arXiv:2603.05082v1 [quant-ph] 5 Mar 2026

简约量子低密度奇偶校验码手术

Andrew C. Yuan,[1,2] Alexander Cowtan、Zhiyang He、[3] Ting-Chun Lin、[4] 以及 Dominic J. Williamson[5]
[1] *Iceberg Quantum, Sydney*
[2] *Condensed Matter Theory Center and Joint Quantum Institute, Department of Physics, University of Maryland, College Park, Maryland 20742, USA*
[3] *Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, USA*
[4] *Department of Physics, University of California San Diego, CA*
[5] *School of Physics, The University of Sydney, Sydney, NSW 2006, Australia*（日期：2026年3月）

量子码手术为在量子纠错码中执行逻辑测量提供了一种灵活且开销低的框架。它涵盖多种容错逻辑计算方案，包括并行手术、通用适配器和快速手术，并作为提取器架构中的关键基本操作。这些方案的效率关键取决于能否为一般量子低密度奇偶校验（qLDPC）码构造开销低的辅助系统，以测量任意逻辑算符。在本文工作中，我们提出一种方法，可构造量子比特规模为 $O(\mathfrak{w}\log\mathfrak{w})$ 的辅助系统，用于测量任意 qLDPC 稳定子码中权重为 $\mathfrak{w}$ 的逻辑泡利算符。这一新构造可立即降低各种量子码手术方案的渐近开销。

I. 引言

量子纠错构成了可靠的大规模量子计算的必要基础 [1, 2]。尽管表面码 [3, 4] 因其高阈值和二维连通性而在数十年间一直是主要关注对象，但其较低的编码率对规模扩展构成了重大挑战 [5]。这推动了量子低密度奇偶校验（qLDPC）码的发展 [6]，这类码能够实现高得多的编码率和距离。近期的突破 [7–9] 最终促成了“好”量子低密度奇偶校验码的发现 [10]，，其中量子维数和距离随系统大小线性增长，以及有限长度、针对电路级噪声具有高伪阈值的高编码率量子低密度奇偶校验码 [11, 12]。

尽管量子低密度奇偶校验码提供了高效的量子存储器，但其编码逻辑量子比特的高编码率使得执行容错计算变得困难。在高编码率码中，逻辑量子比特是全局自由度，而非物理量子比特的局域化量子比特块。这使得难以在不影响码块其余部分的情况下对单个逻辑量子比特进行寻址并执行计算。诸如（折叠）横向门 [13, 14] 和自同构 [15, 16] 等标准方法受到不可能定理 [17, 18], 的限制，从而限制了它们在通用容错量子计算中的效用。

量子码手术提供了一种灵活且与具体码无关的逻辑操作执行方法。通过使用辅助辅助系统暂时修改量子码的稳定子，手术可以测量逻辑泡利算符 [19–23] 以及更一般的算符 [24–28]。该技术基于晶格手术 [29] 和权重约简 [30], 的原理，在与魔态注入 [31, 32], 结合时，为实现通用容错提供了路径；同时，它也是属于提取器架构 [33–35]范畴的容错量子低密度奇偶校验码架构中的核心基本组件。

码手术中的一个主要问题是辅助系统的开销。由于量子低密度奇偶校验码中的逻辑算符可能具有很高的权重，执行测量所需的额外量子比特数量可能相当可观。如果这种开销过高，就会削弱量子低密度奇偶校验码原本旨在实现的物理量子比特节省。幸运的是，已有研究表明，对于任意权重为 $O(\mathfrak{w}\log^3\mathfrak{w})$ 的逻辑算符，都可以在一般的 qLDPC稳定子码中构造大小为 $\mathfrak{w}$的辅助系统 [22, 33]。这一构造如图 1b所示，是通过改进 Hastings [30] 提出的权重约简方法——具体而言，即去拥塞引理和增厚引理 [36]——得到的。用于规范化逻辑测量过程的辅助系统 [22], 可测量单个逻辑算符，现已被用于构造其他几种手术基本组件，例如通用适配器 [37], 并行逻辑测量 [38], 提取器 [33], 、参考文献 [39] 中的单轮手术组件以及参考文献 [40]中的常数时间手术组件。[1] 这些构造的空间开销列于表 I中。

本文工作提出了一种构造单算符辅助系统的方法，其渐近开销有保证地低于以往的构造，即辅助系统的大小为 $O(\mathfrak{w}\log\mathfrak{w})$。图 1c所示的改进方法依赖于参考文献 [44]中最近提出的量子权重约简过程（该过程基于参考文献 [45]中的技术）。这种改进的辅助系统直接带来了一系列手术方案渐近空间开销的降低，相关方案汇总于表格 I。我们预计，对于测量权重为 $O(\mathfrak{w}\log\mathfrak{w}$的单个算子而言，本方案的开销上界 $\mathfrak{w}$将是任何基于辅助图的通用量子代码手术过程中所能达到的最优结果，我们将在下文简要回顾此类过程。

[1] 关于快速量子手术的两种不同表述——单次手术 [39, 41, 42] 和常数时间手术 [40, 43]——的简要讨论，请读者参阅参考文献 [40] 的 IA 节。

空间开销	此前最优	本文工作
单次测量	$\mathcal{O}(\mathfrak{W}$对数$^3\,\mathfrak{W})$ [22]	$\mathcal{O}(\mathfrak{W}$对数 $\mathfrak{W})$
通用适配器	$\mathcal{O}(t\mathfrak{W}\log^3\mathfrak{W})$ [37]	$\mathcal{O}(t\mathfrak{W}$对数 $\mathfrak{W})$
并行测量	$\mathcal{O}(t\mathfrak{W}(\log t+\log^3\mathfrak{W}))$ [38]	$\mathcal{O}(t\mathfrak{W}(\log t+\log\ \mathfrak{W}))$
提取器	$\mathcal{O}(n$对数$^3\,n)$ [33]	$\mathcal{O}(n$对数 $n)$
单轮手术	$\mathcal{O}(nkd($对数$\,k+$对数$^3\,n))$ [39]	$\mathcal{O}(nkd($对数 $k+$对数 $n))$
常数时间手术	$\mathcal{O}(n$对数$^3\,n)$ [40]	$\mathcal{O}(n$对数 $n)$

表 I. 本文工作之前，以及纳入本文工作的构造之后，不同低密度奇偶校验码容错逻辑测量方案的渐近空间开销比较。表中，t 表示正在测量的逻辑泡利算符数量，$\mathfrak{W}$ 表示正在测量的逻辑代表元的最大权重，n 表示分组长度，k 表示量子维数，d 表示码距。对于适配器，假设联合测量 t 个不同且稀疏重叠的逻辑算符。前四种组件适用于所有稳定子码。参考文献 [39] 中的单轮手术组件适用于支持单次容错综合征提取的码。参考文献 [40], 中的常数时间手术组件基于参考文献 [43], 的工作，适用于超图积码。

量子代码手术过程，我们将在第 IIA节简要回顾。鉴于参考文献 [44, 45], 中的技术细节晦涩难懂，我们将详细阐述并证明若干论断，主要结果陈述为定理 II.2(更具体地说，是定理 IV.23)。[2]

其余各节安排如下。第II 节概述本文的构造。第III 节介绍相关背景知识。第IV 节描述一种基于简约锥的辅助系统的显式构造。第V 节讨论如何将基于简约锥的辅助系统连接到量子低密度奇偶校验码。第VI 节讨论本文的研究结果及未来可能的研究方向。

II. 构造概述

本文工作的主要目标，是将参考文献 [44]中最近提出的量子权重约简过程应用于量子码手术。为实现这一目标，我们详细阐述参考文献 [44]中的思想和技术。我们聚焦于逻辑算符测量这一情形，此时开销的渐近标度主要由 Freedman 和 Hastings [36] 提出、并已得到广泛应用 [22, 30, 33, 37–40]的去拥塞和加厚过程决定。本文描述了一种更高效的锥化方法，以取代去拥塞和加厚过程，从而实现更高效的量子码手术。具体而言，正文仅讨论在 Calderbank-Shor-Steane（CSS）码 [46]上进行一次 X 型或 Z 型算子的逻辑测量。对其他方案的推广，包括推广到一般稳定子码上的任意泡利算子，以及提取器架构，详见附录 A。

[2] 顺带一提，虽然这与辅助比特开销无关，但我们在备注17 中的分析表明，原始参考文献中遗漏了一个小问题 [44], 这可能会削弱关于降低校验权重和总量子比特度数的常数保证。

A. 测量图

通常，直接测量量子低密度奇偶校验码 D 上的 X 型逻辑算符并非容错，前提是该码具有较大的码距。具体而言，令$X(\ell)$表示由作用于满足 $\ell_i=1$ 的量子比特上的泡利 X 算子之乘积所指定的逻辑算符，其中 $\ell\in\mathbb{F}_2^n$；令$\mathfrak{W}\equiv|\ell|\geq d(D)\gg 1$，表示该算子的权重。一种可能实现容错的测量 $X(\ell)$的方法是引入辅助码 A，使得通过合并 A和 D，得到的输出码 C 现在将 ℓ 作为稳定子校验，同时仍保持低密度奇偶校验特性和较大的码距$d(C)\gg 1$。因此，可以通过对码 C进行 $O\big(d(C)\big)$轮综合征提取，推断出 ℓ 的逻辑测量。

在构造辅助系统时，常见的第一步是考虑如下定义的测量图 $\mathcal{G}$ 的 ℓ。

定义 II.1（测量图）**. 测量图** $\mathcal{G}$ 的 ℓ 的顶点和边定义如下。令 $\mathcal{V}$ 表示 ℓ非平凡作用的量子比特集合。对于每一个在 ℓ中的量子比特上非平凡作用的 Z-校验 z 的 D，由于它们对易，量子比特公共重叠的基数必须为偶数，因此可以任意配对 qq'。所有配对的集合构成边 $\mathcal{E}$。

为保持变形码的码距，在保持最大度固定的同时向图中添加任意边 $\mathcal{E}'$，以使测量图连通且扩展，并具有Ω(1)的切格常数。

选择 $\mathcal{G}$的理由是，$\mathcal{G}$ 的唯一连通分量恰好等于 ℓ，而 $\mathcal{G}$ 本身是一个有界度图。具体而言，我们考虑一个基于 $\mathcal{G}$ 构造的辅助系统 G，使得每条边对应一个量子比特，并且每个顶点都有一个作用于相邻边上的 X-校验，即$\prod_{e\sim v}X_e^G$。合并辅助系统 G 与数据码 D，使辅助系统的 X-校验

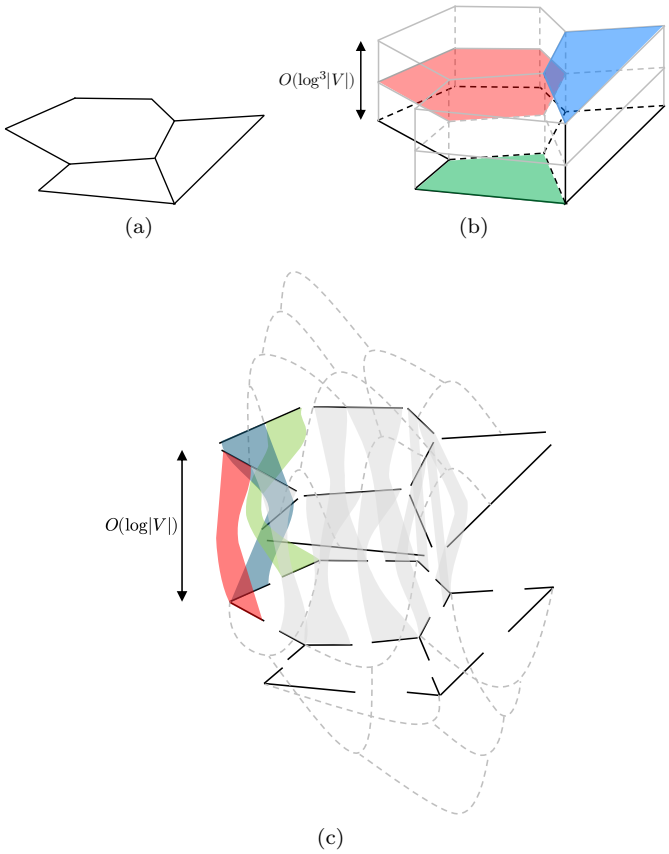


图 1. 简约辅助系统。(a) 逻辑算符的一个导出图示例。(b) 通过去拥塞引理得到的辅助系统：加厚 $+$，高度为 $O(\log^3|V|)$，使得由于面（彩色部分）的存在，环现在可以收缩，并将每条边上的拥塞控制在常数范围内。(c) 通过简约锥得到的辅助系统。具体而言，基于边（顶部）和顶点（底部）的 *local structure*，构造两棵二叉树。 *Shuffles* 个高度为 $O(\log|V|)$ 的二叉树诱导出面（以彩色和灰色表示），使局部视图配对，从而揭示 *global structure*。具体而言，(a) 中的任意环都可以通过在顶部和底部二叉树之间穿行而嵌入 (c)，使得交错面的边界对应于 (a) 中的一个环（例如彩色和灰色部分）。因此，(a) 中的环都是 (c) 中局部低密度面的乘积。

也作用于对应顶点v的数据量子比特，即 $X_v^D \prod_{e\sim v} X_e^G$。$D$ 中与新的辅助系统 X-校验反对易的 Z-校验可以变形到图中的辅助系统边量子比特上，由此得到一个新的稳定子码 C。在这种情况下，每个辅助系统 X-校验的权重都有界，而所有辅助系统 X-校验的乘积为 $= X^D(\ell)$，因此，直观上可以通过测量权重有界的辅助系统 X-校验，推断出 $X^D(\ell)$的逻辑测量结果。

遗憾的是，这种构造没有考虑辅助系统可能具有内部逻辑算符。例如，在合并之前，辅助系统 G可能具有作用于 $\mathcal{G}$中环的非平凡 Z型逻辑算符。由于这些环的权重无法得到良好控制，一旦辅助码与数据码合并，输出码 C 的码距可能会变小，因此无法再保证输出码 C 的综合征提取具有容错性。

B. 锥化

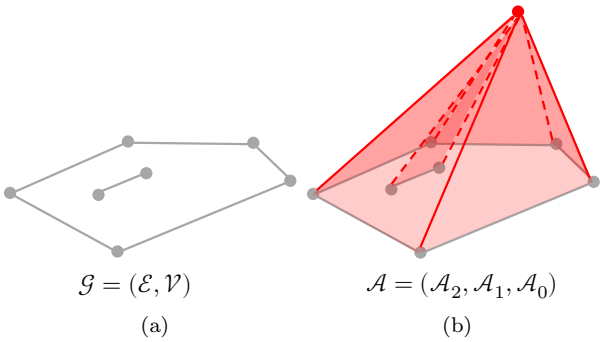


图 2。锥化。(a) 描绘了 $\mathcal{G}$ X 型逻辑比特的测量图，其中顶点和边分别用点和线表示。(b) 描绘了 $\mathcal{G}$ 的锥，这是通过添加一个额外的顶点（红色）并将该顶点与原始图中的所有顶点相连而得到的胞腔复形。所有垂直面（红色阴影部分）也被添加到该胞腔复形中。

上一小节所述方法的一种自然扩展，是向图 $\mathcal{G}$ 中引入有界权重面 $\mathcal{F}$，使得环由边界生成，从而确保所构造的辅助码不具有内部逻辑比特。该方法最早由参考文献 [21]，提出，但未保证面的权重和度；随后，参考文献 [22], 对其进行了改进，为面 [36] 提供了低密度奇偶校验保证。实现这一目标的一种拓扑学方法称为锥化。图 2 对此进行了说明：向一个图中添加单个顶点 $\star$，然后将 $\mathcal{G}$ 的顶点与 $\star$ 相连以获得更多边，同时将 $\mathcal{G}$ 的边与 $\star$ 相连以获得面。在这种情况下，$\mathcal{G}$ 是锥 $\mathcal{G}$ 的子图。$\mathcal{G}$ 的环是可缩的，因为它们可以由锥 $\mathcal{G}$ 的面生成（例如，图 2a 中的唯一环是图 2b 中所有垂直面的边界）；此外，由于所有顶点都与 $\star$ 相连，该锥具有唯一的连通分量。

锥化带来了新的问题，主要是 $\star$ 顶点的度没有上界，因此必须进行稀疏化。Freedman 和 Hastings 最初通过去拥塞引理解决了这一问题 [30, 36], ，构造了一个量子比特规模为 $O(\mathfrak{W}\log^3\mathfrak{W})$ 的低密度奇偶校验辅助系统。与量子比特规模为 $O(\mathfrak{W})$ 的朴素辅助系统 G 相比，去拥塞过程只带来多对数级开销，因此常用于量子权重约简和逻辑比特测量

相关文献中。不过，参考文献 [44]采用了参考文献 [45] 中的技术，将辅助量子比特数量渐近地降低至 $O(\mathfrak{w}\log \mathfrak{w})$，同时遵循锥化理念。以下定理对此进行了概述。

定理 II.2（简约锥）。设 $\mathcal{G}=(\mathcal{E},\mathcal{V})$ 表示一个有界度图。那么存在一个胞腔复形 $\mathcal{A}$，其面为 $\mathcal{A}_2$、边为 $\mathcal{A}_1$、顶点为 $\mathcal{A}_0$，满足

1. 每个面都与有界数量的边相邻（反之亦然）；*2.* $\mathcal{A}$ 的所有环均由 $\mathcal{A}_2$中各面的边界生成；*3.* $(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_0)$ 是一个有界度连通图，且包含 $\mathcal{G}$ 作为子图；

4. $|\mathcal{A}_0|=O(|\mathcal{V}|\log|\mathcal{V}|)$.

完整陈述和证明见 IV.23。辅助 LDPC CSS 码 A的构造方式使得 $\mathcal{A}_1$中的每条边对应一个量子比特，并且每个顶点 X-（Z-）校验作用于相邻的量子比特上；每个面 $\mathcal{A}_0$（每个面 $\mathcal{A}_2$）亦然。随后可使用该辅助系统对逻辑算符 $X^D(\ell)$ 进行容错测量。

C. 简约测量

为执行容错逻辑测量，我们将定理 II.2 应用于适当的稀疏扩展图 $\mathcal{G}$，构造一个辅助系统，并按照文献中的标准方法设计该系统，例如参考文献 [22]。为完整起见，我们在第 V节详细介绍这一过程，并在此给出其主要结果。

定理 II.3（变形码）。设 D 是一个 $[\![n,k,d]\!]$ 数据 *LDPC* 码，并选定一个权重为 $\mathfrak{w}$ 的逻辑 X 型算子 $X^D(\ell)$。设 A 是由定理 *II.2* 中的简约锥 $\mathcal{A}$ 构造的辅助 *LDPC CSS* 码。则存在一种方法，可由辅助码 A 和数据码 D 构造出一个变形码 $[\![n+O(\mathfrak{w}\log\mathfrak{w})\ \ k-1,$ 其 *LDPC* 码 C 的参数为 $\Omega(d)]\!]$，使得 $X^D(\ell)$ 是 C 的一个稳定子。

证明。参见第V 节，或具体而言，定理 V.1 □

III. 预备知识

本节介绍本文后续部分中会用到的相关背景材料。

A. 复形

定义 III.1. A **复形** C 是一个由（有限维）$\mathbb{F}_2$-向量空间 C_i 组成的序列，并配备了 $\mathbb{F}_2$-线性映射[3] $\partial_i: C_i\to C_{i-1}$，称为 C的**微分**，使得 $\partial_i\partial_{i+1}: C_{i+1}\to C_{i-1}$ 为零。我们记作[4]

$$C=\cdots\to C_i\xrightarrow{\partial_i}C_{i-1}\to\cdots \tag{1}$$

注意，对所有 i，$\operatorname{im}\partial_{i+1}\subseteq\subseteq\ker\partial_i$，因此 C 的 i**-同调**定义为

$$H_i(C)=\ker\partial_i/\operatorname{im}\partial_{i+1} \tag{2}$$

将 $\ell\in C_i$ 的等价类记作 $[\ell]\in H_i(C)$，以便将记号 $[\cdots]$ 保留给商映射；反过来，我们也可以不指定表示 ℓ而写作 $[\ell]\in H_i(C)$。若对所有 i都有 $H_i(C)=0$，则复形 C 是**正合的**。

定义 III.2（基）。若复形 C 配备了**基**（以下均假设如此），且每个度 $C_i=\mathbb{F}_2^{n_i}$都有称为 i**-胞腔**的基元素，则称其配备了基。于是，对任意 $\ell\in C_i$，定义**（汉明）权重** $|\ell|$。

定义 III.3（余复形）。设 C 表示一个复形。由于内积非退化，转置$\partial_i^\top$: $C_{i-1}\to C_i$ 定义良好，因此余复形定义为

$$C^\top=\cdots\leftarrow C_i\xleftarrow{\partial_i^\top}C_{i-1}\leftarrow\cdots \tag{3}$$

C的 i**-上同调** 为 $H^i(C)=\ker\partial_{i+1}^\top/\operatorname{im}\partial_i^\top$，它与 $H_i(C)$ 同构。

例 III.1（CSS码）。考虑一个具有校验矩阵 H_X,H_Z 的 CSS 码。那么该码可以视为一个长度为 2 的复形，即

$$C=Z\xrightarrow{H_Z^\top}Q\xrightarrow{H_X}X \tag{4}$$

其中我们采用如下约定：$H_1(C)$ $H^1(C)$分别对应 Z-型、X-型逻辑比特。为方便起见，通过以下图示表示码 C 的权重 $\mathfrak{w}_Z,\mathfrak{w}_X,\mathfrak{q}_Z,\mathfrak{q}_X$（对应于 $\partial,\partial^\top$ 的最大列权重）

$$Z\underset{\mathfrak{q}_Z}{\overset{\mathfrak{w}_Z}{\rightleftharpoons}}Q\underset{\mathfrak{w}_X}{\overset{\mathfrak{q}_X}{\rightleftharpoons}}X \tag{5}$$

如果对于一族大小不断增大的码，其权重为 $O(1)$，那么我们称该码族为（量子）**低密度奇偶校验** 码，简称（**q**）**LDPC**。

定义 III.4（骨架距离）。设 C 为一个复形。那么 i**-骨架距离** $d_i(C)$) 为

$$d_i(C)=\min_{\ell:0\neq[\ell]\in H_i(C)}|\ell| \tag{6}$$

类似地，通过 $H^i(C)$ 定义**（余）骨架距离** $d^i(C)$。注意，在与 CSS 码相关时，$d_1(C)$ $d^1(C)$ 是 Z-型、 X-型码距。

[3] 下标 i 可以省略。[4] 我们采用 C 终止于 $\cdots\to C_0$ 的约定。

B. 映射

定义 III.5 （链映射）。设 A, D 为复形，且 ∂^A, ∂^D。则链映射 $g: A \to D$ 是一组线性映射 $g_i: A_i \to D_i$，满足 $g\partial^A = \partial^D g$，即下图交换

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_i & \xrightarrow{\partial^A} & A_{i-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle g_i} & & \downarrow{\scriptstyle g_{i-1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & D_i & \xrightarrow{\partial^D} & D_{i-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array} \tag{7}$$

注 1. 链映射 $g: A \to D$ 在同调群之间诱导一个线性映射 $[g]: H_i(A) \to H_i(D)$，其中使用方括号记法 $[g]$，以便对任意 $[\ell] \in H_i(A)$，我们都有简洁的关系 $[g][\ell] = [g\ell]$

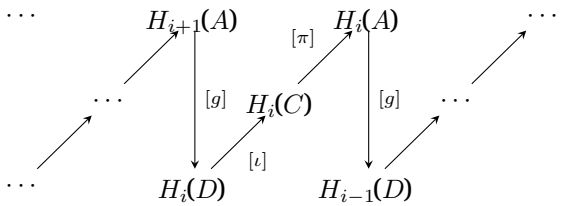
定义 III.6 （锥）. 设 $g: A \to D[-1]$ 是一个链映射，其中对所有 i都有 $D_i[-1] = D_{i-1}$。**（映射）锥** cone g 是一个向量空间为 $A_i \oplus D_i$、微分为以下形式的复形

$$\partial = \begin{pmatrix} \partial^A & \\ g & \partial^D \end{pmatrix} \tag{8}$$

我们用下图表示

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_i & \xrightarrow{\partial^C} & A_{i-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & D_i & \xrightarrow{\partial^D} & D_{i-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array} \tag{9}$$

引理 III.7 （蛇引理，引理 1.5.3，见 [47]）. 设 $g: A \to D[-1]$ 是一个链映射，且 $C =$ 锥 g 为该锥。则以下序列[5] 是正合的。



(10)

其中 $\iota: D \hookrightarrow C$ 是包含（链）映射，$\pi: C \to A$ 是投影（链）映射。$[g]$ 表示由 g 在同调上诱导的映射；$[\iota]$ 和 $[\pi]$的情形类似。

[5] 应用蛇引理的一个巧妙记忆方法是：删除式（9）各行中的箭头，将其替换为（行）复形对应的同调群，然后添加式（10）所示的对角箭头。

例 III.2 (逻辑测量)。如参考文献 [23], 所示，锥是用于逻辑测量的数学框架。[6] 具体来说，若 A, D 分别表示辅助比特码和数据 CSS 码，其中 $H_1(A) =$0，且 g 表示一种将两个码 合并 在一起的方法，那么根据蛇引理 III.7,

$$H_1(C) = \operatorname{coker}[g] \equiv H_1(D)/\operatorname{im}[g] \tag{11}$$

此外，如果巧妙地选择 g，使得 $\operatorname{im}[g] = [\ell^\star]$ 是一个特定的逻辑算符，那么 D 中的逻辑比特 $\ell^\star$ 现在在 C中是可缩的，也就是说，$\ell^\star$ 现在是 C 中的稳定子，因此可以通过综合征提取进行测量。

注 2。虽然锥是逻辑测量的一个实用框架，但并非唯一选择 [20, 49]。特别是，存在一些容错逻辑测量过程，它们不是锥，而是商 [50] 或其他操作，例如在几何增强的四维环面码之间进行无辅助比特手术 [51]。

例 III.3 （权重）。假设数据码D 是低密度奇偶校验码，且 $d_1(D) \gg 1$，那么，为了以容错方式执行例III.2 中的逻辑测量，我们希望构造的锥 C 也具有低密度奇偶校验性质，且$d_1(C) \gg 1$。这意味着辅助比特 A必须满足低密度奇偶校验性质，但更重要的是，映射 g 必须是稀疏的，即最大列权重和行权重有界。特别是，与公式（5）类似，C 的权重可通过以下二维图得到

$$\begin{array}{ccccc} & & A_2 & \rightleftharpoons & A_1 & \rightleftharpoons & A_0 \\ & & \rotatebox{90}{$\rightleftharpoons$} & & \rotatebox{90}{$\rightleftharpoons$} & & \\ D_2 & \rightleftharpoons & D_1 & \rightleftharpoons & D_0 & & \end{array} \tag{12}$$

同时，为了证明 $d_1(C) \gg 1$，通常需要[7] 与 A 之间具有 g相对扩张性质。在我们的情形中（见第V节），我们使用了更强的性质，即 A包含一个扩张图。

注 3. 请注意，在例III.2-III.3中，逻辑比特 $\ell^\star$ 通常具有较大的权重 $\geq d_1(D)$，尽管 C 是低密度奇偶校验码。因此，逻辑比特测量可视为权重约简的一种特殊应用。

C. 图

定义 III.8 （图）。给定一个图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$，存在一个与之关联的复形 $G = E \to V$，其中 E, V

[6] 更一般地，参考文献 [48] 表明，迭代锥框架可用于描述任意量子码嵌入。[7] 例如，参见参考文献 [37] 的定义 2 以及参考文献 [48]的清理引理。

是由 $\mathcal{E}$, $\mathcal{V}$ 生成的 $\mathbb{F}_2$ 向量空间，微分映射由邻接关系给出。反过来，一个复形 $G: E \to V$，其基为，可以定义一个图 $\mathcal{G} = (\mathcal{E}, \mathcal{V})$，如果对于所有基元素 $e \in E$都有 $|\partial e| = 2$。在这两种情况下，我们都将 G 称为一个**图** 复形，其关联图为 $\mathcal{G}$。例如，重复码 $R(L)$ 是一个图复形。如果 $C_1 \to C_0$ 是一个图复形，我们进一步将复形$C = C_2 \to C_1 \to C_0$ 称为**胞** 复形。

定义 III.9（图的并）。设 $\mathcal{G}^A, \mathcal{G}^B$ 表示顶点和边可能重叠的图。那么，它们的并 $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}^A \cup \mathcal{G}^B$（其顶点为 $\mathcal{V}^A \cup \mathcal{V}^B$，边由并集 $\mathcal{E}^A \cup \mathcal{E}^B$ 构成）也是一个图。等价地，给定图复形 G^A, G^B，其关联图 $\mathcal{G}^A, \mathcal{G}^B$ 可能重叠，则令**并** G 为关联图之并 $\mathcal{G}^A \cup \mathcal{G}^B$所对应的图复形。

定义 III.10（子图）。若图复形 G 与图复形 G' 之间存在**嵌入** $\iota: G \to G'$，且 ι是单射和链映射，则称图复形 G 是图复形 G' 的**子图**。

注 4. 若 G 是图复形G^A, G^B的并，那么显然，G^A, G^B 是G 的子图，其嵌入为自然包含映射。

定义 III.11（变形）。设 G 是一个图复形，且 $L \geq 1$。对于每条边 $e = v_0 v_1 \in \mathcal{E}$，令$\gamma(e)$ 为一条连接 $v_0 \leftrightarrow v_1$、边长为L的路径图。将 $\gamma(e)$ 视为图复形，则 G 的 L-**变形**γG 是所有 $\gamma(e)$ $e \in \mathcal{E}$的并。我们将 γ 称为**变形** 映射。此外，若 γG中的每条边至多属于 ρ 条路径 $\gamma(e)$ $e \in \mathcal{E}$，则称该变形的**拥塞** ρ。

注 5. 如果 $\gamma(e)$ 是简单路径，并且对于不同的 $e \in \mathcal{E}$，这些路径彼此不相交（e的端点除外），那么该变形按通常意义上是对 G 的细分，即将每条边 $e \in \mathcal{E}$ 细分以得到 $\gamma(e)$。

IV. 简约锥

本节旨在给出参考文献 [44] 中构造的具体方法。具体而言，第 IIIC-IV C 节明确构造了所需的低开销辅助比特，从而得到定理 IV.23。

为帮助读者理解本节中的技术步骤，我们先从宏观层面简要概述我们的构造。不失一般性，假设我们有一个二分图 G，其顶点划分为 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sqcup \mathcal{V}_1$，我们希望将其嵌入稀疏锥中。为简单起见，假设 $|\mathcal{V}_0| = |\mathcal{V}_1| = 2^h$。首先，为了便于直观理解，考虑在二分图的两侧分别连接一棵高度为 h 的二叉树后得到的图。换言之，在 G 上连接两棵高度为 h 的二叉树，一棵的叶子为 $\mathcal{V}_0$，另一棵的叶子为 $\mathcal{V}_1$。接下来，对于左侧树中的每个非叶顶点，添加一条边，将其连接到右侧树中对应的同一个非叶顶点。从概念上讲，我们观察到，这个新图与图 2 中的锥相似，其中原始图的所有环 G都可以由新图中的“垂直”面/环生成。这样，我们就将二分图G锥化为一个胞腔复形，其中所有顶点的度都有界。

当然，这个胞腔复形存在若干问题。值得注意的是，垂直面大小可能达到 $O(\log n)$，而（二叉树中的）一条边可能与大量此类面相接。从某种意义上说，这些问题源于 $\mathcal{V}_0$ 中的顶点可以任意连接到 $\mathcal{V}_1$ 中的顶点（在原始图 G 中），而我们上面的复形只能对二叉树中“局部”的连接进行锥化，无法处理“全局”的连接。具体而言，顶点 $u \in \mathcal{V}_0$ 和 $v \in \mathcal{V}_1$ 在 G 中可能相连，但它们在二叉树上的距离为 $O(\log n)$，这会形成一个较大的垂直 2-胞腔；大量此类 2-胞腔可能会显著重叠。因此，我们需要对这个锥进行稀疏化。

参考文献 [44, 45] 中的方法通过构造一系列 $O(\log n)$ 棵树，有效地将上述胞腔复形“拉伸”了 $O(\log n)$ 倍。具体而言，G 中的一条边会被拉伸为一条长度为 $O(\log n)$ 的路径。这些树依次相连，但并非如上所述采用平凡的一对一连接方式。相反，相邻树中的顶点以“插值”的方式相连，因此 G 中的任意连接都可由二叉树之间一系列 $O(\log n)$ 个局部连接来实现。由于二叉树之间的连接是局部的，垂直面具有一个有界权重的生成集，并且每条边只与常数个生成 2-胞腔关联。这个最终的锥是我们构造的输出，可用于逻辑测量。

本节首先介绍如何构造一系列进行插值且依次相连的树，使得面-边关联矩阵是稀疏的。将这一构造应用于二分图 G（见第 IVA 节），我们得到一个大小为$O(|\mathcal{V}|^2 \log |\mathcal{V}|)$ 的大型锥复形，其中嵌入了 G 的一个变形。这个锥复形的大部分最终证明是多余的，因此在第 IVB 节中，我们将该复形裁剪至大小$O(|\mathcal{V}| \log |\mathcal{V}|)$，同时保留其重要性质。

A. 原始锥

给定一棵二叉树，一种为顶点加标签的标准方法是：从根开始使用空标签 $|\varnothing\rangle$，沿分支继续使用标签 $|s_1\rangle$，并如此迭代，使得高度为 ℓ 的顶点通过 $|s_1 \cdots s_\ell\rangle$ 加标签，其中$s_i \in \{0, 1\}$。在这种情况下，$s_1 \cdots s_\ell s_{\ell+1} \cdots$ 是$s_1 \cdots s_\ell$的分支。然而，更一般地说，没有理由把 ℓ 比特放在位置 ℓ，例如，可以用 $|s_2 s_1\rangle$ 来为高度为2的顶点加标签。事实上，相邻高度的标签甚至不必一致，例如，高度为2的顶点可以用 $|s_2 s_1\rangle$ 加标签，而顶点

高度为3的顶点可以用 $|s_1s_2s_3\rangle$加标签。因此，为了涵盖最一般的情形，我们需要如下定义。

定义 IV.1. 设 τ_ℓ 是作用于 ℓ 个比特上的一个置换，$s = s_1 \cdots s_\ell \in \{0,1\}^\ell$是一个比特串。记 τs为对 s 的比特位置按照置换 τ重新排序后得到的比特串，即 $\tau s = s_{\bar\tau(1)} \cdots s_{\bar\tau(\ell)}$，其中 $\bar\tau$ 是 τ 的逆置换；当比特串长度明确时，我们省略下标 ℓ。此外，用 $\|s\| = \ell$ 表示比特串的**长度**（与汉明重量不同）。

定义 IV.2（带标签的二叉树）。设 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_h)$表示一个由置换组成的序列 τ_ℓ，这些置换作用于 $1 \le \ell \le h$ 个比特。高度为 h、带有**标签** $\boldsymbol{\tau}$的二**叉树** T是指其顶点标记为 $|\bar\tau s\rangle$，其中 $s \in \{0,1\}^\ell$是长度为 $0 \le \ell \le h$ 的比特串；边 $\|\bar\tau s\rangle$ 标记为 s，其中 s 是长度为 $1 \le \ell \le h$的比特串，并且满足邻接关系

$$\partial^T \|\bar\tau s\rangle = |\bar\tau s\rangle + |\bar\tau \omega s\rangle, \tag{13}$$

其中 $\omega s = s_1 \cdots s_{\ell-1}$移除最后一个比特。如果对于所有 ℓ，τ_ℓ都是平凡置换，那么我们称这棵二叉树具有**标准标签**。

注 6。 请注意，给定一棵带有标签 $\boldsymbol{\tau}$ 的二叉树上的边 $\|s'\rangle$，我们必须先确定标准字符串，即 $s' = \bar\tau s$，然后才能定义 ωs，从而使邻接关系 ∂^T 有明确的定义。另请注意，$|\bar\tau(s_1 \cdots s_\ell s_{\ell+1} \cdots)\rangle$是 $|\bar\tau(s_1 \cdots s_\ell)\rangle$的后代。

定义 IV.3（交换）。令 $\{\sigma_{i,i+1}, i \in I\}$ 表示一组置换$\sigma_{i,i+1}$，它们交换比特 $i \leftrightarrow i{+}1$；令 I 表示指标集合 i，满足 $\{i, i{+}1\}, \{j, j{+}1\}$ 对不同的 $i, j \in I$ 两两不相交。那么该集合会导出一个置换序列 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_h)$，使得

$$\sigma_\ell = \prod_{i \in I : i < \ell} \sigma_{i,i+1}. \tag{14}$$

我们将 $\boldsymbol{\sigma}$ 称为一个索引为 I 的（**非相互作用**）**交换**。给定一个置换序列 τ，我们随后滥用记号，将 $\boldsymbol{\sigma\tau}$ 写作通过逐项乘法/合成得到的置换序列 $(\sigma\tau)_\ell$，$1 \le \ell \le h$即 $(\sigma\tau)_\ell = \sigma_\ell \tau_{\ell_0}$。

以下定义及随后的引理IV.5 是我们构造中使用的最重要的基本构件。给定两棵二叉树 T'、T，其标签为 $\boldsymbol{\sigma\tau}$、$\boldsymbol{\tau}$，我们构造一棵树 S，其中高度为 $i \in I$的顶点，即非相互作用交换 $\boldsymbol{\sigma}$的指标，被替换为非分支点（见图3）。然后，我们将树 T' 与 S局部连接，并将 S 与 T局部连接。回到本节开头所述的直观认识，这些局部连接会在 T'与 T的叶子之间生成略微非局部的连接，同时确保2-胞腔到1-胞腔的关联关系

稀疏。通过用 $O(\log n)$ 棵这样的树进行插值，我们将能够通过这些局部连接，在第一棵树和最后一棵树的叶子之间生成任意连接。

定义 IV.4（通过交换进行插值）。设 T', T分别为带有标签 $\boldsymbol{\sigma\tau}, \boldsymbol{\tau}$的二叉树，其中 $\boldsymbol{\sigma}$是一个指标为 I的非相互作用交换。令 $s \in \{0,1\}^\ell$和 $\sigma^\star$ 表示映射

$$\sigma^\star s = \begin{cases} s & \text{if } \ell \notin I, \\ \omega(s)\star & \text{if } \ell \in I. \end{cases} \tag{15}$$

此处 $\star$ 只是索引 ℓ 的任意占位符，因此$\omega(s)\star$ 是一个长度为 ℓ的字符串。特别地，$\star$ 记号表示一个非分支点，如图3所示。注意，$\omega\sigma^\star = \omega$。定义**插值**复形 S在 T' 与 T 之间为顶点为 $|\bar\tau\sigma^\star s\rangle$（对应 $s \in \{0,1\}^\ell$，$0 \le \ell \le h$边为 $\|\bar\tau\sigma^\star s\rangle$（对应$s \in \{0,1\}^\ell$，$1 \le \ell \le h$且邻接关系为

$$\partial^S \|\bar\tau\sigma^\star s\rangle = |\bar\tau\sigma^\star s\rangle + |\bar\tau\sigma^\star \omega s\rangle. \tag{16}$$

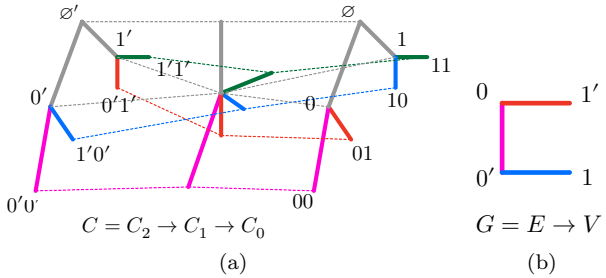


图 3. 插值锥。（a）左侧 T' 和右侧 T 二叉树分别表示带有标签 $\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\sigma\tau}$、$\boldsymbol{\tau}$的树，其中 $\boldsymbol{\sigma}$是一次交换，而中间表示插值图复形 S的 T'，T。T'的顶点T标记为 $|s'\rangle$，$|s\rangle$ 分别对应比特串 s。注意，例如，$|1'0'\rangle = |\tau'(01)\rangle$。（b）表示图 G，C 根据定理IV.6中的描述由此构造。

注 7（关键关系）。注意这个关键代数关系 $\sigma^\star\omega\sigma = \sigma^\star\sigma\omega$。事实上，$\sigma^\star\omega^m\sigma = \sigma^\star\sigma\omega^m$ 其中$\omega^m = \omega\omega\cdots\omega$是 m 截断 ω的复合。

下述定理由图 3中的示例加以说明。为了描述相邻树之间的 2-胞腔（面）和 1-胞腔（边），我们定义中间的 1-复形和链映射，使映射锥（定义 III.6）成为所需的 2-复形。

引理 *IV.5*（插值锥，图 *3*）。设 T'、T 是带有标签 $\boldsymbol{\sigma\tau}$、$\boldsymbol{\tau}$ 的二叉树，其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是一个指标为 I 的非相互作用交换，S 表示插值复形。设 $T'S$、ST 是带有标签 $\boldsymbol{\sigma\tau}$、$\boldsymbol{\tau}$ 的二叉树，即分别是 T'、T 的副本。定义 $g_i : (T'S \oplus ST)_i \to (T' \oplus S \oplus T)_i$，其中 $i = 1,0$，如下：

$$g_1 \|\bar\tau\sigma s, T'S\rangle = \|\bar\tau\sigma s, T'\rangle + \|\bar\tau\sigma^\star\sigma s, S\rangle \tag{17}$$

$$g_1 \|\bar\tau s, ST\rangle = \|\bar\tau\sigma^\star s, S\rangle + \|\bar\tau s, T\rangle \tag{18}$$

并且类似地[8] 对于 g_0。那么 g 是一个链映射，且锥复形 C =锥(g) ——见图 3 ——满足

$$H_2(C) = H_1(C) = 0, \quad H_0(C) \cong \mathbb{F}_2, \tag{19}$$

$$C_2 \underset{4}{\overset{4}{\rightleftharpoons}} C_1 \underset{9}{\overset{2}{\rightleftharpoons}} C_0. \tag{20}$$

证明。 让我们借助如下图示考虑映射 g

$$\begin{array}{ccc} (T'S \oplus ST)_1 & \xrightarrow{\partial^{T'S} \oplus \partial^{ST}} & (T'S \oplus ST)_0 \\ \downarrow g_1 & & \downarrow g_0 \\ (T' \oplus S \oplus T)_1 & \xrightarrow{\partial^{T'} \oplus \partial^{S} \oplus \partial^{T}} & (T' \oplus S \oplus T)_0 \end{array} \tag{21}$$

注意关键关系 $\sigma^\star\omega\sigma = \sigma^\star\sigma\omega$ ，因此 g 是链映射。具体而言，

$$g_0\partial^{T'S}\|\bar{\tau}\sigma s, T'S\rangle = |\bar{\tau}\sigma s, T'\rangle + |\bar{\tau}\sigma\omega s, T'\rangle \tag{22}$$

$$+ |\bar{\tau}\sigma^\star\sigma s, S\rangle + |\bar{\tau}\sigma^\star\sigma\omega s, S\rangle$$

$$= \partial^{T'\oplus S} g_1\|\bar{\tau}\sigma s, T'S\rangle, \tag{23}$$

且对于边的情形类似，这些边位于 ST。由于 T' 是一棵树，$H_1(T') = 0$（无环）且 $H_0(T') \cong \mathbb{F}_2$（连通），其中 T' 的任意单个顶点是 $H_0(T')$的一个表示。对于 S、T、$T'S$、ST，情形类似。因此，由锥结构可知，该命题成立。具体而言，蛇引理表明以下是一个正合列，其中 $A = T'S \oplus ST$与 $B = T' \oplus S \oplus T$为简记（将其结构与式（21）相比较）。

$$\begin{array}{ccccccccc} & & H_1(A) = 0 & & H_0(A) & & 0 & & \\ & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & & & \\ 0 & & H_2(C) & & H_1(C) & \xrightarrow{[g_0]} & H_0(C) & & \\ & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & & & \\ & & H_1(B) = 0 & & H_0(B) & & & & \end{array} \tag{24}$$

因此， $H_1(C) \cong$ 核$[g_0]$，且 $H_0(C) \cong$ 余核$[g_0]$。注意 $[g_0]$ 等于具有两个比特和三个检查算符的重复码（边 $\to$ 顶点）的微分，从而该命题成立。

最后请注意，锥复形的权重可通过下图得到，

$$\begin{array}{ccc} (T'S \oplus ST)_1 & \underset{3}{\overset{2}{\rightleftharpoons}} & (T'S \oplus ST)_0 \\ {\scriptstyle 4}\Big\| {\scriptstyle 2} & & {\scriptstyle 4}\Big\| {\scriptstyle 2} \\ (T' \oplus S \oplus T)_1 & \underset{5}{\overset{2}{\rightleftharpoons}} & (T' \oplus S \oplus T)_0 \end{array} \tag{25}$$

其中，该数表示相应映射的最大列权重。 □

[8] 其中 $\|\cdots\rangle$ 被替换为 $|\cdots\rangle$。

注8 (插值)。 注意， C 是一个胞腔复形。还需注意，对于叶子 $s' \in \{0,1\}^h$ 使得$\sigma^\star s' = s'$，复形 C 可以看作连接顶点 $|s'$、$T'\rangle$ 和 $|s'$的插值，$T\rangle$ 通过经过 $|s'$的唯一边， $S\rangle$ 从而对于互不相同的s'，连接路径两两顶点不交。图 3中给出了示意图。

注9（插值序列）。设 $T^0, ..., T^n$ 表示一列带有标签 $\boldsymbol{\tau}^0, ..., \boldsymbol{\tau}^n$ 的二叉树，且相邻标签 $\boldsymbol{\tau}^i, \boldsymbol{\tau}^{i-1}$ 仅相差一次非相互作用交换，即对于某个交换 $\boldsymbol{\sigma}^i$，有 $\boldsymbol{\tau}^i = \boldsymbol{\sigma}^i\boldsymbol{\tau}^{i-1}$。我们将 $T^0, ..., T^n$ 称为交换序列。于是，通过链映射 g : $T^nS^n \oplus S^nT^{n-1} \cdots \oplus S^1T^0 \to T^n \oplus \cdots \oplus T^0$可以得到类似的构造，使得$C$ =cone(g)是一个满足式（19）—（20）的胞腔复形。我们将 C 称为对交换序列 $T^0, ..., T^n$进行插值的锥复形。类似地，顶点$|s, T^i\rangle, i = 0, ..., n$ 通过前文所述的插值连接在一起。

如图 3所示，给定一个二分图 G，构造一个简约锥 C，使得 G的变形嵌入在 C之中。形式化陈述如下。

定理 IV.6 （简约锥）。 设 $G = E \to V$ 表示一个二分图的复形，其顶点划分为 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sqcup \mathcal{V}_1$，其中 $|\mathcal{V}_i| \le 2^{h_i}$，且最大度为$\Delta$（$G$）。设 $h = h_0 + h_1$ 和 τ_h 表示作用于 h 个比特的置换，它将

$$(s_1 \cdots s_{h_0})(s_{h_0+1} \cdots s_h) \mapsto (s_{h_0+1} \cdots s_h)(s_1 \cdots s_{h_0}) \tag{26}$$

那么，存在一列非相互作用交换操作$\boldsymbol{\sigma}^1$，...，$\boldsymbol{\sigma}^h$，使得若 T^i是带有标签 $\boldsymbol{\tau}^i \equiv \boldsymbol{\sigma}^i \cdots \boldsymbol{\sigma}^1$ 的二叉树（T^0 是带有平凡标签的二叉树），则（$\boldsymbol{\tau}^h$）$_h$ =τ_h。此外，若 C 是对序列 T^0，...，T^h进行插值的锥复形，则存在一个 $3h$-变形 G，其拥塞为 Δ（G），且它是 $C_1 \to C_0$的子图，其

$$\dim C_0 = O(h2^h) = O(|\mathcal{V}|^2 \log|\mathcal{V}|). \tag{27}$$

注 10。 严格来说，该置换可以通过 $h-1$ 次交换操作获得，即 $\boldsymbol{\sigma}^2$、.....、$\boldsymbol{\sigma}^h$，因此只需要对 $3h-2$进行（G）变形（见图 3）。不过，为了去除悬空常数，我们添加了一个任意的平凡交换门，即 $\boldsymbol{\sigma}^1$ 具有空索引。

证明。 不失一般性，假设 $h_0 \le h_1$。注意，顶点 $\mathcal{V}_0$ 可以用长度为 h_0的比特串来标记，即$\hat{s}$ 为 $\mathcal{V}_0$ 上的单射$\mathcal{V}_0 \to \{0,1\}^{h_0}$，对于 $\mathcal{V}_1$也类似。由于该图是二分图，每条边 $e \in \mathcal{E}$ （其相邻顶点为 $v_0 \in \mathcal{V}_0$、$v_1 \in \mathcal{V}_1$ ）都可以用长度为 h的比特串$\hat{s}(e) \equiv \hat{s}(v_0)\hat{s}(v_1)$ 来标记。注意，我们对符号$\hat{s}$ 的用法有所扩展。考虑一棵高度为 h、带有标准标签的二叉树 T^1，使得边 e 可以通过映射 $e \mapsto |\hat{s}(e)\ T^1\rangle$ 嵌入高度为 h 的叶子中。

注意，边 e 与 v_0、v_1 的顺序无关，因此每条边也可以通过 $\hat{s}(v_1)\hat{s}(v_0) = \bar{\tau}_h\hat{s}(e)$ 来标记。注意，τ_h 可以通过以下意义下的 h交换操作导出。令 $\boldsymbol{\sigma}^1$ 表示平凡交换门，即空索引对应的交换门；令 $\boldsymbol{\sigma}^i$、$i \geq 2$ 表示指标为

- $\{h_0-i+2, h_0-i+4, ..., h_0+i-2\}$ for $2 \leq i \leq h_0+1$,
- $\{i-h_0, i-h_0+4, ..., \min(i+h_0-2, h-1)\}$ for $h_0+1 < i \leq h$.

进一步令 $\boldsymbol{\tau}^i = \boldsymbol{\sigma}^i \cdots \boldsymbol{\sigma}^1$，使得$(\boldsymbol{\tau}^h)_h = \tau_h$。令 T^i为带有标签 $\boldsymbol{\tau}^i$ 的二叉树，从而边 e 也可通过映射$e \mapsto \|\bar{\tau}^h\hat{s}(e)\ T^h\rangle$嵌入到高度为 h 的叶子中，其中我们注意到 $\bar{\tau}^h\hat{s}(e) = \bar{\tau}_h\hat{s}(e)$。

如注8和注9所述，我们现在通过插值连接 T^0和 T^h 的顶点。具体而言，令 C 表示对该序列进行插值的锥复形，使得 $|s、\ T^0\rangle$、$|s、\ T^h\rangle$通过一条边长为 $2h$的路径相连。特别地，$\hat{s}(v_0)\hat{s}(v_1)\ T^0\rangle$ 与$\hat{s}(v_0)\hat{s}(v_1)\ T^h\rangle = |\bar{\tau}^h(\hat{s}(v_1)\hat{s}(v_0))\ T^h\rangle$ 通过一条边长为 $2h$ 的路径 $\gamma^{\text{inter}}(e)$相连，该路径除端点外与T^0、T^h 不相交。具体而言，$\gamma^{\text{inter}}(e)$也可视为胞腔复形 C中的一列相邻顶点，即

$$\gamma^{\text{inter}}(e) = |\hat{s}(e), T^0\rangle \to |\hat{s}(e), S^1\rangle \to |\hat{s}(e), T^1\rangle \tag{28}$$
$$\to \cdots \to |\hat{s}(e), T^h\rangle. \tag{29}$$

另请注意，$\hat{s}(v_0)\hat{s}(v_1)\ T^0\rangle$ 是 $\hat{s}(v_0)\ T^0\rangle$的一片叶子，因此存在一条完全包含于 T^0 中的连通路径 $\gamma^0(e)$，其边长为 h_1，连接这两个顶点，即

$$\gamma^0(e) = |\hat{s}(v_0), T^0\rangle \to |\hat{s}(v_0)\hat{s}(v_1)_1, T^0\rangle \tag{30}$$
$$\to |\hat{s}(v_0)\hat{s}(v_1)_1\hat{s}(v_1)_2, T^0\rangle \cdots \to |\hat{s}(e), T^0\rangle.$$

类似地，存在一条完全包含于 T^h 中的连通路径 $\gamma^h(e)$，其边长为 h_0，连接$|\bar{\tau}^h(\hat{s}(v_1)\hat{s}(v_0))\ T^h\rangle$与 $|\bar{\tau}^h\hat{s}(v_1)\ T^h\rangle$。令 $\gamma(e)$表示路径 $\gamma^0(e) \to \gamma^{\text{inter}}(e) \to \gamma^h(e)$的拼接，使得$\gamma(e)$的边长为 $3h$。注意，对于不同的边 e，$\gamma^{\text{inter}}(e)$是简单路径且彼此顶点不交，因此可能会天真地认为 γ 诱导出 G的一个细分。遗憾的是，事实并非如此。相反，对于 G 中的不同 e，$\gamma^0(e)$ $\gamma^h(e)$可能重叠，因此 γ 仅诱导出 G的一个 $3h$-变形。具体而言，我们识别$\mathcal{V}_0 \ni v_0 \mapsto \hat{s}(v_0)\ T^1\rangle$ 和 $\mathcal{V}_1 \ni v_1 \mapsto |\bar{\tau}^h\hat{s}(v_1)\ T^h\rangle$，使得 $\gamma G = \bigcup_e \gamma(e)$是 G的一个 $3h$-变形。包含映射 $\gamma G \hookrightarrow C$ 表明 γG 是C的一个子图。

如前所述，对于不同的 $e \in G$，$\gamma^0(e)$ $\gamma^h(e)$ 可能会重叠。不过，重叠部分显然有 $\Delta(G)$ 的界，因此 γG 的拥塞为 $\Delta(G)$。□

推论 IV.7. 设 G 表示一个最大度为 $\Delta(G)$的图复形，其顶点为 $|\mathcal{V}| \leq 2^{h_0}$，边为$|\mathcal{E}| \leq 2^{h_1}$，且 $h = h_0+h_1$。那么存在胞腔复形 C，使得 G的一个 $6h$-变形（拥塞为 $\Delta(G)$）是 C 的子图，且

$$\dim C_0 = O(h2^h) = O(|\mathcal{V}||\mathcal{E}|\log(|\mathcal{V}||\mathcal{E}|)). \tag{31}$$

特别地，如果 $\Delta(G) = O(1)$，那么

$$\dim C_0 = O(|\mathcal{V}|^2 \log|\mathcal{V}|). \tag{32}$$

证明。注意，如果我们将 G 中的每条边 e 都细分，并在其中心添加一个顶点，那么得到的细分图就是一个二分图，其顶点划分对应于$\mathcal{V} \sqcup \mathcal{E}$，也就是说，$G$ 的 2-细分是二分图。于是结论得证。□

B. 为获得更好的锥面剪枝

定理IV.6（以及推论IV.7）中，锥复形的大小为 $O(|\mathcal{V}|^2 \log|\mathcal{V}|)$——这还不够简约。在本小节中，我们通过 $O(|\mathcal{V}|\log|\mathcal{V}|)$——得到一个更好的界。

1）对 C 中不必要的分支进行剪枝，将渐近规模降至 $O(|\mathcal{V}|\log^2|\mathcal{V}|)$；2）移除/收缩度为 2 的顶点，即不产生分支的顶点，以及相应的边，从而使渐近规模达到 $O(|\mathcal{V}|\log|\mathcal{V}|)$。

虽然可以同时进行这两步，但这样会让证明更难理解。因此，第一个小节只证明第一步，第二个小节则同时考虑这两步。

1. *Pruning extraneous branches*

剪枝背后的直觉很简单：我们的目标是嵌入一个二分图，其每一侧有 $O(|\mathcal{V}|)$ 个顶点；而我们的二叉树高度为 h，每棵树有 $O(|\mathcal{V}|^2)$ 个叶子。因此，我们移除树中那些通向无关叶子的分支。

定义 IV.8（剪枝树）。设 $\mathcal{L}$ 表示高度为 h 的叶子集合，即 $\{0,1\}^h$ 中长度为 h 的比特串。将带有标签 $\boldsymbol{\tau}$、高度为 h 的 $\mathcal{L}$-剪枝二叉树 T 定义为图复形，其边为 $\|\bar{\tau}s\rangle$，顶点为 $|\bar{\tau}s\rangle$，定义在长度为 $\ell \leq h$ 的比特串 $s = s_1 \cdots s_\ell$ 上，并满足存在 $s_{\ell+1}$，...，$s_h \in \{0,1\}$，使得填充后的比特串 $s_{\text{leaf}} = s_1 \cdots s_h$ 满足 $s_{\text{leaf}} \in \tau\mathcal{L}$；也就是说，写作 $s \subseteq s_{\text{leaf}}$，并将 s 称为 $\tau\mathcal{L}$-截断。特别要注意，如果边 $\|\bar{\tau}s\rangle$ 在 T 中定义良好，那么顶点 $|\bar{\tau}s\rangle$、$|\bar{\tau}\omega s\rangle$也定义良好，因此式 (13) 中通常的邻接关系也定义良好。

定义 IV.9（剪枝插值）。令 $\mathcal{L}$ 为高度为 h 的叶子，并令 T'，T 分别为高度为 h、带有标签 $\boldsymbol{\sigma\tau}$，$\boldsymbol{\tau}$ 的 $\mathcal{L}$-剪枝二叉树，其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是指标为 I 的交换。定义 **$\mathcal{L}$-剪枝** 插值复形 S，位于 T'，T 之间，它是如下图复形

顶点 $|\bar{\tau}\sigma^\star s\rangle$ 和边 $\|\bar{\tau}\sigma^\star s\rangle$ 在所有 $\tau\mathcal{L}$-截断s。注意，如果边 $\|\bar{\tau}\sigma^\star s\rangle$ 定义良好，那么顶点 $|\bar{\tau}\sigma^\star s\rangle$也 $|\bar{\tau}\sigma^\star\omega s\rangle$ 因此，式（16）中的通常邻接关系也是定义良好的。

注 11（剪枝规模）。注意，剪枝树 T 和剪枝插值复形中的顶点数通常为 $= O(h|\mathcal{L}|)$。

首先注意以下这一简单但重要的观察。

引理 IV.10 (交换与剪枝)。设 $\mathcal{L}$ 为叶子，$\boldsymbol{\tau}$ 为标签，$\boldsymbol{\sigma}$ 为指标为 I的交换。设 s为一个 ℓ比特串。若 $\ell \notin I$，则 s 是一个 $\tau\mathcal{L}$截断，$\Leftrightarrow \sigma s$是一个 $\sigma\tau\mathcal{L}$截断——具体而言，若 $s \subseteq s_{\text{leaf}} \in \tau\mathcal{L}$，则$\sigma s \subseteq \sigma s_{\text{leaf}}$。

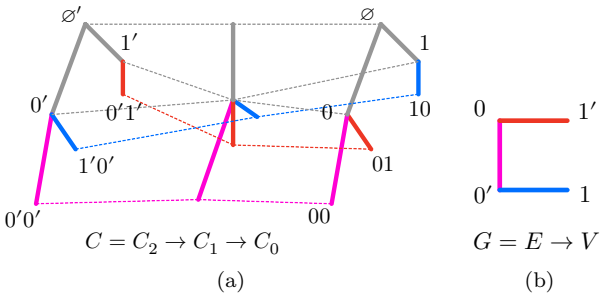


图 4. 剪枝插值锥。与图 3相比，绿色分支对于将图 G 嵌入 C 中（包括其细分）并非必要，因此予以剪枝。

引理 IV.11（剪枝插值锥）。设 $\mathcal{L}$ 为高度 h处的叶子。设 T'、T分别为标签为 $\boldsymbol{\sigma\tau}$、$\boldsymbol{\tau}$的 $\mathcal{L}$-剪枝树，其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是一次交换；设 S表示相对于 T'、T的 $\mathcal{L}$-剪枝插值。设 $T'S$、ST分别为标签为 $\boldsymbol{\sigma\tau}$、$\boldsymbol{\tau}$的 $\mathcal{L}$-剪枝二叉树。定义 $g_i : (T'S \oplus ST)_i \to (T' \oplus S \oplus T)_i$对 $i = 1$、0 而言为

$$g_1\|\bar{\tau}\sigma s, T'S\rangle = \|\bar{\tau}\sigma s, T'\rangle + \|\bar{\tau}\sigma^\star\sigma s, S\rangle, \tag{33}$$
$$g_1\|\bar{\tau} s, ST\rangle = \|\bar{\tau}\sigma^\star s, S\rangle + \|\bar{\tau} s, T\rangle, \tag{34}$$

类似地[9] 对于 g_0。则 g 是一个链映射，而锥复形 C =锥(g) ——见图 4 ——满足

$$H_2(C) = H_1(C) = 0, \quad H_0(C) \cong \mathbb{F}_2 \tag{35}$$
$$C_2 \overset{4}{\rightleftharpoons}_4 C_1 \overset{2}{\rightleftharpoons}_9 C_0. \tag{36}$$

证明。该证明与引理IV.5的证明几乎完全相同，因此我们只指出其中的差异。事实上，由于代数方程完全相同，只需证明 g_1 （同理，g_0）定义良好，

例如，若 $\|\bar{\tau}\sigma s,\ T'S\rangle$是一条有效的边，那么 $\|\bar{\tau}\sigma s,\ T'\rangle$和 $\|\bar{\tau}\sigma^\star\sigma s,\ S\rangle$也都是有效的边。显然，$\|\bar{\tau}\sigma s,\ T'\rangle$ 定义良好，因此我们重点考察另一条边。由于 $T'S$的标签为 $\boldsymbol{\sigma\tau}$，可知 s是一个 $\sigma\tau\mathcal{L}$-截断。下面分两种情况讨论，并回顾备注 $\sigma^\star\omega\sigma = \sigma^\star\sigma\omega$ 中的关键代数关系7。设 s 为一个 ℓ-比特串。

- 若 $\ell \notin I$，则由引理 IV.10，σs 是一个 $\tau\mathcal{L}$-截断，因此 $\|\bar{\tau}\sigma^\star\sigma s,\ S\rangle$ 定义良好
- 如果 $\ell \in I$，那么 $\ell - 1 \notin I$，使得 $\sigma\omega s = \omega\sigma s$ 是一个$\tau\mathcal{L}$截断。特别地，存在某个比特 $b \in \{0, 1\}$，使得 $\tilde{s} \equiv (\omega\sigma s)b$ 是一个 $\tau\mathcal{L}$截断。注意，$\sigma^\star\tilde{s} = \sigma^\star\sigma s$，因此 $\|\bar{\tau}\sigma^\star\sigma s,\ S\rangle$ 是良定义的。

其他情况类似，因此 g_1，g_0 是良定义的。代数方程相同，因此g 是一个链映射。接下来，如定理 IV.5 的证明所示，结论成立。 □

注 12（剪枝插值序列）。与注8和注9类似，C 是一个胞腔复形，它通过经过 $|s', S\rangle$ 的唯一边连接叶子（h 个比特串）$|s', T'\rangle$ 和 $|s', T\rangle$，使得对于不同的 s'，连接路径彼此顶点不交。图 4 展示了示意图。此外，如果 $T^0, ..., T^n$ 是一个 $\mathcal{L}$ 剪枝交换序列，那么可通过链映射 $g\colon T^nS^n \oplus S^nT^{n-1} \cdots \oplus S^1T^0 \to T^n \oplus \cdots \oplus T^0$ 得到类似的构造，使得 $C =$ 锥(g) 是一个满足公式 (35)–(36) 的胞腔复形。我们将 C 称为插值 $\mathcal{L}$ 剪枝交换序列 $T^0, ..., T^n$ 的 $\mathcal{L}$ 剪枝锥复形。同样，顶点 $|s', T^i\rangle, i = 0, ..., n$ 按照前文所述，通过插值连接在一起。

利用剪枝后的插值锥，我们也可以类似地推导出定理 IV.6及其推论，但开销更低，这可由备注11得出。参见图 4 。

定理 IV.12 (剪枝简约锥，图 4)。设 G 表示一个二分图的复形，其顶点划分为 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sqcup \mathcal{V}_1$，其中 $|\mathcal{V}_i| \le 2^{h_i}$，且 G 没有孤立顶点，最大度为 $\Delta(G)$。那么，存在胞腔复形 C，使得存在一个 $3h$-变形，将G 以拥塞 $\Delta(G)$，且它是 C 的子图，其中

$$\dim C_0 = O(|\mathcal{E}| \log^2(|\mathcal{V}||\mathcal{E}|)), \tag{37}$$

and

$$H_2(C) = H_1(C) = 0, \quad H_0(C) \cong \mathbb{F}_2 \tag{38}$$
$$C_2 \overset{4}{\rightleftharpoons}_4 C_1 \overset{2}{\rightleftharpoons}_9 C_0. \tag{39}$$

特别地，如果 $\Delta(G) = O(1)$ 则

$$\dim C_0 = O(|\mathcal{V}| \log^2 |\mathcal{V}|). \tag{40}$$

[9] 将 $\|\cdots\rangle$ 替换为 $|\cdots\rangle$。

证明。该证明与定理 IV.6 的证明几乎相同，除注 11 外，因此我们概述其思路。任意地经由 $\hat{s}$ 对 $\mathcal{V}_i$ 进行标签：$\mathcal{V}_0 \to \{0,1\}^{h_i}$，使得边 $e = v_0v_1 \in \mathcal{E}$ 经由 h-比特串 $\hat{s}(e) = \hat{s}(v_0)\hat{s}(v_1)$ 被标签。令 $\mathcal{L} = \hat{s}(\mathcal{E})$ 为叶子的集合。然后，与之前类似，存在一列交换操作 $\boldsymbol{\sigma}^1, ..., \boldsymbol{\sigma}^h$，使得 T^i 为具有标签 $\boldsymbol{\tau}^i \equiv \boldsymbol{\sigma}^i \cdots \boldsymbol{\sigma}^1$ 与 $(\tau^h)_h = \tau_h$ 的 $\mathcal{L}$-剪枝二叉树。令 C 为对 $T^0, ..., T^h$ 进行插值的 $\mathcal{L}$-剪枝锥复形。由于 G 没有孤立顶点，所有顶点都将包含在 $\mathcal{L}$-剪枝锥复形中，从而该陈述成立。 □

推论 IV.13。令 G 表示一个有界度为 $\Delta(G) = O(1)$ 的图复形。则存在单元复形 C，使得存在一个 $6h$-变形，将 G变形成具有$O(1)$拥塞的子图，并且该子图是 C 的子图，满足

$$\dim C_0 = O(|\mathcal{V}| \log^2 |\mathcal{V}|), \tag{41}$$

and

$$H_2(C) = H_1(C) = 0, \quad H_0(C) \cong \mathbb{F}_2 \tag{42}$$

$$C_2 \overset{4}{\rightleftharpoons}_4 C_1 \overset{2}{\rightleftharpoons}_9 C_0. \tag{43}$$

证明。如果 G 有孤立顶点，那么我们可以添加额外的边，将所有孤立顶点连接成一条链，使得 G 成为新图复形 G' 的子图。显然，G' 的度有界、没有孤立顶点，因此结论成立。 □

2. *Pruning and Contracting*

除了剪枝之外，我们还进一步收缩二叉树中度为 2 的顶点，以将开销再降低一个 $O(\log |\mathcal{V}|)$ 因子。

定义 IV.14（修剪*树）。令 $\mathcal{L}$ 为高度为 h 的叶子，$\boldsymbol{\tau}$ 为标签。考虑长度为 $0 < \ell < h$ 的比特串 s。如果 $s0$ 和 $s1$ 都是 $\tau\mathcal{L}$-截断，那么我们称 s 为 $\tau\mathcal{L}$-**分支**[10]。为简化记号，我们任意规定空比特 $\varnothing$ 以及 $\tau\mathcal{L}$ 中的所有比特串都是 $\tau\mathcal{L}$-分支。定义高度为 h、标签为 $\boldsymbol{\tau}$ 的 $\mathcal{L}$-**修剪*** 树 T：其为一个图复形，其边为$\|\bar{\tau}s\rangle$，顶点为 $|\bar{\tau}s\rangle$，定义在满足分支条件的（$\ell \le h$）比特串s上，并具有邻接关系

$$\partial^T \|\bar{\tau}s\rangle = |\bar{\tau}s\rangle + |\bar{\tau}\Omega s\rangle \tag{44}$$

其中**分支截断** $\Omega s = \Omega^{\tau\mathcal{L}} s$ 是最长的比特串，它是 s 的截断，同时也是 $\tau\mathcal{L}$-分支（可能为空比特）。

[10] 注意，$\tau\mathcal{L}$-分支意味着 $\tau\mathcal{L}$-截断。

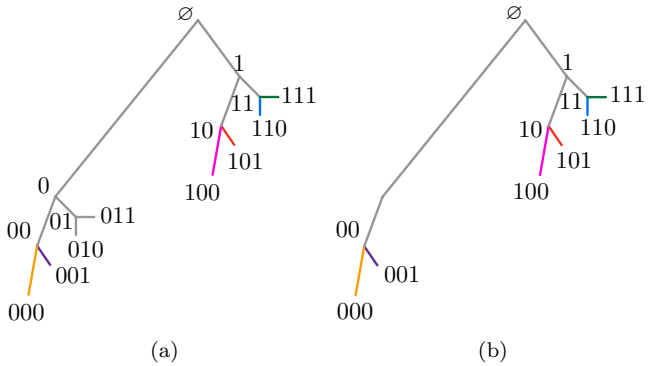


图 5. 剪枝*。彩色叶子构成集合 $\mathcal{L}$。(a) 表示一棵带有平凡标签的二叉树，比特串表示树中的顶点。(b) 表示一棵带有平凡标签的 $\mathcal{L}$-修剪*二叉树，比特串表示剩余的顶点。具体而言，(a) 中的顶点 $|0\rangle$ 在 (b) 中不存在，因此 (b) 中的边 $\|00\rangle$ 的端点为 $|00\rangle$ 和$|\varnothing\rangle$。

注释 13（剪枝*大小）。注意，所有顶点（除根 $|\varnothing\rangle$）一棵 $\mathcal{L}$-修剪*树的度为 3 或 1——后者对应于叶子 $\mathcal{L}$。利用对任意图 $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 都成立的关系，

$$2|\mathcal{E}| = \sum_{x \in \mathcal{V}} \deg x \tag{45}$$

以及树的 $|\mathcal{E}| = |\mathcal{V}| - 1$ 这一事实，我们看到$\mathcal{L}$-修剪*树具有大小为 $O(\mathcal{L})$ 的顶点和边。

备注中的关键关系7 是定义插值复形的关键要素。由于修剪*树的邻接关系以 $\omega \mapsto \Omega$ 取代了截断，我们必须推导出类似的关键关系，并将其形式化为命题 IV.16。

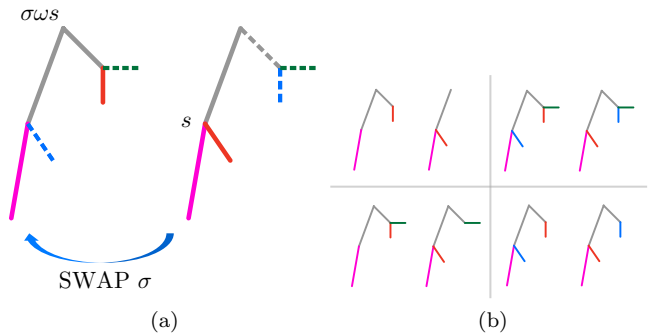


图6. 交换与修剪*。(a) 修剪*后，实线边仍然保留，而虚线边可能会被修剪*，也可能不会。交换发生在字符串 s 的高度处。(b) 简洁地展示了 (a) 中概述的四种具体情形。

引理 IV.15 (交换和 Prune*，图 6)。设 $\mathcal{L}$ 为叶子，$\boldsymbol{\tau}$ 为标签，且 $\boldsymbol{\sigma}$ 为指标为 I 的非相互作用交换。设 s 为一个 $\tau\mathcal{L}$-分支 ℓ-比特串。

- 若 ℓ、$\ell+1 \notin I$，则 σs 是 $\sigma\tau\mathcal{L}$-分支的
- 如果 $\ell \in I$，那么 $\sigma\omega s = \omega\sigma s$ 是 $\sigma\tau\mathcal{L}$-分支
- 如果 $\ell+1 \in I$，那么 σs 是 $\sigma\tau\mathcal{L}$-分支，或者（σs）b 是 $\sigma\tau\mathcal{L}$-分支，其中某个比特为 $b \in \{0,1\}$。

注记14. 第二种情况（$\ell \in I$）如图 6所示，而第三种情况（$\ell+1 \in I$）则与第二种情况相反。

证明。 我们分别考虑这三种情况。为简化记号，我们省略 τ，并将其视为平凡置换。对于一般的 τ，只需将下文中的 $\mathcal{L} \mapsto \tau\mathcal{L}$ 替换即可，证明完全相同。

- （ℓ，$\ell+1 \notin I$）根据引理 IV.10，我们可以看到 σ（sb）=（σs）b是一个 $\sigma\tau\mathcal{L}$-截断，对所有 $b \in \{0,1\}$ 均成立，因此 σs 是 $\sigma\mathcal{L}$-分支。
- ($\ell \in I$)。由于 s 是 $\mathcal{L}$-分支的，我们看到对于任意比特 b，sb 是一个 $\mathcal{L}$-截断。由于 $\ell+1 \notin I$，我们看到 $\sigma(sb)$ 是一个 $\sigma\mathcal{L}$- 截断，因此 $\omega\sigma(sb)$ 是一个 $\sigma\mathcal{L}$- 截断。然而，注意到 $(\sigma\omega s)b = \omega\sigma(sb)$。因此，$\sigma\omega s = \omega\sigma s$ 是 $\sigma\mathcal{L}$-分支的，其中等式由 $\ell - 1 \notin I$ 以及注 7 中的关键关系得出。
- ($\ell+1 \in I$)。由于 $\ell \notin I$，根据引理 IV.10，σs 是一个 $\sigma\mathcal{L}$-截断。事实上，存在比特 b，记作$= 0$，使得 $(\sigma s)0$ 是一个 $\sigma\mathcal{L}$-截断。假设 σs 不是 $\sigma\mathcal{L}$-分支的。那么 $(\sigma s)1$ 不是一个 $\sigma\mathcal{L}$-截断。由于 s 是 $\mathcal{L}$-分支的，我们看到 $s0$、$s1$ 都是 $\mathcal{L}$-截断，因此必定存在比特 b_0、b_1，使得 $s0b_0$、$s1b_1$ 是 $\mathcal{L}$-截断。由于 $\ell+2 \notin I$，根据引理 IV.10，$\sigma(s0b_0) = (\sigma s)b_0 0$以及 $\sigma(s1b_1) = (\sigma s)b_1 1$ 都是$\sigma\mathcal{L}$-截断。若 $b_0 = 0$、$b_1 = 1$，则 $(\sigma s)00$ 和 $(\sigma s)11$ 是 $\sigma\mathcal{L}$-截断，从而 σs 是 $\sigma\mathcal{L}$-分支的，因而产生矛盾。若$b_0 = 1$、$b_1 = 0$，则 $(\sigma s)10$ 是一个 $\sigma\mathcal{L}$-截断，这与 $(\sigma s)1$ 不是 $\sigma\mathcal{L}$-截断的事实相矛盾。若 $b_0 = b_1 = 1$，则 $(\sigma s)10$、$(\sigma s)11$ 是 $\sigma\mathcal{L}$-截断，因而产生矛盾。因此，$b_0 = b_1 = 0$，从而 $(\sigma s)0$ 是$\sigma\mathcal{L}$-分支的。 □

命题 *IV.16*（关键关系*，图 7）。设$\mathcal{L}$ 为叶子，$\boldsymbol{\tau}$ 为标签，$\boldsymbol{\sigma}$ 为指标为 I的交换。设 s 为 $\tau\mathcal{L}$-截断 ℓ-比特串。分别设 m、m'为 Ωs、$\sigma\Omega'\sigma s$的长度，其中 Ω、Ω' 分别是关于 $\tau\mathcal{L}$、$\sigma\tau\mathcal{L}$的分支截断。则 $|m-m'| \le 1$ 和

$$\sigma^\star\Omega s = \sigma^\star\sigma\Omega'\sigma s. \tag{46}$$

注 15。 类似于注 7 中所述，$\sigma^\star\omega = \sigma^\star\sigma\omega\sigma$，我们看到，即使对于分支截断 Ω，Ω'，该关系仍然成立。

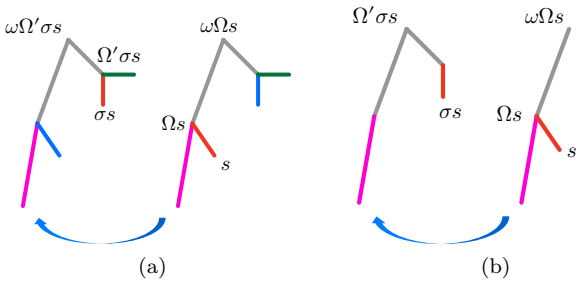


图 7. 关键关系*。蓝色箭头表示交换$\boldsymbol{\sigma}$修剪*树之间的交换 $T \to T'$。比特串 s是一个 $\tau\mathcal{L}$-截断，但不是 $\tau\mathcal{L}$-分支。特别是，s不是叶子——彩色分支应视为与更深层的结构相连。(a)、(b)分别展示了定理$m = m' \in I$ 和 $m = m'+1$ 中的情形 IV.16示例。

证明。 为简化记号，我们省略 τ 并将其视为平凡置换。对于一般的 τ，只需将下文中的 $\mathcal{L} \mapsto \tau\mathcal{L}$ 替换为相应内容，证明过程完全相同。令m，m' 分别表示 Ωs 和 $\sigma\Omega'\sigma s$的长度。注意以下情形。

1) 假设 $m, m+1 \notin I$。那么 $\sigma\Omega s$ 必须是 $\sigma\mathcal{L}$-分支的，且是 σs 的截断。因此，$m' \ge m$，其中等号成立意味着 $\Omega s = \sigma\Omega'\sigma s$2) 假设 $m \in I$。那么根据引理 IV.15$\omega\sigma\Omega s$ 必须是 $\sigma\mathcal{L}$-分支的，且是σs的截断。因此，$m' \ge m-1$，其中等号成立意味着$\omega\Omega s = \sigma\Omega'\sigma s$。 3) 假设 $m+1 \in I$。那么根据引理 IV.15，以下条件必有且仅有一个成立。a) $\sigma\Omega s$ 是 $\sigma\mathcal{L}$-分支的，且是 σs 的截断。因此，$m' \ge m$，其中等号成立意味着 $\Omega s = \sigma\Omega'\sigma s$b) $\sigma\Omega s$不是 $\sigma\mathcal{L}$-分支的，并且存在比特 b，使得 $(\sigma\Omega s)b$ 是 $\sigma\mathcal{L}$-分支的，且是 σs 的截断。因此，$m' \ge m+1$，其中等号成立意味着 $(\Omega s)b = \sigma\Omega'\sigma s$

将情形 3a 与情形 1 合并，因为它们意味着相同的结果。注意，这些情形彼此不相交，并构成所有可能性的一个划分。对于 $\Omega'\sigma s$ 也存在类似的情形，我们将其记为 $1' \sqcup 3'a$、$2'$、$3'b$。可能性列于下表，其中空白区域表示不可能出现。例如，根据前面的论证，如果处于情形 $1 \sqcup 3a$，那么 $m' \ge m$。同理，如果处于情形 $1' \sqcup 3'a$，那么 $m \ge m'$。因此，如果这两种情形同时出现，那么 $m = m'$。其他可能性也可用类似方法推导。

	$1' \sqcup 3'a$	$2'$	$3'b$
$1 \sqcup 3a$	$m = m'$	$m = m', m'-1$	
2	$m = m', m'+1$	$\lvert m-m'\rvert \le 1$	$m = m'+1$
$3b$		$m = m'-1$	

根据表格，我们可以立即推导出所有情况下 $\sigma^\star\Omega s$ 与 $\sigma^\star\sigma\Omega'\sigma s$ 之间的关系，因此结论成立。 □

定义 IV.17 (剪枝*插值)。设 $\mathcal{L}$ 为叶子，且 T', T分别为带有标签 $\boldsymbol{\sigma\tau}, \boldsymbol{\tau}$的 $\mathcal{L}$-剪枝*树，其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是交换。定义 T', T之间的 $\mathcal{L}$-**剪枝***插值复形 S为一个图复形，其顶点为 $|\bar{\tau}\sigma^\star s\rangle$，边为 $\|\bar{\tau}\sigma^\star s\rangle$，定义在 s 上，且满足以下条件之一： s 相对于 $\tau\mathcal{L}$ 分支，或 σs 相对于 $\sigma\tau\mathcal{L}$分支。定义

$$\partial^S\|\bar{\tau}\sigma^\star s\rangle = |\bar{\tau}\sigma^\star s\rangle + |\bar{\tau}\sigma^\star\tilde{\Omega}s\rangle \tag{47}$$

其中，**插值截断** Ω 定义如下：若 Ω,Ω' 是相对于$\tau\mathcal{L}$, $\sigma\tau\mathcal{L}$的分支截断，则 Ωs 是 Ωs 和$\sigma\Omega'\sigma s$中较长的比特串。

引理 IV.18 (良定义性)。 $\mathcal{L}$-剪枝*插值复形 S 是良定义的。

证明。为确保 S 良定义，我们必须校验：(1) Ω 良定义；(2) 邻接关系良定义。

事实上，如果 Ωs 或 $\sigma\Omega'\sigma s$ 是严格长于另一个的比特串，那么 Ωs 就是良定义的。然而，若两者长度相同，我们必须证明选择其中任意一个都不会造成差异，也就是说，$\sigma^\star\Omega s = \sigma^\star\sigma\Omega'\sigma s$。事实上，这可由命题 IV.16 得出。

现在来验证邻接关系是良定义的。设给定边 $\|r\rangle$, 其中 r 是一个 ℓ比特串。不失一般性，考虑 $\ell \in I$ 的情形，此时只能从$r = \bar{\tau}\sigma^\star s$确定 ωs。根据定义， s 相对于 $\tau\mathcal{L}$ 是分支的，或者 σs 相对于 $\sigma\tau\mathcal{L}$是分支的。在前一种情形中，由引理 IV.15 可知， $\sigma\omega s = \omega\sigma s$ 相对于 $\sigma\tau\mathcal{L}$是分支的。因此， $\sigma\Omega'\sigma s = \omega s$ 必须是较长的截断，这样我们就可以选择 $\Omega s = \omega s$，从而仅凭有限信息 ωs也能确定其定义。在后一种情形中，由引理 IV.15 可知， ωs 相对于 $\tau\mathcal{L}$ 是分支的，因此 $\Omega s = \omega s$ 必定是较长的截断，这样我们就可以选择 $\Omega s = \omega s$。因此，邻接关系是良定义的。 □

注 16 （剪枝*插值大小）。 S 中的顶点数上界为T' 与 T 中顶点数之和，因此 $= O(\mathcal{L})$。这是因为 S 中的顶点通过 $\bar{\tau}\sigma^\star s$ 进行标记，因此其数量必然少于 s的可能情况数。

引理 *IV.19*（修剪*插值锥，图 *8*）。设 $\mathcal{L}$ 是高度为 h的叶子。设 T'、T是带有标签 $\boldsymbol{\sigma\tau}$、$\boldsymbol{\tau}$和截断 Ω'、Ω 的 $\mathcal{L}$-剪枝*高度为 h 的树，其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是一次交换。令 S 表示截断为 Ω 的 $\mathcal{L}$-剪枝*插值。设 $T'S$、ST是$\mathcal{L}$-剪枝*高度为 h带标签 $\boldsymbol{\sigma\tau}$、$\boldsymbol{\tau}$的二叉树，分别如此。定义 $g_i:(T'S\oplus ST)_i \to (T'\oplus S\oplus T)_i$对于 $i = 1,\ 0$

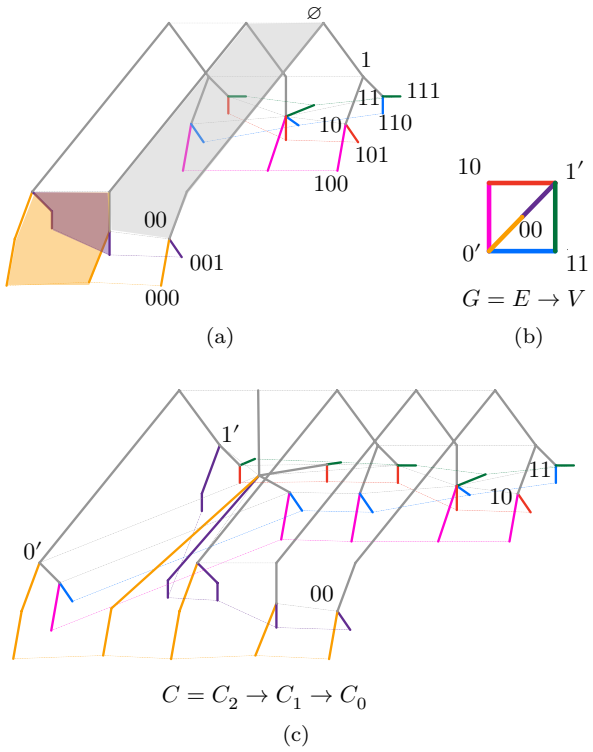


图 8. 修剪* 插值锥。(a) 左侧 T' 和右侧 T分别表示带有标签 $\boldsymbol{\sigma}$ 和带有平凡标签的修剪* 二叉树，其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 表示交换，中间部分表示 S的修剪* 插值图复形 T', T。 T的顶点由 $|s\rangle$ 标记，并带有比特串 s。注意，橙色、紫色和灰色阴影区域均为具有 5 条边的面。例如，橙色面和紫色面的最左侧线段尽管以分段方式绘制，仍表示一条边；而最右侧线段表示两条边，它们在插值复形的分支点处分隔。(b) 表示图 G，它有五个顶点和六条边，由此按定理 IV.20构造出 (c)。注意，(a) 是 (c) 的右侧部分。注意，(b) 中任一顶点的度至少为 2，这保证了 (c) 中相应的带标签顶点都是分支顶点，因此不会被修剪*。

via

$$\begin{aligned} g_1\|\bar{\tau}\sigma s, T'S\rangle &= \|\bar{\tau}\sigma s, T'\rangle + \|\bar{\tau}\sigma^\star\sigma s, S\rangle \\ &\quad + \|\bar{\tau}\sigma^\star\Omega\sigma s, S\rangle\mathbb{1}\{\|\Omega\sigma s\| > \|\Omega' s\|\} \qquad (48)\\ g_1\|\bar{\tau}s, ST\rangle &= \|\bar{\tau}\sigma^\star s, S\rangle + \|\bar{\tau}s, T\rangle \qquad (49)\\ &\quad + \|\bar{\tau}\sigma^\star\Omega' s, S\rangle\mathbb{1}\{\|\Omega' s\| > \|\Omega\sigma s\|\} \qquad (50)\end{aligned}$$

其中， $\|\cdot\|$ 表示比特串[11] 的长度， $\mathbb{1}\{\cdot\}$表示一个指示函数。类似地，定义 g_0，将$\|\cdots\rangle$ 替换为 $|\cdots\rangle$，并去掉第三个指示项。则 g 是一个链映射，而锥复形 $C =$

[11] 请注意，这与汉明重量不同。

锥(g) – 参见图 8 – 满足

$$H_2(C) = H_1(C) = 0, \quad H_0(C) \cong \mathbb{F}_2 \tag{51}$$

$$C_2 \underset{4}{\overset{5}{\rightleftharpoons}} C_1 \underset{9}{\overset{2}{\rightleftharpoons}} C_0. \tag{52}$$

证明。由于 $\mathcal{L}$-修剪*树和插值的邻接关系与式 (13) 和式 (16) 略有不同，因此我们需要对引理 IV.11 的证明稍作修改。为简化记号，假设 τ 是平凡置换，因为否则只需替换 $\mathcal{L} \mapsto \tau\mathcal{L}$，证明完全相同。事实上，注意到 g_i 是定义良好的映射，并且

$$\begin{aligned}\partial^{T'\oplus S} g_1 \|\sigma s, T'S\rangle &= |\sigma s, T'\rangle + |\sigma\Omega' s, T'\rangle \\ &\quad + |\sigma^\star \sigma s, S\rangle + |\sigma^\star \tilde{\Omega}\sigma s, S\rangle \\ &\quad + \Big(|\sigma^\star \Omega\sigma s, S\rangle + |\sigma^\star \tilde{\Omega}\Omega\sigma s, S\rangle\Big) \\ &\quad \times 1\{\|\Omega\sigma s\| > \|\Omega' s\|\}. \end{aligned} \tag{53}$$

此外，

$$\begin{aligned} g_0 \partial^{T'\oplus S} \|\sigma s, T'S\rangle &= |\sigma s, T'\rangle + |\sigma\Omega' s, T'\rangle \\ &\quad + |\sigma^\star \sigma s, S\rangle + |\sigma^\star \sigma\Omega' s, S\rangle. \end{aligned} \tag{54}$$

显然，若 $\|\Omega\sigma s\| \le \|\Omega' s\|$，则我们可以选择 $\tilde{\Omega}\sigma s = \sigma\Omega' s$，因此这两个方程相等。于是，为了证明 g 是链映射，我们将重点讨论 $\|\Omega\sigma s\| > \|\Omega' s\|$ 的情形。

我们可以选择 $\tilde{\Omega}\sigma s = \Omega\sigma s$，因此只需证明 $\sigma^\star\Omega\Omega\sigma s = \sigma^\star\sigma\Omega' s$。事实上，由命题 IV.16 可知，$\Omega' s = \omega\sigma\Omega\sigma s$，且 $\|\Omega\sigma s\| \in I$。因此，$\sigma^\star\sigma\Omega' s = \omega\Omega\sigma s$。反过来，为了确定 $\Omega\Omega\sigma s$，考虑 $\Omega\Omega\sigma s$ 和 $\sigma\Omega'\sigma\Omega\sigma s$。由于 $\|\Omega\sigma s\| \in I$，根据引理 IV.15，我们可知 $\omega\sigma\Omega\sigma s$ 是 $\sigma\mathcal{L}$-分支的，因此 $\Omega'\sigma\Omega\sigma s = \omega\sigma\Omega\sigma s$ 必定是两者中较长的一个（不一定严格更长）（$\Omega\Omega\sigma s$ 与 $\sigma\Omega'\sigma\Omega\sigma s$），从而 $\tilde{\Omega}\Omega\sigma s = \sigma\omega\sigma\Omega\sigma s = \omega\Omega\sigma s$。因此，$\sigma^\star\Omega\Omega\sigma s = \sigma^\star\sigma\Omega' s$，且 g_i 是链映射。

论证的其余部分与引理IV.11类似，不过式（36）中的权重略有不同，这是因为链映射中多了一项 g_0。 □

定理 IV.20（剪枝*简约锥）。 设$G = E \to V$表示一个二分图的复形，其顶点划分为 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sqcup \mathcal{V}_1$，其中 $|\mathcal{V}_i| \le 2^{h_i}$，且 G 中的每个顶点的度均为 ≥ 2，最大度为 $\Delta(G)$。那么存在胞腔复形 C，使得G 的一个 $3h$-变形（拥塞为 $\Delta(G)$）是 C 的子图，且

$$\dim C_0 = O(|\mathcal{E}| \log(|\mathcal{V}||\mathcal{E}|)) \tag{55}$$

and

$$H_2(C) = H_1(C) = 0, \quad H_0(C) \cong \mathbb{F}_2 \tag{56}$$

$$C_2 \underset{4}{\overset{5}{\rightleftharpoons}} C_1 \underset{9}{\overset{2}{\rightleftharpoons}} C_0. \tag{57}$$

特别地，如果 $\Delta(G) = O(1)$，则

$$\dim C_0 = O(|\mathcal{V}| \log |\mathcal{V}|). \tag{58}$$

证明。 该证明类似于定理IV.12，只是开销更小，且式（52）中的权重略有不同，这是由于额外项出现在链映射g_0。另请注意一项额外要求：每个顶点的度为 ≥ 2。这样，这些顶点便对应于分支点，因而不会被剪枝*。 □

推论 IV.21。 设 G 表示一个最大度为 $\Delta(G) = O(1)$ 的图复形。那么存在胞腔复形C，使得 G的一个 $6h$-变形（拥塞为 $\Delta(G)$）是 C 的子图，且

$$\dim C_0 = O(|\mathcal{V}| \log |\mathcal{V}|) \tag{59}$$

And

$$H_2(C) = H_1(C) = 0, \quad H_0(C) \cong \mathbb{F}_2 \tag{60}$$

$$C_2 \underset{4}{\overset{5}{\rightleftharpoons}} C_1 \underset{9}{\overset{2}{\rightleftharpoons}} C_0 \tag{61}$$

证明。 与推论 IV.13类似，添加边，同时保持度有界，使得满足定理IV.20中的条件。结论随即得证。 □

C. 直接嵌入

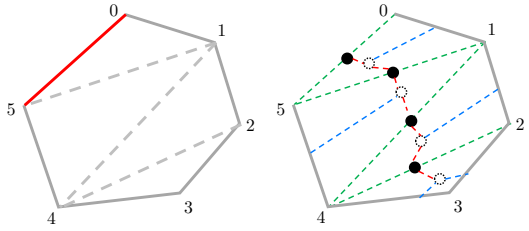


图 9. 胞腔分解。(a) 灰色线条表示路径 γe，红色线条表示 e。虚线表示添加的边，它们将简单环分解为胞腔。(b) 表示悬垂重复码 $R^{\sim}$与原始细分 γe 之间的邻接关系，如式 (66) 中的图所示。

如定理 IV.6、IV.12、IV.20 或其推论所述，给定一个图复形 G，存在一个简约锥，其中包含 G 的一个变形。本节中，我们对 $C \mapsto C'$ 进行修改，使得 G 成为 C' 的子图。为此，我们从简单的情形入手，考虑单条边 e 的变形 $\gamma(e)$。如图 9a 所示，将原始边 e 插入 γe 的端点，使得 $\gamma e + e$ 构成一个简单环，例如，γe 由序列 (0, 1, ..., n) 中涉及的顶点和边组成，而e 对应于 (n, 0)。通过添加边和面将该环分解为胞腔。一般过程由以下引理形式化

引理 IV.22 (胞腔分解)。 令 G: $E \to V$ 表示一个最大度为 $\Delta(G)$ 的图复形，并令 C 表示一个胞腔

复形，其最大度为 $\Delta(C)$，且拥塞为 $\Delta(G)$ 的变形γG是 C的子图。那么存在胞腔复形 C'，使得 G是 C' 的子图，并且

$$H_i(C') \cong H_i(C), \forall i \quad \dim C_0 = \dim C'_0. \tag{62}$$

此外，若 C 的最大权重记为

$$C_2 \underset{\mathfrak{q}}{\overset{\mathfrak{w}}{\rightleftharpoons}} C_1 \underset{\Delta(C)}{\overset{2}{\rightleftharpoons}} C_0, \tag{63}$$

则 C' 的最大权重记为

$$C'_2 \underset{\mathfrak{q}+\Delta(G)}{\overset{\max(\mathfrak{w},3)}{\rightleftharpoons}} C'_1 \underset{\Delta(C)+\Delta(G)}{\overset{2}{\rightleftharpoons}} C'_0. \tag{64}$$

证明。固定一条边 $e \in \mathcal{E}$，并令 $\|\gamma e\|$ 为变形边的长度。令 $R^{-\circ} = R^{-\circ}(e)$表示 $\|\gamma e\| - 1$ 比特上的悬垂重复码，即$R_1^{-\circ} \to R_0^{-\circ}$具有1-胞腔 $\|i\rangle = \|i;\ e\rangle$ 以及0-胞腔 $|i\rangle = |i; e\rangle$，对于 $i = 1, \ldots\ldots, \|\gamma e\| - 1$，其邻接关系为

$$\partial^{-\circ} \|i\rangle = |i\rangle + |i+1\rangle \tag{65}$$

其中，若 $|i\rangle$ 并非良定义，则 $|i\rangle$ 隐式为 $= 0$。注意，$R^{-\circ}$ 不是图复形，且 $H_1(R^{-\circ}) = H_0(R^{-\circ}) = 0$。

不失一般性，标记路径γe的顶点为$0, \ldots\ldots, \|\gamma e\|$并考虑线性映射 $g_i = g_i(e)$: $R_i^{-\circ} \to C_i$ 如下图所示，并相应地见图9b。

$$\begin{array}{ccccc} R_1^{-\circ} & \xrightarrow{\partial^{-\circ}} & R_0^{-\circ} \\ \downarrow{\scriptstyle g_1} & & \downarrow{\scriptstyle g_0} \\ C_2 & \xrightarrow{\partial^C} & C_1 & \xrightarrow{\partial^C} & C_0 \end{array} \tag{66}$$

具体而言，g_0 被定义为将 $|i\rangle$ 映射到 γe中由 $\lfloor i/2 \rfloor$ 和 $n - \lceil i/2 \rceil + 1$ 标记的顶点，而 g_1 将 $\|i\rangle$ 映射到 γe 中具有端点的边

- $\ell, \ell+1$ if $i = 2\ell + 1 \neq \|\gamma e\| - 1$
- $n - \ell + 1, n - \ell$ if $i = 2\ell \neq \|\gamma e\| - 1$
- $\lceil n/2 \rceil - 1, \lceil n/2 \rceil$ and $\lceil n/2 \rceil, \lceil n/2 \rceil + 1$ for $i = \|\gamma e\| - 1$

容易校验 g 是一个链映射。对所有边 $e \in \mathcal{E}$执行所述操作。具体而言，令

$$R^{-\circ} \mapsto \bigoplus_e R^{-\circ}(e), \quad g_i \mapsto \sum_e g_i(e) \tag{67}$$

于是显然 g_i 是一个链映射，因为它是链映射之和。令 $C' = \text{cone}(g)$，从而由蛇引理，对所有 i有 $H_i(C') \cong H_i(C)$。将 $e \in \mathcal{E}$ 与$|0\rangle$等同；$e\rangle \in R^{-\circ}$ 从而显然 G 是C'的一个子图。

最后，注意锥复形 C'的权重可通过下图得到，其中数字表示相应映射的最大列权重

$$\begin{array}{ccccc} & & R_1^{-\circ} & \underset{2}{\overset{2}{\rightleftharpoons}} & R_0^{-\circ} \\ & & \Delta(G) \Big\| 2 & & \Delta(G) \Big\| 2 \\ C_2 & \underset{\mathfrak{q}}{\overset{\mathfrak{w}}{\rightleftharpoons}} & C_1 & \underset{\Delta(C)}{\overset{2}{\rightleftharpoons}} & C_0 \end{array} \tag{68}$$

特别地，注意映射$C_1 \mapsto R_1^{-\circ}$的最大权重为 $\Delta(G)$，因为 γG 的拥塞为 $\Delta(G)$。□

将胞腔化引理与定理IV.20 或推论IV.21 结合，得到如下结果。

定理 IV.23（胞腔化锥）. 设 $G = E \to V$表示一个具有有界度 $\Delta = \Delta(G)$的图复形。则存在胞腔复形 C，使得 G是 C 的子图，且

$$\dim C_0 = O(|\mathcal{V}| \log |\mathcal{V}|), \tag{69}$$

and

$$H_2(C) = H_1(C) = 0, \quad H_0(C) \cong \mathbb{F}_2 \tag{70}$$

$$C_2 \underset{4+\Delta}{\overset{5}{\rightleftharpoons}} C_1 \underset{9+\Delta}{\overset{2}{\rightleftharpoons}} C_0. \tag{71}$$

注释 17（细微差异）。如果将式（71）与参考文献 [44]（第 9 页末）引理 3.4 的证明中所声称的简约锥权重进行比较，我们会发现，除了一个用于计入原始图最大度的附加项 Δ 之外，权重完全相同。这是因为原始图及其边细分都不一定嵌入简约锥中；实际上，嵌入的只有原始图的一个变形。例如，如图 8c所示，在沿着通往顶点 $0'$的路径遍历时，最左侧二叉树中的粉色和蓝色分支会发生重叠，因此在对该锥进行胞腔剖分时，一条边可能参与 Δ许多环的胞腔剖分。这一贡献在参考文献 [44] 中被忽略了，因此可能导致约化权重略大于最初所声称的数值。

V. 附加辅助比特锥

本节介绍如何构造并附加基于简约锥的辅助系统，以执行容错逻辑测量。

令 $D = D_2 \to D_1 \to D_0$ 表示数据低密度奇偶校验 CSS 码[12]，并采用（任意）约定： D_2, D_1, D_0

[12] 我们注意到，此测量也可在非 CSS 稳定子码上执行，详见附录A。

分别表示 Z 型校验、量子比特和 X 型校验，其权重记为

$$D_2 \underset{\mathfrak{q}_Z}{\overset{\mathfrak{w}_Z}{\rightleftharpoons}} D_1 \underset{\mathfrak{w}_X}{\overset{\mathfrak{q}_X}{\rightleftharpoons}} D_0. \tag{72}$$

不失一般性（并为保持记号一致），考虑测量 X 型逻辑比特，这意味着要考虑余链复形 $D^\top = D_0 \to D_1 \to D_2$，其余微分为 δ^D。具体而言，令 $\ell \in D_1$ 表示一个（X 型）逻辑算符，并按如下方式定义 ℓ 的测量图复形 G。令 $\mathcal{V}$ 表示与量子比特（D_1 中的基元素）一一对应、且 ℓ 作用于其上的顶点。注意，每个与 ℓ 重叠的 Z 型校验（基元素 $z \in D_0$）都必须有偶数重叠，即 $|\delta^D z \cap \ell|$ 必须为偶数。因此，可以任意将重叠配对，形成图复形的边。由此得到的度在 $\Delta(G) = \mathfrak{w}_Z\mathfrak{q}_Z$ 中有界。接着任意添加边，同时保持度不超过 $\mathfrak{w}_Z\mathfrak{q}_Z$，直到导出图具有扩展性 [13]，，即切格常数 $h(G) = \Omega(1)$ 有正的下界。[14] 特别地，这一构造诱导出一个从图余链复形 $G^\top$ 到数据余链复形 $D^\top$ 的链映射 $f^\top$：其中，$f_0^\top$ 将每个顶点映射到 ℓ 中对应的量子比特；而 $f_1^\top$ 将边 $e \in \mathcal{E}$ 映射到 z，该边对应于一个与 ℓ 重叠的 Z 型校验 z；相反，任意添加的边均映射为零。

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\delta^G} & E & & \\ \downarrow{\scriptstyle f_0^\top} & & \downarrow{\scriptstyle f_1^\top} & & \\ D_0 & \xrightarrow{\delta^D} & D_1 & \xrightarrow{\delta^D} & D_2 \end{array} \tag{73}$$

根据定理 IV.23，我们可以用细胞化锥（余）复形替换图（余）复形 $G^\top$ $C^\top$。由于 G 是 C的子图，包含映射 $\iota : G \hookrightarrow C$ 诱导出一个单射链映射，因此得到一个满射余复形映射 $\pi : C^\top \to G^\top$，使得$\pi = \iota^\top$。将其表示为交换图：

$$\begin{array}{ccccc} C_0 & \xrightarrow{\delta^C} & C_1 & \xrightarrow{\delta^C} & C_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \\ V & \xrightarrow{\delta^G} & E & & \end{array} \tag{74}$$

因此，余链复形之间存在映射 $g^\top$：

$$\begin{array}{ccccc} C_0 & \xrightarrow{\delta^C} & C_1 & \xrightarrow{\delta^C} & C_2 \\ \downarrow{\scriptstyle g_0^\top} & & \downarrow{\scriptstyle g_1^\top} & & \\ D_0 & \xrightarrow{\delta^D} & D_1 & \xrightarrow{\delta^D} & D_2 \end{array} \tag{75}$$

定理 V.1（变形码）。令 $\mathit{cone}(g^\top) = (\mathit{cone}\, g)^\top$ 为式（75）中得到的对象。则 $M = \mathit{cone}(g)$ 是低密度奇偶校验码，其 $H_1(M^\top) \cong H_1(D^\top)/[\ell]$ 其中$[\ell] \in H_1(D^\top)$ 是由逻辑 ℓ诱导的等价类。此外，若 $h(G)$ 是 G的切格常数，则 $M^\top$ 的（X型）码距 $d(M^\top)$ 为

$$d(M^\top) \geq \min(h(G), 1) d(D^\top) \tag{76}$$

虽然（Z型）码距 $d(M)$ 为 M，但

$$d(M) \geq d(D) \tag{77}$$

证明。逻辑算子同构可由蛇引理推出，或者等价地，按照参考文献 [48] 中的框架，将图用零填充如下，并观察列码 $H_0(C^\top) \to H_1(D^\top) \to 0$。

$$\begin{array}{ccccc} C_0 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_2 \\ \downarrow{\scriptstyle g_0} & & \downarrow{\scriptstyle g_1} & & \\ D_0 & \longrightarrow & D_1 & \longrightarrow & D_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{78}$$

为求得权重，考虑以下图，其中数字表示相应映射的最大列权重

$$\begin{array}{ccccc} C_0 & \underset{2}{\overset{9+\mathfrak{w}_Z\mathfrak{q}_Z}{\rightleftharpoons}} & C_1 & \underset{5}{\overset{4+\mathfrak{w}_Z\mathfrak{q}_Z}{\rightleftharpoons}} & C_2 \\ 1 \Vert & & 1 \Vert & & \\ D_0 & \underset{\mathfrak{q}_X}{\overset{\mathfrak{w}_X}{\rightleftharpoons}} & D_1 & \underset{\mathfrak{w}_Z}{\overset{\mathfrak{q}_Z}{\rightleftharpoons}} & D_2 \end{array} \tag{79}$$

特别地，这意味着

$$M_2 \underset{5+\mathfrak{w}_Z\mathfrak{q}_Z}{\overset{\max(\mathfrak{w}_Z+1,5)}{\rightleftharpoons}} M_1 \underset{\max(\mathfrak{w}_X,10+\mathfrak{w}_Z\mathfrak{q}_Z)}{\overset{\mathfrak{q}_X+1}{\rightleftharpoons}} M_0 \tag{80}$$

因此，如果 D 是低密度奇偶校验的，那么 M 也是。

为证明码距 $d(M^\top)$ 有下界，根据参考文献 [48]，的清理引理，只需证明：对于任意 $s \in C_0$，存在 $\sigma \in C_0$，使得 $\delta^C s = \delta^C \sigma$，其中

$$|\delta^C \sigma| \geq \min(h(G), 1) |g\sigma|. \tag{81}$$

[13] 包含一个扩展图足以保证变形码的码距保持不变。不过，实际上通常没有必要这样做，例如 [21, 22, 34, 37, 52]。[14] 这可以通过添加随机边或使用更复杂的方法来实现 [53–55]。

事实上，令 π 表示从 $C \to G$出发的投影链映射（嵌入的转置），如式（74）所示。则

$$|\delta^C s| \geq |\pi\delta^C s| \tag{82}$$
$$= |\delta^G \pi s|. \tag{83}$$

根据切格常数的定义，若我们稍作记号滥用，用 $\mathcal{V}$ 表示 V 中等于所有基元素之和的那个元素（对 $\mathcal{C}_0$也采用类似的记号），则

$$|\delta^G \pi s| \geq h(G) \min(|\pi s|, |\pi s + \mathcal{V}|). \tag{84}$$

注意，$\mathcal{V} = \pi\mathcal{C}_0$。由于 $\mathcal{C}_0 \in \ker \delta^C$，我们可以根据 $|\pi s|$ 或 $|\pi s + \mathcal{V}|$ 哪一个取得最小值，令 $\sigma = s$ 或 $s + \mathcal{C}_0$，因此

$$|\delta^C s| \geq h(G)|\pi\sigma| = h(G)|g\sigma|. \tag{85}$$

类似地，为了给码距 $d(M)$ 一个下界，考虑将箭头反向后的下图。显然，清理引理的充分条件平凡地满足，系数为 $= 1$，因此$d(M) \geq d(D)$。

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & D_2 & \longrightarrow & D_1 & \longrightarrow & D_0 & \\ & \downarrow g_1 & & \downarrow g_0 & & & \\ C_2 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & & \end{array} \tag{86}$$

由此可知，变形码具备所有期望的性质。

□

注 18。在式（83）中，注意 $|\delta^C s| \geq |\delta^G \pi s|$，但一般而言 $|\delta^C s| = |\delta^G \pi s|$并不成立。因此，辅助锥 C 的相对扩张率 [37] 可能高于原始图 G。因此，在实际情形中，G 可以用小于 1 的切格常数构造，这仍足以保持距离 d（$M^\top$），而与原始码的逻辑比特结构无关，D 只要 C 的相对扩张率至少为 1。

VI. 讨论

在本文工作中，我们描述了一种用于量子码手术的辅助比特系统，其渐近量子比特开销 $O(\mathfrak{w}$对数 $\mathfrak{w})$，适用于权重为 $\mathfrak{w}$ 的算子。通过以 Freedman 和 Hastings 提出的拥塞消除与加厚过程 [36]，替代参考文献 [45] 中提出的简约锥化过程，并将其用于参考文献 [44]中的量子权重约简，实现了这一开销。该辅助比特系统可纳入多种量子码手术流程和架构，以改善其渐近开销，详见表格 I。

我们的结果将量子码手术流程的渐近性能提升到了超越以往最先进水平的程度。然而，仍有一些悬而未决的问题。能否证明，基于辅助图的通用量子码手术流程中，我们的量子码手术流程具有可达到的最低渐近开销？能否通过利用底层码更多的结构，将量子码手术的开销降低至 $O(\mathfrak{w})$？能否通过同时对多个逻辑算符应用量子权重约化技术，降低并行或快速（即单次容错或恒定时间）的量子码手术开销？或者说，在量子低密度奇偶校验码中，容错测量一组对易逻辑算符所需时空体积的基本下界是多少？这些问题都很有研究价值，我们希望未来的工作能够加以探索。

致谢

AC、ZH 和 DJW 感谢 Ted Yoder 富有洞见的讨论。DJW 感谢 Harry Putterman 提供有益的讨论。ACY 受雇于 Iceberg Quantum，并获得了马里兰大学帕克分校 CMTC 物理科学实验室的支持。AC 受雇于 Xanadu，并感谢那里的团队所进行的有益讨论。ZH 感谢麻省理工学院数学系、MIT-IBM Watson AI Lab 以及美国国家科学基金会研究生研究奖学金计划的支持，资助编号 2141064。DJW 获得了澳大利亚研究委员会发现计划早期职业研究奖（DE220100625）的支持。本文工作始于 ZH 、 TCL 和 DJW 访问西蒙斯计算理论研究所期间。

[1] P. W. Shor, 《降低量子计算机存储器中退相干的方法，《物理评论A》**52**, R2493 (1995).

[2] D. Gottesman, 稳定子码与量子纠错（1997），arXiv:量子物理/9705052 [量子物理]。

[3]S. B. Bravyi 和 A. Y. Kitaev，《具有边界的晶格上的量子码》（ 1998 9811052 ），[ ] arXiv：quant-ph/ quant-ph。[4] A. Kitaev，《利用任意子进行容错量子计算》，《物理学年鉴》303，2–30（2003）。[5] S. Bravyi、D. Poulin 和 B. Terhal，《二维系统中可靠量子信息存储的权衡》，《物理评论快报》104，10.1103/physrevlett.104.050503（2010）。[6] N. P. Breuckmann 和 J. N. Eberhardt，《量子低密度奇偶校验码》，PRX Quantum 2，10 1103 2 040101 2021。/prxquantum。。（）。[7] M. B. Hastings、J. Haah 和 R. O'Donnell，《纤维丛码：打破量子 LDPC 码的 $n^{1/2}$ polylog(n)障碍》，载于 *Proceedings of the 53rd Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*，STOC 2021（计算机协会，美国纽约州纽约市，2021 年），第 1276–1288 页。[8] N. P. Breuckmann 和 J. N. Eberhardt，《平衡乘积量子码》，《IEEE信息论汇刊》67，6653（2021）。[9] P. Panteleev 和 G. Kalachev，《具有良好有限长度性能的退化量子 LDPC 码》，Quantum 5，585（2021）。[10] P. Panteleev 和 G. Kalachev，《渐近优良的量子码和局部可测试经典低密度奇偶校验码》，载于 *Proceedings of the 54th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*，STOC 2022（计算机协会，美国纽约州纽约市，2022 年），第 375–388 页。[11] S. Bravyi、A. W. Cross、J. M. Gambetta、D. Maslov、P. Rall 和 T. J. Yoder，《高阈值、低开销容错量子存储器》，《自然》627，778 782 2024–（）。[12] Q. Xu、J. P. Bonilla Ataides、C. A. Pattison、N. Raveen- dran、D. Bluvstein、J. Wurtz、B. Vasi´c、M. D. Lukin、L. Jiang 和 H. Zhou，《利用可重构原子阵列实现恒定开销容错量子计算》，《自然·物理》20，1084–1090（2024）。[13] N. P. Breuckmann 和 S. Burton，《量子码的折叠横向克利福德门》，Quantum 8，1372（2024）。[14] J. N. Eberhardt 和 V. Steffan，《双变量自行车码的逻辑算符与折叠横向门》，《IEEE信息论汇刊》71，1140（2025）。[15] A. Calderbank、E. Rains、P. Shor 和 N. Sloane，《通过 GF(4)上的码实现量子纠错》，载于 *Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory* 1997 292 （），第 – 页。[16] H. Sayginel、S. Koutsioumpas、M. Webster、A. Rajput 和 D. E. Browne，《由码自同构构造容错逻辑克利福德门》，PRX Quantum 6，030343（2025）。[17] B. Eastin 和 E. Knill，《横向编码量子门集的限制》，《物理评论快报》102，10 1103 102 110502 2009。/physrevlett。。（）。[18] A. Chakraborty 和 D. Gottesman，《关于多个逻辑量子比特容错组件的不可能性定理》，arXiv 预印本 arXiv:2602.13395（2026）。[19] L. Z. Cohen、I. H. Kim、S. D. Bartlett 和 B. J. Brown，《利用长程连接实现低开销容错量子计算》，《科学进展》8，eabn1717（2022）。

[20] A. Cowtan 与 S. Burton，CSS 码手术作为一种通用构造，Quantum 8, 1344 (2024)。[21] A. W. Cross、Z. He、P. J. Rall 与 T. J. Yoder，改进的 QLDPC 手术：逻辑测量与桥接码，arXiv 预印本 arXiv:2407.18393。[22] D. J. Williamson 与 T. J. Yoder，通过对逻辑算符进行规范变换实现低开销容错量子计算，arXiv 预印本 arXiv:2410.02213 (2024)。[23] B. Ide、M. G. Gowda、P. J. Nadkarni 与 G. Dauphinais，通过同调测量实现容错逻辑测量，Physical Review X 15, 021088 (2025)。[24] M. Davydova、A. Bauer、J. C. M. de la Fuente、M. Webster、D. J. Williamson 与 B. J. Brown，二维中不打结的通用容错量子计算 (2025)，arXiv:2503.15751 [量子物理]。[25] S.-J. Huang、A. Warman、S. Schafer-Nameki 与 Y. Chen，混合晶格手术：通过非阿贝尔表面码实现非克利福德门（ 2026 2510 20890 ），[ ] arXiv: . 量子物理 .[26] G. Zhu、R. Kobayashi 与 P.-S. Hsin，非阿贝尔 qLDPC：TQFT 形式化、可寻址规范测量及其在二维乘积码魔态喷泉中的应用 (2026)，arXiv:2601.06736 [量子物理]。[27] D. J. Williamson，通过并行规范高阶形式横向门实现快速魔态制备 (2026)，arXiv:2601.22939 [量子物理]。[28] M. Christos、C. F. B. Lo、V. Khemani 与 R. Sahay，通过对逻辑门进行测量规范变换得到的非阿贝尔量子低密度奇偶校验码与非克利福德操作 (2026)，arXiv:2602.12228 [量子物理]。[29] D. Horsman、A. G. Fowler、S. Devitt 与 R. V. Meter，通过晶格手术实现表面码量子计算，New Journal of Physics 14, 123011 (2012)。[30] M. B. Hastings，论量子权重约化，arXiv 预印本 arXiv:2102.10030 (2021)。[31] S. Bravyi、G. Smith 与 J. A. Smolin，经典与量子计算资源的权衡，Physical Review X 6, 10.1103/physrevx.6.021043 (2016)。[32] D. Litinski，表面码博弈：利用晶格手术的大规模量子计算，Quantum 3, 128 (2019)。[33] Z. He、A. Cowtan、D. J. Williamson 与 T. J. Yoder，提取器：用于高效基于泡利的计算的 QLDPC 架构，arXiv 预印本 arXiv:2503.10390 (2025)。[34] T. J. Yoder、E. Schoute、P. Rall、E. Pritchett、J. M. Gambetta、A. W. Cross、M. Carroll 与 M. E. Beverland，Tour de gross：基于双变量自行车码的模块化量子计算机，arXiv 预印本 arXiv:2506.03094 (2025)。[35] P. Webster、L. Berent、O. Chandra、E. T. Hockings、N. Baspin、F. Thomsen、S. C. Smith 与 L. Z. Cohen，Pinnacle 架构：利用量子 LDPC 码将破解 RSA-2048 的成本降至 100 000 个物理量子比特，arXiv 预印本 arXiv:2602.11457 (2026)。[36] M. Freedman 与 M. Hastings，由量子码构建流形，Geo metric and Functional Analysis 31, 855 2021( )。[37] E. Swaroop、T. Jochym-O'Connor 与 T. J. Yoder，量子低密度奇偶校验码之间的通用适配器，PRX Quantum 7, 010324 (2026)。[38] A. Cowtan、Z. He、D. J. Williamson 与 T. J. Yoder，通过量子码手术实现并行逻辑测量，arXiv 预印本 arXiv:2503.05003 (2025)。

[39] N. Baspin、L. Berent 与 L. Z. Cohen，量子 LDPC 码的快速手术，arXiv 预印本 arXiv:2510.04521 (2025)。[40] K. Chang、Z. He、T. J. Yoder、G. Zhu 与 T. Jochym-O'Connor，近常数空间开销下二维超图乘积码上的常数时间手术，arXiv 预印本 arXiv:2603.02157 (2026)。[41] T. Hillmann、G. Dauphinais、I. Tzitrin 与 M. Vasmer，通过故障复形实现单次容错与基于测量的量子纠错，《物理评论A》112, L040401 (2025)。[42] S. J. S. Tan、Y. Hong、T.-C. Lin、M. J. Gullans 与 M.-H. Hsieh，通过码切换在量子 LDPC 码中实现单次普适性，arXiv 预印本 arXiv:2510.08552 (2025)。[43] A. Cowtan、Z. He、D. J. Williamson 与 T. J. Yoder，快速容错逻辑测量：辅助超图与横向手术，arXiv 预印本 arXiv:2510.14895 (2025)。[44] M.-H. Hsieh、X. Li 与 T.-C. Lin，具有最优界的简化量子权重约化，arXiv 预印本 arXiv:2510.09601 (2025)。[45] A. Berdnikov，简约锥，arXiv 预印本 arXiv:2211.14675 (2022)。[46] A. R. Calderbank 与 P. W. Shor，好的量子纠错码存在，《物理评论A》54, 1098–1105 (1996)。[47] C. A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*，剑桥高等数学研究丛书（剑桥大学出版社，英国剑桥，1994）。[48] A. C. Yuan，量子码嵌入的统一框架，《物理评论A》113, 022438 (2026)。[49] S. Huang、T. Jochym-O'Connor 与 T. J. Yoder，同态逻辑测量，arXiv 预印本 arXiv:2211.03625 (2022)。[50]C. Poirson、J. Roffe 与 R. I. Booth，工程化 CSS手术：在任意码中编译任意受控非门，arXiv 预印本 arXiv:2505.01370 (2025)。[51] D. Aasen、J. Haah、M. B. Hastings 与 Z. Wang，几何增强的拓扑量子码，arXiv 预印本 arXiv:2505.10403 (2025)。[52] A. Cowtan，Ssip：基于量子 LDPC 码的自动化手术，arXiv 预印本 arXiv:2407.09423 (2024)。[53] A. Lubotzky、R. Phillips 与 P. Sarnak，拉马努金图，《组合数学》8, 261 (1988)。[54] S. Hoory、N. Linial 与 A. Wigderson，扩展图及其应用，《美国数学会通报》43, 439 (2006)。[55] N. Alon、O. Schwartz 与 A. Shapira，常数度扩展图的一种初等构造，《组合学、概率与计算》17, 319 (2008)。[56] G. Zhang 与 Y. Li，量子低密度奇偶校验码上的时间高效逻辑操作，《物理评论快报》134, 10.1103/physrevlett.134.070602 (2025)。[57] G. Zheng、L. Jiang 与 Q. Xu，高码率手术：迈向常数开销逻辑操作 (2025), arXiv:2510.08523 [量子物理]。[58] H. Zhou、C. Zhao、M. Cain、D. Bluvstein、N. Maskara、C. Duckering、H.-Y. Hu、S.-T. Wang、A. Kubica 与 M. D. Lukin，面向通用量子计算的低开销横向容错，《自然》646, 303 (2025)。[59] Q. Xu、H. Zhou、G. Zheng、D. Bluvstein、J. P. B. Ataides、M. D. Lukin 与 L. Jiang，快速且可并行的逻辑同调积码的计算，《物理评论X》**15**，021065（2025）。

附录 A：各种手术方案的开销降低

在正文中，我们重点讨论了如何在 CSS 码中测量一个权重为 $\mathfrak{w}$ 的单个 Z 或 X 逻辑算符，并将量子比特开销从 $\mathcal{O}(\mathfrak{w}\log^3\mathfrak{w})$ 降低到$\mathcal{O}(\mathfrak{w}\log\mathfrak{w})$。

这里，我们进一步阐述这一主张：我们的方法会产生连锁效应，从而降低其他逻辑测量方案的渐近开销：通用适配器 [37], 、并行逻辑测量 [38], 以及固定连接性架构 [33]。

首先，我们将介绍该方案的一种温和推广：从在任意 CSS 码中测量 CSS型算符，推广到在任意稳定子码中测量任意泡利算符。这一推广与参考文献 [22]中的论述思路十分相似。

1. 稳定子码中任意泡利算符的测量

在正文方案中，参见 IIA，引入新的数据量子比特到辅助系统中的主要原因，是确保新的 X 检查算符不会与预先存在的码中的 Z 检查算符反对易。我们必须确保从 CSS 情形过渡到更一般情形时，也采取类似步骤。

a. X-type operator in a stabilizer code

首先，考虑一个稳定子码 D，它不是 CSS 码，但待测逻辑比特仍具有形式$X(\ell)$，其中量子比特集合为 $\ell\in\mathbb{F}_2^n$。单量子比特泡利算子 $X(i)$会与在 i 上具有 Y 或 Z 基支撑集的检查算符反对易。给定一个检查算符 c，令 $\mathcal{P}(c)$表示其作用于量子比特上的泡利作用，并令 $\mathcal{P}(c)\restriction_i$ 表示 c 在量子比特 i上的泡利作用。

我们必须考虑每个满足 $\mathcal{P}(c)\restriction_i\in\{Y,Z\}$（对于任意 $i\in\mathrm{supp}(\ell)$）的稳定子生成元 c，因为每个新的 X 检查算符都会天真地与任何此类检查算符 c反对易。令 $c^{Y,\,Z}$ 表示 c 在数据量子比特上的支撑集，其中它仅以 Y 或 Z 作用。注意，为使$X(\ell)$成为逻辑算符，我们有

$$|c^{Y,Z}\cap\ell|=0\mod 2,\quad\forall c. \tag{A1}$$

方法如下。引入测量图 $\mathcal{G}$，其顶点集合 V 与 $\mathrm{supp}(\ell)$ 中的元素一一对应。这些顶点 V 将作为辅助系统中的 X校验，并与 ℓ中的量子比特一一相连。根据式 A1，我们可以任意将$c^{Y,Z}\cap\ell$中的元素两两配对。为每一对这样的元素 qq' 引入一条新边。这些边将作为辅助系统中的数据量子比特。

c

将其变形，使其在每条边qq'上都支撑于 Z-基中，这足以确保辅助系统的校验与原始校验对易。还可以添加额外的边，以确保图 $\mathcal{G}$ 的切格常数为 ≥ 1。

接下来，取测量图的简约锥。所有新增的面都将成为 Z-校验。由胞腔复形在度 1 处的正合性可知，辅助系统中不会引入新的逻辑量子比特；而对稳定子生成元和数据量子比特进行计数，很快便可看出，变形码中不会引入其他逻辑量子比特。由于 $\mathcal{G}$ 是扩展的，变形码中任何已有的逻辑算符都无法通过清理而使其权重低于 d 。

b. Arbitrary Pauli operator in a stabilizer code

为考虑最一般的情况，方便起见，我们引入通过局部 Clifford 门进行基变换的概念。给定一个初始稳定子码 D，将单量子比特 Clifford 算符 $\mathfrak{C}$ 应用于量子比特 i ，定义为码 $D \to D'$ 之间的一种映射；该映射通过 $\mathfrak{C}$改变每个与 i 相邻的校验 c 的基，即:

$$\mathcal{P}(c^{D'}) \restriction_i = \mathfrak{C}^\dagger \mathcal{P}(c^D) \restriction_i \mathfrak{C}.$$

码 D' 仍具有彼此对易的校验，并且参数与 D相同，但校验可能作用于不同的基中。码之间的这种映射是构造正确辅助系统的工具，并非意在作为协议的一部分在量子计算机上执行。

现在令 $\mathcal{P}(\ell)^D$ 为作用于码 D 中量子比特 $\ell \in \mathbb{F}_2^n$ 的任意逻辑泡利算符。通过对 ℓ 中的每个量子比特施加局部 Clifford 门，将其映射到码 D' ，使得

$$\mathcal{P}(\ell)^{D'} = X(\ell)^{D'} = (\bigotimes_{i\in\ell} \mathfrak{C}_i^\dagger)\mathcal{P}(\ell)^D(\bigotimes_{i\in\ell} \mathfrak{C}_i),$$

也就是说， ℓ 中的每个量子比特现在都在 X 基下受到作用。

按照附录中的方法构造简约手术辅助系统。A 1a，并相应地变形 D'，得到码 E'。然后应用码之间的伴随映射 $(\bigotimes_{i\in\ell} \mathfrak{C}_i)\ E'\ (\bigotimes_{i\in\ell} \mathfrak{C}_i^\dagger) = E$，使变形后的码在原始校验算符和量子比特上与原码 D 相匹配。辅助码中的校验算符与原码中量子比特之间的连接现已切换至适用于简约手术的正确基。由于码 E 和 E' 具有相同的参数，测量过程中不会引入新的逻辑量子比特，且码距仍至少为 d。

2. 通用适配器

通用适配器 [37]可用于在不同码块之间或同一码块内进行联合逻辑测量。给定 t 泡利逻辑算子代表元，每个代表元的权重至多为 $\mathfrak{w}$ 时，该方案可实现这些算子的联合测量，量子比特开销为 $\mathcal{O}(t\mathfrak{w}\log^3 \mathfrak{w})$。当这些代表元在物理量子比特上互不相交，或仅存在稀疏重叠时，该方案保证保留低密度奇偶校验性质。

注释 19. 也可以直接使用规范逻辑测量方案 [22]执行联合测量。假设这些 t代表元彼此不相交，那么这些代表元乘积的权重在最坏情况下可能为 $\mathfrak{w}' = t\mathfrak{w}$ 。因此，使用规范逻辑测量进行直接测量的渐近开销将会

$$\mathcal{O}(\mathfrak{w}' \log^3 \mathfrak{w}') = \mathcal{O}(t\mathfrak{w} \log^3 t\mathfrak{w}) \geq \mathcal{O}(t\mathfrak{w} \log^3 \mathfrak{w})$$

因此比使用通用适配器的成本更高。

通用适配器首先为每个 t 逻辑代表元分别构造测量图，见第 IIA节，并确保每个图的切格常数至少为 1。测量图可能没有稀疏环基，因此对每个图分别应用去拥塞引理 [30, 36] ，加厚图并对环进行胞腔剖分。去拥塞会向每个图中添加新的顶点和边，使得目前使用的量子比特总数为 $\mathcal{O}(t\mathfrak{w}\log^3 \mathfrak{w})$，见参考文献 [33, 定理 28]。

其次，应用**重复码适配器**，将新的顶点和边附加到测量图上，以便在所有逻辑比特之间高效地构造一个更大的连通辅助图。为简洁起见，我们省略重复码适配器的详细内容，相关内容可参见 [37, 第三至第四节]。最重要的事实是:

1. 重复码适配器始终存在，可以高效地找到，并且不会引入任何额外的渐近开销。2. 重复码适配器仅附加到测量图上，而不会附加到用于去拥塞的额外顶点或边上。3. 假设每个测量图的切格常数为 ≥ 1，则辅助图具有相对扩张率 ≥ 1，足以保持变形码的距离。

因此，对于每个 t 测量图，可以通过取简约锥来替代去拥塞和加厚步骤。由于测量图 G 始终是简约锥 C 的子图，根据上述事实1和事实2，重复码适配器必然适用于通过简约手术构造的辅助量子比特系统。由于每个测量图的切格常数均为 ≥ 1，根据事实3，整体辅助图仍具有相对扩张率 ≥ 1。

因此，采用简约手术构造基图的通用适配器，其空间开销为 $\mathcal{O}(t\mathfrak{w}\log\ \mathfrak{w})$，低于此前最优的 $\mathcal{O}(t\mathfrak{w}\log^3 \mathfrak{w})$。

3. 并行逻辑测量

当逻辑代表元在物理量子比特上的支撑集大量重叠时，要同时（但非联合地）对它们进行容错测量便会变得困难，因为用于测量每个逻辑代表元的辅助量子比特系统可能大量重叠，从而增加变形码的密度；在最坏情况下，还会导致变形码的稳定子无法彼此对易。由于高逻辑代表元重叠是高码率和高距离低密度奇偶校验码的内在属性，这可能给采用低密度奇偶校验码进行低开销时空量子计算带来重大问题。

为改善这些问题，人们提出了并行逻辑测量方案 [38, 56, 57]。这里我们关注参考文献 [38], 中提出的一种通用方案，它迄今具有最低的渐近空间开销。

该方案按如下步骤进行。首先，我们需要以下定义（参见 [38,定义 2.10]）：

定义 A.1. 若对于每个量子比特 q，只要 $q \in$supp(Γ) 和 $q \in$supp(Λ)，逻辑代表元 Γ和 Λ就满足逐量子比特对易，

$$[\Gamma \restriction_q, \Lambda \restriction_q] = 0$$

其中 $A \restriction_b$ 是算子 A 的泡利作用在量子比特 b上的限制。

进行测量时，会在一个中间步骤附加一个辅助系统，从而通过一种称为分支 [56]的过程，为每个待测泡利逻辑算子 Λ_i 引入新的代表元。这些新代表元 Λ_i' 与原始代表元 Λ_i 稳定子等价，而代表元 Λ_i 则称为已分支。当待分支的代表元在物理量子比特上逐量子比特对易时，辅助系统彼此对易。

最后，对于每个 Λ_i'，使用规范化逻辑测量形式体系 [22]附加图。与通用适配器一样，我们略去协议的细节，但在下面给出最重要的事实：

1. 对于任意稳定子码，总是存在一个逻辑基，使得对于作用在不同逻辑比特量子比特上的任意一组逻辑代表元，这些代表元在量子比特层面逐一对易 [38, 第 3 节4] 上的物理量子比特。

2. 如果初始码是低密度奇偶校验码，分支后的系统仍然是低密度奇偶校验码，并且每个待测量的代表元 Λ_i' 在物理量子比特上彼此不相交。每个代表元 Λ_i' 的权重与Λ_i相同。

3. 如果初始码的距离为 d，则分支后变形码的距离至少为 d，且分支协议的现象学故障距离至少为 d。

4. 给定 t 个权重至多为 $\mathfrak{w}$的初始逻辑代表元，分支使用 O($\mathcal{O}t\mathfrak{w}$log t) 个新量子比特。

分支后对每个代表元 Λ_i' 应用测量逻辑比特的测量，其代价为 $\mathcal{O}(t\mathfrak{w}\log^3 \mathfrak{w})$，其中 $\log^3 \mathfrak{w}$ 项的贡献源于拥塞消除引理 [30], 中的加厚和胞腔分解。因此，并行逻辑测量方案此前的总成本为

$$\mathcal{O}(t\mathfrak{w}\log t + t\mathfrak{w}\log^3 \mathfrak{w}) = \mathcal{O}(t\mathfrak{w}(\log t + \log^3 \mathfrak{w})).$$

使用这种方案，稳定子码中的任意一组作用在互不相交的逻辑量子比特上的逻辑算符都可以并行测量，前提是逻辑基采用给定的特定逐量子比特对易基 [38]。

通过采用简约手术而非对逻辑测量进行规范化，$\log^3 \mathfrak{w}$ 项可降至 $\log \mathfrak{w}$。因此，该协议的整体渐近量子比特成本变为

$$\mathcal{O}(t\mathfrak{w}(\log t + \log \mathfrak{w})).$$

4. 提取器架构

提取器架构 [33] 是一种通用模型，用于描述实现基于泡利的计算 [31] 的容错通用量子计算机，其计算基于量子低密度奇偶校验码。该模型适用范围广泛，因为提取器架构可基于任意量子低密度奇偶校验码进行设计，可在固定连接性和可重构物理量子比特平台上实现，并为针对应用和硬件的优化提供了广阔的设计空间。已有研究提出并探讨了提取器架构的实际实现方案 [34, 35] 。

提取器架构所用的关键基本构件称为提取器系统 [33]。架构中的每个代码块都配有单块提取器系统，它是一个简单连通图，其设计与对逻辑测量进行规范化的设计相似。对于代码块的每个稳定子生成元，图中都对应一个环；该图经过设计，具有切格常数 ≥ 1 ，且具有低权重环基。该图通过端口函数与原始代码块相连，使得只需修改代码块与测量图之间的连接，就能在一个逻辑时间步内测量代码块上的任意单个逻辑泡利算符；这种修改只需删除Tanner图中的边，因此可在固定连接性下实现。

随后，通过桥接结构将单块提取器系统连接起来，这些桥接结构类似于重复码适配器 [37], ，从而构成多块提取器。激活桥接量子比特即可在多个码块之间进行乘积测量。

注 20。 实际上，许多码具有对称性，因而能够实现某些逻辑比特

克利福德门 [13, 14]。因此，通常只需使用 部分提取器，它们不必连接到原始代码块中的每个逻辑代表元，因此可以通过实际优化来降低空间开销 [34,35]。

关于提取器系统，最值得注意的事实如下：

1. 对于长度为 n 的代码块，单块提取器的渐近空间开销为 $\mathcal{O}(n\log^3 n)$，这可通过熟知的去拥塞引理、加厚和胞腔分解实现。每个代码块都存在合适的单块提取器。

2. 加厚之前，端口函数只将原始代码块连接到原始测量图，而不连接到用于去拥塞的额外顶点或边。

3. 桥接系统始终存在，可以高效地找到，并且不会带来任何额外的渐近开销。4. 桥接系统只连接到测量图，而不连接到用于去拥塞的额外顶点或边。

鉴于事实 2 和 4，可以用取简约锥替代单块提取器中的去拥塞和加厚步骤，而无需修改方案的其他部分。替换后，与原始代码以及通过桥接系统与其他单块提取器的连接均保持不变。

因此，提取器的渐近空间开销从此前最佳的 $\mathcal{O}(n\log^3 n)$ 降至 $\mathcal{O}(n\log\ n)$。

5. 单轮手术

采用量子低密度奇偶校验码的快速手术，只需进行 $o(d)$ 轮综合征提取，即可容错地测量一个或多个逻辑算符，这已成为近期研究的重点 [39–41, 43]。

在本节中，我们讨论参考文献 [39, 第 IV B 节]中构造的单轮手术组件。目标是测量来自CSS低密度奇偶校验码的 X型或 Z型算子。该协议首先对基码进行一轮完美的综合征测量，然后使用辅助系统对一个逻辑算符测量 $\mathcal{O}(1)$轮，并以对基码的另一轮完美综合征测量结束。通过向辅助系统引入足够的元校验，以保护决定逻辑测量结果的新辅助比特稳定子免受错误影响，参考文献 [39] 证明该单轮手术协议是容错的。由于假设手术测量之前和之后均为完美的综合征轮次，对于允许单次容错态制备的码，该协议是快速的。对于更一般的码，获得完美轮次的综合征可能需要$\Omega(d)$轮稳定子测量。[15]

辅助系统按以下方式构造：

1. 首先，取原始码 D 的一个副本 A 作为辅助链复形的起点，并在二者之间建立恒等链映射 $f = I$。这需要使用 $\mathcal{O}(n)$ 个量子比特。

2. 其次，除了 要以单轮容错方式测量的算符之外，将 A 中的每个逻辑算符都使用参考文献 [38], 的并行逻辑测量方案转换为稳定子，这总计会向辅助系统添加多达 $\mathcal{O}(nk(\log k + \log^3 n))$ 个新量子比特。

3. 第三， A 加厚至最多 d 倍，使量子比特总成本达到 $\mathcal{O}(nkd(\log k + \log^3 n))$，从而提升辅助系统的扩张性，使变形码具有较高的距离。

4. 第四，取 cone(f)，对 A 进行度移位，使原先的量子比特度变为校验度，从而构造出具有 $k-1$ 个逻辑算符的变形码。

关键在于，由于辅助系统中有大量检查算符，且所得链复形具有特定结构性质，变形码拥有足够的元校验，因此可在 $\mathcal{O}(1)$轮内完成逻辑测量。

由于采用了参考文献 [38] 中的并行逻辑测量方案作为子程序，因此，与去拥塞和加厚（见附录 A3）相比，采用简约锥所产生的连带影响也可直接应用于单轮手术方案，而不会影响实现快速测量所需的结构性质。因此，单轮手术方案的空间成本从 $\mathcal{O}(nkd(\log\ k+\log^3 n))$ 降至 $\mathcal{O}(nkd(\log\ k+\log n))$。

6. 常数时间手术

单轮手术的另一种表述称为常数时间手术，由参考文献 [43]首次提出。其核心思想是：不在 $O(1)$时间内执行一次手术操作，而是在 $O(d)$时间内执行 $O(d)$次操作，从而使每次手术操作的摊销成本为 $O(1)$时间。该协议在手术操作$O(d)$之前和之后各进行 $O(d)$轮综合征测量，即可实现容错。重要的是，它不要求基码支持单轮态制备。它对容错的定义与算法容错 [58]大体类似。

[15] 参见参考文献 [40, IA 节] ，了解进一步讨论。

参考文献 [40]中针对二维超图乘积码构造的装置遵循这一常数时间手术公式。每个装置都以摊销 Z型（或 X型）算子的方式测量一组逻辑比特，耗时 $\mathcal{O}(1)$。与本附录介绍的其他方案一样，为简洁起见，我们不再重复构造该协议所用的同调代数。从高层次来看，该构造包含以下步骤：

1. 超图积码中的某些逻辑算符集合，每一个都可以描述为 (a) 一个经典码字 ℓ 与 (b) 某个经典码的物理空间 D 的乘积。[16] 选择这样一个集合 $\mathcal{L}$；该经典码字与该物理空间的大小均至多为 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$。

2. 构造 ℓ的规范化逻辑测量图$\mathcal{G}$ ，将其视为不含 Z 稳定子的量子码的一个逻辑算符。借助去拥塞与加厚，这使用了$\mathcal{O}(\sqrt{n}\log^3\sqrt{n}) = \mathcal{O}(\sqrt{n}\log^3 n)$空间。

3. 取张量积 $\mathcal{G}\otimes D$ ，构造一个长度为 2 的链复形。该复形始终具有足够的扩张性，并存在一个映射到原始码的典范链映射 f ，此映射由码字 ℓ 和空间 D 决定，其大小至多为 $\mathcal{O}(\sqrt{n}\circ\sqrt{n}\log^3 n) = \mathcal{O}(n\log^3 n)$。

4. 变形码由锥(f)给出，并使用了 $\mathcal{O}(n\log^3 n)$个新量子比特，以在 $\mathcal{O}(1)$轮次内同时测量 k_D 个逻辑算符。

这样一组测量之所以能以摊还常数时间完成，是因为存在一组充分的元校验，使得每次测量只需 $\mathcal{O}(1)$轮次；此外已经证明，即使测量轮次之间的空闲时间为 $\mathcal{O}(1)$ [43]，也不存在能够跨越测量轮次延伸的低权重逻辑故障。

在上述协议中，典范链映射和足够的元校验距离等代数性质，在将规范化逻辑测量替换为简约手术后保持不变。因此，可以替换该步骤，并将空间开销降至 $\mathcal{O}(n\log n)$。

[16] 从网格中的超图积逻辑量子比特的角度来看， [59], 这对应于网格中的一行。