W_3'^{\Delta_i}$。第 3 节回顾 Dax 不变量，并说明相关的嵌入子群如何产生哑铃生成元；特别地，对应的W_3值属于命题 3.3 的可容许张成空间。第 4 节在 W_3 目标空间（模去六边形关系）上构造系数泛函，这些泛函在可容许张成空间上为零，却能检测族$t\nu_B\nu_R tu^k t^{-1}$，从而完成定理 A 的证明。最后，第 5 节证明定理 B。

致谢。 作者感谢MarkPowell让他注意到这个问题，并感谢Jianfeng Lin和Brendan Owens提出的有益意见。

2 从跨越圆盘到X中的嵌入3-球

Let

$$X=S^1\times D^3\natural S^1\times D^3, \qquad Y=S^1\times D^3\#S^1\times D^3.$$

图 2 示意性地描绘了X 与Y 之间的关系（图中低一维表示）。如图 2 所示，令 $\mathcal{U}$ 为Y 中的一条标准适当嵌入弧。于是，X 可由Y 钻去 $\mathcal{U}$ 的一个邻域得到。反过来，沿着连通和颈部中一个切片的边界 2-球的邻域向X 附加一个 3-柄，即可得到Y。图 2 中的绿色部分表示这一附加操作（绘制为三维的 2-柄）。

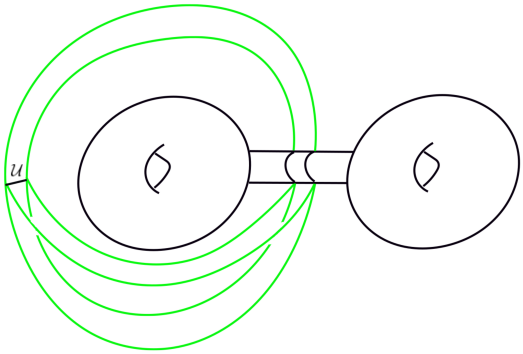


图 2：$S^1\times D^3 \natural S^1\times D^3$ 与 $S^1\times D^3 \# S^1\times D^3$之间的关系。

我们将 $\mathrm{Emb}(I\times D^3, Y; \mathcal{U}\times D^3)$ 记作$I\times D^3$ 在Y中的适当嵌入副本空间中包含 $\mathcal{U}\times D^3$ 于 $\{0,1\}\times D^3$, 上且与之相同、并且包含 $\mathcal{U}\times D^3$ 的道路连通分支。考虑将Y的一个微分同胚限制到固定邻域 $\mathcal{U}\times D^3$ 所得到的纤维化：

$$\mathrm{Diff}(X,\partial) \longrightarrow \mathrm{Diff}(Y,\partial) \longrightarrow \mathrm{Emb}(I\times D^3, Y; \mathcal{U}\times D^3).$$

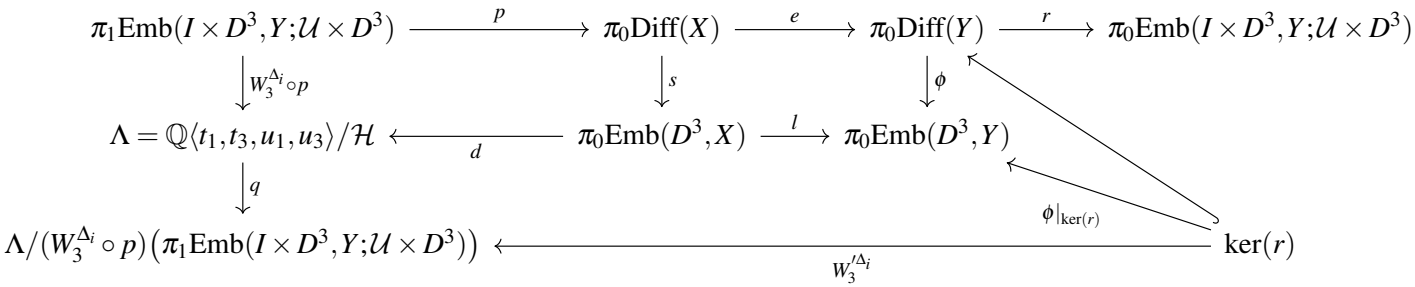
诱导出的同伦群长正合列的最后几项为：

$$\cdots \to \pi_1\mathrm{Emb}(I\times D^3, Y; \mathcal{U}\times D^3) \xrightarrow{p} \pi_0\mathrm{Diff}(X,\partial) \xrightarrow{e} \pi_0\mathrm{Diff}(Y,\partial) \xrightarrow{r} \pi_0\mathrm{Emb}(I\times D^3, Y; \mathcal{U}\times D^3) \to \dots$$

其中映射p 由同痕延拓给出，而映射e 则通过恒等映射将X的微分同胚延拓到Y。对于每个$i=1,2$，我们在下图中概述这一情形。这里

$$\pi_0\mathrm{Emb}(D^3, X) := \pi_0\mathrm{Emb}(D^3, X; \partial\Delta_i),$$

表示边界与 $\partial\Delta_i$重合的X 中嵌入的 3-球的同痕类集合；对于 $\pi_0\mathrm{Emb}(D^3, Y)$，定义类似。映射$l$ 为自然包含。为节省空间，我们在图中省略 ∂，但图中显示的所有映射类群都是保边界的。映射s 和 ϕ 通过对 Δ_i应用微分同胚给出，左下方的映射q 则是商映射。复合映射$d\circ s$ 是$W_3^{\Delta_i}$。



存在一个诱导不变量

$$W_3'^{\Delta_i}\colon \ker(r) \to \Lambda/(W_3^{\Delta_i}\circ p)\big(\pi_1\mathrm{Emb}(I\times D^3, Y; \mathcal{U}\times D^3)\big)$$

定义如下。对于 $\ker(r)\subset\pi_0\mathrm{Diff}(Y\ \partial)$ 中的一个类，将其沿着 e提升到 $\pi_0\mathrm{Diff}(X\ \partial)$，并应用 $q\circ W_3^{\Delta_i}$。这是良定义的：提升到 $\pi_0\mathrm{Diff}(X)$ 的任意两个选择相差一个 $p(\pi_1\mathrm{Emb}(I\times D^3, Y;\ \mathcal{U}\times D^3))$ 中的元素，因此它们相差的元素经 $W_3^{\Delta_i}$映射后的值属于我们取商所依据的子群。这说明结果与提升的选择无关。特别地，对于 $[\Phi]\in\ker(r)$，若复合 $W_3'^{\Delta_i}([\Phi])\neq 0$，则 $[\Phi]$在 $\pi_0\mathrm{Diff}(Y\ \partial)$ 中非平凡。

在第 3 节和第 4 节中，我们证明

$$W_3'^{\Delta_i}(\Phi_{\mathcal{B}(tv_Bv_Rtu^kt^{-1})}) \neq 0$$

对于 $k\in\mathbb{Z}^+$ 和 $i=1,2$，这导出了定理 A。在第 5 节中，我们证明 $\Phi_{\mathcal{B}(tv_Bv_Rtu^kt^{-1})}(\Delta_i)$ 产生了非同痕的跨越圆盘。

3 Dax 不变量与哑铃生成元

本节中，我们分析像 $p(\pi_1\mathrm{Emb}(I\times D^3,Y))$。由于映射 $\mathrm{Emb}(I\times D^3,Y)\to\mathrm{Emb}(I,Y)$ 是通过限制到 $I\times\{0\}$ 给出的纤维化，且其纤维与 $SO(3)$ 的自由环空间同伦等价，因此只需理解 $\pi_1\mathrm{Emb}(I,Y)$。我们使用定理 1.1 中的结果，它给出了一个同构

$$\mathbb{Z}[\pi_1 Y\setminus 1]/\mathrm{dax}_{\mathcal{U}}(\pi_3 Y)\to\pi_1(\mathrm{Emb}(I,Y;\mathcal{U})).$$

此处 $\mathbb{Z}[\pi_1 Y\setminus 1]$ 仅被视为一个阿贝尔群，我们忽略其环结构。事实上，对任意光滑定向四维流形 Y，存在一个中心群扩张

$$1\to\mathbb{Z}[\pi_1 Y\setminus 1]/\mathrm{dax}_{\mathcal{U}}(\pi_3 Y)\to\pi_1(\mathrm{Emb}(I,Y;\mathcal{U}))\to\pi_2 Y\to 1$$

其中 $\mathrm{dax}_{\mathcal{U}}$ 表示**Dax 不变量**：

$$\mathrm{dax}_{\mathcal{U}}\colon\pi_3 Y\to\mathbb{Z}[\pi_1 Y\setminus 1]$$

我们在下文简要回顾这一点。这里“中心”是指 $\mathbb{Z}[\pi_1 Y\setminus 1]/\mathrm{dax}_{\mathcal{U}}(\pi_3 Y)$ 的像落在$\pi_1(\mathrm{Emb}(I,Y;\mathcal{U}))$ 的中心内。

对于 $\in\pi_3\mathrm{Y}$，$\mathrm{dax}_{\mathcal{U}}(\mathrm{a})$ 的定义方式是：选取一个表示 a 的、将 I 浸入 Y 的二参数浸入族，它可视为 $\mathcal{U}$ 处常值环的自同伦，并分析其双重点。换言之，选取一个映射 $\mathrm{F}:\mathrm{S}^2\to\mathrm{Imm(I,Y}\,;\mathcal{U})$，使得它与同 $\mathcal{U}^{-1}$（即 $\mathcal{U}$ 的逆弧）的拼接映射复合后给出 a。空间 $\mathrm{Imm(I,Y}\,;\mathcal{U})$ 表示与 $\mathcal{U}$ 具有相同端点的浸入区间空间。存在自然包含映射 $\mathrm{Emb(I,Y}\,;\mathcal{U})\hookrightarrow\mathrm{Imm(I,Y}\,;\mathcal{U})$。由 $(\mathrm{t}\ \theta)\to(\mathrm{t},\mathrm{F(t)}(\theta))$ 定义的映射 $\mathrm{F}:\mathrm{I}^2\times\mathrm{I}\to\mathrm{I}^2\times\mathrm{Y}$ 可扰动为一个仅具有（有限多个）孤立横截双重点的浸入。对每个双重点 $(\mathrm{t}_i,\mathrm{x}_i)$，其中 $\mathrm{x}_i=\mathrm{F(t}_i)(\theta_-)=\mathrm{F(t}_i)(\theta_+)$ 且 $\theta_-<\theta_+$，将双重点环 g_{x_i} 定义为拼接 $\mathrm{F(t}_i)|_{[-1,\theta_-]}\cdot\mathrm{F(t}_i)^{-1}|_{[-1,\theta_+]}$。于是

$$\mathrm{dax}_{\mathcal{U}}(a):=\sum\varepsilon_{x_i}g_{x_i}\in\mathbb{Z}[\pi_1 Y]$$

其中，ε_{x_i} 是F 的局部定向，通过比较切丛的定向与F 的导数像相对于$I^2\times Y$的切空间所确定。通俗地说，它记录了一般二参数族的浸入弧中出现的双重点所对应的带符号基本群元素。详情见 [3]。

令 $\pi_1(Y\ \partial Y)$表示映射$k\colon I^1\to Y$的同伦类集合，其中端点为$k(-1)=x_-$和$k(1)\in\partial Y$。它在 $\pi_1(Y,x_-)$的作用下构成一个集合，该作用通过前接实现。以下定理引自 [3]，它将$\mathrm{dax}_{\mathcal{U}}$与**等变交配对**联系起来

$$\lambda\colon\pi_3 Y\times\pi_1(Y,\partial Y)\to\mathbb{Z}[\pi_1 Y\setminus 1].$$

定理 3.1.（见 [3]中的定理 A）令$\mathcal{U}_-:I\to Y$为一条嵌入弧，端点为$\mathcal{U}_-(-1)=x_-$ 和 $\mathcal{U}_-(1)=x'_-$，其中x'_- 是靠近x_- 的一个点，使得 $\mathcal{U}_-$ 相对于端点同痕至∂Y内。对于Y中的适当嵌入弧$\mathcal{U}$，以及Y中的$a\in\pi_3$和Y中的$g\in\pi_1$，以下结论成立：

- $\mathrm{dax}_{\mathcal{U}}(a)=\mathrm{dax}^{\mathcal{U}_-}(a)+\lambda(a\ \mathcal{U})$,
- $\mathrm{dax}^{\mathcal{U}_-}(ga)=g\mathrm{dax}^{\mathcal{U}_-}(a)\,\bar{}g-\lambda(ga,g)+\lambda(g,ga)$。

此处的 $\mathrm{dax}^{\mathcal{U}_-}$ 定义方式与 $\mathrm{dax}_{\mathcal{U}}$ 相同，但使用了不同的基点。

现在简要回顾等变交配对 λ 的定义，并请读者参阅[3]。对于由 $\mathrm{A}:\mathrm{S}^3\to\mathrm{Y}$ 表示的 $\in\pi_3\mathrm{Y}$ 和由 $\mathrm{k}:(\mathrm{I}\ \partial\mathrm{I})\to(\mathrm{Y}\ \partial\mathrm{Y})$ 表示的 $\mathrm{k}\in\pi_1(\mathrm{Y}\ \partial\mathrm{Y})$，我们可以假设它们在 Y 的内部横截地相交。对于每个交点 y，都有一个双重点环 $\lambda_y(\mathrm{A,k})=\lambda_y(\mathrm{A})\cdot\lambda_y(\mathrm{k})^{-1}$，其中 $\lambda_y(\mathrm{A})$ 和 $\lambda_y(\mathrm{k})^{-1}$ 分别是沿着 A 和 k 从 $\mathrm{k}(-1)=\mathrm{x}_-$ 到 y 的路径。定义

$$\lambda(a,k)=\sum_{y\in(A\cap k)\setminus\{x_-\}}\varepsilon_y(A,k)[\lambda_y(A,k)]/[1],$$

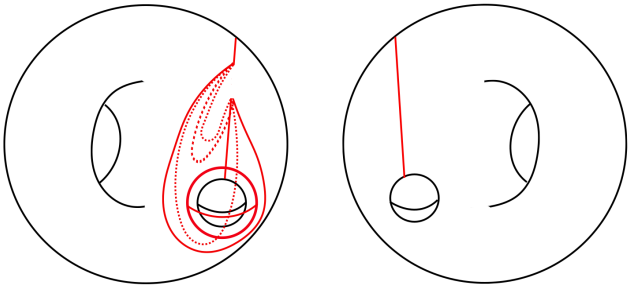


图3：通过嵌入区间的弧环表示连通和球面S。

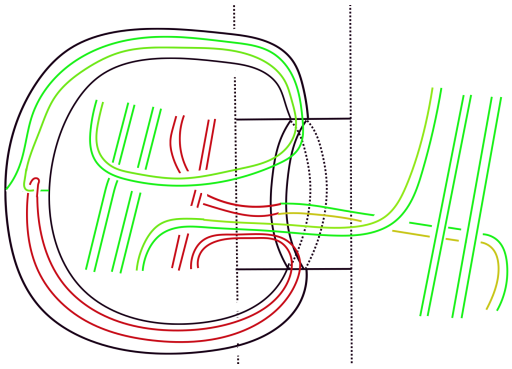


图4： $\pi_1\mathrm{Emb}(I,X)$中的元素$t^3u^3t^2$。

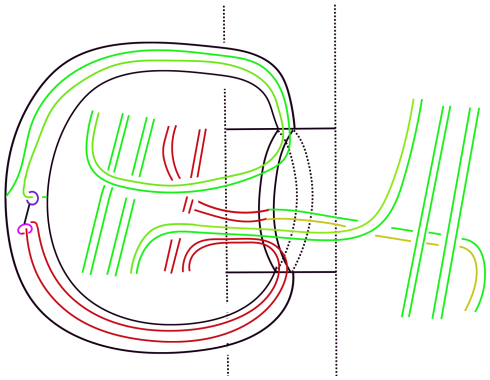


图5：由$t^3u^3t^2$在 $\pi_1\mathrm{Emb}(I,X)$中诱导的嵌入哑铃。

其中符号 $\varepsilon_y(A,\ k)$ 由 y 处的局部定向给出。可以验证， λ 关于第一个坐标是线性的，并且 $\lambda(a,\ gk) = \lambda(a,\ g) + \lambda(a,\ k)\ {}^{-}g$对于 $g \in \pi_1 Y$、$k \in \pi_1(Y\ \partial Y)$ 以及 $a \in \pi_3 Y$成立。注意，取 [1] 的商意味着我们忽略 $1 \in \pi_1 Y$处的项。

然而，对我们而言，在$Y = S^1 \times D^3 \# S^1 \times D^3$的情形下，情况得到了简化。群 $\pi_3 Y \cong \mathbb{Z}[t^{\pm}, u^{\pm}]$ 由 $Y \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle u \rangle * \langle t \rangle$ 作用于连通和球面S所生成。此外， $\pi_2 Y = 0$，因此存在一个同构

$$\mathbb{Z}[\pi_1 Y \setminus 1]/\mathrm{dax}_{\mathcal{U}}(\pi_3 Y) \to \pi_1(\mathrm{Emb}(I, Y; \mathcal{U})).$$

图3展示了通过弧环表示连通和2-球面的三维类比表示。

利用定理 3.1，我们可以按如下方式计算 λ的像，其结果为 $2\mathbb{Z}[\mathrm{t}^{\pm 1}, \mathrm{u}^{\pm 1} \setminus 1]$。对于 $1 \in \pi_3 \mathrm{Y}$ 的一个代表元，例如连通和球面，它没有自交点（见图 2），因而对应一个平凡环，所以等变交配对为0。对于多项式的一个代表元a，例如$\mathrm{t}^i\mathrm{u}\ \mathrm{jt}^k \in \pi_3 \mathrm{Y}$， $\lambda(\mathrm{a}\ \mathcal{U})$会得到$\mathrm{t}^i\mathrm{u}\ \mathrm{jt}^k$。此外，若我们选择 $\mathcal{U}_-$为一条两个端点都位于Y 的同一个边界分支上的弧，则$\mathrm{dax}^{\mathcal{U}_-}(\mathrm{t}^i\mathrm{u}^j\mathrm{t}^k) = \mathrm{t}^i\mathrm{u}^j\mathrm{t}^k$，因为我们可以为其选择一个只有一个双重点的代表元，并产生相同的多项式。因此，$\pi_1\mathrm{Emb(I,Y}\,)$同构于

$$\mathbb{Z}[t^{\pm 1}, u^{\pm 1} \setminus 1]/2\mathbb{Z}[t^{\pm 1}, u^{\pm 1} \setminus 1] \cong (\mathbb{Z}/2)[t^{\pm 1}, u^{\pm 1} \setminus 1].$$

这里的一个元素通过如下方式描述：选取基点的一小段弧（见图 2）作为基点弧 $\mathcal{U}$，沿着与该元素对应的路径推动它，绕基点弧旋转，最后再返回。 [1] 的定义 4.1 将这一过程定义为**旋转**。[3] 中也对此进行了描述。

像 $p(\pi_1\mathrm{Emb}(I,Y))$ 可以用由二生成元自由群中的字指定的**哑铃微分同胚** 来描述（参见 [1], [2], [6]）。图4给出了 $\pi_1\mathrm{Emb}(I,X)$ 中一个元素的例子，它对应于$t^3u^3t^2$, ，其中 $\mathcal{U}$ 的一段子弧绕着环路$t^3u^3t^2$ 旋转并与自身相链接。这会产生一个

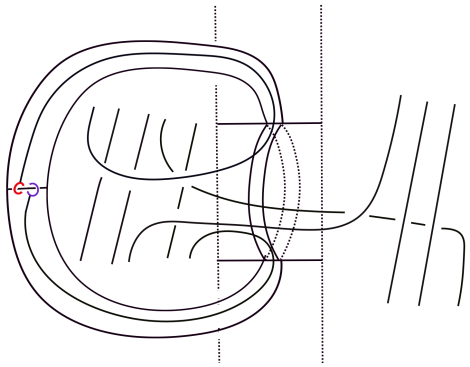


图6：将由$t^3u^3t^2$拖曳得到的哑铃图置于标准位置。

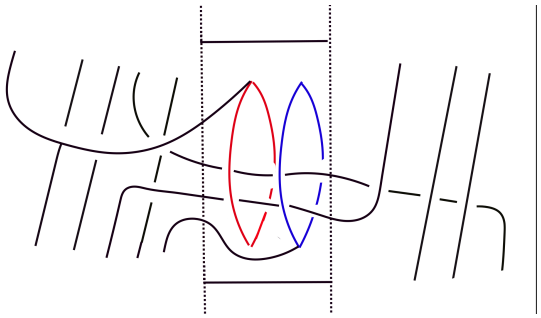


图7：位于$X \subset Y$中的标准位置的诱导哑铃图$\mathcal{B}(t^{-2}\nu_R^{-1}\nu_B^{-1}u^{-3}\nu_B\nu_R t^{-3}\nu_B)$。

双重点，其消解产生一个嵌入弧的一参数族。根据 [1], 的第4节可知，同痕延拓会导出一个微分同胚，其支撑在一个与模型哑铃流形微分同胚的邻域内。图5描绘了由双重点消解所诱导的初始哑铃流形。图6展示了一个同痕的结果，该同痕将两个袖口球面置于标准位置；图7则通过挖去 $\mathcal{U}$ 的一个邻域得到，从而回到X，并对应于

$$t^{-2}\nu_R^{-1}\nu_B^{-1}u^{-3}\nu_B\nu_R t^{-3}\nu_B.$$

更一般地，我们注意到，像$p(\pi_1\mathrm{Emb}(I,Y))$由此类杠铃图诱导的微分同胚生成：

$$t^{x_1}\nu_R\nu_B u^{y_1}\nu_B^{-1}\nu_R^{-1}t^{x_2}\nu_R\nu_B u^{y_2}\nu_B^{-1}\nu_R^{-1}\dots\nu_R\nu_B u^{y_n}\nu_B^{-1}\nu_R^{-1}t^{x_n}$$

对于x_i，$y_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$，对于$i = 1,2,\dots,n$，其中$n$为正整数。这些杠铃图的$W_3^{\Delta_1}$不变量可按照 [6] 中的方法计算（参见 [6]中的引理5.9）。具体而言，它们可以写成与$a\nu_R\nu_B c$ 或$a\nu_B\nu_R c$ 形式同痕的子哑铃的W_3 的线性组合，其中(a,c)是可容许的：

定义 3.2 （可容许对）。 在 $\langle t,u\rangle$ 中，非平凡约化词组成的一对 (a,c) 称为可容许 对，当且仅当满足以下任一条件：

- a 以t 的非零次幂结尾，且c 以u的非零次幂开头；或者
- a 以u 的非零次幂结尾，且c 以t的非零次幂开头。

命题 3.3. 在$p(\pi_1\mathrm{Emb}(I,Y))$中，哑铃图上的$W_3^{\Delta_1}$取值集合包含于以下形式的哑铃图上的$W_3^{\Delta_1}$取值所张成的空间：$a\nu_R\nu_B c$ 或$a\nu_B\nu_R c$ ，其中 (a,c) 为可容许对。

4 定理 A 的证明

我们通过证明哑铃图 $\Phi_{\mathcal{B}(t\nu_B\nu_R t u^k t^{-1})}$, $k = 1,2,\dots$ 不属于可容许哑铃图张成的空间，来证明定理 A。我们在自由群中进行讨论

$$F = \langle t_1, u_1, t_3, u_3\rangle$$

及其有理群环 $\mathbb{Q}[F]$ （视为加法群）。令 $\mathcal{A}$ 表示由F中的约化词构成的自由 $\mathbb{Q}$-向量空间（因此， $\mathcal{A}\cong\mathbb{Q}[F]$按加法理解）。特别地，$t_1,u_1,t_3,u_3$之间不存在交换关系，且单项式相等始终意味着$F$中的约化词相等。

我们首先注意到，对于哑铃图 $\Phi_{\mathcal{B}(t\nu_B\nu_R t u^k t^{-1})}$、$k = 1,2,\dots$，在 Δ_1 与横杠之间有一个类型4交点，而在

Δ_2 与横杠之间有两个类型4交点和一个类型6交点（参见 [6] 的图 14、17 和 25）。将 [6] 的引理 5.10 和引理 5.11 应用于哑铃图 $tv_Bv_Rtu^kt${v12>，其中 $k=1,2,\dots$，可得

$$W_3^{\Delta_1}\left(\Phi_{\mathcal{B}(tv_Bv_Rtu^kt^{-1})}\right) = T_4\left(t^{-1},tu^{-k}t^{-1}\right), \tag{1}$$

$$W_3^{\Delta_2}\left(\Phi_{\mathcal{B}(tv_Bv_Rtu^kt^{-1})}\right) = 2T_4\left(t^{-1},tu^{-k}t^{-1}\right) + T_6\left(t^{-1},tu^{-k}t^{-1}\right). \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned} T_4\left(t^{-1},tu^{-k}t^{-1}\right) = \Big(&t_1^{-1}t_3u_3^{-k}t_3^{-2}+t_1t_3u_3^{-k}-t_1u_1^{-k}t_1^{-1}t_3^{-1}-t_1u_1^{-k}t_1^{-1}t_3\\ &+t_1^{-1}t_3u_3^{-k}t_3^{-1}+t_1t_3u_3^{-k}t_3^{-1}-t_1u_1^{-k}t_1^{-2}t_3^{-1}-t_1u_1^{-k}t_3\Big). \end{aligned} \tag{3}$$

and

$$\begin{aligned} T_6\left(t^{-1},tu^{-k}t^{-1}\right) = {}&t_1u_1^{-k}t_1^{-1}u_3^{-k}t_3^{-1}+t_1u_1^kt_1^{-1}u_3^kt_3^{-1}-t_1t_3u_3^k-t_1t_3u_3^{-k}\\ &+t_1^{-1}t_3u_3^kt_3^{-2}+t_1^{-1}t_3u_3^{-k}t_3^{-2}+t_1^{-1}t_3u_3^{-k}t_3^{-1}+t_1^{-1}t_3u_3^kt_3^{-1}\\ &-t_1u_1^{-k}t_1^{-1}t_3^{-1}-t_1u_1^kt_1^{-1}t_3^{-1}-t_1u_1^{-k}t_1^{-2}t_3^{-1}-t_1u_1^kt_1^{-2}t_3^{-1}\\ &+t_1u_1^{-k}t_3+t_1u_1^kt_3-u_1^{-k}t_1^{-1}t_3u_3^{-k}t_3^{-1}-u_1^kt_1^{-1}t_3u_3^kt_3^{-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

设 $\langle t,u\rangle$ 为 t,u 上的自由群。对任意字 $w\in\langle t,u\rangle$ 定义，

$$w_1 := w(t_1,u_1), \qquad w_3 := w(t_3,u_3),$$

并按 [6] 申的约定记 $w=w^{-1}$。由 [6] 的定理 3.16 可知，对 $\nu,\mu\in\langle t,u\rangle$我们有**六边形关系**

$$H(\nu,\mu) := \nu_1\mu_3 + \mu_1^{-1}\nu_3^{-1} - \nu_1^{-1}\mu_3\nu_3^{-1} - \nu_1\mu_1^{-1}\nu_3 \in \mathcal{A}. \tag{5}$$

按照 [6], 中的方法，我们观察到命题 3.3 中所述的杠铃图在扫描下仅产生类型 1、类型 3、类型 4 和类型 6 的点，从而得到多项式

$$\begin{aligned} T_1(\overline{a},\overline{c}) &= a_1\overline{c}_3a_3+\overline{c}_1a_1a_3-\overline{c}_1\overline{a}_3-\overline{a}_1\overline{c}_3,\\ T_3(\overline{a},\overline{c}) &= -c_1\overline{a}_3c_3+a_1\overline{c}_3a_3+\overline{a}_1c_3\overline{a}_3-c_1a_3-a_1c_3\\ &\quad +c_1\overline{a}_1\overline{a}_3+\overline{c}_1a_1a_3-a_1\overline{c}_1\overline{c}_3,\\ T_4(\overline{a},\overline{c}) &= \overline{a}_1\overline{c}_3\overline{a}_3+a_1\overline{c}_3a_3-\overline{c}_1\overline{a}_3-\overline{c}_1a_3+\overline{a}_1\overline{c}_3+a_1\overline{c}_3\\ &\quad -\overline{c}_1\overline{a}_1\overline{a}_3-\overline{c}_1a_1a_3,\\ T_6(\overline{a},\overline{c}) &= \overline{c}_1\overline{a}_3\overline{c}_3+c_1\overline{a}_3c_3-a_1c_3a_3-a_1\overline{c}_3a_3+\overline{a}_1c_3\overline{a}_3+\overline{a}_1\overline{c}_3\overline{a}_3\\ &\quad +\overline{a}_1\overline{c}_3+\overline{a}_1c_3-\overline{c}_1\overline{a}_3-c_1\overline{a}_3-\overline{c}_1\overline{a}_1\overline{a}_3-c_1\overline{a}_1\overline{a}_3\\ &\quad +\overline{c}_1a_1a_3+c_1a_1a_3-\overline{a}_1\overline{c}_1\overline{c}_3-\overline{a}_1c_1c_3. \end{aligned}$$

在 $\mathcal{A}$ 中，如 [6] 的引理 5.10 与引理 5.11 所述（特化到 $b=1$，并用 (a,c) 表示）。特别地，像 $p(\pi_1-\mathrm{Emb}(I,Y))$ 中杠铃图的 $W_3^{\Delta_i}$包含于 $\mathcal{S}\le\mathcal{A}$，即由所有满足 (a,c) 可容许且 $i\in\{1,3,4,6\}$ 的 $T_i(a,c)$ 张成的 $\mathbb{Q}$-子空间。设 $\overline{\mathcal{H}}\le\mathcal{A}$为所有六边形关系 $H(\nu,\mu)$ 张成的 $\mathbb{Q}$-子空间。设 $\pi\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\overline{\mathcal{H}}$ 为商映射，并记 $\mathcal{S}:=\pi(\mathcal{S})$。

在本节余下部分，我们证明对于$i=1,2$ 和$k\in\mathbb{Z}^+$，$W_3^{\Delta_i}\left(\Phi_{\mathcal{B}(tv_Bv_Rtu^kt^{-1})}\right)$不属于 $\mathcal{S}$。固定$k\ge1$ 并定义

$$m_1(k) := t_1^{-1}t_3u_3^{-k}t_3^{-2}, \qquad m_2(k) := t_1^2u_1^kt_1^{-1}t_3. \tag{6}$$

定义函数 $\Psi_k\colon\mathcal{A}\to\mathbb{Q}$ 如下:

$$\Psi_k(x) := \mathrm{coeff}_{m_1(k)}(x) - \mathrm{coeff}_{m_2(k)}(x), \tag{7}$$

其中，$\mathrm{coeff}_w(x)$表示$x\in\mathcal{A}$中$w\in F$ 这个字的系数。注意，Ψ_k 是线性的。

引理 4.1. $\Psi_k\left(T_4(t^{-1},tu^{-k}t^{-1})\right)=1$。

证明。由（3）可知，$m_1(k)$在$T_4\big(t^{-1},tu^{-k}t^{-1}\big)$中恰好出现一次，其系数为 $+1$，而$m_2(k)$根本没有出现。因此 $\Psi_k = 1$。 □

引理 4.2. $\Psi_k\big(2T_4(t^{-1},tu^{-k}t^{-1}) + T_6(t^{-1},tu^{-k}t^{-1})\big) = 3$。

证明。由引理 4.1，$\Psi_k\big(2T_4(t^{-1},tu^{-k}t^{-1})\big) = 2$。由 (4) 可见，$m_1(k)$ 在 $T_6\big(t^{-1},tu^{-k}t^{-1}\big)$ 中恰好出现一次，系数为 $+1$，而 $m_2(k)$ 并未出现。因此 $\Psi_k(T_6) = 1$。故 $\Psi_k = 2+1 = 3$。

□

引理 4.3. 对所有 $\nu,\mu \in \langle t,u\rangle$,

$$\Psi_k\big(H(\nu,\mu)\big) = 0.$$

换言之，Ψ_k 在六边形关系上消失。

证明。六边形关系 $H(\nu,\mu)$ 包含四项

$$H(\nu,\mu) = \underbrace{\nu_1\mu_3}_{(1)} + \underbrace{\mu_1^{-1}\nu_3^{-1}}_{(2)} - \underbrace{\nu_1^{-1}\mu_3\nu_3^{-1}}_{(3)} - \underbrace{\nu_1\mu_1^{-1}\nu_3}_{(4)}.$$

我们逐一检查四项中任一项等于$m_1(k)$或$m_2(k)$的情形。如下所验证的，在每种情形下，$m_1(k)$和$m_2(k)$都同时以相同符号出现，而其余两项不等于$m_1(k)$或$m_2(k)$。因此，

$$\mathrm{coeff}_{m_1(k)}\big(H(\nu,\mu)\big) = \mathrm{coeff}_{m_2(k)}\big(H(\nu,\mu)\big),$$

对所有 $\mu,\nu \in \langle t,u\rangle$均成立。

- (1) $= m1(k)$当且仅当 $\nu = t^{-1}$ 且 $\mu = tu^{-k}t^{-2}$。在这种情况下，

  $$(2) = \mu_1^{-1}\nu_3^{-1} = t_1^2u_1^kt_1^{-1}t_3 = m_2(k).$$

  and

  $$(3) = \nu_1^{-1}\mu_3\nu_3^{-1} = t_1t_3u_3^{-k}t_3^{-1}, \qquad (4) = \nu_1\mu_1^{-1}\nu_3 = t_1u_1^kt_1^{-1}t_3^{-1},$$

  因此两者都不等于$m_1(k)$或$m_2(k)$。
- (1) $= m2(k)$当且仅当 $\nu = t^2u^kt^{-1}$ 且 $\mu = t$。在这种情况下，

  $$(2) = \mu_1^{-1}\nu_3^{-1} = t_1^{-1}t_3u_3^{-k}t_3^{-2} = m_1(k).$$

  and

  $$(3) = \nu_1^{-1}\mu_3\nu_3^{-1} = t_1u_1^{-k}t_1^{-2}t_3^2u_3^{-k}t_3^{-2}, \qquad (4) = \nu_1\mu_1^{-1}\nu_3 = t_1^2u_1^kt_1^{-2}t_3^2u_3^kt_3^{-1},$$

  因此两者都不等于$m_1(k)$或$m_2(k)$。
- (3) $= m1(k)$，当且仅当 $\nu = t$ 且 $\mu = tu^{-k}t^{-1}$。在这种情况下，

  $$(4) = \nu_1\mu_1^{-1}\nu_3 = t_1^2u_1^kt_1^{-1}t_3 = m_2(k).$$

  and

  $$(1) = \nu_1\mu_3 = t_1t_3u_3^{-k}t_3^{-1}, \qquad (2) = \mu_1^{-1}\nu_3^{-1} = t_1u_1^kt_1^{-1}t_3^{-1},$$

  因此两者都不等于 $m_1(k)$ 或 $m_2(k)$。
- (4) $= m1(k)$ 当且仅当 $\nu = tu^{-k}t^{-2}$ 且 $\mu = t^2u^{-k}t^{-2}$。在这种情况下，

  $$(3) = \nu_1^{-1}\mu_3\nu_3^{-1} = t_1^2u_1^kt_1^{-1}t_3 = m_2(k).$$

  and

  $$(1) = \nu_1\mu_3 = t_1u_1^{-k}t_1^{-2}t_3^2u_3^{-k}t_3^{-2}, \qquad (2) = \mu_1^{-1}\nu_3^{-1} = t_1^2u_1^kt_1^{-2}t_3^2u_3^kt_3^{-1},$$

  因此两者都不等于 $m_1(k)$ 或 $m_2(k)$。

因此，对于所有 $\mu,\nu\in\langle t,u\rangle$，我们都有 $\Psi_k(H(\nu,\mu))=0$。 □

以下命题与 [6] 中的命题 5.16 精神相同。

命题 4.4。这些族

$$\left\{T_4(t^{-1},tu^{-k}t^{-1})\right\}_{k\geq 1}$$

and

$$\left\{2T_4(t^{-1},tu^{-k}t^{-1})+T_6(t^{-1},tu^{-k}t^{-1})\right\}_{k\geq 1}$$

是 $\mathbb{Q}$-线性无关的。

证明。假设

$$\sum_{j=1}^{n} q_j\, T_4\left(t^{-1},tu^{-j}t^{-1}\right)=0$$

在 $\mathcal{A}/\mathcal{H}$ 中。对于固定的 $k\in\{1,\dots,n\}$，应用 Ψ_k 可得

$$0=\sum_{j=1}^{n} q_j\,\Psi_k\left(T_4(t^{-1},tu^{-j}t^{-1})\right).$$

项 $\mathrm{m_1(k)}=\mathrm{t_1^{-1}t_3u_3^{-k}t_3^{-2}}$出现在 $\mathrm{T_4(t^{-1},tu^{-j}t^{-1})}$ 中，当且仅当 $\mathrm{j=k}$，系数为 $+1$，而 $\mathrm{m_2(k)}$ 从不出现在任何 $\mathrm{T_4(t^{-1},tu^{-j}t^{-1})}$ 中。因此 $\Psi_k\left(\mathrm{T_4(t^{-1},tu^{-}jt^{-1})}\right)=\delta_k\mathrm{j}$，从而 $\mathrm{q}_k=0$。同样的过程表明，所有 q^j 都消失。

类似地，假设

$$\sum_{j=1}^{n} q_j\left(2T_4(t^{-1},tu^{-j}t^{-1})+T_6(t^{-1},tu^{-j}t^{-1})\right)=0$$

在 $\mathcal{A}/\mathcal{H}$ 中。应用 Ψ_k 可得

$$0=\sum_{j=1}^{n} q_j\,\Psi_k\left(2T_4(t^{-1},tu^{-j}t^{-1})+T_6(t^{-1},tu^{-j}t^{-1})\right).$$

其中，$m_1(k)$恰当且仅当$j=k$时出现，其系数为 $2+1=3$，而$m_2(k)$从不出现。因此

$$\Psi_k\left(2T_4(t^{-1},tu^{-j}t^{-1})+T_6(t^{-1},tu^{-j}t^{-1})\right)=3\,\delta_{kj},$$

这意味着，对所有$k=1,\dots,n$，都有$q_k=0$。 □

引理 4.5。 对于可容许对 (a,c) 以及$i\in\{1,3,4,6\}$,

$$\mathrm{coeff}_{m_1(k)}\left(T_i(\bar{a},\bar{c})\right)=\mathrm{coeff}_{m_2(k)}\left(T_i(\bar{a},\bar{c})\right)=0.$$

因此， Ψ_k 在 $\mathcal{S}$上消失。

证明。在表 1 中，我们列出了 $\mathrm{T_1,T_3,T_4,T_6}$，中每个不同的单项式项 $\mathrm{M(a,c)}$ 所对应的唯一解对 (a, c)（如果存在），使得 $\mathrm{M(a,\,c)=m_1(k)}$ 或 $\mathrm{M(a,c)=m_2(k)}$。我们注意到，每个解中，a 都以非零次幂的 t 结尾，而 c 都以非零次幂的 t 开头。因此，根据定义 3.2，这些解对均不可容许。于是，对于可容许的 (a, c)，$\mathrm{T}_i\mathrm{(a,\,c)}$ 中没有单项式项能等于 $\mathrm{m_1(k)}$ 或 $\mathrm{m_2(k)}$，故这两个系数均为 0。 □

表 1：对于出现在 $M(a,c)=m_1(k)$ 和 $M(a,c)=m_2(k)$ 中的单项式 $M(a,c)$，其解如表所示。所有解均不可容许，因为 a 以$t^{\pm1}$ 结尾，而 c 以$t^{\pm1}$开头。

出现于	单项式项 $M(a,c)$	(a,c) 若 $M=m_1(k)$	(a,c) 若 $M=m_2(k)$
$T^{1,3,4,6}$	$a_1\bar{c}_3\,a_3$	$(t^{-1},\ tu^kt^{-1})$	$(t^2u^kt^{-1},\,t^2u^kt^{-2})$

出现在	单项式项 $M(a,c)$	(a,c) 若 $M=m_1(k)$	(a,c) 若 $M=m_2(k)$
$T^{1,3,4,6}$	$\bar{c}_1 a_1 a_3$	$(\text{图}^{-k}\text{图}^{-2},\ \text{图}^{-k}\text{图}^{-1})$	$(t,\ t^2u^{-k}t^{-2})$
$T^{1,4,6}$	$\bar{c}_1 \bar{a}_3$	$(t^2u^kt^{-1},\ t)$	$(t^{-1},\ tu^{-k}t^{-2})$
$T^{1,4,6}$	$\bar{a}_1 \bar{c}_3$	$(t,\ t^2u^kt^{-1})$	$(\text{图}^{-k}\text{图}^{-2},\ \text{图}^{-1})$
$T_{3,6}$	$c_1 \bar{a}_3 c_3$	$(\text{图}^{k}\text{图}^{-1},\ \text{图}^{-1})$	$(t^2u^kt^{-2},\ t^2u^kt^{-1})$
$T_{3,6}$	$\bar{a}_1 c_3 \bar{a}_3$	$(t,\ tu^{-k}t^{-1})$	$(tu^{-k}t^{-2},\ t^2u^{-k}t^{-2})$
T_3	$c_1 a_3$	$(\text{图}^{-k}\text{图}^{-2},\ \text{图}^{-1})$	$(t,\ t^2u^kt^{-1})$
T_3	$a_1 c_3$	$(t^{-1},\ tu^{-k}t^{-2})$	$(t^2u^kt^{-1},\ t)$
$T_{3,6}$	$c_1 \bar{a}_1 \bar{a}_3$	$(t^2u^kt^{-1},\ tu^kt^{-1})$	$(t^{-1},\ t^2u^kt^{-2})$
T_3	$a_1 \bar{c}_1 \bar{c}_3$	$(tu^kt^{-1},\ t^2u^kt^{-1})$	$(t^2u^kt^{-2},\ t^{-1})$
$T_{4,6}$	$\bar{a}_1 \bar{c}_3 \bar{a}_3$	$(t,\ tu^kt^{-1})$	$(\text{图}^{-k}\text{图}^{-2},\ \text{图}^{2}\text{图}^{k}\text{图}^{-2})$
$T_{4,6}$	$\bar{c}_1 a_3$	$(\text{图}^{-k}\text{图}^{-2},\ \text{图})$	$(t,\ tu^{-k}t^{-2})$
T_4	$a_1 \bar{c}_3$	$(t^{-1},\ t^2u^kt^{-1})$	$(t^2u^kt^{-1},\ t^{-1})$
$T_{4,6}$	$\bar{c}_1 \bar{a}_1 \bar{a}_3$	$(t^2u^kt^{-1},\ tu^{-k}t^{-1})$	$(t^{-1},\ t^2u^{-k}t^{-2})$
T_6	$c_1 \bar{a}_3$	$(t^2u^kt^{-1},\ t^{-1})$	$(t^{-1},\ t^2u^kt^{-1})$
T_6	$c_1 a_1 a_3$	$(tu^{-k}t^{-2},\ tu^kt^{-1})$	$(t,\ t^2u^kt^{-2})$
T_6	$\bar{c}_1 \bar{a}_3 \bar{c}_3$	$(\text{图}^{k}\text{图}^{-1},\ \text{图})$	$(t^2u^kt^{-2},\ tu^{-k}t^{-2})$
T_6	$a_1 c_3 a_3$	$(t^{-1},\ tu^{-k}t^{-1})$	$(t^2u^kt^{-1},\ t^2u^{-k}t^{-2})$
T_6	$\bar{a}_1 \bar{c}_1 \bar{c}_3$	$(\text{图}^{-k}\text{图}^{-1},\ \text{图}^{2}\text{图}^{k}\text{图}^{-1})$	$(t^2u^{-k}t^{-2},\ t^{-1})$
T_6	$\bar{a}_1 c_3$	$(t,\ tu^{-k}t^{-2})$	$(\text{图}^{-k}\text{图}^{-2},\ \text{图})$
T_6	$\bar{a}_1 c_1 c_3$	$(\pm^{-k}t^{-1},\ \pm^{-k}t^{-2})$	$(t^2u^{-k}t^{-2},\ t)$

定理 4.6。 对于每个整数 $k \geq 1$,

$$W_3^{\Delta_1}\left(\Phi_{\mathcal{B}(tv_Bv_Rtu^kt^{-1})}\right) = T_4(t^{-1}, tu^{-k}t^{-1}) \notin \overline{\mathcal{S}}$$

and

$$W_3^{\Delta_2}\left(\Phi_{\mathcal{B}(tv_Bv_Rtu^kt^{-1})}\right) = 2T_4(t^{-1}, tu^{-k}t^{-1}) + T_6(t^{-1}, tu^{-k}t^{-1}) \notin \overline{\mathcal{S}}.$$

证明。 这由引理 4.1、引理 4.2、引理 4.3 和引理 4.5 得出。 □

特别地，对于$i = 1$、2 和$k \in \mathbb{Z}^+$，族

$$\left\{W_3'^{\Delta_i}\left(\Phi_{\mathcal{B}(tv_Bv_Rtu^kt^{-1})}\right)\right\},$$

是非零且线性无关的。

结合命题 3.3、命题 4.4 和定理 4.6，即可得到定理 A。

5 定理 B 的证明

我们将在本节证明定理 B。

定理 B 的证明。设 $[\Phi_k] := [\Phi_{\mathcal{B}(tv_Bv_R\mathrm{tu^kt^{-1}})}] \in \pi_0$微分同胚群$(Y\ \partial)$。反设，$(\Phi_k(\Delta_1)\ \Phi_k(\Delta_2))$ 与 (Δ_1,Δ_2) 同痕。取一个同痕 $F : (D^3,D^3) \times I \to Y$，使得 $F_0 = (\Delta_1,\Delta_2)$，且 $F_1 = (\underline{\Phi_k}(\Delta_1)\ \Phi_k(\Delta_2))$。由同痕延拓定理，存在一个环境同痕 $F : Y \times I \to Y$，使得 $F_0 = \mathrm{Id}$，且 $F_1(\Delta_1,\Delta_2) = (\Phi_k(\Delta_1)\ \Phi_k(\Delta_2))$。于是 $F_1^{-1} \circ \Phi_k$ 与 $\Phi_k(\mathrm{rel}\ \partial Y)$ 同痕，并逐点固定 (Δ_1,Δ_2)。将 Φ_k 替换为这个同痕代表后，从现在起我们假设 $\Phi_k|_{\Delta_i} = \mathrm{Id}$。进一步进行局部拉直（其支集包含在 (Δ_1,Δ_2) 的一个小管状邻域内），还可以假设 Φ_k 逐点固定 (Δ_1,Δ_2) 的一个开积邻域。令

$$W := Y \setminus v(\Delta_1 \cup \Delta_2).$$

于是 Φ_k限制为 $\mathrm{Diff}(W\ \partial W)$ 中的一个元素，并逐点固定所有边界分支。

通过粘合进 Y的两个边界分支中的$S^2 \times D^2$，将它们封口。将所得流形记为M。根据构造，M与S^4，微分同胚，并且将 Φ_k通过恒等映射延拓到附加的$S^2 \times D^2$上后，它与 $\mathrm{Diff}(M)$ 中的恒等映射 Id 同痕。

存在嵌入在 Int(M) 中的 4-圆盘B_1,$B_2 \subset$，满足

$$W \cong M \setminus \mathrm{int}(B_1 \cup B_2),$$

并且在此识别下， $\Phi_k|_W$逐点固定 ∂（$B_1 \cup B_2$）。等价地，将 $\Phi_k|_W$在B_1 和B_2 上以恒等映射延拓，可得到一个微分同胚

$$\widehat{\Phi}_k \in \mathrm{Diff}(M \text{ rel } B_1, B_2),$$

wh $\widehat{\ }$在 π_0Diff(M)中的像是平凡的。令B = （B_1,B_2）。映射类 $[\Phi_k]$ 属于核 el

$$DS_B(M) := \ker\big(\pi_0\mathrm{Diff}(M \text{ rel } B) \to \pi_0\mathrm{Diff}(M)\big),$$

这就是 Luca s 所称的圆盘滑动群（见 [5, §2.1]）。根据 Lucas的构造，存在一个自然的满射 on

$$DS_B \colon \pi_1(\mathrm{Fr}_B(M)) \twoheadrightarrow DS_B(M)$$

（[5, 命题 2.2]），其中 Fr$_B$(M) $\subset$Conf$_2$(Fr(M)) 是由位于$\widehat{\ }$两个不同点上的标架对组成的子丛。取 $\gamma \in \pi_1$(Fr$_B$(M))，使$DS_B(\gamma) = [\Phi_k]$。Lucas 还定义了一个映射

$$\rho \colon \pi_1(\mathrm{Fr}_B(M)) \to \pi_1(M, p)$$

并证明存在一个正合列

$$\pi_1(SO(4)) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{Fr}_B(M)) \xrightarrow{\rho} \pi_1(M, p) \longrightarrow 1,$$

再结合如下识别： π_1(SO(4)) 在 DS_B 下的像由边界球面扭转生成（[5,命题 2.6 (i)]）。

$\widehat{\ }$由于 π_1(M,p) 是平凡的，类 $[\Phi_k] = DS_B(\gamma)$ 属于由关于 ∂B 的边界球面扭转生成的子群。由于 π_1(SO(4)) $\cong \mathbb{Z}/2$，该子群的阶整除 2；因此

$$[\widehat{\Phi}_k]^2 = 1 \quad \text{in} \quad \pi_0\mathrm{Diff}(M \text{ rel } B).$$

限制回 $W = M \setminus$int(B)，再将其视为 $W \subset Y$，我们得出 Φ_k^2 与恒等映射在 W（相对于 ∂W）上同痕。

最后，由于 Φ_k 逐点固定 $\nu(\Delta_i)$，我们可以将此同痕通过恒等映射延拓到 $\nu(\Delta_i)$ 上，从而得到 Φ_k^2 到 Diff(Y ∂Y) 中恒等映射 Id 的同痕。因此 $[\Phi_k]^2 = 1$ 属于 π_0Diff(Y ∂)。然而， $[\Phi_k]$ 具有无限阶：由于 $W_3^{\Delta_i}$ 是一个同态，并且我们有

$$W_3'^{\Delta_i}([\Phi_k]^n) = nW_3'^{\Delta_i}([\Phi_k])$$

对所有$n \in \mathbb{Z}^+ \neq 0$。 □

参考文献

[1] R. Budney 和 D. Gabai。《4-球面中的打结三维球》。arXiv 预印本：1912.09029。[2] R. Budney 和 D. Gabai。《双曲流形的自同构群》，2023年。arXiv 预印本：2303.05010。[3] D. Kosanovi´c。《关于弧或圆的嵌入空间的同伦群：Dax 不变量》。《美国数学会汇刊》，377(2):775–805，2024年。[4] J. Lin、Y. Xie 和 B. Zhang。《带有1-柄的四维流形的映射类群》，2025年。arXiv 预印本：2501.11821。[5] T. Lucas。《三维及更高维中的同痕与等变同痕》，2025年。arXiv 预印本：2508.11104。[6] W. Niu。《通过 Budney-Gabai 不变量研究四维1-柄体的映射类群》，2025年。arXiv 预印本：2512.15099。[7] M. Powell。《推入五维圆盘的4-球面中的生成三维圆盘》，2025年。arXiv 预印本：2512.05952。

清华大学丘成桐数学科学中心电子邮箱：
weizheniu@mail.tsinghua.edu.cn