arXiv:2603.05089v1 [math.PR] 5 Mar 2026

从微观涨落中学习宏观迁移率的定量误差估计

Nicolas Dirr、Zhengyan Wu 和 Johannes Zimmer

Abstract. 我们建立了定量误差估计，将相互作用粒子系统的微观涨落与其水动力学极限的迁移率联系起来。我们聚焦于对称简单排斥过程和独立布朗粒子系统，给出了涨落场二次变差与相应迁移率之间差异的显式界，并以时间和空间离散化参数表示。此外，我们还为一类具有正则化系数的涨落水动力学随机偏微分方程建立了类似的误差估计。对于具有不规则平方根型系数的随机偏微分方程（包括 Dean-Kawasaki 型方程），我们进一步在重整化动理学解框架下确定了相关涨落结构的渐近行为。我们的结果对微观涨落机制与宏观迁移率之间的关系提供了定量认识，并推动了离散粒子系统与连续介质涨落水动力学描述之间的系统比较。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 6 3. 从布朗粒子到迁移率矩阵 13 4. 从对称简单排斥过程到迁移率矩阵 16 5. 规则系数下的涨落流体力学：误差估计 26 6. 非规则系数下的涨落流体力学：渐近行为 31 参考文献 38

1. Introduction

在宏观尺度下，物理系统的演化通常由偏微分方程（PDEs）描述；而在微观层面，我们观察到相互作用粒子的动力学，例如分子的动力学。这种二分性自然引出了一个问题：微观粒子系统如何产生宏观偏微分方程模型？尽管已有大量研究探讨如何通过数值格式逼近偏微分方程的误差估计，但对于相互作用粒子系统模型与其对应的宏观偏微分方程描述之间误差的量化，关注则少得多。尤其是，关于由粒子动力学及其宏观对应量所定义的某些可观测量的误差估计，在现有文献中仍相对少见。

在本 本文研究一类具有如下梯度流结构的偏微分方程 :

$$\partial_t \bar{\rho} = -\frac{1}{2}\nabla \cdot \Big(m(\bar{\rho}) \nabla \frac{\delta \mathcal{F}(\bar{\rho})}{\delta \bar{\rho}} \Big), \quad \bar{\rho}(0) = \rho_0, \tag{1.1}$$

Date: 2026年3月6日。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 60H15; 35R60。

其中 $\mathcal{F}$ 表示一个能量泛函，而 ρ_0 表示初始数据，算子 $-\nabla\cdot(m(\bar\rho)\nabla\cdot)$表示与给定迁移率函数 $m(\cdot)$相关的迁移率算子。形式如（1.1）的偏微分方程自然地出现在各种相互作用粒子系统的宏观描述中。例如，当

$$m(\bar\rho)=\bar\rho(1-\bar\rho)\ \text{and}\ \mathcal{F}(\bar\rho)=\int \bar\rho\log\bar\rho+(1-\bar\rho)\log(1-\bar\rho)\,dx, \tag{1.2}$$

方程（1.1）化为一个扩散方程，可将其解释为对称简单排斥过程（SSEP）的水动力学极限。

本研究的主要目标是考察迁移率算子 $-\nabla\cdot(m(\bar\rho)\nabla\cdot)$ 如何描述源自底层微观粒子模型的涨落场的扩散。具体而言，我们旨在推导定量误差估计，将微观可观测量与偏微分方程结构中所表征的宏观对应量联系起来。

准确地说，对于每个 $N\in\mathbb{N}_+$，令 η_t 表示定义在离散环面 $\mathbb{T}_N^d$上的对称简单排斥过程。围绕其水动力学极限 $\bar\rho$ （即系数由（1.1）定义的方程（1.2）的解）所作的涨落场为

$$\bar X^{1,N}(t,dy):=N^{-d/2}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\big(\eta_t(x)-\bar\rho(x,t)\big)\,\delta_x(dy).$$

对于所有 $t>h>0$，以及每个测试函数 $\phi\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$，我们旨在建立如下形式的误差估计

$$\left|\frac{1}{h}\mathbb{E}\big(\bar X_1^{1,N}(t+h,\phi)-\bar X_1^{1,N}(t,\phi)\big)^2-\langle\nabla\phi,m(\bar\rho)\nabla\phi\rangle\right|\leqslant C(\rho_0,\phi)\,\mathrm{Error}(N,h), \tag{1.3}$$

其中，Error$(N,\ h)$ 表示依赖于网格尺寸 $1/N^d$ 和时间离散化 h的误差，并满足

$$\limsup_{N\to\infty}\limsup_{h\to0}\mathrm{Error}(N,h)=0.$$

这些进展为量化 [EDZR18] 中所猜想的极限行为误差，建立了严格的理论框架。该框架能够在有限尺寸误差受控的条件下，精确地从非平衡粒子数据中重建迁移率或扩散率，超越了传统的基于平衡态的方法。这类误差估计对于宏观涨落理论（MFT）和非平衡统计力学 [BDSG+15、Der07] 等领域具有重要价值。通过为输运系数提供经过严格量化的不确定性，这些估计使微观涨落能够以误差受控的方式系统地纳入 MFT 预测，用于评估模型有效性，并将微观噪声传递至宏观预测。因此，这一方法不仅能够从粒子系统（如 SSEP）中提取具有物理意义的输运性质，还为将有限尺寸效应和统计不确定性纳入非平衡系统的理论与计算分析提供了有原则的方法，详情参见 [EDZR18]。

另一方面，作为粒子系统的连续介观类比，涨落流体力学理论通过引入守恒型随机偏微分方程模型，为刻画介观效应提供了一个框架。这些模型由守恒噪声项驱动，旨在重现底层相互作用粒子系统的正确涨落行为。涨落流体力学方程可视为宏观偏微分方程的涨落修正。特别是，对于具有如下形式梯度流结构的偏微分方程（1.1），涨落修正受所谓的涨落耗散关系支配，从而得到以下随机偏微分方程：

$$\partial_t\rho_\varepsilon=-\frac{1}{2}\nabla\cdot\Big(m(\rho_\varepsilon)\nabla\frac{\delta\mathcal{F}(\rho_\varepsilon)}{\delta\rho_\varepsilon}\Big)-\varepsilon^{1/2}\nabla\cdot\Big(m^{1/2}(\rho_\varepsilon)\circ\xi_{\delta(\varepsilon)}\Big), \tag{1.4}$$

其中 $\xi_{\delta(\varepsilon)}$ 表示空间相关噪声，$\circ$ 表示 Stratonovich 积分，而参数 ε 和 $\delta(\varepsilon)$ 取决于 N，从而有效地编码了

底层粒子系统。作为与粒子系统进行比较的一种方式，我们还研究了形式为 (1.3的误差估计，它涉及涨落场的扩散二次变差 $\varepsilon^{-1/2}(\rho_\varepsilon - \bar{\rho})$ 与相应迁移率算子之间的差异。

1.1. 主要结果。 本文的主要结果分为四个部分。前三部分分别讨论布朗粒子、对称简单排斥过程和正则化涨落流体力学随机偏微分方程的定量误差估计。对于未正则化涨落流体力学随机偏微分方程，平方根系数的不规则性使我们无法推导出可比的误差估计。作为替代，我们采用重整化动理学解框架，对具有此类非规则系数的随机偏微分方程给出定性渐近描述。

我们首先讨论布朗粒子的误差估计。对每个 $N \in \mathbb{N}_+$，令 $(B_i)_{i=1}^N$ 为环面 $\mathbb{T}^d$ 上一列独立同分布的布朗运动。令 π_N 表示相应的经验测度， $\bar{\rho}$ 表示其平均场极限，即扩散方程的解。定义

$$\bar{\pi}_N^1 := \sqrt{N}\,(\pi_N - \bar{\rho}).$$

我们的第一个结果如下。

定理 1.1。 在上述设定下，对于每个测试函数 $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$，令 $\bar{\pi}^1{}_{,N}{}^{\phi} := \bar{\pi}_N^1(\phi)$。那么存在常数 $C = C(\phi, \bar{\rho}) > 0$，使得对所有 $0 < h < t$,

$$\left| \frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left(\bar{\pi}_N^{1,\phi}(t+h) - \bar{\pi}_N^{1,\phi}(t)\right)^2 - \langle \nabla\phi, \bar{\rho}(t)\nabla\phi\rangle \right| \leqslant C(\phi, \rho_0)\, h.$$

对于对称简单排斥过程的误差估计，我们回顾一下， $\bar{\rho}$表示其水动力学极限， $\bar{X}^{1,\,N}$ 表示其涨落场。关于对称简单排斥过程的更详细定义及其基本框架将在第2节介绍。关于对称简单排斥过程的主要结果如下。

定理 1.2。 对于每个 $0 < h < t < T$，我们有

$$\left| \frac{1}{h}\mathbb{E}(\bar{X}^{1,N}(t+h,\phi) - \bar{X}^{1,N}(t,\phi))^2 - \langle \nabla\phi, \bar{\rho}(1-\rho_0)\nabla\phi\rangle \right| \leqslant C(\bar{\rho},\phi)\left(h + hN^{d-4} + N^{-1}\right).$$

我们来解释这些界是如何得到的。第一个界仅取决于时间离散化参数，与定理 1.1 中的误差类似。临界维数 $d = 4$ 通过第二个误差项 hN^{d-4}体现出来。该项源于涨落场 $\bar{X}^{1,\,N}$ 中的重整化因子 $N^{d/2}$ 与离散拉普拉斯算子和经典拉普拉斯算子之间的离散化误差之间的竞争。特别是，当 $d > 4$ 时，该因子会随着 $N \to \infty$ 发散。因此，在应用中，或者从实际角度来看，为了控制维数为 $d > 4$ 时的误差，需要时间离散化参数 h 与空间离散化参数 N 满足某种标度关系。更具体地说，需要有 $h\,N(h)^{d-4} \to 0$， 当 $h \to 0$ 时。第三个界来自黎曼和误差。

与微观粒子模型相比，针对相应的介观涨落流体力学随机偏微分方程建立相同的结果也很有启发性。下文中，我们考虑

$$d\rho_\varepsilon = \frac{1}{2}\Delta\rho_\varepsilon dt - \varepsilon^{1/2}\nabla\cdot(\sigma(\rho_\varepsilon)\circ dW_{\delta(\varepsilon)}), \tag{1.5}$$

其中 $\sigma(\cdot)$ 表示一个可能不规则的系数函数，例如 $\sigma(\zeta) = \sqrt{\zeta}$ 或 $\sigma(\zeta) = \sqrt{\zeta(1-\zeta)}$。我们首先对不规则系数 $\sigma(\cdot)$ 进行正则化。设 $(\sigma_n(\cdot))_{n\geqslant 1}$ 是 $\sigma(\cdot)$ 的一列光滑逼近，并令 ρ_ε 表示以下方程的解:

$$d\rho_\varepsilon = \frac{1}{2}\Delta\rho_\varepsilon\, dt - \varepsilon^{1/2}\nabla\cdot\left(\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)\circ dW_{\delta(\varepsilon)}\right), \tag{1.6}$$

于是我们得到以下误差估计。

定理 1.3. 在关于初始数据 ρ_0 与系数 $\sigma_n(\cdot)$的适当假设下，令$\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ 并定义 $\rho_\varepsilon^\phi := \langle \rho_\varepsilon, \phi\rangle$。相应的涨落场则由下式给出

$$\bar{\rho}_\varepsilon^{1,\phi} := \varepsilon^{-1/2}\left(\rho_\varepsilon^\phi - \bar{\rho}^\phi\right).$$

则对每一个 $t > h > 0$，如下估计成立：

$$\left|\frac{1}{h}\mathbb{E}\left(\bar{\rho}_\varepsilon^{1,\phi}(t+h) - \bar{\rho}_\varepsilon^{1,\phi}(t)\right)^2 - \langle \nabla\phi, \bar{\rho}(t)(1-\bar{\rho}(t))\nabla\phi\rangle\right| \leqslant C(\phi, \rho_0, t)\cdot \mathrm{Error}(h, \varepsilon, \delta(\varepsilon), n(\varepsilon)),$$

其中，误差项由下式给出

$$\mathrm{Error}(h, \varepsilon, \delta(\varepsilon), n(\varepsilon)) = h + \varepsilon\delta(\varepsilon)^{-2d}\|\sigma'_{n(\varepsilon)}\|^4_{L^\infty([0,1])}h + \varepsilon\delta(\varepsilon)^{-d-2}.$$

最后，我们旨在将方程 (1.5) 的重整化动理学解视为一个解析上不规则的对象进行研究。尽管无法得到相应的误差估计，但我们能够确立其渐近行为。令 ρ_ε 表示方程 (1.5) 中系数为 $\sigma(\zeta) = \sqrt{\zeta}$ 或 $\sigma(\zeta) = \sqrt{\zeta(1-\zeta)}$ 的重整化动理学解。于是得到以下结果。

定理 1.4。 设 ρ_ε 是 (1.5) 的重整化动理学解。那么，在标度区间

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\delta(\varepsilon)^{-d-2} = 0,$$

对于每个非负测试函数 $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ 以及每个 $t \in [0, T]$，以下渐近涨落恒等式成立：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left(\left\langle \varepsilon^{-1/2}(\rho_\varepsilon - \bar{\rho})(t+h) - \varepsilon^{-1/2}(\rho_\varepsilon - \bar{\rho})(t), \phi\right\rangle\right)^2 = \langle \sigma(\bar{\rho}(t))^2\nabla\phi, \nabla\phi\rangle.$$

1.2. 核心思想与技术评述。 本文整合了三种采用不同技术的思想。

误差估计。 对于对称简单排斥过程（SSEP），我们首先利用其对偶性质，推导出相应经验测度的杜哈梅尔型表示。误差项的分析依赖于对涨落场二次变差以及迁移率矩阵的精确估计。这些估计结合了通过 carr´é-du-champ 算子刻画鞅二次变差的方法，以及对称简单排斥过程的一致矩估计（详见引理4.5 ）。所得界定量刻画了时间和空间上的离散化误差。

尽管近年来相互作用粒子系统的定量涨落结果日益受到关注，但现有文献（例如 Gess 和 Konarovskyi [GK24], ）并未直接涉及本研究所关注的这类估计。具体而言，尽管 Gess 和 Konarovskyi 对完整涨落场给出了定量估计，我们关注的却是该场的特定可观测量，并旨在定量控制其短时间二次变差，且该控制显式依赖于时间离散化参数。他们的结果并未直接揭示常数对这一时间尺度的依赖关系。

虽然原则上可以调整他们的生成元比较方法来获得此类估计，但我们转而采用一种更直接的方法，通过 carr´e-du-champ 算子刻画鞅二次变差。这种方法不仅能为我们关注的可观测量提供精确的时间局部误差界，还能自然地推广到涨落流体力学随机偏微分方程的类似估计。

此外，对独立布朗粒子系统以及正则化涨落流体力学方程，也可以将同样的刻画方法应用于相应涨落场中出现的鞅项，从而建立类似的估计。

非规则随机偏微分方程的渐近行为。对于具有平方根型不规则系数的涨落流体力学方程，Stratonovich 到 Itô 修正项高度不规则，缺乏可积性，因此温和形式不再定义良好。为此，[FG24] 基于重整化动理学解的概念，为这类方程建立了适定性框架。在此背景下，我们将涨落场分解为两部分：

$$\frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left(\left\langle \varepsilon^{-1/2}(\rho_\varepsilon - \bar{\rho})(t+h) - \varepsilon^{-1/2}(\rho_\varepsilon - \bar{\rho})(t), \phi\right\rangle\right)^2$$

$$\lesssim \frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left(\left\langle \varepsilon^{-1/2}\rho_\varepsilon(t+h)-\varepsilon^{-1/2}\rho_\varepsilon(t),\phi\right\rangle\right)^2+\frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left(\left\langle \varepsilon^{-1/2}\bar{\rho}(t+h)-\varepsilon^{-1/2}\bar{\rho}(t),\phi\right\rangle\right)^2,$$

其中，第二项可以通过利用 $\bar{\rho}$ 的时间正则性直接估计。

接下来，固定 $\beta \in (0,1/2)$（稍后加以指定），并令 η_β 表示一个光滑截断函数，使得对 $\zeta \geqslant \beta$ 有 $\eta_\beta(\zeta) = 1$，对 $\zeta \leqslant \beta/2$有 $\eta_\beta(\zeta) = 0$，且满足导数界 $\eta'_\beta \lesssim \beta^{-1} I_{[\frac{\beta}{2},\beta]}$。令 $\chi_\varepsilon = I_{\{0<\zeta<\rho_\varepsilon\}}$ 表示重整化动理学函数。采用这一记号，我们进一步将第一项分解为

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{-1/2}\left\langle \rho_\varepsilon(t+h)-\rho_\varepsilon(t),\phi\right\rangle\\ =&\varepsilon^{-1/2}\left\langle \chi_\varepsilon(t+h)-\chi_\varepsilon(t),\eta_\beta\phi\right\rangle_{L^2(\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}_+)}+\varepsilon^{-1/2}\left\langle \chi_\varepsilon(t+h)-\chi_\varepsilon(t),(1-\eta_\beta)\phi\right\rangle_{L^2(\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}_+)}.\end{aligned}$$

在这一分解下，可以应用动理学公式将两项展开。在随后的估计中，需要显式选取依赖于时间离散化参数 h的 β。通过仔细分析动理学测度的贡献以及动理学公式中的余项，最终可得到当 $h \to 0$与 $\varepsilon \to 0$时所需的渐近行为。

1.3. 文献评述。

对称简单排斥过程：涨落与定量估计。对称简单排斥过程中的涨落研究历史悠久且成果丰富。经验密度场的中心极限定理最早由 [Rav92], 确立，他们证明了收敛到一个无限维奥恩斯坦–乌伦贝克过程。Kipnis 和 Varadhan [KV86] 确立了可逆马尔可夫过程加性泛函的中心极限定理。在这一框架的基础上，Yau 及其合作者 [Yau91，CY92]发展了相对熵方法和玻尔兹曼–吉布斯原理，用以推导守恒粒子系统（包括非梯度模型）的水动力学极限和涨落极限。随后，Jara 和 Gon˙calves [Jar09、GJ14]将这些结果推广到非平衡和弱非对称状态，建立了排斥过程与 KPZ 方程等非线性随机偏微分方程之间的联系。近年来，针对对称简单排斥过程的定量中心极限定理 [GK24], 取得了进展，给出了收敛到高斯涨落场的最优收敛速率。此外， [AZ24]研究了对称简单包含过程的涨落。

涨落流体动力学与守恒型随机偏微分方程。宏观涨落理论（MFT）为研究非平衡系统提供了一个统一框架，并将经典线性响应理论扩展至平衡态附近的有效范围（参见 Bertini 等人的工作 [BDSG$^+$15]、Derrida 的工作 [Der07]）。其核心是一个用于描述相互作用粒子系统的大偏差原理的假设。宏观涨落理论的自然配套理论是涨落流体动力学（FHD），它依据统计力学和非平衡热力学，将微观涨落纳入考量。在涨落流体动力学框架下，人们假设守恒型随机偏微分方程能够编码非平衡涨落的基本特征（参见 [LL87], [Spo12]）。从这一视角来看，宏观涨落理论的假设可视为与这类方程相关联的零噪声大偏差原理。一个典型例子是 Dean-Kawasaki 方程（参见 [Dea96，Kaw98]），它刻画了平均场相互作用粒子系统的涨落行为。

过去十年间，对 Dean-Kawasaki 方程及相关模型的数学分析取得了长足进展。Konarovskyi、Lehmann 和 von Renesse [KLvR19] 建立了严格的鞅框架，从而为该方程提供了数学上严谨的表述。随后，Konarovskyi、Lehmann 和 von Renesse [KLvR20] 通过采用 Girsanov 变换，将适定性结果推广到了非局部相互作用的情形。此后的研究，如 Konarovskyi 和 M¨uller [KM24], Dello Schiavo 和 Konarovskyi [DSK25] 以及 Dello Schiavo [Sch25] 研究了由时空白噪声驱动的 Dean–Kawasaki 方程的其他性质。最近，M¨uller、von Renesse 和 Zimmer [MvRZ25] 将鞅方法推广到了 Vlasov-Fokker-Planck 型 Dean–Kawasaki 方程。Debussche 和 Vovelle [DV10], 提出了随机守恒律的动理学解这一概念，这是一个重要的方法学进展。随后，

Gess 和 Souganidis [GS17], Fehrman 和 Gess [FG19], 以及 Dareiotis 和 Gess [DG20], 将这一框架推广到抛物-双曲型随机偏微分方程中的守恒噪声情形，之后又将其应用于 Dean-Kawasaki 型系统。对于局部相互作用模型，Fehrman 和 Gess [FG24]证明了相关噪声下函数值解的适定性，并在后续工作中[FG23] 建立了小噪声大偏差原理。在这些结果的基础上，Clini 和 Fehrman[CF25] 针对带相关噪声的非线性 Dean-Kawasaki 方程证明了中心极限定理，而 Gess、作者和 Zhang [GWZ26] 则推导出了高阶涨落展开。此外，Hao、第二作者和第三作者 [HWZ25] 证明了带相关噪声的 Vlasov-Fokker-Planck-Dean-Kawasaki 方程具有强适定性。

对于非局部相互作用系统，Wang、本文作者和 Zhang [WWZ24], 以及本文作者和 Zhang [WZ24], 建立了具有奇异相互作用的 Dean-Kawasaki 方程的适定性和大偏差原理，并将其应用于涨落 Ising-Kac-Kawasaki 方程。最近，第二作者 [Wu25] 建立了涨落 Ising-Kac-Kawasaki 方程在临界性附近的非线性涨落。相关进展还包括 Martini 和 Mayorcas 的工作 [MM25，MM24], 他们证明了 Keller-Segel Dean-Kawasaki 方程的加性噪声近似的适定性和大偏差原理。

关于具有相关噪声的 Dean-Kawasaki 方程，其他研究成果包括 Fehrman 和 Gess 最近的工作 [FG25] ，他们研究了全空间情形；以及 Fehrman 的工作 [Feh25]，他研究了具有齐次 Neumann 边界数据的有界区域情形。最后，我们提及 Djurdjevac、Kremp 和 Perkowski [DKP22] 以及 Djurdjevac、Ji 和 Perkowski [DJP25]的工作，他们给出了近似随机偏微分方程与相应粒子系统的经验测度之间的定量误差估计。关于 Dean-Kawasaki 方程弱误差估计的更多结果，见 Cornalba 和 Fisher [CF23], 、Cornalba、Fisher、Ingmanns 和 Raithel [CFIR26], ，以及 Magaletti、Gallo、Perez、Carrillo 和 Kalliadasis [MGP+22]。此外，关于长时间行为，Fehrman、Gvalani 和 Gess [FGG22] 研究了具有正则化系数的 Dean-Kawasaki 方程的遍历性。最近，Popat 将 Dean-Kawasaki 方程的适定性和大偏差理论推广到了具有 Dirichlet 边界条件的有界区域情形 [Pop25b, Pop25a]。随后，Popat 和第二作者 [PW25] 证明了具有 Dirichlet 边界条件和平方根系数的 Dean-Kawasaki 方程的遍历性。

1.4. **论文结构**。 本文结构如下。第 2 节介绍基本记号，对 SSEP 给出严格表述，并定义涨落流体力学方程的解的概念。第 3 节从独立布朗粒子的误差估计入手，并证明定理 1.1。第 4 节推导 SSEP 的误差估计，从而证明定理 1.2。第5 节给出正则化涨落流体力学随机偏微分方程的误差估计，并由此证明定理 1.3。最后，第 6 节讨论具有不规则系数的涨落流体力学随机偏微分方程，并确立定理 1.4 所述的渐近行为。

2. Preliminary

2.1. 记号。 全文中，我们用 $\mathbb{T}^d$ 表示体积归一化为 1 的 d 维环面。对每个 $N \in \mathbb{N}_+$，用 $\mathbb{T}^d_N \subset \mathbb{T}^d$ 表示由 N^d 个点组成的离散 d 维环面。算子 ∇ 表示空间梯度，$\nabla\cdot$ 表示关于空间变量 $x \in \mathbb{T}^d$ 的散度。对于任意整数 $p \in [1,\infty]$，我们用 $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}$ 表示勒贝格空间 $L^p(\mathbb{T}^d)$ 中的范数（对于向量值函数，则表示 $L^p(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d)$ 中的范数）。 $L^2(\mathbb{T}^d)$ 中的内积记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。

我们将 $C^\infty(\mathbb{T}^d\times(0,\infty))$ 记作定义在 $\mathbb{T}^d\times(0,\infty)$ 上的无穷可微函数空间，将 $C_c^\infty(\mathbb{T}^d\times(0,\infty))$ 记作由其中具有紧支集的函数组成的子空间。给定非负整数 k 和 $p\in[1,\infty]$，索伯列夫空间 $W^{k,p}(\mathbb{T}^d)$ 表示 $\mathbb{T}^d$ 上在 $L^p(\mathbb{T}^d)$ 中具有直到 k 阶弱导数的函数空间。我们定义 $H^a(\mathbb{T}^d) := W^{a,2}(\mathbb{T}^d)$ 对于 $a\in\mathbb{R}$，并令 $H^{-a}(\mathbb{T}^d)$ 表示 $H^a(\mathbb{T}^d)$ 的对偶空间。空间 $C^k_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 由所有 k 次连续

可微函数组成，并赋予局部收敛拓扑。括号 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 还表示 $C^\infty(\mathbb{T}^d)$ 与 $\mathbb{T}^d$ 上分布空间之间的对偶配对。

设 X 是赋范为 $\|\cdot\|_X$ 的实巴拿赫空间。对于每个 $p\in[1,\infty]$，我们用 $L^p([0,T];X)$ 表示取值于 X 的函数所构成的标准博赫纳–勒贝格空间，并用 $W^{1,p}([0,T];X)$ 表示相应的索伯列夫空间，其中函数关于时间的弱导数也属于 $L^p([0,T];X)$。

下文中，记号 $a\lesssim b$ 表示存在一个与任何相关参数无关的常数 $\mathcal{D}>0$，使得 $a\leqslant \mathcal{D}b$。符号 C 泛指一个正常数，该常数可能因行而异，并且可以根据已知量显式计算。

此外，我们固定 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为一个概率空间。

2.2. 相互作用粒子系统的基本定义。对于每个 $N\in\mathbb{N}_+$，令 $\Omega_N:=\{0,1\}^{\mathbb{T}_N^d}$ 表示离散环面 $\mathbb{T}_N^d$ 上对称简单排斥过程（SSEP）的构型空间。SSEP 的生成元作用于函数 $f:\Omega_N\to\mathbb{R}$，定义为

$$(\mathcal{L}_Nf)(\eta)=N^2\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\sum_{z\in\mathbb{T}_N^d}\eta(x)(1-\eta(x+z))p(z)\big[f(\eta^{x,x+z})-f(\eta)\big],$$

其中 $\eta^{x,x+z}$ 表示将位置 x 和 $x+z$处的占据变量互换后得到的构型，$p(z)$ 是对称跳跃概率核。若 $\{\bar e_j\}_{j=1}^d$ 表示 $\mathbb{T}_N^d$的标准基向量，则 p 为

$$p(z)=\frac{1}{2d},\quad \text{if } z=\pm\bar e_j,\ j=1,\dots,d,\quad \text{and } p(z)=0\quad \text{otherwise.}$$

为方便读者，下面回顾相互作用粒子系统中缓变初始数据的概念。

定义2.1. 设 $\rho_0:\mathbb{T}^d\to\mathbb{R}_+$ 是一个给定函数。若 $\nu^N_{\rho_0(\cdot)}$ 是一个与宏观剖面 ρ_0 相关联、具有缓变参数的乘积测度，则称之为……当定义在 $\{0,1\}^{\mathbb{T}_N^d}$ 上的乘积测度 $\nu^N_{\rho_0(\cdot)}$ 满足

$$\nu^N_{\rho_0(\cdot)}\big\{\eta:\eta(x)=k\big\}=\nu^N_{\rho_0(x)}\big\{\eta:\eta(0)=k\big\},\quad \textit{for all } x\in\mathbb{T}_N^d,\ k\in\{0,1\},$$

其中 $\nu^N_{\rho_0(x)}$ 表示参数为 $\rho_0(x)$的伯努利分布。

在此框架下，我们固定一个光滑函数 $\rho_0\in C^\infty(\mathbb{T}^d;[0,1])$，并假设对称简单排斥过程（SSEP）的初始构型服从乘积伯努利测度 $\nu^N_{\rho_0(\cdot)}$，其缓变参数与 ρ_0相关联。

我们将时刻 $t\in[0,T]$ 构型 η_t 对应的经验测度定义为

$$\pi^N(\eta_t,dy):=N^{-d}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\eta_t(x)\,\delta_x(dy),$$

其中，δ_x 表示位于 $x\in\mathbb{T}_N^d$处的狄拉克质量。对于每个属于 $C^\infty(\mathbb{T}^d)$类的测试函数 $\phi:\ \mathbb{T}^d\to\mathbb{R}$，我们将经验测度对 ϕ的作用定义为

$$\pi^N(\eta_t,\phi):=N^{-d}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\eta_t(x)\,\phi(x).$$

令 $\bar\rho$ 表示具有初始条件 ρ_0 的热方程的唯一解：

$$\partial_t\bar\rho=\frac{1}{2}\Delta\bar\rho,\quad \bar\rho(0)=\rho_0. \tag{2.1}$$

现在我们定义涨落场，它刻画了相对于宏观流体动力学剖面的微观偏差。对于每个 $t\in[0,T]$，涨落场的分布形式为

$$\bar{X}^{1,N}(t,dy):=N^{-d/2}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\big(\eta_t(x)-\bar{\rho}(x,t)\big)\,\delta_x(dy).$$

相应地，对于任意测试函数 $\phi\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$，我们定义涨落场在 ϕ 上的作用为

$$\bar{X}^{1,N}(t,\phi):=N^{-d/2}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\big(\eta_t(x)-\bar{\rho}(x,t)\big)\,\phi(x).$$

对经验测度应用 Dynkin 公式可得，几乎必然地，对每个 $t\in[0,T]$,

$$\langle\pi_t^N,\phi\rangle=\langle\pi_0^N,\phi\rangle+\int_0^t\mathcal{L}_N\langle\pi_s^N,\phi\rangle\,ds+M_t^{N,\phi},\tag{2.2}$$

其中 $M^{N,\phi}_t$ 是相对于自然滤过 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}:=\{\sigma(\eta_s:\ s\leqslant t)\}_{t\in[0,T]}$的鞅。根据生成元的定义，可以计算得

$$\mathcal{L}_N\eta(x)=\frac{N^2}{2}\sum_{j=1}^d\big[\eta(x+\bar{e}_j)+\eta(x-\bar{e}_j)-2\eta(x)\big].\tag{2.3}$$

令 $\mathcal{P}_N$ 表示 Chapman-Kolmogorov 方程的基本解 [KL99]:

$$\partial_t\mathcal{P}_N(t,\eta,\xi)=(\mathcal{L}_N)_\eta\mathcal{P}_N(t,\eta,\xi),\quad \mathcal{P}_N(0,\eta,\xi)=I_{\{\eta=\xi\}},\quad \xi,\eta\in\Omega_N.$$

定义相应的半群 $(P_N(t))_{t\in[0,T]}$ 为

$$P_N(t)f(\eta):=\sum_{\xi\in\Omega_N}\mathcal{P}_N(t,\eta,\xi)f(\xi),\quad\forall t\in[0,T],\tag{2.4}$$

对所有适当的函数 $f:\ \Omega_N\to\mathbb{R}$。

此外，对于每个 $x\in\mathbb{T}_N^d$，考虑从单粒子构型 δ_x 出发的对称简单排斥过程。若追踪粒子的位置，记为过程 $(X_N(t))_{t\in[0,T]}$，则令 $(G_N(t,\ x))_{t\in[0,T],\ x\in\mathbb{T}_N^d}$表示相应的转移概率。下文将给出一个引理，用以刻画 $(P_N(t))_{t\in[0,T]}$ 的对偶半群。

引理 2.2。令 $(\eta_t)_{t\in[0,T]}$ 表示具有缓慢变化初始数据的对称简单排斥过程，如定义2.1所述，并令 $(P_N(t))_{t\in[0,T]}$ 表示在 (2.4)中定义的半群。那么，对于每个 $\varphi\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$，几乎必然地，对所有 $0\leqslant s<t\leqslant T$,

$$\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}P_N(t-s)\eta_s(x)\,\delta_x(\varphi)=\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\eta_s(x)\,\delta_x(S_N(t-s)\varphi),$$

其中 $(S_N(t))_{t\in[0,T]}$ 表示由下式定义的半群

$$S_N(t)\varphi(y)=\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}G_N(t,y-x)\,\varphi(x),\quad y\in\mathbb{T}_N^d,\ t\in[0,T],\tag{2.5}$$

而 $(G_N(t,x))_{t\in[0,T],\,x\in\mathbb{T}_N^d}$是上述单粒子对称简单排斥过程所对应的独立随机游走的转移概率。

注2.3. 我们指出，定义于 $S_N(t)$ 的离散热半群 (2.5) 可以自然地扩展到定义域 $\mathbb{T}^d$。更准确地说，对于任意适当的函数 $\varphi:\mathbb{T}^d\to\mathbb{R}$，通过变量替换，我们可以将定义扩展为

$$S_N(t)\varphi(y)=\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}G_N(t,x)\,\varphi(y-x),\quad y\in\mathbb{T}^d,\ t\in[0,T].$$

此外，直接计算可知， $S_N(t)$ 的生成元为 $\frac{1}{2}\Delta_N$，其中Δ_N 表示离散拉普拉斯算子。 –

在给出引理 2.2 的证明之前，我们先回顾对称简单排斥过程的对偶结构的一些基本性质。

下面，我们定义限制在恰好包含 κ 个粒子的构型上的对称简单排斥过程，其中 $\kappa \in$ 为某个整数（$0, N^d]$。令

$$(\mathcal{L}_{N,\kappa} f)(\xi) = N^2 \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_N^d} \xi(x)(1-\xi(x+z))p(z)\big[f(\xi^{x,x+z}) - f(\xi)\big],$$

对于每个 $\xi \in \Omega_{N,\kappa} : = \{\xi \in \Omega_N : |\xi| = \kappa\}$，其中 $|\xi| : = \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \xi(x)$，而 $f : \Omega_{N,\kappa} \to \mathbb{R}$ 是一个适当的函数。

我们称对称简单排斥过程是自对偶的，如果存在函数 $D : \Omega_{N,\kappa} \times \Omega_N \to \mathbb{R}$，使得

$$\mathcal{L}_N D(\xi,\eta) = \mathcal{L}_{N,\kappa} D(\xi,\eta),$$

对于每个整数 $\kappa \in (0, N^d]$，以及每个 $\xi \in \Omega_{N,\kappa}$， $\eta \in \Omega_N$，其中 $\mathcal{L}_N$作用于构型 η，而$\mathcal{L}_{N,\kappa}$ 作用于构型 ξ。

设 $(\eta_t)_{t\geqslant 0}$ 与 $(\xi_t)_{t\geqslant 0}$ 分别为由 $\mathcal{L}_N$ 和$\mathcal{L}_{N,\kappa}$ 生成的马尔可夫过程。则自对偶关系意味着

$$\mathbb{E}_\eta D(\xi,\eta_t) = \mathbb{E}_\xi^\kappa D(\xi_t,\eta), \tag{2.6}$$

对每个整数 $\kappa \in (0, N^d]$ 以及每个 $\xi \in \Omega_{N,\kappa}$, $\eta \in \Omega_N$。这里， $\mathbb{E}_\eta$表示关于从 η 出发的 $\eta(t)$ 的分布的期望，而 $\mathbb{E}_\xi^\kappa$ 表示关于从 ξ 出发的$\xi(t)$ 的分布的期望。

引理 2.4. 对称简单排斥过程是自对偶的。

证明. 对每个 $\kappa \in (0, N^d]$，定义函数 $D : \Omega_{N,\kappa} \times \Omega_N \to \mathbb{R}$ 为

$$D(\xi,\eta) = \prod_{x\in\mathbb{T}_N^d,\, \xi(x)=1} I_{\{\xi(x)=\eta(x)\}}. \tag{2.7}$$

对每个 $\xi \in \Omega_{N,\kappa}$ 以及 $\eta \in \Omega_N$，根据生成元 $\mathcal{L}_N$ 的定义，我们计算：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_N D(\xi,\eta) = \mathcal{L}_N \left(\prod_{x\in\mathbb{T}_N^d,\, \xi(x)=1} \eta(x) \right) \\
&= N^2 \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_N^d} \eta(x)(1-\eta(x+z))p(z) \left[\prod_{y\in\mathbb{T}_N^d,\, \xi(y)=1} \eta^{x,x+z}(y) - \prod_{y\in\mathbb{T}_N^d,\, \xi(y)=1} \eta(y) \right] \\
&= N^2 \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_N^d} \eta(x)(1-\eta(x+z))p(z) \left[I_{\{\xi(x)=0,\, \xi(x+z)=1\}} - I_{\{\xi(x)=1,\, \xi(x+z)=0\}} \right] \prod_{y\in\mathbb{T}_N^d/\{x,z\},\, \xi(y)=1} \eta(y) \\
&= N^2 \frac{1}{2d} \left| \left\{ (x,z) \in \mathbb{T}_N^d : \eta(x)=1,\, \eta(x+z)=0,\, \xi(x+z)=1,\, \xi(x)=0,\ \xi(y)=\eta(y),\ y \in \mathbb{T}_N^d/\{x,z\} \right\} \right| \\
&\quad - N^2 \frac{1}{2d} \left| \left\{ (x,z) \in \mathbb{T}_N^d : \eta(x)=1,\, \eta(x+z)=0,\, \xi(x)=1,\, \xi(x+z)=0,\ \xi(y)=\eta(y),\ y \in \mathbb{T}_N^d/\{x,z\} \right\} \right|.
\end{aligned}$$

同理，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{N,\kappa} D(\xi,\eta) \\
&= N^2 \frac{1}{2d} \left| \left\{ (x,z) \in \mathbb{T}_N^d : \xi(x)=1,\, \xi(x+z)=0,\, \eta(x+z)=1,\, \eta(x)=0,\ \xi(y)=\eta(y),\ y \in \mathbb{T}_N^d/\{x,z\} \right\} \right| \\
&\quad - N^2 \frac{1}{2d} \left| \left\{ (x,z) \in \mathbb{T}_N^d : \xi(x)=1,\, \xi(x+z)=0,\, \eta(x)=1,\, \eta(x+z)=0,\ \xi(y)=\eta(y),\ y \in \mathbb{T}_N^d/\{x,z\} \right\} \right|
\end{aligned}$$

$= \mathcal{L}_N D(\xi, \eta)$。

至此，证明完成。 □

现在我们可以证明引理 2.2。

引理 *2.2*的证明。 固定 $\xi = \delta_x$，其中 δ_x 表示位于 x 处、视为 Ω 中一个构型的狄拉克质量$_N$。令 D为式（2.7）中定义的对偶函数，并令（X_N（t））$_{t\in[0,T]}$为与单粒子对称简单排斥过程相关的随机游走。

为避免歧义，我们通过以下关系表示半群 $(P_N(t))_{t\in[0,T]}$

$$P_N(t)f(\eta) = \mathbb{E}_\eta f(\hat{\eta}_t),$$

其中 $(\hat{\eta}_t)_{t\in[0,T]}$ 是在另一个概率空间 $\hat{\Omega}\, \hat{\mathcal{F}}\, \hat{\mathbb{P}}$ 上由 $\mathcal{L}_N$ 生成的对称简单排斥过程的独立副本。

利用自对偶关系（2.6），我们计算得到

$$\begin{aligned} P_N(t-s)\eta_s(x) &= \hat{\mathbb{E}}\left[\hat{\eta}_{t-s}(x) \,\middle|\, \hat{\eta}_0 = \eta_s\right] \\ &= \hat{\mathbb{E}}\left[D(\delta_x, \hat{\eta}_{t-s}) \,\middle|\, \hat{\eta}_0 = \eta_s\right] \\ &= \hat{\mathbb{E}}\left[D(\delta_{X_N(t-s)}, \eta_s) \,\middle|\, X_0 = x\right] \\ &= \hat{\mathbb{E}}_x\, \eta_s(X_N(t-s)) = \sum_{y\in\mathbb{T}_N^d} \eta_s(y) G_N(t-s, x-y). \end{aligned}$$

因此，通过变量代换，我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} P_N(t-s)\eta_s(x)\, \delta_x(\varphi) &= \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \sum_{y\in\mathbb{T}_N^d} \eta_s(y) G_N(t-s, x-y)\, \delta_x(\varphi) \\ &= \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \eta_s(x)\, \delta_x(S_N(t-s)\varphi). \end{aligned}$$

证明完毕。 □

引理 2.5。 在与引理*2.2*相同的假设下，对于每个 $t \in [0,T]$，以下杜哈梅尔公式几乎必然成立：

$$\begin{aligned} \langle \pi_t^N, \phi\rangle &= \langle P_N(t)\pi_0^N, \phi\rangle + \int_0^t \langle \phi, P_N(t-s)\, dM_s^N\rangle \\ &= \langle \pi_0^N, S_N(t)\phi\rangle + \int_0^t \langle S_N(t-s)\phi, dM_s^N\rangle. \end{aligned}$$

证明。 根据 Dynkin 公式，过程

$$M_t = \pi_t^N - \pi_0^N - \int_0^t \mathcal{L}_N \pi_s^N\, ds \tag{2.8}$$

定义了一个测度值鞅。

应用 杜哈梅尔公式（2.8），并与光滑函数进行测试 ϕ，我们得到

$$\langle \pi_t^N, \phi\rangle = \langle P_N(t)\pi_0^N, \phi\rangle + \int_0^t \langle \phi, P_N(t-s)\, dM_s^N\rangle.$$

接下来，再次由（2.8）可知，鞅 M_t 关于底层对称简单排斥过程构型 η_t呈线性。因此，我们可以应用引理 2.2中陈述的对偶性结果，该结果将作用于构型的半群 $P_N(t)$ 与作用于测试函数的对偶半群 $S_N(t)$ 联系起来。

利用引理 2.2，我们可以交换半群和测试函数的位置，从而得到

$$\begin{aligned}\langle \pi_t^N, \phi\rangle &= \langle P_N(t)\pi_0^N, \phi\rangle + \int_0^t \langle \phi, P_N(t-s)\, dM_s^N\rangle \\ &= \langle \pi_0^N, S_N(t)\phi\rangle + \int_0^t \langle S_N(t-s)\phi, dM_s^N\rangle.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

2.3. 随机偏微分方程的基本设定。 在第5 节和第6节中，我们研究对称简单排斥过程的涨落流体力学。为此，本节将介绍相关随机偏微分方程解的基本定义，首先描述随机噪声。令 $(e_k)_{k\geqslant 0}$ 表示 $L^2(\mathbb{T}^d)$的标准傅里叶基，并令 m 为一个标准卷积核。对于每个 $\delta>0$，令 m_δ 为 $\mathbb{T}^d$上的标准磨光核。给定 $k\geqslant 0$ 和 $\delta>0$，我们将磨光傅里叶模态定义为$f_{\delta,k} := m_\delta * e_k$。

我们引入以下布朗运动：

$$W := \sum_{k\geqslant 0} e_k B_t^k \quad \text{and} \quad W_\delta := \sum_{k\geqslant 0} f_{\delta,k} B_t^k, \tag{2.9}$$

其中 $(B_t^k)_{k\geqslant 0}$ 是一族相互独立的标准 d维布朗运动。

此外，我们定义相应的系数函数：

$$F_{1,\delta} := \sum_{k\geqslant 0} |f_{\delta,k}|^2, \quad F_{2,\delta} := \frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 0} \nabla f_{\delta,k}^2, \quad F_{3,\delta} := \sum_{k\geqslant 0} |\nabla f_{\delta,k}|^2.$$

需要注意的是，在这一构造下，$F_{1,\,\delta}$，$F_{3,\,\delta}$ 均为常数，并且对所有 $\delta>0$，恒等式 $F_{2,\,\delta}=0$ 均成立。

令 $\varepsilon>0$。作为对称简单排斥过程的连续类比，我们将在第 5节研究其对应的涨落水动力学方程，该方程由以下随机偏微分方程描述：

$$d\rho_\varepsilon = \frac{1}{2}\Delta\rho_\varepsilon\, dt - \varepsilon^{1/2}\nabla\cdot\Big(\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)\circ dW_{\delta(\varepsilon)}\Big), \quad \rho_\varepsilon(0)=\rho_0, \tag{2.10}$$

其中，$\sigma_{n(\varepsilon)}(\cdot)$ 是 $\sigma(\zeta)=\sqrt{\zeta(1-\zeta)}$ $\zeta\in[0,1]$ 的光滑近似。我们首先对初始条件和正则化迁移率系数提出假设。

假设 2.1。 我们假设初始轮廓满足 $\rho_0\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$，且与边界值 0 和1保持一致的正距离，即存在 $c\in(0,\,1/2)$ 使得 $c\leqslant\rho_0\leqslant 1-c$ 几乎处处成立。

假设 2.2。 我们假设初始剖面满足 $\rho_0\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$，并且与边界值0保持一致的正距离，即存在 $c\in(0,1/2)$，使得 $\rho_0\geqslant c$ 几乎处处成立。

接下来，我们对正则化迁移率函数提出假设，该函数逼近一种奇异平方根型系数。

假设 2.3。 设 $\sigma(\cdot)\in C_c^1((0,1))$，且满足以下性质：

(1) $\sigma\in C([0,1))\cap C^\infty((0,1))$，其中 $\sigma(0)=\sigma(1)=0$，且 $\sigma'\in C_c^\infty($ $[0,1))$；*(2)* 存在常数 $c\in(0,\infty)$，使得对所有 $\zeta\in[0,1]$,

$$|\sigma(\zeta)|\leqslant c, \quad \textit{and} \quad |\sigma(\zeta)\sigma'(\zeta)|\leqslant c. \tag{2.11}$$

假设2.4。 设 $\sigma(\cdot)\in C_c^1((0,\infty))$，且满足以下性质 *s:*

(1) $\sigma\in C([0,\infty))\cap C^\infty((0,\infty))$ 其中 $\sigma(0)=0$ 且 $\sigma'\in C_c^\infty([0,\infty))$；

(2) 存在常数 $c\in(0,\infty)$，使得对所有 $\zeta\in[0,\infty)$,

$$|\sigma(\zeta)|\leqslant c, \quad \textit{and} \quad |\sigma(\zeta)\sigma'(\zeta)|\leqslant c. \tag{2.12}$$

下一个引理保证存在一个正则逼近，使典范平方根系数满足假设 2.3或2.4 。

引理 2.6。 设 $\sigma(\zeta) = \sqrt{\zeta(1-\zeta)}$ 对所有 $\zeta \in [0,1]$均成立。则存在一列光滑函数$(\sigma_n(\cdot))^{n\geqslant 1}$ 满足假设*2.3*，使得

$$\sigma_n(\cdot) \longrightarrow \sigma(\cdot) \quad in\ C^1_{\mathrm{loc}}((0,1)), \quad as\ n \to \infty.$$

类似地，对于情形 $\sigma(\zeta) = \sqrt{\zeta}$ 对所有 $\zeta \in [0,\infty)$，存在一列光滑函数$(\sigma_n(\cdot))^{n\geqslant 1}$ 满足假设*2.4*，使得

$$\sigma_n(\cdot) \longrightarrow \sigma(\cdot) \quad in\ C^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty)), \quad as\ n \to \infty.$$

鉴于噪声的结构，随机方程 (2.10) 可等价地改写为 Itô 形式：

$$d\rho_\varepsilon = \frac{1}{2}\Delta\rho_\varepsilon\, dt - \varepsilon^{1/2}\nabla\cdot\left(\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)\, dW_{\delta(\varepsilon)}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\nabla\cdot\left(\sigma'_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)^2\,\nabla\rho_\varepsilon\right) F_{1,\delta(\varepsilon)}. \tag{2.13}$$

令 ε， $n(\varepsilon)$ $\delta(\varepsilon) > 0$ 为固定参数，并令 $(S(t))^{t\in[0,T]}$ 表示由 $\frac{1}{2}\Delta$ 在 $\mathbb{T}^d$上生成的热半群。现在给出方程 (2.13) 的温和解定义。

定义 *2.7.* 假设 ρ_0 和 $\sigma_{n(\varepsilon)}(\cdot)$ 分别满足假设 *2.1* 和 *2.3*。称一个取值于$L^2(\mathbb{T}^d)$、 $\mathcal{F}_t$-适应的过程 ρ_ε 为方程 *(2.13)* 的温和解，其初始数据为 ρ_0 ，若几乎必然有 $\rho_\varepsilon \in C([0,T];\, L^2(\mathbb{T}^d)) \cap L^2([0,T];\, H^1(\mathbb{T}^d))$，且

$$\rho_\varepsilon(t) = S(t)\rho_0 - \varepsilon^{1/2}\int_0^t S(t-s)\nabla\cdot(\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)\, dW_{\delta(\varepsilon)}) + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^t S(t-s)\nabla\cdot\left(\sigma'_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)^2\,\nabla\rho_\varepsilon\right) F_{1,\delta(\varepsilon)}\, ds, \tag{2.14}$$

对每个 $t \in [0,T]$。

定理 2.8. 假设 ρ_0 和 $\sigma_{n(\varepsilon)}(\cdot)$ 分别满足假设 *2.1* 和 *2.3*，则方程 (2.13) 存在唯一的温和解，其初始数据为 ρ_0。

证明。 结合 [FG24] 中的论证与杜哈梅尔公式即可得到该结果。 □

此外，在第 6 节中，我们研究随机偏微分方程

$$d\rho_\varepsilon = \frac{1}{2}\Delta\rho_\varepsilon dt - \varepsilon^{1/2}\nabla\cdot(\sigma(\rho_\varepsilon)\circ dW_{\delta(\varepsilon)}), \tag{2.15}$$

其中 $\sigma(\cdot)$ 表示一个可能不规则的系数函数，例如， $\sigma(\zeta) = \sqrt{\zeta}$。该方程可以等价地改写为 Itˆo 形式：

$$d\rho_\varepsilon = \frac{1}{2}\Delta\rho_\varepsilon dt - \varepsilon^{1/2}\nabla\cdot(\sigma(\rho_\varepsilon)dW_{\delta(\varepsilon)}) + \frac{\varepsilon}{2}\nabla\cdot(\sigma'(\rho_\varepsilon)^2\nabla\rho_\varepsilon)F_{1,\delta(\varepsilon)}dt. \tag{2.16}$$

令 $\chi_\varepsilon = I_{\{0<\zeta<\rho_\varepsilon\}}$ 表示相应的重整化动理学函数。形式上应用链式法则，我们得到如下恒等式：

$$\begin{aligned} d\chi_\varepsilon =& \frac{1}{2}\nabla\cdot(\delta_0(\zeta-\rho_\varepsilon)\nabla\rho_\varepsilon)dt - \varepsilon^{1/2}\delta_0(\rho_\varepsilon-\zeta)\nabla\cdot(\sigma(\rho_\varepsilon)dW_{\delta(\varepsilon)}) \\ &+ \partial_\zeta p_\varepsilon dt - \frac{\varepsilon}{2}\partial_\zeta(\delta_0(\zeta-\rho_\varepsilon)\sigma(\zeta)^2F_{3,\delta(\varepsilon)})dt + \frac{\varepsilon}{2}F_{1,\delta(\varepsilon)}\delta_0(\rho_\varepsilon-\zeta)\nabla\cdot(\sigma'(\rho_\varepsilon)^2\nabla\rho_\varepsilon)dt, \end{aligned} \tag{2.17}$$

其中缺陷测度 p_ε 由下式给出

$$p_\varepsilon = \frac{1}{2}\delta_0(\zeta-\rho_\varepsilon)|\nabla\rho_\varepsilon|^2. \tag{2.18}$$

我们要指出的是，这个恒等式并不总是成立。正如 [FG24], 所观察到的，对于（2.15）的逼近序列，其紧性并不能保证（2.18）右端的收敛性。相反，通过利用 L^2（$\mathbb{T}^d$）-范数的下半连续性，我们需要考虑分布不等式

$$p_\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}\delta_0(\zeta-\rho_\varepsilon)|\nabla\rho_\varepsilon|^2. \tag{2.19}$$

这促使我们给出动理学测度的广义定义。为便于说明，我们使用具体例子 $\sigma(\zeta)=\sqrt{\zeta}$ 来阐释这一概念，它对应于 Dean-Kawasaki 方程。与涨落 SSEP 相关的情形$\sigma(\zeta)=\sqrt{\zeta(1-\zeta)}$也可进行类似处理。

定义2.9. 一个动理学测度 是映射 p ，它从Ω 映到 $\mathbb{T}^d\times(0,\infty)\times[0,T]$ 上的非负、局部有限测度空间，使得对每一个测试函数 $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{T}^d\times(0,\infty))$，该映射

$$(\omega,t)\in\Omega\times[0,T]\mapsto\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}^d}\psi(x,\zeta)\,\mathrm{d}p(x,\zeta,r)$$

是 $\mathcal{F}_t$-可料的。

我们现在着手引入重整化动力学解的概念。

定义2.10. 设 $\sigma(\zeta)=\sqrt{\zeta}$ ，并假设 ρ_0 满足假设 *2.1*。对每一个 $\varepsilon>0$，一个非负的、 $L^1(\mathbb{T}^d)$值的 $\mathcal{F}_t$-循序可测过程 ρ_ε 称为 重整化动理学解，即 (2.16) 的、具有初始数据 ρ_0 的解，如果下列性质成立。

(1) 质量守恒：几乎必然地，对每一个 $t\in[0,T]$,

$$\|\rho_\varepsilon(t)\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}=\|\rho_0\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}. \tag{2.20}$$

(2) 熵与能量耗散估计：存在常数 $c\in$ (0, ∞)，其取决于T、$\|\rho_0\|_{L^1(\mathbb{R}^{2d})}$，使得

$$\mathbb{E}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}|\nabla\sqrt{\rho_\varepsilon(t)}|^2dzdt\leqslant c(T,\rho_0). \tag{2.21}$$

此外，存在一个非负动理学测度 p_ε，满足以下性质。 (3) 正则性：在分布意义下，有

$$4\delta_0(\zeta-\rho_\varepsilon)\zeta|\nabla\sqrt{\rho_\varepsilon}|^2\leqslant p_\varepsilon\ on\ \mathbb{T}^d\times(0,\infty)\times[0,T],\quad \mathbb{P}-a.s. \tag{2.22}$$

(4) 无穷远处消失：

$$\liminf_{M\to\infty}\mathbb{E}\Big[p_\varepsilon(\mathbb{T}^d\times[0,T]\times[M,M+1])\Big]=0. \tag{2.23}$$

(5) 方程：几乎必然地，对每个 $t\in[0,T]$ 和 $\psi\in\mathrm{C}_c^\infty\left(\mathbb{T}^d\times\right.$ (0, $\left.\infty\right)$),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}^d}\chi_\varepsilon(x,\zeta,t)\psi(x,\zeta)&=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}^d}\chi_\varepsilon(x,\zeta,0)\psi(x,\zeta)-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}\nabla\rho_\varepsilon\cdot(\nabla\psi)(x,\rho_\varepsilon)\\&-\varepsilon^{1/2}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}\psi(x,\rho_\varepsilon)\nabla\cdot(\sigma(\rho_\varepsilon)dW_{\delta(\varepsilon)})-\frac{\varepsilon}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}F_{1,\delta(\varepsilon)}\sigma'(\rho_\varepsilon)^2\nabla\rho_\varepsilon\cdot(\nabla\psi)(x,\rho_\varepsilon)\\&+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}F_{3,\delta(\varepsilon)}\sigma^2(\rho_\varepsilon)(\partial_\zeta\psi)(z,\rho_\varepsilon)-\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}^d}\partial_\zeta\psi dp_\varepsilon.\end{aligned} \tag{2.24}$$

以下适定性结果是 [FG24] 的直接推论。

定理 2.11。 假设 ρ_0 满足假设*2.1*。则存在一个 (2.16) 的唯一重整化动理学解，其初始数据为 ρ_0。

3. From Brownian particles to the mobility matrix

在着手分析对称简单排斥过程（SSEP）之前，我们先考察一个相关情形，即由相互独立的布朗粒子组成的系统。这项初步研究使我们能够建立类似的定量误差估计，并验证时间离散化误差的最优性。更具体地说，本节将推导一个估计，刻画独立布朗运动所对应的涨落场的二次变差与相应迁移率矩阵之间的差异。这将为后续相互作用粒子情形中的结果提供基准。

初始数据。设 $(X_i)_{i\geqslant 1}$ 是一列独立同分布的 $\mathbb{T}^d$ 值、 $\mathcal{F}$ 可测随机变量，其共同密度为 $\rho_0 \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$。对于每个测试函数 $\phi \in C_b(\mathbb{T}^d)$，存在一个常数 $C>0$，使得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[N^{1/2}\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \phi(X_i) - \langle \phi, \rho_0\rangle\Big)\Big]^2 =& NVar\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \phi(X_i)\Big)\\ =&\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Var(\phi(X_i))\\ =&\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \mathbb{E}(\phi(X_i)-\mathbb{E}\phi(X_i))^2 \leqslant C\|\phi\|^2_{L^\infty(\mathbb{T}^d)},\end{aligned} \tag{3.1}$$

对每个 $N\geqslant 0$ 均一致成立。

对每个 $N\in\mathbb{N}_+$，设 $(B_i)_{i=1}^N$ 是环面 $\mathbb{T}^d$ 上的一列独立同分布布朗运动，其初始条件为 $(X_i)_{i=1}^N$。定义与这些粒子相关联的经验测度为

$$\pi_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{B_i}.$$

应用 Itˆo 公式可得， π_N 在分布的意义下满足

$$d\pi_N = \frac{1}{2}\Delta\pi_N\, dt - \frac{1}{N}\nabla\cdot\left(\sum_{i=1}^N \delta_{B_i}\, dB_i\right).$$

令 $\bar\rho$ 表示扩散方程的唯一解

$$\partial_t\bar\rho = \Delta\bar\rho, \quad \bar\rho(0)=\rho_0, \tag{3.2}$$

它在 $N\to\infty$ 时作为经验测度 π_N 的宏观极限。

我们将涨落场定义为 $\bar\pi^1_N := N^{1/2}(\pi_N-\bar\rho)$，它表示经验测度相对于其确定性平均场极限的偏差，并按中心极限定理的尺度进行重缩放。于是， $\bar\pi^1_N$ 满足随机偏微分方程

$$d\bar\pi^1_N = \frac{1}{2}\Delta\bar\pi^1_N\, dt - \frac{1}{\sqrt{N}}\nabla\cdot\left(\sum_{i=1}^N \delta_{B_i}\, dB_i\right), \tag{3.3}$$

在弱（分布）意义下。令 $\{S(t)\}_{t\in[0,T]}$ 表示 $\mathbb{T}^d$上的标准热半群，其对应的光滑转移核 $p_t(x)$满足 $S(t)f(x) = \int_{\mathbb{T}^d} p_t(x-y)f(y)\, dy$，对每个$f\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$均成立。

对（3.3）应用温和形式，并结合分部积分以及热核的性质，我们得到：几乎必然地，对每个 $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}\bar\pi^1_N(t) =& S(t)(N^{1/2}(\pi_N(0)-\rho_0)) - \frac{1}{\sqrt{N}}\int_0^t S(t-s)\nabla\cdot\left(\sum_{i=1}^N \delta_{B_i}\, dB_i\right)\\ =& S(t)(N^{1/2}(\pi_N(0)-\rho_0)) - \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N\int_0^t \nabla_x p_{t-s}(x-B_i(s))\, dB_i(s).\end{aligned} \tag{3.4}$$

对于任意测试函数 $\phi\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$，我们将 $\bar\pi^{1,\phi}_N := \bar\pi^1_N(\phi)$表示涨落场作用于 ϕ的结果。于是，根据温和形式（3.4），我们可以推 deduce 得到：几乎必然地，对于每个 $t\in[0,T]$,

$$\bar\pi^{1,\phi}_N(t) = \langle S(t)(N^{1/2}(\pi_N(0)-\rho_0)),\phi\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N\int_0^t \langle\nabla\phi, p_{t-s}(\cdot - B_i(s))\rangle\, dB_i(s)$$

$$=\langle N^{1/2}(\pi_N(0)-\rho_0), S(t)\phi\rangle + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t (S(t-s)\nabla\phi)(B_i(s))\,dB_i(s).$$

现在，我们可以陈述关于涨落场 $\bar{\pi}_N^1$ 的二次变差及其收敛到极限迁移率矩阵的主要定量误差估计。

定理 3.1. 设 $N\in\mathbb{N}_+$，并设 $(B_i)_{i=1}^N$、$(X_i)_{i=1}^N$、$\bar{\rho}$、π_N 和 $\bar{\pi}_N^1$ 如上所定义。对于每个测试函数 $\phi\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$，存在常数 $C=C(\phi,\rho_0)>0$，使得对所有 $0<h<t$，

$$\left|\frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left(\bar{\pi}_N^{1,\phi}(t+h)-\bar{\pi}_N^{1,\phi}(t)\right)^2 - \langle\nabla\phi,\bar{\rho}(t)\nabla\phi\rangle\right| \leqslant C(\phi,\rho_0)\,h.$$

证明。对于每个 $0<h<t$，我们利用其温和表示（3.4）分析涨落场 $\bar{\pi}^1$ 的增量，$_N^{\phi}$。首先，将 $\bar{\pi}_N^1(t+h)$ 的温和形式中的时间积分分解为两个区间：从 0 到 t，以及从 t 到 $t+h$。通过展开差的平方并利用布朗运动的独立性，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\bar{\pi}_N^{1,\phi}(t+h)-\bar{\pi}_N^{1,\phi}(t)\right)^2 =& \mathbb{E}\Bigg(\Big\langle N^{1/2}(\pi_N(0)-\rho_0),(S(t+h)-S(t))\phi\Big\rangle \\
&+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\left(\int_0^t (S(t+h-s)\nabla\phi)(B_i)\,dB_i-\int_0^t (S(t-s)\nabla\phi)(B_i)\,dB_i\right. \\
&\left.+\int_t^{t+h}(S(t+h-s)\nabla\phi)(B_i)\,dB_i\right)\Bigg)^2 \\
=&\mathbb{E}\Big\langle N^{1/2}(\pi_N(0)-\rho_0),(S(t+h)-S(t))\phi\Big\rangle^2 \\
&+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left(\int_0^t([S(t+h-s)-S(t-s)]\nabla\phi)(B_i)\,dB_i\right)^2 \\
&+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left(\int_t^{t+h}(S(t+h-s)\nabla\phi)(B_i)\,dB_i\right)^2.
\end{aligned}$$

在上面的最后一个等式中，我们利用了布朗运动（B_i）$_{i=1}^N$的独立性，以及区间 $[0,t]$ 和 $[t,t+h]$ 上随机积分之间的协方差为零这一事实。此外，为了分析初始数据与随机积分之间的协方差，我们利用了关于滤过 $\mathcal{F}_0$ 的条件期望的性质，由此可知这些协方差均为零。应用伊藤等距公式后，该表达式化简为

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\bar{\pi}_N^{1,\phi}(t+h)-\bar{\pi}_N^{1,\phi}(t)\right)^2 =&\mathbb{E}\Big\langle N^{1/2}(\pi_N(0)-\rho_0),(S(t+h)-S(t))\phi\Big\rangle^2 \\
&+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\int_0^t\left|(S(t+h-s)\nabla\phi)(B_i)-(S(t-s)\nabla\phi)(B_i)\right|^2 ds \\
&+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\left|(S(t+h-s)\nabla\phi)(B_i)\right|^2 ds.
\end{aligned}$$

将其改写为经验测度的形式并取期望，得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\bar{\pi}_N^{1,\phi}(t+h)-\bar{\pi}_N^{1,\phi}(t)\right)^2 =&\mathbb{E}\Big\langle N^{1/2}(\pi_N(0)-\rho_0),(S(t+h)-S(t))\phi\Big\rangle^2 \\
&+\mathbb{E}\int_0^t\Big\langle\left|S(t+h-s)\nabla\phi-S(t-s)\nabla\phi\right|^2,\pi_N(s)\Big\rangle\,ds
\end{aligned}$$

$$+\mathbb{E}\int_t^{t+h}\left\langle |S(t+h-s)\nabla\phi|^2, \pi_N(s)\right\rangle ds.$$

利用以下事实：对于每个测试函数 $\phi\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ 和所有 $t\in[0,T]$，$\mathbb{E}\pi_N(t,\ \phi)=\langle\bar\rho(t)\ \phi\rangle$ 都成立，因此我们有理由在取期望时用 $\bar\rho$ 替换 π_N。由此，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\bar\pi_N^{1,\phi}(t+h)-\bar\pi_N^{1,\phi}(t)\right)^2 =&\mathbb{E}\Big(\big\langle N^{1/2}(\pi_N(0)-\rho_0),(S(t+h)-S(t))\phi\big\rangle\Big)^2\\ &+\int_0^t\left\langle |S(t+h-s)\nabla\phi-S(t-s)\nabla\phi|^2,\bar\rho(s)\right\rangle ds\\ &+\int_t^{t+h}\left\langle |S(t+h-s)\nabla\phi|^2,\bar\rho(s)\right\rangle ds.\end{aligned}$$

利用半群 $S(t)$与宏观密度剖面 $\bar\rho$的正则性及连续性，我们通过时间上的泰勒展开估计第一项积分，并利用 $\bar\rho(s)$的时间连续性控制第二项。由此可得，存在仅依赖于测试函数 ϕ 与初始剖面 ρ_0的常数 $C=C(\phi,\rho_0)$，使得

$$\int_0^t\left\langle |S(t+h-s)\nabla\phi-S(t-s)\nabla\phi|^2,\bar\rho(s)\right\rangle ds\leqslant C(\phi,\rho_0)h^2.$$

由此，我们得到二次变差的如下界：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\bar\pi_N^{1,\phi}(t+h)-\bar\pi_N^{1,\phi}(t)\right)^2\leqslant h\left\langle|\nabla\phi|^2,\bar\rho(t)\right\rangle+\mathbb{E}\Big(N^{1/2}\big\langle\pi_N(0)-\rho_0,(S(t+h)-S(t))\phi\big\rangle\Big)^2+C(\phi,\rho_0)h^2\\ +\int_t^{t+h}\left(\left\langle |S(t+h-s)\nabla\phi|^2,\bar\rho(s)\right\rangle-\left\langle|\nabla\phi|^2,\bar\rho(t)\right\rangle\right)ds.\end{aligned}$$

最后一项积分刻画了由 $\bar\rho(s)$在 $s=t$邻域内的时间依赖性所产生的局部误差，我们进一步将其分解如下：

$$\begin{aligned}\int_t^{t+h}\langle|S(t+h-s)\nabla\phi|^2,\bar\rho(s)\rangle-\langle|\nabla\phi|^2,\bar\rho(t)\rangle ds=&\int_t^{t+h}\langle|S(t+h-s)\nabla\phi|^2-|\nabla\phi|^2,\bar\rho(s)\rangle ds\\ &+\int_t^{t+h}\langle|\nabla\phi|^2,(\bar\rho(s)-\bar\rho(t))\rangle ds\\ \leqslant&C(\phi,\rho_0)h^2.\end{aligned}$$

此处，右端第二项借助 $\bar\rho$的光滑性加以控制。

至于初始数据项，借助（3.1），存在常数 $C>0$ 使得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(N^{1/2}\big\langle\pi_N(0)-\rho_0,(S(t+h)-S(t))\phi\big\rangle\Big)^2&\lesssim C\|(S(t+h)-S(t))\phi\|^2_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}\\ &\leqslant C(\phi)\,h^2.\end{aligned}$$

由此得到估计

$$\left|\frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left(\bar\pi_N^{1,\phi}(t+h)-\bar\pi_N^{1,\phi}(t)\right)^2-\langle\nabla\phi,\bar\rho(t)\nabla\phi\rangle\right|\leqslant C(\phi,\rho_0)\,h.$$

□

4. From the SSEP to the mobility matrix

回顾一下，$\rho_0\in C^\infty(\mathbb{T}^d;[0,1])$，并令 $(\eta_t)_{t\in[0,T]}$ 表示初始数据如定义 2.1 中所指定、与 ρ_0 相关的对称简单排斥过程的构型。令 $\bar\rho$ 表示初始数据为 ρ_0 的扩散方程 (3.2) 的唯一解。此外，对于每个 $N\in\mathbb{N}_+$，回顾一下，π^N 和 $\bar X^{1,\ N}$ 分别表示对称简单排斥过程的经验测度和涨落场。

本节中，我们将建立涨落场的二次变差与相应迁移率矩阵之间的误差估计。首先引入杜哈梅尔公式，并刻画鞅项的二次变差。

回顾 $\{S_N(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是由（2.5）定义的半群。根据Dynkin公式（2.2），并应用如引理 2.5 所示的杜哈梅尔公式，我们几乎必然地得到，对每一个$\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ 以及每一个 $t \in [0,T]$,

$$\langle \pi_t^N, \phi\rangle = \langle \pi_0^N, S_N(t)\phi\rangle + \int_0^t \langle S_N(t-s)\,\phi, dM_s^N\rangle, \tag{4.1}$$

其中 $\{M_t^N\}_{t\in[0,T]}$ 是关于滤过 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]} = \{\sigma(\eta_s\colon\ s\leqslant t)\}_{t\in[0,T]}$的鞅。下面，我们考虑平均经验测度

$$\rho_N(t) = \mathbb{E}\pi^N(t) = N^{-d}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \mathbb{E}\eta_t(x)\,\delta_x(dy), \quad t\in[0,T]. \tag{4.2}$$

于是 ρ_N 满足离散扩散方程

$$\partial_t\rho_N = \mathcal{L}_N\rho_N, \qquad \rho_N(0) = \mathbb{E}\pi_0^N. \tag{4.3}$$

我们指出，生成元 $\mathcal{L}_N$ 最初被定义为作用于构型函数上的算子。然而，在略微滥用记号的情况下，我们将 $\mathcal{L}_N$ 的定义延拓为作用于 ρ_N，所用表达式为（2.3）。该表达式与离散拉普拉斯算子一致，因而可作用于任何适当正则的函数。

为分析误差估计，我们将涨落场分解为两部分:

$$\bar{X}^{1,N}(t,dy) = \bar{X}_1^{1,N}(t,dy) + \bar{X}_2^{1,N}(t,dy),$$

其中

$$\bar{X}_1^{1,N}(t,dy) = N^{-d/2}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\big(\eta_t(x) - \mathbb{E}\eta_t(x)\big)\,\delta_x(dy), \tag{4.4}$$

$$\bar{X}_2^{1,N}(t,dy) = N^{-d/2}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\big(\mathbb{E}\eta_t(x) - \bar{\rho}(x,t)\big)\,\delta_x(dy). \tag{4.5}$$

直接 计算可得，几乎必然地，对每个 $\phi\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ 和 $t\in[0,T]$,

$$\bar{X}_1^{1,N}(t,\phi) = \langle N^{d/2}S_N(t)(\pi_0^N - \mathbb{E}\pi_0^N),\phi\rangle + N^{d/2}\int_0^t \langle \phi, S_N(t-s)\,dM_s^N\rangle.$$

接下来，我们给出上文引入的鞅项的二次变差的基本刻画。

引理4.1. 设 $\phi\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{T}^d)$ 是一个时变测试函数。则

$$\mathbb{E}\left(N^{d/2}\int_0^t\langle\phi(s),\,dM_s^N\rangle\right)^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^t \mathcal{L}_N\big(\bar{X}_1^{1,N}(s,\phi(s))^2\big) - 2\,\bar{X}_1^{1,N}(s,\phi(s))\,\mathcal{L}_N\bar{X}_1^{1,N}(s,\phi(s))\,ds\right). \tag{4.6}$$

证明。 证明见 [KL99，附录 1.5，第 330 页，引理 5。1]。 □

注 4.2。 出现在 (4.6)右侧的算子通常称为carr´e du champ 算子。更准确地说，对于每个 $N\in\mathbb{N}_+$，carr´e du champ 算子定义为

$$\Gamma_N f(\eta) := (\mathcal{L}_N f^2)(\eta) - 2f(\eta)\mathcal{L}_N f(\eta), \quad \textit{for any } \eta\in\Omega_N, \tag{4.7}$$

其中 $f\colon \Omega_N\to\mathbb{R}$ 表示一个适当的测试函数。接下来，我们给出 *carr´e du champ* 算子的一个刻画，该刻画将在我们的分析中起到关键作用。

引理 4.3. 对任意 $N \in \mathbb{N}_+$，令 Γ_N 为 *carr´e du champ* 算子，其定义式为 (4.7)。则我们有如下表示：

$$\Gamma_N f(\eta) = N^2 \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_N^d} \eta(x)(1-\eta(x+z))p(z)(f(\eta^{x,x+z}) - f(\eta))^2, \quad \textit{for any } \eta \in \Omega_N, \tag{4.8}$$

其中 $f\colon \Omega_N \to \mathbb{R}$ 表示一个合适的测试函数。

证明。令 $f\colon \Omega_N \to \mathbb{R}$ 为一个测试函数。根据生成元的定义，可得

$$\begin{aligned}
\Gamma_N f(\eta) =& (\mathcal{L}_N f^2)(\eta) - 2f(\eta)\mathcal{L}_N f(\eta)\\
=& N^2 \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_N^d} \eta(x)(1-\eta(x+z))p(z)(f(\eta^{x,x+z})^2 - f(\eta)^2)\\
& - 2f(\eta)N^2 \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_N^d} \eta(x)(1-\eta(x+z))p(z)(f(\eta^{x,x+z}) - f(\eta))\\
=& N^2 \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_N^d} \eta(x)(1-\eta(x+z))p(z)(f(\eta^{x,x+z}) - f(\eta))^2, \quad \text{for any } \eta \in \Omega_N.
\end{aligned}$$

证明完毕。 □

作为准备，我们给出离散扩散方程与连续扩散方程之间的数值误差估计。令 $N \in \mathbb{N}_+$，并回顾 ρ_N 表示带有初始条件 $\rho_N(0) = \mathbb{E}\pi_N(0) = \sum_{x'\in\mathbb{T}_N^d} \mathbb{E}\eta_0(x')\delta_{x'}$ 的离散扩散方程（4.3）的解。在初始数据缓慢变化的假设下，对于每个 $x \in \mathbb{T}_N^d$，我们有

$$\rho_N(0,x) = \mathbb{E}\pi_N(0,x) = \sum_{x'\in\mathbb{T}_N^d} \rho_0(x')\delta_{x'}(x) = \rho_0(x).$$

现在我们建立如下数值误差估计。

引理 4.4. 对每个 $N \in \mathbb{N}_+$，均有

$$\sup_{s\in[0,T],\, y\in\mathbb{T}_N^d} |\rho_N(s,y) - \bar{\rho}(s,y)| \leqslant C(\rho_0)N^{-2}, \tag{4.9}$$

and

$$N^d \sup_{s\in[0,T],\, y\in\mathbb{T}_N^d} \left|\mathcal{L}_N\rho_N - \frac{1}{2}\Delta\bar{\rho}\right|^2 \leqslant C(\rho_0)N^{d-4}. \tag{4.10}$$

证明. 令取 $e_N = \rho_N - \bar{\rho}$。对离散方程与连续方程作差，得到

$$\partial_t e_N = \mathcal{L}_N e_N + R_N,$$

其中 $R_N = \mathcal{L}_N\bar{\rho} - \frac{1}{2}\Delta\bar{\rho}$。根据 $\mathcal{L}_N$的定义，并对 $\bar{\rho}$ 作四阶泰勒展开，可得

$$\sup_{x\in\mathbb{T}_N^d} |R_N(x)| \leqslant \frac{1}{24N^2} \sum_{j=1}^d \|\partial_{x_j}^4\bar{\rho}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}.$$

应用杜哈梅尔公式，我们完成了对式（4.9）的证明。对 $\mathcal{L}_N\rho_N - \frac{1}{2}\Delta\bar{\rho}$应用相同的技巧，我们同理可完成对式（4.10）的证明。 □

下面，我们建立一项误差估计，将对称简单排斥过程的跳跃率与其由水动力学极限导出的相应表达式进行比较。

引理 4.5. 令 $\rho_0 \in C^\infty(\mathbb{T}^d;\ [0,1])$。考虑对称简单排斥过程 $(\eta_t)^{t\in[0,T]}$，其初始分布与轮廓 ρ_0相关。对每个 $N \in \mathbb{N}_+$，令 $\bar\rho$ 表示满足初始数据 ρ_0 的(2.1) 的解，并令ρ_N 由 (4.2)定义。于是，对 $t_1 \in (0,\ T]$，以下估计成立：

$$\sup_{s\in[t_1,T],\ x,z\in\mathbb{T}_N^d}\Big|\mathbb{E}\big(\eta_s(x)(1-\eta_s(x+z))\big)-\bar\rho(s,x)\big(1-\bar\rho(s,x+z)\big)\Big| \lesssim N^{-2}+N^{-2}I_{\{d=1\}}+\frac{\log(1+N^2)}{1+N^2}I_{\{d=2\}}+\frac{1}{1+N^2}I_{\{d\geqslant 3\}},$$

对每个 $N \in \mathbb{N}_+$。

证明。 根据三角不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathbb{E}\big(\eta_s(x)(1-\eta_s(x+z))\big)-\bar\rho(s,x)\big(1-\bar\rho(s,x+z)\big)\Big|\\
\leqslant&\Big|\mathbb{E}\eta_s(x)-\mathbb{E}\big(\eta_s(x)\eta_s(x+z)\big)+\rho_N(s,x)\rho_N(s,x+z)-\rho_N(s,x)\rho_N(s,x+z)\\
&\quad+\bar\rho(s,x)\bar\rho(s,x+z)-\bar\rho(s,x)\Big|\\
\leqslant&\big|\rho_N(s,x)-\bar\rho(s,x)\big|+\big|\mathbb{E}\big(\eta_s(x)\eta_s(x+z)\big)-\rho_N(s,x)\rho_N(s,x+z)\big|\\
&\quad+\big|\big(\rho_N(s,x)-\bar\rho(s,x)\big)\rho_N(s,x+z)\big|+\big|\bar\rho(s,x)\big(\rho_N(s,x+z)-\bar\rho(s,x+z)\big)\big|\\
\lesssim&\big|\rho_N(s,x)-\bar\rho(s,x)\big|+\big|\mathbb{E}\big(\eta_s(x)\eta_s(x+z)\big)-\rho_N(s,x)\rho_N(s,x+z)\big|.
\end{aligned}$$

为了估计第一项，我们应用（4.9），得到

$$\sup_{s\in[0,T],\ x\in\mathbb{T}_N^d}\big|\rho_N(s,x)-\bar\rho(s,x)\big|\lesssim N^{-2}.$$

为了估计第二项，我们应用 [FPSV91，定理 2.1 和定理 2。2]以及 [FGL00，定理 2。3]，得到

$$\sup_{s\in[t_1,T],\ x,z\in\mathbb{T}_N^d}\Big|\mathbb{E}\big(\eta_s(x)\eta_s(x+z)\big)-\rho_N(s,x)\rho_N(s,x+z)\Big| \lesssim N^{-2}I_{\{d=1\}}+\frac{\log(N^2)}{N^2}I_{\{d=2\}}+\frac{1}{N^2}I_{\{d\geqslant 3\}}. \tag{4.11}$$

我们指出， [FPSV91，定理 2.1 和定理 2。2] 仅在一维情形下为对称简单排斥过程给出了界；然而，作者强调，这些界可以推广到任意更高维，而且一维情形是最困难的。之后， [FGL00，定理 2。3] 为任意维建立了这样的界。在 [FGL00，定理 2。3], 中，作者采用标准（或通常）时间尺度，并以时间表示估计。然而，在当前语境下，我们采用扩散时间尺度；因此， tFGL00定理 2。3] 中的估计所用的时间参数由 N^2t替换。应用这一重标度，我们得到估计式（4.11），从而完成证明。 □

此外，我们还为黎曼和逼近建立了以下估计。

引理 4.6。 对于每个 $\phi \in C^\infty$（$\mathbb{T}^d$），以下界成立：

$$\Big|\langle\nabla\phi,\bar\rho(1-\bar\rho)\nabla\phi\rangle-N^{2-d}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\sum_{z\in\mathbb{T}_N^d}\bar\rho(x)(1-\bar\rho(x+z))p(z)[\phi(x+z)-\phi(x)]^2\Big|\leqslant C(\rho_0,\phi)N^{-1}. \tag{4.12}$$

证明。 固定 $x \in \mathbb{T}_N^d$和 $z = \pm\bar e_j$，其中 $j = 1,\dots,d$。根据泰勒展开，我们有

$$\phi(x+z)-\phi(x)=\frac{1}{N}(\pm\partial_{x_j}\phi(x))+\frac{1}{2N^2}\partial_{x_j}^2\phi(\xi_{x,z}),$$

对于某个介于 x 和 $x+z$之间的 $\xi_{x,z}$。两边平方可得

$$[\phi(x+z)-\phi(x)]^2=\frac{1}{N^2}(\partial_{x_j}\phi(x))^2+Error_1(N),$$

其中 $Error_1(N)\leqslant C(\phi)N^{-4}$。对满足 $p(z)=1/(2d)$ 的 $z=\pm\bar{e}_j$ 求和，得到

$$\sum_{z=\pm\bar{e}_j}p(z)[\phi(x+z)-\phi(x)]^2=\frac{1}{dN^2}(\partial_{x_j}\phi(x))^2+\frac{1}{d}Error_1(N),\quad j=1,\dots,d.$$

对 $j=1$、.....、d 求和，得到

$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{z=\pm\bar{e}_j}p(z)[\phi(x+z)-\phi(x)]^2=\frac{1}{N^2}|\nabla\phi(x)|^2+\sum_{j=1}^{d}\frac{1}{d}Error_1(N).$$

接下来，对 $\bar{\rho}(x+z)$ 作一阶展开，得到

$$\bar{\rho}(x+z)=\bar{\rho}(x)+z\cdot\nabla\bar{\rho}(\xi_{x,z}),$$

对于某个介于 x 和 $x+z$ 之间的 $\xi_{x,z}$，由此可得

$$\bar{\rho}(x)(1-\bar{\rho}(x+z))=\bar{\rho}(x)(1-\bar{\rho}(x))+Error_2(N),$$

其中 $Error_2(N)\leqslant C(\rho_0)N^{-1}$。结合以上估计，可得

$$\sum_{z\in\mathbb{T}_N^d}\bar{\rho}(x)(1-\bar{\rho}(x+z))p(z)[\phi(x+z)-\phi(x)]^2=\frac{1}{N^2}\bar{\rho}(x)(1-\bar{\rho}(x))|\nabla\phi(x)|^2+Error_3(N),$$

其中 $Error_3(N)\leqslant C(\phi,\ \rho_0)N^{-1}$。乘以 N^{2-d}并对 $x\in\mathbb{T}_N^d$求和，得到一个近似于 $\int_{\mathbb{T}^d}\bar{\rho}(1-\bar{\rho})|\nabla\phi|^2dx$的黎曼和。然后利用光滑函数的标准黎曼和误差估计，可得

$$\begin{aligned}&\left|\langle\nabla\phi,\bar{\rho}(1-\bar{\rho})\nabla\phi\rangle-N^{2-d}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\sum_{z\in\mathbb{T}_N^d}\bar{\rho}(x)(1-\bar{\rho}(x+z))p(z)[\phi(x+z)-\phi(x)]^2\right|\\&\lesssim\left|\langle\nabla\phi,\bar{\rho}(1-\bar{\rho})\nabla\phi\rangle-N^{-d}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\bar{\rho}(x)(1-\bar{\rho}(x))|\nabla\phi(x)|^2\right|+\frac{C}{N}\lesssim\frac{C}{N},\end{aligned}$$

其中 C 取决于 $\bar{\rho}$ 和 ϕ的有限阶导数。 □

下文中，我们推导一个误差估计，用以量化过程 $\bar{X}^{1,\ N}_{\cdot,\ 1}$（定义见（4.4））的二次变差与涉及迁移率矩阵的预期极限表达式之间的差异。

命题 4.7。 假设引理 *4.5* 中的假设成立。对于每个 $N\in\mathbb{N}_+$，令 $\bar{X}^{1,\ N}_{\cdot,\ 1}$ 如 (4.4)中所定义。则对于所有 $t>h>0$ 以及每个测试函数 $\phi\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$，以下估计成立：

$$\left|\frac{1}{h}\mathbb{E}\big(\bar{X}_1^{1,N}(t+h,\phi)-\bar{X}_1^{1,N}(t,\phi)\big)^2-\langle\nabla\phi,\bar{\rho}(1-\bar{\rho})\nabla\phi\rangle\right|\leqslant C(\rho_0,\phi)\left(h+N^{-1}\right).\tag{4.13}$$

证明。 将杜哈梅尔公式应用于（4.4），我们注意到，几乎必然地，对每个 $t>h>0$，差值 $\bar{X}^{1,\ N}_{1,\ 1}(t+h,\ \phi)-\bar{X}^{1,\ N}_{1,\ 1}(t,\ \phi)$ 可分解如下：

$$\begin{aligned}\bar{X}_1^{1,N}(t+h,\phi)-\bar{X}_1^{1,N}(t,\phi)&=\langle N^{d/2}(\pi_0^N-\mathbb{E}\pi_0^N),(S_N(t+h)-S_N(t))\phi\rangle\\&\quad+N^{d/2}\int_0^{t+h}\langle S_N(t+h-s)\,\phi,dM_s^N\rangle-N^{d/2}\int_0^t\langle S_N(t-s)\,\phi,dM_s^N\rangle\\&=\langle(\pi_0^N-\mathbb{E}\pi_0^N),(S_N(t+h)-S_N(t))\phi\rangle\end{aligned}$$

$$+ N^{d/2} \int_0^t \langle (S_N(t+h-s) - S_N(t-s))\, \phi, dM_s^N \rangle$$
$$+ N^{d/2} \int_t^{t+h} \langle S_N(t+h-s)\, \phi, dM_s^N \rangle.$$

对该表达式取二阶矩，展开平方，并结合伊藤乘积法则以及关于初始σ代数$\mathcal{F}_0$的条件期望的性质，我们发现所有协方差项均消失。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\bar{X}_1^{1,N}(t+h,\phi) - \bar{X}_1^{1,N}(t,\phi)\right)^2 &= \mathbb{E}\left\langle N^{d/2}(\pi_0^N - \mathbb{E}\pi_0^N), (S_N(t+h) - S_N(t))\phi \right\rangle^2 \\ &\quad + \mathbb{E}\left(N^{d/2} \int_0^t \langle (S_N(t+h-s) - S_N(t-s))\, \phi, dM_s^N \rangle \right)^2 \\ &\quad + \mathbb{E}\left(N^{d/2} \int_t^{t+h} \langle S_N(t+h-s)\, \phi, dM_s^N \rangle \right)^2.\end{aligned}$$

借助引理 4.1 对鞅项的刻画，二阶矩展开中出现的随机积分项可以用与生成元 ´ 相关联的 carré du champ 算子 $\mathcal{L}_N$ 表示。更准确地说，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(N^{d/2} \int_0^t \langle (S_N(t+h-s) - S_N(t-s))\, \phi, dM_s^N \rangle \right)^2 \\ =&\mathbb{E}\Bigg(\int_0^t \mathcal{L}_N \left(\bar{X}_1^{1,N}(s, (S_N(t+h-s) - S_N(t-s))\phi)^2 \right) \\ &\quad - 2\, \bar{X}_1^{1,N}(s, (S_N(t+h-s) - S_N(t-s))\phi)\, \mathcal{L}_N \bar{X}_1^{1,N}(s, (S_N(t+h-s) - S_N(t-s))\phi)\, ds \Bigg) \\ =:& I_1,\end{aligned}$$

类似地，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(N^{d/2} \int_t^{t+h} \langle \phi, S_N(t+h-s)\, dM_s^N \rangle \right)^2 &= \mathbb{E}\Bigg(\int_t^{t+h} \mathcal{L}_N \left(\bar{X}_1^{1,N}(s, S_N(t+h-s)\phi)^2 \right) \\ &\quad - 2\, \bar{X}_1^{1,N}(s, S_N(t+h-s)\phi)\, \mathcal{L}_N \bar{X}_1^{1,N}(s, S_N(t+h-s)\phi)\, ds \Bigg) \\ &=: I_2.\end{aligned}$$

现在我们分别估计这两项 I_1 和 I_2。对于第一项 I_1，利用式（4.8）给出的 carré du champ 算子的刻画，并使用 $\bar{X}^{1,N}_1$ 的定义（4.4），可得

$$\begin{aligned}I_1 &= \mathbb{E} \int_0^t N^2 \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{z \in \mathbb{T}_N^d} \eta_s(x)(1 - \eta_s(x+z))\, p(z) \\ &\quad \cdot \left[\bar{X}_1^{1,N}(s, (S_N(t+h-s) - S_N(t-s))\phi)(\eta^{x,x+z}) - \bar{X}_1^{1,N}(s, (S_N(t+h-s) - S_N(t-s))\phi) \right]^2 ds \\ &= \mathbb{E} \int_0^t N^{2-d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{z \in \mathbb{T}_N^d} \eta_s(x)(1 - \eta_s(x+z))\, p(z) \\ &\quad \cdot \left[\sum_{y \in \mathbb{T}_N^d} \left(\eta_s^{x,x+z}(y) - \eta_s(y) - \mathbb{E}(\eta_s^{x,x+z}(y) - \eta_s(y)) \right) \left((S_N(t+h-s) - S_N(t-s))\phi \right)(y) \right]^2 ds.\end{aligned}$$

类似地，对于第二项 I_2，我们有

$$I_2 = \mathbb{E}\int_t^{t+h} N^{2-d}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\sum_{z\in\mathbb{T}_N^d}\eta_s(x)(1-\eta_s(x+z))\,p(z)$$
$$\cdot\left[\sum_{y\in\mathbb{T}_N^d}\left(\eta_s^{x,x+z}(y)-\eta_s(y)-\mathbb{E}(\eta_s^{x,x+z}(y)-\eta_s(y))\right)(S_N(t+h-s)\phi)(y)\right]^2 ds.$$

关于项 I_1，我们分析粒子交换下构型差的结构。根据定义，对于任意满足 $\eta_s(x)=1$ 且 $\eta_s(x+z)=0$ 的 $x,\ z\in\mathbb{T}_N^d$，有

$$\eta_s^{x,x+z}(y)-\eta_s(y)=\begin{cases}-1 & \text{if } y=x,\\ 1 & \text{if } y=x+z,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{4.14}$$

类似地，可得

$$\mathbb{E}(\eta_s^{x,x+z}(y)-\eta_s(y))=\begin{cases}-\mathbb{P}(\eta_s(x)=1,\ \eta_s(x+z)=0) & \text{if } y=x,\\ \mathbb{P}(\eta_s(x)=1,\ \eta_s(x+z)=0) & \text{if } y=x+z,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{4.15}$$

这一观察表明，差值 $\eta^{x,}{}_s{}^{x+z}(y)-\eta_s(y)$ 仅在位置 x 和 $x+z$ 上非零，因此， I_1 的表达式中的内层求和可予以简化。因此，我们得到

$$I_1=\mathbb{E}\int_0^t N^{2-d}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\sum_{z\in\mathbb{T}_N^d}\eta_s(x)(1-\eta_s(x+z))\,p(z)\Big[(1-\mathbb{P}(\eta_s(x)=1,\ \eta_s(x+z)=0))$$
$$\cdot\left((S_N(t+h-s)-S_N(t-s))\phi\right)(x+z)-\left((S_N(t+h-s)-S_N(t-s))\phi\right)(x)\Big]^2 ds.$$

应用拉格朗日中值定理，并利用 ϕ的光滑性，再结合离散半群 2.5 的定义（ S_N（t）以及卷积的杨不等式，可得

$$I_1\leqslant\mathbb{E}\int_0^t N^{2-d}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\sum_{z\in\mathbb{T}_N^d}\eta_s(x)\,(1-\eta_s(x+z))\,p(z)\,\|(S_N(t+h-s)-S_N(t-s))\nabla\phi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}^2\,|z|^2\,ds.$$

借助 $S_N(t)$ 的定义，对每个 $\xi\in\mathbb{T}^d$,

$$|(S_N(t+h-s)\nabla\phi)(\xi)-(S_N(t-s)\nabla\phi)(\xi)|=\left|\int_{t-s}^{t+h-s}S_N(r)\frac{1}{2}\Delta_N\nabla\phi(\xi)dr\right|$$
$$\lesssim\int_{t-s}^{t+h-s}\|S_N(r)\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{T}^d),L^\infty(\mathbb{T}^d))}\cdot\|\Delta_N\nabla\phi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}dr,$$

其中，$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{T}^d)\ L^\infty(\mathbb{T}^d))}$ 表示从 $L^\infty(\mathbb{T}^d)$ 到 $L^\infty(\mathbb{T}^d)$ 的算子范数。注意到，根据 $S_N(t)$ 的定义和离散卷积杨不等式，我们可以推得

$$\|S_N(r)\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{T}^d),L^\infty(\mathbb{T}^d))}\lesssim 1,\ \text{for every } r\in[0,T].$$

结合 $|z|=\frac{1}{N}$ 这一事实，我们得到 —

$$I_1\leqslant\mathbb{E}\int_0^t N^{2-d}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\sum_{z\in\mathbb{T}_N^d}\eta_s(x)\,(1-\eta_s(x+z))\,p(z)\cdot\frac{1}{N^2}h^2\|\Delta_N\nabla\phi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}^2\,ds.$$

利用函数 p 的性质、 η 的有界性、离散环面的有限性以及核 G_N 的连续性，我们推得

$$I_1 \leqslant \left(\int_0^t N^{-d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} 1 \, ds \right) C(\phi) h^2 \leqslant C(\phi, T) h^2.$$

关于项 I_2，我们应用构型的性质（4.14）和（4.15）得到

$$\begin{aligned} I_2 \lesssim & \mathbb{E} \int_t^{t+h} N^{2-d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{z \in \mathbb{T}_N^d} \eta_s(x)(1-\eta_s(x+z))p(z) \\ & \cdot \Big[(S_N(t+h-s)\phi)(x+z) - (S_N(t+h-s)\phi)(x) \Big]^2 ds. \end{aligned}$$

为便于估计 I_2，我们将其分解为四项并逐一分析。通过展开被积函数，我们得到:

$$\begin{aligned} I_2 \lesssim & \int_t^{t+h} N^{2-d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{z \in \mathbb{T}_N^d} \mathbb{E}\big(\eta_s(x)(1-\eta_s(x+z))\big) p(z) \\ & \cdot \Big[(S_N(t+h-s)\phi)(x+z) - \phi(x+z) - (S_N(t+h-s)\phi)(x) + \phi(x) + \phi(x+z) - \phi(x) \Big]^2 ds \\ =: & N^{2-d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{z \in \mathbb{T}_N^d} \bar{\rho}(t,x)(1-\bar{\rho}(t,x+z))p(z)[\phi(x+z)-\phi(x)]^2 h + I_{2,1} + I_{2,2} + I_{2,3}, \end{aligned}$$

其中 $I_{2,\ 1}$，$I_{2,\ 2}$ 和 $I_{2,\ 3}$ 的定义为

$$\begin{aligned} I_{2,1} = & N^{2-d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{z \in \mathbb{T}_N^d} \bar{\rho}(t,x)(1-\bar{\rho}(t,x+z))p(z) \\ & \cdot \int_t^{t+h} \Big[(S_N(t+h-s)\phi)(x+z) - (S_N(t+h-s)\phi)(x) - (\phi(x+z)-\phi(x)) \Big]^2 ds, \\ I_{2,2} = & 2N^{2-d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{z \in \mathbb{T}_N^d} \bar{\rho}(t,x)(1-\bar{\rho}(t,x+z))p(z) \int_t^{t+h} [\phi(x+z)-\phi(x)] \\ & \cdot \Big[(S_N(t+h-s)\phi)(x+z) - (S_N(t+h-s)\phi)(x) - (\phi(x+z)-\phi(x)) \Big] ds, \\ I_{2,3} = & \int_t^{t+h} N^{2-d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{z \in \mathbb{T}_N^d} \Big[\mathbb{E}(\eta_s(x)(1-\eta_s(x+z))) - \bar{\rho}(t,x)(1-\bar{\rho}(t,x+z)) \Big] p(z) \\ & \cdot \Big[(S_N(t+h-s)\phi)(x+z) - \phi(x+z) - (S_N(t+h-s)\phi)(x) + \phi(x) + \phi(x+z) - \phi(x) \Big]^2 ds. \end{aligned}$$

现在我们估计 $I_{2,\ 1}$。根据拉格朗日中值定理，对于每个 $N \in \mathbb{N}$ 和 $x,\ z \in \mathbb{T}_N^d$，都存在点 $\xi_{x,\ z,\ N},\ \xi'_{x,\ z,\ N} \in \mathbb{T}^d$，使得:

$$\begin{aligned} I_{2,1} = & N^{2-d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{z \in \mathbb{T}_N^d} \bar{\rho}(t,x)(1-\bar{\rho}(t,x+z))p(z) \\ & \cdot \int_t^{t+h} \big[(\nabla S_N(t+h-s)\phi)(\xi_{x,z,N}) \cdot z - (\nabla\phi)(\xi'_{x,z,N}) \cdot z \big]^2 ds \\ \leqslant & N^{2-d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{z \in \mathbb{T}_N^d} \bar{\rho}(t,x)(1-\bar{\rho}(t,x+z))p(z) \int_t^{t+h} \big| (\nabla S_N(t+h-s)\phi)(\xi_{x,z,N}) - (\nabla\phi)(\xi'_{x,z,N}) \big|^2 |z|^2 ds \\ \leqslant & N^{-d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{z \in \mathbb{T}_N^d} \bar{\rho}(t,x)(1-\bar{\rho}(t,x+z))p(z) \int_t^{t+h} \big| (\nabla S_N(t+h-s)\phi)(\xi_{x,z,N}) - (\nabla\phi)(\xi'_{x,z,N}) \big|^2 ds. \end{aligned}$$

现在我们将差拆分为两项并分别进行估计：

$$I_{2,1} \lesssim N^{-d} \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_N^d} \bar\rho(t,x)(1-\bar\rho(t,x+z))p(z) \int_t^{t+h} |(\nabla S_N(t+h-s)\phi)(\xi_{x,z,N}) - (\nabla\phi)(\xi_{x,z,N})|^2\, ds$$
$$+ N^{-d} \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_N^d} \bar\rho(t,x)(1-\bar\rho(t,x+z))p(z) \int_t^{t+h} \left|(\nabla\phi)(\xi_{x,z,N}) - (\nabla\phi)(\xi'_{x,z,N})\right|^2 ds.$$

对于第一项，借助 $S_N(t)$ 的定义，对每个 $\xi\in\mathbb{T}^d$，

$$|(\nabla S_N(t+h-s)\phi)(\xi) - (\nabla\phi)(\xi)| = \left|\int_0^{t+h-s} S_N(r)\frac{1}{2}\Delta_N\nabla\phi(\xi)dr\right|$$
$$\lesssim \int_0^{t+h-s} \|S_N(r)\|_{\mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{T}^d),L^\infty(\mathbb{T}^d))}\cdot\|\Delta_N\nabla\phi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}dr.$$

这意味着，对每个 $\xi\in\mathbb{T}$，$|(\nabla S_N(t+h-s)\phi)(\xi) - (\nabla\phi)(\xi)| \lesssim (t+h-s)C(\phi)$ ^{d}.

对于第二项，我们利用 $\nabla\phi$ 的正则性以及估计：

$$|(\nabla\phi)(\xi) - (\nabla\phi)(\xi')| \lesssim \|\phi\|_{C^2(\mathbb{T}^d)}|\xi-\xi'|.$$

结合所有估计，我们得到：

$$I_{2,1} \lesssim N^{-d} \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_N^d} \bar\rho(t,x)(1-\bar\rho(t,x+z))p(z) \int_t^{t+h} (t+h-s)^2 C(\phi)ds$$
$$+ N^{-d} \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_N^d} \bar\rho(t,x)(1-\bar\rho(t,x+z))p(z) \int_t^{t+h} \|\phi\|^2_{C^2(\mathbb{T}^d)}|\xi_{x,z,N} - \xi'_{x,z,N}|^2 ds$$
$$\leqslant C(\bar\rho,\phi)h^3 + C(\bar\rho,\phi)hN^{-2}.$$

对 $I_{2,\ 2}$ 应用类似的论证，我们得出估计：

$$I_{2,2} \leqslant C(\bar\rho,\phi)h^2N^{-1} + C(\bar\rho,\phi)hN^{-2}.$$

为了估计项 $I_{2,\ 3}$，我们根据微观关联与其流体动力学近似之间的差异，以及后者的时间涨落，将其分解为两部分。具体而言，我们写作：

$$I_{2,3} = \int_t^{t+h} N^{2-d} \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_N^d} \big[\mathbb{E}(\eta_s(x)(1-\eta_s(x+z))) - \bar\rho(s,x)(1-\bar\rho(s,x+z))\big]p(z)$$
$$\cdot \Big[(S_N(t+h-s)\phi)(x+z) - \phi(x+z) - (S_N(t+h-s)\phi)(x) + \phi(x) + \phi(x+z) - \phi(x)\Big]^2 ds$$
$$+ \int_t^{t+h} N^{2-d} \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_N^d} \big[\bar\rho(s,x)(1-\bar\rho(s,x+z)) - \bar\rho(t,x)(1-\bar\rho(t,x+z))\big]p(z)$$
$$\cdot \Big[(S_N(t+h-s)\phi)(x+z) - \phi(x+z) - (S_N(t+h-s)\phi)(x) + \phi(x) + \phi(x+z) - \phi(x)\Big]^2 ds.$$

为控制第一项，我们使用替换引理 4.5，它使我们能够将局部乘积 $\mathbb{E}(\eta_s(x)(1-\eta_s(x+z)))$ 近似为 $\bar\rho(s,x)(1-\bar\rho(s,\ x+z))$，误差上界为

$$N^{-2} + N^{-2}I_{\{d=1\}} + \frac{\log(1+N^2)}{1+N^2}I_{\{d=2\}} + \frac{1}{1+N^2}I_{\{d\geqslant 3\}} \lesssim N^{-1}.$$

额外的因子 h 来自时间积分。对于第二项，我们利用流体动力学剖面 $\bar\rho(t,x)$ 关于时间的正则性，由此可知该差值

$$\bar\rho(s,x)(1-\bar\rho(s,x+z)) - \bar\rho(t,x)(1-\bar\rho(t,x+z))$$

关于 x 和 z 一致地为 h 阶。因此，我们得出

$$
\begin{aligned}
I_{2,3} \leqslant & \int_t^{t+h} N^{2-d} \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\sum_{z\in\mathbb{T}_N^d} N^{-1}\, p(z) \\
& \cdot \Big[(S_N(t+h-s)\phi)(x+z)-\phi(x+z)-(S_N(t+h-s)\phi)(x)+\phi(x)+\phi(x+z)-\phi(x)\Big]^2 ds \\
& + \int_t^{t+h} N^{2-d} \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\sum_{z\in\mathbb{T}_N^d} C(\rho_0) h\, p(z) \\
& \cdot \Big[(S_N(t+h-s)\phi)(x+z)-\phi(x+z)-(S_N(t+h-s)\phi)(x)+\phi(x)+\phi(x+z)-\phi(x)\Big]^2 ds.
\end{aligned}
$$

通过泰勒展开和平滑估计，对涉及 ϕ和 S_N 之差的平方项进行界定，我们得到

$$
I_{2,3} \lesssim C(\rho_0,\phi)\Big(N^{-1}+h\Big)h.
$$

为了控制初始数据的贡献，我们估计

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left\langle N^{d/2}(S_N(t+h)-S_N(t))(\pi_0^N-\mathbb{E}\pi_0^N),\phi\right\rangle^2 \\
\leqslant & \mathbb{E}\Big(N^{-d/2}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}(\eta_0(x)-\rho_0(x))[(S_N(t+h)-S_N(t))\phi](x)\Big)^2 \\
\leqslant & N^{-d}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\mathbb{E}(\eta_0(x)-\rho_0(x))^2\|(S_N(t+h)-S_N(t))\phi\|^2_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \\
\leqslant & C(\phi,\rho_0)h^2,
\end{aligned}
$$

这由半群的压缩性以及初始经验测度的方差有界这一假设得出。

最后，结合以上所有估计，我们得到

$$
\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{h}\mathbb{E}\big(\bar{X}_1^{1,N}(t+h,\phi)-\bar{X}_1^{1,N}(t,\phi)\big)^2-\langle\nabla\phi,\bar{\rho}(1-\bar{\rho})\nabla\phi\rangle\Big| & \\
\leqslant & C(\rho_0,\phi)(h^2+h+N^{-2}+N^{-1})+C(\rho_0,\phi)\Big(N^{-1}+h\Big) \\
\leqslant & C(\rho_0,\phi)\left(h+N^{-1}\right). \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

□

定理 4.8。 假设引理 *4.5* 中的假设成立。对于每个 $0<h<t<T$，我们有

$$
\Big|\frac{1}{h}\mathbb{E}(\bar{X}^{1,N}(t+h,\phi)-\bar{X}^{1,N}(t,\phi))^2-\langle\nabla\phi,\bar{\rho}(1-\bar{\rho})\nabla\phi\rangle\Big| \leqslant C(\rho_0,\phi)\left(h+hN^{d-4}+N^{-1}\right).
$$

证明。 根据 $\bar{X}^{1,\ N}$的定义，我们将其在时间区间 $[t,t+h]$ 上的增量分解为

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{h}\mathbb{E}(\bar{X}^{1,N}(t+h,\phi)-\bar{X}^{1,N}(t,\phi))^2 \\
= & \frac{1}{h}\mathbb{E}\left(\bar{X}_1^{1,N}(t+h,\phi)-\bar{X}_1^{1,N}(t,\phi)+N^{-d/2}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\left[(\rho_N-\bar{\rho})(x,t+h)-(\rho_N-\bar{\rho})(x,t)\right]\phi(x)\right)^2 \\
= & \frac{1}{h}\mathbb{E}\left(\bar{X}_1^{1,N}(t+h,\phi)-\bar{X}_1^{1,N}(t,\phi)\right)^2+N^{-d}\frac{1}{h}\left(\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\left[(\rho_N-\bar{\rho})(x,t+h)-(\rho_N-\bar{\rho})(x,t)\right]\phi(x)\right)^2,
\end{aligned}
$$

这里我们利用鞅部分 $\bar{X}^{1,\,N}_{\cdot,\,1}$ 与确定性涨落的独立性，消除了期望中的交叉项。

现在我们估计第二项。由时间变量的中值定理（拉格朗日形式），存在 $\theta \in (0,1)$，使得

$$(\rho_N - \bar{\rho})(x,t+h) - (\rho_N - \bar{\rho})(x,t) = h\,\partial_t(\rho_N - \bar{\rho})(x,t+\theta h).$$

由于 ρ_N 和 $\bar{\rho}$ 分别满足具有离散拉普拉斯算子和连续拉普拉斯算子的热方程，因此我们有

$$\partial_t(\rho_N - \bar{\rho}) = \mathcal{L}_N\rho_N - \frac{1}{2}\Delta\bar{\rho},$$

从而

$$\begin{aligned}
&N^{-d}\frac{1}{h}\left(\sum_{x\in\mathbb{T}^d_N}\left[(\rho_N-\bar{\rho})(x,t+h)-(\rho_N-\bar{\rho})(x,t)\right]\phi(x)\right)^2\\
&\leqslant N^{-d}\frac{1}{h}\left(\sum_{x\in\mathbb{T}^d_N} h\,\|\mathcal{L}_N\rho_N-\frac{1}{2}\Delta\bar{\rho}\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{T}^d_N)}\phi(x)\right)^2\\
&\leqslant h\,\|\mathcal{L}_N\rho_N-\frac{1}{2}\Delta\bar{\rho}\|^2_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{T}^d_N)}\cdot N^{-d}\left(\sum_{x\in\mathbb{T}^d_N}\phi(x)\right)^2\\
&\leqslant C(\rho_0,\phi)\,hN^d\|\mathcal{L}_N\rho_N-\frac{1}{2}\Delta\bar{\rho}\|^2_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{T}^d_N)}\leqslant C(\rho_0)hN^{d-4}.
\end{aligned}$$

现在，结合三角不等式应用命题 4.7、(4.10) 和 (4.12，可得

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h}\mathbb{E}(\bar{X}^{1,N}(t+h,\phi)-\bar{X}^{1,N}(t,\phi))^2-\langle\nabla\phi,\bar{\rho}(1-\bar{\rho})\nabla\phi\rangle\right|\\
\leqslant&\left|\frac{1}{h}\mathbb{E}(\bar{X}^{1,N}_1(t+h,\phi)-\bar{X}^{1,N}_1(t,\phi))^2-\langle\nabla\phi,\bar{\rho}(1-\bar{\rho})\nabla\phi\rangle\right|\\
&+N^{-d}\frac{1}{h}\left(\sum_{x\in\mathbb{T}^d_N}\left[(\rho_N-\bar{\rho})(x,t+h)-(\rho_N-\bar{\rho})(x,t)\right]\phi(x)\right)^2\\
\leqslant& C(\rho_0,\phi)\left(h+hN^{d-4}+N^{-1}\right),
\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

5. Fluctuating hydrodynamics with regular coefficients: error estimates

本节的主要目标是推导定量估计，以比较涨落场的二次变差与相应的迁移率矩阵。我们首先考虑以下情形$\sigma(\zeta) = \sqrt{\zeta(1-\zeta)}$，对每个 $\zeta \in [0,1]$。令 $(\sigma_n(\cdot))_{n\geqslant 1}$ 为 $\sigma(\cdot)$ 的一列近似，并满足假设 2.3。回顾 $\rho_0 \in C^\infty(\mathbb{T}^d;[0,1])$，我们研究方程 (2.10)，并回顾一下，(2.10) 可写成如下 Itô 形式：

$$d\rho_\varepsilon = \frac{1}{2}\Delta\rho_\varepsilon\,dt - \varepsilon^{1/2}\nabla\cdot\left(\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)\,dW_{\delta(\varepsilon)}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\nabla\cdot\left(\sigma'_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)^2\,\nabla\rho_\varepsilon\right)F_{1,\delta(\varepsilon)},\quad \rho_\varepsilon(0)=\rho_0. \tag{5.1}$$

为便于比较，我们还考虑由热方程给出的确定性水动力学极限，其初始剖面相同：

$$d\bar{\rho} = \frac{1}{2}\Delta\bar{\rho}\,dt,\quad \bar{\rho}(0)=\rho_0. \tag{5.2}$$

将涨落场定义为

$$\bar{\rho}_\varepsilon^1 := \varepsilon^{-1/2}(\rho_\varepsilon - \bar{\rho}),$$

它刻画了随机密度剖面 ρ_ε 与其确定性极限 $\bar{\rho}$之间的偏差。应用杜哈梅尔公式并进行直接计算，可得 $\bar{\rho}_\varepsilon^1$ 满足以下温和表示:

$$\bar{\rho}_\varepsilon^1(t) = -\int_0^t S(t-s)\nabla\cdot\left(\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)\,dW_{\delta(\varepsilon)}(s)\right) + \frac{\varepsilon^{1/2}}{2}\int_0^t S(t-s)\nabla\cdot\left(\sigma'_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)^2\nabla\rho_\varepsilon\right)F_{1,\delta(\varepsilon)}\,ds,$$

其中， $S(t)$表示由 $\frac{1}{2}\Delta$ 在 $\mathbb{T}^d$上生成的热半群。

令 $\bar{\rho}^1$ 表示极限高斯随机偏微分方程的解。它也具有如下温和形式:

$$\bar{\rho}^1(t) = -\int_0^t S(t-s)\nabla\cdot\left(\sqrt{\bar{\rho}(1-\bar{\rho})}\,dW(s)\right).$$

我们首先通过给出一个对应于大数定律结果的定量估计来展开分析。

引理 5.1。 假设初始条件 ρ_0 和正则化序列 $(\sigma_n(\cdot))^{n\geqslant 1}$ 分别满足假设 *2.1* 和 *2.3*。对于每个 $\varepsilon > 0$, 令 ρ_ε 表示满足 (5.1) 且初始条件为 ρ_0的温和解，并令 $\bar{\rho}$ 表示满足 (5.2) 且具有相同初始数据的温和解。那么，在标度条件下

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\delta(\varepsilon)^{-d-2} = 0,$$

由此可得

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left\|\rho_\varepsilon(t)-\bar{\rho}(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leqslant \varepsilon\delta(\varepsilon)^{-d-2} \longrightarrow 0 \quad as\ \varepsilon\to 0.$$

证明。 应用 Itˆo 公式，我们观察到

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\|\rho_\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} + \mathbb{E}\int_0^T\|\nabla\rho_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}ds \leqslant& \|\rho_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} + C(\rho_0,T)\varepsilon F_{3,\delta(\varepsilon)}\\ \leqslant& \|\rho_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} + C(\rho_0,T)\varepsilon\delta(\varepsilon)^{-d-2}.\end{aligned}$$

类似地，对 $\rho_\varepsilon - \bar{\rho}$ 应用 Itˆo 公式，我们得出

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\|\rho_\varepsilon(t)-\bar{\rho}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} + \mathbb{E}\int_0^T\|\nabla(\rho_\varepsilon-\bar{\rho})\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}ds \leqslant C(\rho_0,T)\varepsilon\delta(\varepsilon)^{-d-2}.$$

□

定理 *5.2.* 设 $\sigma(\zeta) = \sqrt{\zeta(1-\zeta)}$。假设初始条件 ρ_0 满足假设 *2.1*，且正则化序列 $(\sigma_n(\cdot))^{n\geqslant 1}$ 满足假设 *2.3*，其中 $\sigma_n\to\sigma$ 属于 $C^1_{loc}((0,1))$。令 c 表示假设 *2.1* 中所述的初始数据下界。令 $\phi\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$, 并定义 $\rho_\varepsilon^\phi := \langle\rho_\varepsilon,\phi\rangle$。相应的涨落场为

$$\bar{\rho}_\varepsilon^{1,\phi} := \varepsilon^{-1/2}(\rho_\varepsilon^\phi - \bar{\rho}^\phi).$$

那么，对每个 $t > h > 0$, 以下估计成立:

$$\left|\frac{1}{h}\mathbb{E}\left(\bar{\rho}_\varepsilon^{1,\phi}(t+h)-\bar{\rho}_\varepsilon^{1,\phi}(t)\right)^2 - \langle\nabla\phi,\bar{\rho}(t)(1-\bar{\rho}(t))\nabla\phi\rangle\right| \leqslant C(\phi,\rho_0,t)\cdot\mathrm{Error}(h,\varepsilon,\delta(\varepsilon),n(\varepsilon)),$$

其中误差项由下式给出

$$\mathrm{Error}(h,\varepsilon,\delta(\varepsilon),n(\varepsilon)) = h + \varepsilon\delta(\varepsilon)^{-2d}\|\sigma'_{n(\varepsilon)}\|^4_{L^\infty([0,1])}h + \varepsilon\delta(\varepsilon)^{-d-2}.$$

证明。 我们利用杜哈梅尔公式展开差值 $\bar\rho^{1,\phi}_\varepsilon(t+h)-\bar\rho^{1,\phi}_\varepsilon(t)$。积分自然分为两部分：一部分在区间 $[0,t]$ 上，另一部分在 $[t,t+h]$ 上。经过直接计算可得以下表达式：

$$
\begin{aligned}
&\bar\rho^{1,\phi}_\varepsilon(t+h)-\bar\rho^{1,\phi}_\varepsilon(t)\\
=&-\int_0^{t+h}\Big\langle\nabla\phi, S(t+h-s)\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)\,dW_{\delta(\varepsilon)}(s)\Big\rangle+\int_0^t\Big\langle\nabla\phi, S(t-s)\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)\,dW_{\delta(\varepsilon)}(s)\Big\rangle\\
&+\frac{\varepsilon^{1/2}}{2}F_{1,\delta(\varepsilon)}\int_0^{t+h}\Big\langle\nabla\phi, S(t+h-s)\left(\sigma'_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)^2\nabla\rho_\varepsilon\right)\Big\rangle\,ds\\
&-\frac{\varepsilon^{1/2}}{2}F_{1,\delta(\varepsilon)}\int_0^{t}\Big\langle\nabla\phi, S(t-s)\left(\sigma'_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)^2\nabla\rho_\varepsilon\right)\Big\rangle\,ds\\
=&-\int_0^{t}\Big\langle S(h)\nabla\phi-\nabla\phi, S(t-s)\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)\,dW_{\delta(\varepsilon)}(s)\Big\rangle-\int_t^{t+h}\Big\langle\nabla\phi, S(t+h-s)\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)\,dW_{\delta(\varepsilon)}(s)\Big\rangle\\
&+\frac{\varepsilon^{1/2}}{2}F_{1,\delta(\varepsilon)}\int_0^{t+h}\Big\langle\nabla\phi, S(t+h-s)\left(\sigma'_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)^2\nabla\rho_\varepsilon\right)\Big\rangle\,ds\\
&-\frac{\varepsilon^{1/2}}{2}F_{1,\delta(\varepsilon)}\int_0^{t}\Big\langle\nabla\phi, S(t-s)\left(\sigma'_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)^2\nabla\rho_\varepsilon\right)\Big\rangle\,ds.
\end{aligned}
$$

取二阶矩、展开平方并应用 Itô 乘积法则后，我们观察到所有交叉协方差项均消失。利用 Itô 等距以及布朗运动的协方差结构，我们得到

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\bar\rho^{1,\phi}_\varepsilon(t+h)-\bar\rho^{1,\phi}_\varepsilon(t)\right)^2&=\mathbb{E}\int_0^t\left\|\left(S(h)\nabla\phi-\nabla\phi\right)S(t-s)\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}ds\\
&\quad+\mathbb{E}\int_t^{t+h}\left\|\nabla\phi\,S(t+h-s)\,\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}ds\\
&\quad+\frac{\varepsilon}{4}F^2_{1,\delta(\varepsilon)}\,\mathbb{E}\left(\int_0^{t+h}\Big\langle\nabla\phi, S(t+h-s)\left(\sigma'_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)^2\nabla\rho_\varepsilon\right)\Big\rangle\,ds\right.\\
&\qquad\left.-\int_0^t\Big\langle\nabla\phi, S(t-s)\left(\sigma'_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)^2\nabla\rho_\varepsilon\right)\Big\rangle\,ds\right)^2\\
&=:I_1(h,\varepsilon)+I_2(h,\varepsilon)+I_3(h,\varepsilon).
\end{aligned}
$$

我们现在分别估计各项 $I_1(h,\varepsilon)$、 $I_2(h,\varepsilon)$ 与 $I_3(h,\varepsilon)$。对于第一项 $I_1(h,\varepsilon)$，应用卷积杨氏不等式可得

$$
\begin{aligned}
I_1(h,\varepsilon)&\leqslant\mathbb{E}\int_0^t\|S(h)\nabla\phi-\nabla\phi\|^2_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}\cdot\|S(t-s)\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}\,ds\\
&\leqslant C(\rho_0)\int_0^t\Big(\int_0^h\|S(r)\Delta\nabla\phi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}dr\Big)^2\cdot\|p(t-s)\|^2_{L^1(\mathbb{T}^d)}\,ds\\
&\leqslant C(\phi,\rho_0)\,h^2t,
\end{aligned}
$$

其中 $p(t-s)$ 表示 $\mathbb{T}^d$ 上的热核，而最后的不等式由热半群的光滑化性质得出。

为估计 $I_2(h,\varepsilon)$，我们通过引入一个涉及时间 t处逐点求值的中间项，将被积函数分解。具体来说，我们写作：

$$
\begin{aligned}
I_2(h,\varepsilon)=\mathbb{E}\int_t^{t+h}&\left(\left\|\nabla\phi\,S(t+h-s)\,\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(s))\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}-\left\|\nabla\phi\,\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(t))\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}\right)ds\\
+\mathbb{E}\int_t^{t+h}&\left(\left\|\nabla\phi\,\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(t))\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}-\left\|\nabla\phi\,\sqrt{\bar\rho(t)(1-\bar\rho(t))}\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}\right)ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ h\|\nabla\phi\sqrt{\bar\rho(t)(1-\bar\rho(t))}\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}\\
&=: I_{2,1}(h,\varepsilon) + I_{2,2}(h,\varepsilon) + h\|\nabla\phi\sqrt{\bar\rho(t)(1-\bar\rho(t))}\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}.
\end{aligned}
$$

我们首先考虑 $I_{2,1}(h,\varepsilon)$。利用 ρ_ε 的非负性和质量守恒，并通过极化恒等式展开平方，我们得到：

$$
\begin{aligned}
I_{2,1}(h,\varepsilon) &= \mathbb{E}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\left(|\nabla\phi\, S(t+h-s)\,\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(s))|^2 - |\nabla\phi\,\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(t))|^2\right)dx\,ds\\
&= \mathbb{E}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\left(\nabla\phi\, S(t+h-s)\,\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(s)) + \nabla\phi\,\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(t))\right)\cdot\\
&\qquad\qquad\left(\nabla\phi\, S(t+h-s)\,\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(s)) - \nabla\phi\,\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(t))\right)dx\,ds\\
&\leqslant C(\phi)\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|S(t+h-s)\,\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(s)) - \sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(t))\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}ds.
\end{aligned}
$$

然后，我们将 L^1-范数中的差拆分为两项：

$$
\begin{aligned}
I_{2,1}(h,\varepsilon) &\leqslant C(\phi)\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|S(t+h-s)\,\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(s)) - S(t+h-s)\,\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(t))\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}ds\\
&\quad + C(\phi)\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|S(t+h-s)\,\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(t)) - \sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(t))\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}ds\\
&=: I_{2,1,1}(h,\varepsilon) + I_{2,1,2}(h,\varepsilon).
\end{aligned}
$$

现在，我们估计项 $I_{2,1,1}(h,\varepsilon)$。对热半群 $S(t)$应用卷积杨氏不等式，可得

$$
I_{2,1,1}(h,\varepsilon) \leqslant C(\phi)\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(s)) - \sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(t))\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}ds.
$$

利用 $\sigma_{n(\varepsilon)}$ 的 Lipschitz 连续性和三角不等式，我们将被积函数分解为微观涨落和宏观涨落：

$$
\begin{aligned}
I_{2,1,1}(h,\varepsilon) &\leqslant C(\phi)\|\sigma'_{n(\varepsilon)}\|_{L^\infty([0,1])}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|\rho_\varepsilon(s) - \bar\rho(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}ds\\
&\quad + C(\phi)\|\sigma'_{n(\varepsilon)}\|_{L^\infty([0,1])}\mathbb{E}\|\rho_\varepsilon(t) - \bar\rho(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}\,h\\
&\quad + C(\phi)\|\sigma'_{n(\varepsilon)}\|_{L^\infty([c,1-c])}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|\bar\rho(s) - \bar\rho(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}ds\\
&=: I_{2,1,1,1}(h,\varepsilon) + I_{2,1,1,2}(h,\varepsilon) + I_{2,1,1,3}(h,\varepsilon).
\end{aligned}
$$

为了估计 $I_{2,1,1,1}(h,\varepsilon)$，我们应用引理 5.1 可知

$$
I_{2,1,1,1}(h,\varepsilon) \leqslant C(\phi)\|\sigma'_{n(\varepsilon)}\|_{L^\infty([0,1])}\left(\varepsilon\delta(\varepsilon)^{-d-2}\right)h.
$$

对于 s 第二项，$I_{2,1,1,2}(h,\varepsilon)$，我们在固定时刻使用同类型的涨落估计 t:

$$
I_{2,1,1,2}(h,\varepsilon) \leqslant C(\phi)\left(\varepsilon\delta(\varepsilon)^{-d-2}\right)h.
$$

最后，对于宏观贡献 $I_{2,1,1,3}(h,\varepsilon)$，我们利用宏观密度 $\bar\rho$ 的时间正则性，该密度由热方程所支配。特别地，拉普拉斯算子的平滑效应意味着 $\bar\rho \in W^{1,\infty}([0,T];L^1(\mathbb{T}^d))$。因此，我们得到

$$
\begin{aligned}
I_{2,1,1,3}(h,\varepsilon) &\leqslant C(\phi)\|\sigma'_{n(\varepsilon)}\|_{L^\infty([c,1-c])}\|\bar\rho\|_{W^{1,\infty}([0,T];L^2(\mathbb{T}^d))}h^2\\
&\leqslant C(\phi,c)\|\bar\rho\|_{L^\infty([0,T];H^2(\mathbb{T}^d))}h^2 \leqslant C(\phi,c,\rho_0)h^2.
\end{aligned}
$$

接下来，我们估计项 $I_{2,\ 1,\ 2}(h,\ \varepsilon)$。我们有如下分解：

$$\begin{aligned} I_{2,1,2}(h,\varepsilon) \leqslant C(\phi)\mathbb{E}\int_t^{t+h} &\|S(t+h-s)\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(t)) - S(t+h-s)\sigma_{n(\varepsilon)}(\bar\rho(t))\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}ds \\ &+ C(\phi)\mathbb{E}\int_t^{t+h} \|S(t+h-s)\sigma_{n(\varepsilon)}(\bar\rho(t)) - \sigma_{n(\varepsilon)}(\bar\rho(t))\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}ds \\ &+ C(\phi)\mathbb{E}\int_t^{t+h} \|\sigma_{n(\varepsilon)}(\bar\rho(t)) - \sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(t))\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}ds. \end{aligned}$$

各项的估计如下：第一项和第三项可通过大数定律以及$\sigma_{n(\varepsilon)}$的 Lipschitz 连续性来控制。第二项则由半群 $S(t)$的强连续性来控制。综合以上结果，并应用 H¨older 不等式和引理 5.1，可得

$$\begin{aligned} I_{2,1,2}(h,\varepsilon) \leqslant& C(\phi)\mathbb{E}\int_t^{t+h} \|\sigma_{n(\varepsilon)}(\bar\rho(t)) - \sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(t))\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}ds + C(\phi)h^2 \\ \leqslant& C(\phi)\|\sigma'_{n(\varepsilon)}\|_{L^\infty([0,1])}\big(\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\|\rho_\varepsilon(t)-\bar\rho(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}\big)h + C(\phi)h^2 \\ \leqslant& C(\phi)\|\sigma'_{n(\varepsilon)}\|_{L^\infty([0,1])}\left(\varepsilon\delta(\varepsilon)^{-d-2}\right)h + C(\phi)h^2. \end{aligned}$$

现在考虑 $I_{2,\ 2}(h,\ \varepsilon)$。根据三角不等式，可写为

$$\begin{aligned} I_{2,2}(h,\varepsilon) &\leqslant C(\phi)\mathbb{E}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d} \left|\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(s))^2 - \bar\rho(t)(1-\bar\rho(t))\right| dxds \\ &\leqslant C(\phi)\mathbb{E}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d} \left|\sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(s))^2 - \sigma_{n(\varepsilon)}(\bar\rho(s))^2\right| dxds \\ &\quad + \int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d} \left|\sigma_{n(\varepsilon)}(\bar\rho(s))^2 - \sigma_{n(\varepsilon)}(\bar\rho(t))^2\right| dxds \\ &\quad + h\int_{\mathbb{T}^d} \left|\sigma_{n(\varepsilon)}(\bar\rho(t))^2 - \bar\rho(t)(1-\bar\rho(t))\right| dx \\ &=: I_{2,2,1}(h,\varepsilon) + I_{2,2,2}(h,\varepsilon) + I_{2,2,3}(h,\varepsilon). \end{aligned}$$

对于 $I_{2,\ 2,\ 1}(h,\ \varepsilon)$，我们对 $\sigma^2_{n(\varepsilon)}$ 应用 Lipschitz 界，并使用涨落估计 e:

$$\begin{aligned} I_{2,2,1}(h,\varepsilon) &\leqslant C(\phi)\|\sigma_{n(\varepsilon)}\sigma'_{n(\varepsilon)}\|_{L^\infty([0,1])}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|\rho_\varepsilon(s)-\bar\rho(s)\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}ds \\ &\leqslant C(\phi)\|\sigma_{n(\varepsilon)}\sigma'_{n(\varepsilon)}\|_{L^\infty([0,1])}\left(\sup_{s\in[0,T]}\mathbb{E}\|\rho_\varepsilon(s)-\bar\rho(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}\right)^{1/2}h \\ &\leqslant C(\phi)\left(\varepsilon\delta(\varepsilon)^{-d-2}\right)h. \end{aligned}$$

对于 $I_{2,\ 2,\ 2}(h,\ \varepsilon)$，我们利用宏观剖面 $\bar\rho$的时间正则性：

$$\begin{aligned} I_{2,2,2}(h,\varepsilon) &\leqslant C(\phi)\|\sigma_{n(\varepsilon)}\sigma'_{n(\varepsilon)}\|_{L^\infty([c,1-c])}\|\bar\rho\|_{W^{1,\infty}([0,T];L^1(\mathbb{T}^d))}h^2 \\ &\leqslant C(\phi,c)\|\bar\rho\|_{L^\infty([0,T];W^{2,1}(\mathbb{T}^d))}h^2 \leqslant C(\phi,c,\rho_0)h^2. \end{aligned}$$

最后，对于 $I_{2,\ 2,\ 3}(h,\ \varepsilon)$，逼近序列 $\sigma^2_{n(\varepsilon)} \to \zeta(1-\zeta)$的收敛性意味着

$$I_{2,2,3}(h,\varepsilon) \leqslant C(\phi)h\sup_{\zeta\in[c,1-c]}\left|\sigma_{n(\varepsilon)}(\zeta)^2 - \zeta(1-\zeta)\right|.$$

我们注意到，平滑化噪声系数 $\sigma_{n(\varepsilon)}(\cdot)$ 的选取满足：当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，

$$\sigma_{n(\varepsilon)}(\zeta) = \sqrt{\zeta(1-\zeta)} \quad \text{for all } \zeta \in [c, 1-c],$$

那么，当 ε 足够小时，近似误差满足

$$\sup_{\zeta\in[c,1-c]}\left|\sigma_{n(\varepsilon)}(\zeta)^2-\zeta(1-\zeta)\right|=0.$$

最后，我们估计项 $I_3(h,\varepsilon)$。通过应用分部积分，我们将该表达式改写为

$$I_3(h,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{4}F_{1,\delta(\varepsilon)}^2\mathbb{E}\left(\int_0^{t+h}\langle\Delta\phi,S(t+h-s)\Sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(s))\rangle ds-\int_0^t\langle\Delta\phi,S(t-s)\Sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(s))\rangle ds\right)^2,$$

其中函数 $\Sigma_{n(\varepsilon)}\colon\ [0,1]\to\mathbb{R}$ 由下式定义

$$\Sigma_{n(\varepsilon)}(\zeta):=\int_0^\zeta\sigma'_{n(\varepsilon)}(\zeta')^2d\zeta'.$$

应用三角不等式并拆分积分之差，我们估计：

$$\begin{aligned}I_3(h,\varepsilon)\lesssim{}&\varepsilon\delta(\varepsilon)^{-2d}\mathbb{E}\left(\int_0^t\langle\Delta\phi,\left(S(t+h-s)-S(t-s)\right)\Sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(s))\rangle ds\right)^2\\&+\varepsilon\delta(\varepsilon)^{-2d}\mathbb{E}\left(\int_t^{t+h}\langle\Delta\phi,S(t+h-s)\Sigma_{n(\varepsilon)}(\rho_\varepsilon(s))\rangle ds\right)^2.\end{aligned}$$

由于 $\Sigma_{n(\varepsilon)}$ 是一致利普希茨的，且热半群是强连续的，两项可类似地加以控制。利用 $\Delta\phi$ 的有界性以及 $S(t)$ 的标准光滑化性质，我们得到：

$$I_3(h,\varepsilon)\lesssim C(\phi)\varepsilon\delta(\varepsilon)^{-2d}\|\sigma'_{n(\varepsilon)}\|_{L^\infty([0,1])}^4h^2.$$

综合 $I_1(h,\varepsilon)$、$I_2(h,\varepsilon)$ 和 $I_3(h,\varepsilon)$ 的界，我们完成证明。

□

对于 Dean-Kawasaki 方程的情形，采用相同的方法即可得到恒等式结果。

定理*5.3.* 设 $\sigma(\zeta)=\sqrt{\zeta}$. 假设初始条件 ρ_0 满足假设 *2.2*，且正则化序列 $(\sigma_n(\cdot))_{n\geqslant1}$ 满足假设*2.4*，其中 $\sigma_n\to\sigma$ 属于 $C^1_{loc}((0,\infty))$。令 c表示初始数据的下界，如假设 *2.2* 中所述。令 $\phi\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$，并定义$\rho_\varepsilon^\phi:=\langle\rho_\varepsilon,\phi\rangle$。相应的涨落场为

$$\bar\rho_\varepsilon^{1,\phi}:=\varepsilon^{-1/2}(\rho_\varepsilon^\phi-\bar\rho^\phi).$$

那么，对于每个 $t>h>0$，以下估计成立：

$$\left|\frac{1}{h}\mathbb{E}\left(\bar\rho_\varepsilon^{1,\phi}(t+h)-\bar\rho_\varepsilon^{1,\phi}(t)\right)^2-\langle\nabla\phi,\bar\rho(t)\nabla\phi\rangle\right|\leqslant C(\phi,\rho_0,t)\cdot\mathrm{Error}(h,\varepsilon,\delta(\varepsilon),n(\varepsilon)),$$

其中误差项为

$$\mathrm{Error}(h,\varepsilon,\delta(\varepsilon),n(\varepsilon))=h+\varepsilon\delta(\varepsilon)^{-2d}\|\sigma'_{n(\varepsilon)}\|_{L^\infty([0,\infty))}^4h+\varepsilon\delta(\varepsilon)^{-d-2}.$$

6. Fluctuating hydrodynamics with irregular coefficients: asymptotic behaviors

在此 本节我们研究具有不规则系数的涨落水动力学随机偏微分方程：

$$d\rho_\varepsilon=\frac{1}{2}\Delta\rho_\varepsilon\,dt-\varepsilon^{1/2}\nabla\cdot(\sigma(\rho_\varepsilon)\circ dW_{\delta(\varepsilon)}).\tag{6.1}$$

作为一个具体示例，我们首先关注以下情形 $\sigma(\zeta)=\sqrt{\zeta}$。通过计算 Stratonovich 到 Itˆo 的修正项 [FG 24]，我们可以将方程改写为 Itˆo 形式：

$$d\rho_\varepsilon=\frac{1}{2}\Delta\rho_\varepsilon\,dt-\varepsilon^{1/2}\nabla\cdot(\sigma(\rho_\varepsilon)\,dW_{\delta(\varepsilon)})+\frac{\varepsilon}{2}F_{1,\delta(\varepsilon)}\nabla\cdot(\sigma'(\rho_\varepsilon)^2\nabla\rho_\varepsilon)\,dt.\tag{6.2}$$

我们首先为族 $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 建立一个大数定律结果。

引理 6.1。 设 $\sigma(\zeta)=\sqrt{\zeta}$。假设 ρ_0 满足假设 2.2。那么，在标度区间

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\delta(\varepsilon)^{-d-2}=0,$$

对每个 $\delta'>0$，都有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{P}\left(\|\rho_\varepsilon-\bar\rho\|_{L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{T}^d))}>\delta'\right)=0.$$

证明。 证明过程是对 [DFG24 的命题 3.5 和定理 3.9、3。10], 中提出的论证进行改编，其中基于 Moser 迭代技术，以依概率收敛的方式建立了涨落 SSEP 的大数定律和中心极限定理。对于更一般的系数，包括 Dean-Kawasaki 情形，读者可参阅 [GWZ26]和[CF25]。 □

令 $\chi_\varepsilon=I_{\{0<\zeta<\rho_\varepsilon\}}$ 表示与 ρ_ε相关联的动理学函数，并令 p_ε 为相应的动理学测度。

引理 6.2。 设 $\sigma(\zeta)=\sqrt{\zeta}$。假设 ρ_0 满足假设 2.2。对每个 $\varepsilon>0$，令 p_ε 为与 ρ_ε相关联的动理学测度。那么有如下估计

$$\mathbb{E}\left(h^{-1+\varepsilon'}p_\varepsilon\left([t,t+h]\times\mathbb{T}^d\times\left[\frac{h^{1-\varepsilon'}}{2},h^{1-\varepsilon'}\right]\right)\right)^2\leqslant C(\rho_0)\varepsilon F_{1,\delta(\varepsilon)},$$

对所有 $t\in[0,T]$, $\varepsilon'\in(0,1/4)$、 $\varepsilon\in(0,1)$ 和 $h\in(0,1)$。

证明。 考虑测试函数

$$\varphi_h(\zeta)=\int_0^\zeta 2h^{-1+\varepsilon'}I_{\left[\frac{h^{1-\varepsilon'}}{2},h^{1-\varepsilon'}\right]}(\zeta')\,d\zeta'.$$

这一选择将动理学公式局限在一个低密度窄带内。按照 [FG24，命题 4 中的5], 方法，我们估计

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(2h^{-1+\varepsilon'}p_\varepsilon\left([t,t+h]\times\mathbb{T}^d\times\left[\frac{h^{1-\varepsilon'}}{2},h^{1-\varepsilon'}\right]\right)\right)^2\\
&\lesssim\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{T}^d}\chi_\varepsilon\varphi_h\,dxd\zeta\Big|_{s=t}^{s=t+h}\right)^2\\
&\quad+\varepsilon^2h^{-2+2\varepsilon'}\,\mathbb{E}\left(\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}I_{\left\{\frac{h^{1-\varepsilon'}}{2}<\rho_\varepsilon<h^{1-\varepsilon'}\right\}}F_{3,\delta(\varepsilon)}\sigma(\rho_\varepsilon)^2\,dxds\right)^2\\
&\quad+\varepsilon\,\mathbb{E}\left(\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\varphi_h(\rho_\varepsilon)\nabla\cdot(\sigma(\rho_\varepsilon)\,dW_{\delta(\varepsilon)})\right)^2.
\end{aligned}$$

首　右侧的前两项由 [FG24，命题 4 控制，5], 从而得到　g

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{T}^d}\chi_\varepsilon\varphi_h\,dxd\zeta\Big|_{s=t}^{s=t+h}\right)^2+\varepsilon^2h^{-2+2\varepsilon'}\,\mathbb{E}\left(\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}I_{\left\{\frac{h^{1-\varepsilon'}}{2}<\rho_\varepsilon<h^{1-\varepsilon'}\right\}}F_3\sigma(\rho_\varepsilon)^2\,dxds\right)^2\leqslant C.$$

为了估计随机积分，我们应用 Itˆo 等距公式。注意， $\varphi_h(\rho_\varepsilon)$ 的导数为

$$\varphi_h'(\rho_\varepsilon)=2h^{-1+\varepsilon'}I_{\left[\frac{h^{1-\varepsilon'}}{2},h^{1-\varepsilon'}\right]}(\rho_\varepsilon),$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\,\mathbb{E}\left(\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\varphi_h(\rho_\varepsilon)\nabla\cdot(\sigma(\rho_\varepsilon)\,dW_{\delta(\varepsilon)})\right)^2\\
&\quad=\varepsilon F_{1,\delta(\varepsilon)}\,\mathbb{E}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\left|\varphi_h'(\rho_\varepsilon)\nabla\rho_\varepsilon\sigma(\rho_\varepsilon)\right|^2dxds\\
&\quad\leqslant 4\varepsilon F_{1,\delta(\varepsilon)}h^{-2+2\varepsilon'}\,\mathbb{E}\int_t^{t+h}\int_{\left\{\frac{h^{1-\varepsilon'}}{2}<\rho_\varepsilon<h^{1-\varepsilon'}\right\}}|\nabla\rho_\varepsilon|^2\sigma(\rho_\varepsilon)^2\,dxds.
\end{aligned}$$

利用界 $\sigma(\zeta)=\sqrt{\zeta}$ 和不等式 $|\nabla\rho_\varepsilon|^2\leqslant 4|\nabla\sqrt{\rho_\varepsilon}|^2\rho_\varepsilon$，我们推得

$$I_{\{\frac{h^{1-\varepsilon'}}{2}<\rho_\varepsilon<h^{1-\varepsilon'}\}}|\nabla\rho_\varepsilon|^2\sigma(\rho_\varepsilon)^2\lesssim I_{\{\frac{h^{1-\varepsilon'}}{2}<\rho_\varepsilon<h^{1-\varepsilon'}\}}\rho_\varepsilon^2|\nabla\sqrt{\rho_\varepsilon}|^2\lesssim h^{2(1-\varepsilon')}|\nabla\sqrt{\rho_\varepsilon}|^2.$$

因此，

$$\varepsilon\,\mathbb{E}\left(\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\varphi_h(\rho_\varepsilon)\nabla\cdot(\sigma(\rho_\varepsilon)\,dW_{\delta(\varepsilon)})\right)^2\lesssim\varepsilon F_{1,\delta(\varepsilon)}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|\nabla\sqrt{\rho_\varepsilon}\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}\,ds\leqslant C(\rho_0)\varepsilon F_{1,\delta(\varepsilon)}.$$

综合三项的误差估计即可得到所需的界，证明完毕。 □

定理 6.3. 设 $\sigma(\zeta)=\sqrt{\zeta}$。假设 ρ_0 满足假设 2.2。设 ρ_ε 为方程 (2.16)的重整化动理学解。在标度区间

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\delta(\varepsilon)^{-d-2}=0,$$

对每个非负测试函数 $\phi\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ 以及每个 $t\in[0,T]$，以下渐近涨落恒等式成立：

$$\lim_{\varepsilon\to0}\liminf_{h\to0}\frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left(\left\langle\varepsilon^{-1/2}(\rho_\varepsilon-\bar\rho)(t+h)-\varepsilon^{-1/2}(\rho_\varepsilon-\bar\rho)(t),\phi\right\rangle\right)^2=\langle\sigma(\bar\rho(t))^2\nabla\phi,\nabla\phi\rangle.$$

证明。 我们首先估计中心化并重新缩放的过程的涨落。注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left(\left\langle\varepsilon^{-1/2}(\rho_\varepsilon-\bar\rho)(t+h)-\varepsilon^{-1/2}(\rho_\varepsilon-\bar\rho)(t),\phi\right\rangle\right)^2\\
\leqslant&\frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left(\left\langle\varepsilon^{-1/2}\rho_\varepsilon(t+h)-\varepsilon^{-1/2}\rho_\varepsilon(t),\phi\right\rangle\right)^2+\frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left(\left\langle\varepsilon^{-1/2}\bar\rho(t+h)-\varepsilon^{-1/2}\bar\rho(t),\phi\right\rangle\right)^2\\
&+\frac{2}{h}\mathbb{E}\left(\left\langle\varepsilon^{-1/2}\rho_\varepsilon(t+h)-\varepsilon^{-1/2}\rho_\varepsilon(t),\phi\right\rangle\left\langle\varepsilon^{-1/2}\bar\rho(t+h)-\varepsilon^{-1/2}\bar\rho(t),\phi\right\rangle\right)\\
\leqslant&\frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left(\left\langle\varepsilon^{-1/2}\rho_\varepsilon(t+h)-\varepsilon^{-1/2}\rho_\varepsilon(t),\phi\right\rangle\right)^2+C(\rho_0)\varepsilon^{-1}(h+h^{1/2}),
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由 $\bar\rho$ 关于时间的光滑性以及ρ_ε的质量守恒得出。

接下来，固定 $\beta\in(0,\ 1/2)$（稍后指定），并令 η_β 为一个光滑的截断函数，使得$\eta_\beta(\zeta)=1$ 对于 $\zeta\geqslant\beta$，$\eta_\beta(\zeta)=0$ 对于 $\zeta\leqslant\beta/2$，且满足导数界 $\eta_\beta'\lesssim\beta^{-1}I_{[\frac{\beta}{2},\beta]}$。令$\chi_\varepsilon=I_{\{0<\zeta<\rho_\varepsilon\}}$ 表示动理学函数。于是我们分解为

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-1/2}\left\langle\rho_\varepsilon(t+h)-\rho_\varepsilon(t),\phi\right\rangle\\
=&\varepsilon^{-1/2}\left\langle\chi_\varepsilon(t+h)-\chi_\varepsilon(t),\eta_\beta\phi\right\rangle_{L^2(\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}_+)}+\varepsilon^{-1/2}\left\langle\chi_\varepsilon(t+h)-\chi_\varepsilon(t),(1-\eta_\beta)\phi\right\rangle_{L^2(\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}_+)}.
\end{aligned}\tag{6.3}$$

我们估计满足 $\rho_\varepsilon\leqslant\beta$ 的区域所产生的贡献。注意，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left(\varepsilon^{-1/2}\left\langle\chi_\varepsilon(t+h)-\chi_\varepsilon(t),(1-\eta_\beta)\phi\right\rangle_{L^2(\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}_+)}\right)^2&\leqslant\frac{1}{h}\varepsilon^{-1}\,\mathbb{E}\left(\langle\rho_\varepsilon(t+h)\wedge\beta-\rho_\varepsilon(t)\wedge\beta,\phi\rangle\right)^2\\
&\leqslant C(\phi)\varepsilon^{-1}\beta^2h^{-1}.
\end{aligned}$$

现在，我们将动理学公式应用于正则部分。利用动理学方程，可得

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{-1/2}\left\langle \chi_\varepsilon(t+h)-\chi_\varepsilon(t),\eta_\beta\phi\right\rangle_{L^2(\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}_+)}\\
&=-\varepsilon^{-1/2}\frac{1}{2}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\nabla\phi\,\eta_\beta(\rho_\varepsilon)\nabla\rho_\varepsilon\,dxds-\varepsilon^{-1/2}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}_+}\phi\,\eta_\beta'\,dp_\varepsilon\\
&\quad+\frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\phi\,\eta_\beta'(\rho_\varepsilon)\,\sigma(\rho_\varepsilon)^2F_{3,\delta(\varepsilon)}\,dxds\\
&\quad-\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\phi\,\eta_\beta(\rho_\varepsilon)\,\nabla\cdot(\sigma(\rho_\varepsilon)\,dW_{\delta(\varepsilon)}(s))\,dx\\
&\quad-\frac{\varepsilon^{1/2}}{2}F_{1,\delta(\varepsilon)}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\nabla\phi\,\eta_\beta(\rho_\varepsilon)\cdot\sigma'(\rho_\varepsilon)^2\nabla\rho_\varepsilon\,dxds\\
&=:I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.
\end{aligned}
$$

现在将分别估计 I_1 至 I_5 中的每一项。

对 I_1的估计。 通过分部积分，我们写出：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h}\,\mathbb{E}I_1^2&=\frac{1}{h}\,\varepsilon^{-1}\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{2}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\nabla\cdot(\nabla\phi\,\eta_\beta(\rho_\varepsilon))\,\rho_\varepsilon\,dxds\right)^2\\
&=\frac{1}{h}\,\varepsilon^{-1}\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{2}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\left[\Delta\phi\,\eta_\beta(\rho_\varepsilon)+\nabla\phi\,\eta_\beta'(\rho_\varepsilon)\,\nabla\rho_\varepsilon\right]\rho_\varepsilon\,dxds\right)^2.
\end{aligned}
$$

我们将所得表达式拆分为光滑项和包含 η_β'的项：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h}\,\mathbb{E}I_1^2&\lesssim C(\phi)\|\rho_0\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}^2h\varepsilon^{-1}\\
&\quad+C(\phi)\frac{1}{h}\varepsilon^{-1}\,\mathbb{E}\left(\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\nabla\phi\,\eta_\beta'(\rho_\varepsilon)\,2\sqrt{\rho_\varepsilon}\,\nabla\sqrt{\rho_\varepsilon}\,dxds\right)^2.
\end{aligned}
$$

对 last 项，我们利用 $\eta_\beta'\lesssim\beta^{-1}$ 和 $\sqrt{\rho_\varepsilon}\leqslant\sqrt{\beta}$ 位于$\overline{\eta_\beta'}$的支集这一事实，得到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h}\,\mathbb{E}I_1^2&\lesssim C(\phi,\rho_0)h\varepsilon^{-1}+C(\phi)\frac{1}{h}\varepsilon^{-1}\beta\,\mathbb{E}\left(\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}|\nabla\sqrt{\rho_\varepsilon}|\,dxds\right)^2\\
&\lesssim C(\phi,\rho_0)h\varepsilon^{-1}+C(\phi,\rho_0)\varepsilon^{-1}\beta.
\end{aligned}
$$

对 I_2的估计。 对于涉及动理学测度的项，我们应用引理 6.2。固定 $\varepsilon'\in(0,1/4)$，并选择 $\beta=\beta(h)=h^{1-\varepsilon'}$。于是：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h}\,\mathbb{E}I_2^2&\leqslant-\varepsilon^{-1/2}\frac{1}{h}\mathbb{E}\Big(\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\phi\frac{1}{\beta}I_{\{[\beta/2,\beta]\}}(\rho_\varepsilon)2|\nabla\sqrt{\rho_\varepsilon}|^2\rho_\varepsilon dxds\Big)^2\\
&\leqslant-\varepsilon^{-1/2}\frac{1}{h}\Big(\mathbb{E}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\phi\frac{1}{\beta}I_{\{[\beta/2,\beta]\}}(\rho_\varepsilon)2|\nabla\sqrt{\rho_\varepsilon}|^2\rho_\varepsilon dxds\Big)^2\\
&\leqslant C(\phi)\varepsilon^{-1}\Big(\frac{1}{h^{1/2}}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\int_{[h^{1-\varepsilon'}/2,h^{1-\varepsilon'}]}|\nabla\sqrt{\rho_\varepsilon}|^2dm_\varepsilon\Big)^2,
\end{aligned}
$$

其中 $dm_\varepsilon:=\delta_0(\rho_\varepsilon-\zeta)\,d\zeta dxds$。我们还注意到，根据分布不等式 $p_\varepsilon\geqslant\frac{1}{2}\delta_0(\rho_\varepsilon-\zeta)\,|\nabla\rho_\varepsilon|^2$ 以及引理 6.2，二阶矩 $\mathbb{E}\Big(\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\phi\frac{1}{\beta}I_{\{[\beta/2,\beta]\}}(\rho_\varepsilon)\,2|\nabla\sqrt{\rho_\varepsilon}|^2\rho_\varepsilon dxds\Big)^2$ 中 —

第一行是有限的。此外，借助 [FG23，引理 7], 我们有

$$\liminf_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}I_2^2 \leqslant C(\phi)\varepsilon^{-1}\liminf_{h\to 0}\Big(\frac{1}{h^{1/2}}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\int_{[h^{1-\varepsilon'}/2,h^{1-\varepsilon'}]}|\nabla\sqrt{\rho_\varepsilon}|^2 dm_\varepsilon\Big)^2 = 0.$$

对 I_3 的估计。对于 Itˆo 修正项，我们直接估计：

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\mathbb{E}I_3^2 &= \frac{1}{4}\varepsilon\frac{1}{h}\mathbb{E}\left(\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\phi\,\eta_\beta'(\rho_\varepsilon)\,\sigma(\rho_\varepsilon)^2 F_{3,\delta(\varepsilon)}\,dxds\right)^2\\ &\lesssim C(\phi)\varepsilon\|F_{3,\delta(\varepsilon)}\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}^2 h.\end{aligned}$$

对 I_4 的估计。我们应用 Itˆo 等距性，从而得到该恒等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\mathbb{E}I_4^2 =&\frac{1}{h}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|\eta_{\delta(\varepsilon)}*(\nabla(\phi\eta_\beta(\rho_\varepsilon))\sigma(\rho_\varepsilon))\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2\,ds\\ =&\frac{1}{h}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\Big[\|\eta_{\delta(\varepsilon)}*(\nabla(\phi\eta_\beta(\rho_\varepsilon))\sigma(\rho_\varepsilon))-\eta_{\delta(\varepsilon)}*(\nabla(\phi\eta_\beta(\bar\rho))\sigma(\bar\rho))\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2\Big]ds\\ &+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\Big[\|\eta_{\delta(\varepsilon)}*(\nabla(\phi\eta_\beta(\bar\rho))\sigma(\bar\rho))-\nabla(\phi\eta_\beta(\bar\rho))\sigma(\bar\rho)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2\Big]ds\\ &+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\Big[\|\nabla(\phi\eta_\beta(\bar\rho))\sigma(\bar\rho)-\nabla\phi\sigma(\bar\rho)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2\Big]ds\\ &+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|\nabla\phi\sigma(\bar\rho)-\nabla\phi\sigma(\bar\rho(t))\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 ds+\|\nabla\phi\sigma(\bar\rho(t))\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2+\text{correlated terms}\\ =:&I_{4,1}+I_{4,2}+I_{4,3}+I_{4,4}+C(\phi,\bar\rho)(I_{4,1}^{1/2}+I_{4,2}^{1/2}+I_{4,3}^{1/2}+I_{4,4}^{1/2})+\|\nabla\phi\sigma(\bar\rho(t))\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2.\end{aligned}$$

在此，我们用“相关项”表示二次展开中的非二次项，精确地说，即 $(a_1+\ldots+a_n)^2 = a_1^2+\ldots+a_n^2+$ 相关项。这些项与 $I_{4,1}+I_{4,2}+I_{4,3}+I_{4,4}$ 相比会产生更低阶的项，因此我们不给出它们的精确表达式，而着重估计 $I_{4,1}+I_{4,2}+I_{4,3}+I_{4,4}$。

我们逐项进行估计。对于$I_{4,1}$，利用 Young 卷积不等式，我们得到

$$\begin{aligned}I_{4,1}\lesssim&\frac{1}{h}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|\eta_\delta*\big(\nabla(\phi\eta_\beta(\rho_\varepsilon))\sigma(\rho_\varepsilon)-\nabla(\phi\eta_\beta(\bar\rho))\sigma(\bar\rho)\big)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 ds\\ \leqslant&\frac{1}{h}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|\nabla(\phi\eta_\beta(\rho_\varepsilon))\sigma(\rho_\varepsilon)-\nabla(\phi\eta_\beta(\bar\rho))\sigma(\bar\rho)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 ds\\ \leqslant&C(\phi)\frac{1}{h}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|\eta_\beta(\rho_\varepsilon)\sigma(\rho_\varepsilon)-\eta_\beta(\bar\rho)\sigma(\bar\rho)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 ds\\ &+C(\phi)\frac{1}{h}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|\eta_\beta'(\rho_\varepsilon)\nabla\rho_\varepsilon\sigma(\rho_\varepsilon)-\eta_\beta'(\bar\rho)\nabla\bar\rho\sigma(\bar\rho)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 ds\\ =:&I_{4,1,1}+I_{4,1,2}.\end{aligned}$$

为了界定 $I_{4,1,1}$，我们应用三角不等式：

$$\begin{aligned}I_{4,1,1}\leqslant&C(\phi)\frac{1}{h}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|I_{\{[\beta/2,\beta]\}}(\rho_\varepsilon)\sigma(\rho_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 ds+C(\phi)\frac{1}{h}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|\sigma(\rho_\varepsilon)-\sigma(\bar\rho)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 ds\\ &+C(\phi)\frac{1}{h}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|I_{\{[\beta/2,\beta]\}}(\bar\rho)\sigma(\bar\rho)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 ds\\ \leqslant&C(\phi)\beta+C(\phi)\frac{1}{h}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|\rho_\varepsilon-\bar\rho\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}ds.\end{aligned}$$

根据引理 6.1，对于每个 $\delta'>0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|\rho_\varepsilon-\bar\rho\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}ds\leqslant&\int_{\{\|\rho_\varepsilon-\bar\rho\|_{L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{T}^d))}>\delta'\}}\|\rho_\varepsilon-\bar\rho\|_{L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{T}^d))}d\mathbb{P}\\&+\int_{\{\|\rho_\varepsilon-\bar\rho\|_{L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{T}^d))}\leqslant\delta'\}}\|\rho_\varepsilon-\bar\rho\|_{L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{T}^d))}d\mathbb{P}\\\leqslant&2\|\rho_0\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}\mathbb{P}\left(\|\rho_\varepsilon-\bar\rho\|_{L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{T}^d))}>\delta'\right)+\delta'\to\delta',\end{aligned}$$

如 $\varepsilon\to0$。因此,

$$\lim_{\varepsilon\to0}\liminf_{h\to0}\frac{1}{h}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\|\rho_\varepsilon-\bar\rho\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}ds=0.$$

对于 $I_{4,\,1,\,2}$，根据 η'_β 的结构以及 ρ_ε 和 $\bar\rho$ 的正则性，我们推得

$$I_{4,1,2}\leqslant C(\phi)\frac{1}{h}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\left\|I_{\{[\beta/2,\beta]\}}(\rho_\varepsilon)\nabla\sqrt{\rho_\varepsilon}\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}ds+C(\phi)\frac{1}{h}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\left\|I_{\{[\beta/2,\beta]\}}(\bar\rho)\nabla\sqrt{\bar\rho}\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}ds.$$

利用 $\beta=h^{1-\varepsilon'}$ 的选取，并同样根据 [FG23 的引理 7], ，我们得到

$$\begin{aligned}\liminf_{h\to0}\Big[C(\phi)\frac{1}{h}\mathbb{E}\int_t^{t+h}&\left\|I_{\{[h^{1-\varepsilon'}/2,h^{1-\varepsilon'}]\}}(\rho_\varepsilon)\nabla\sqrt{\rho_\varepsilon}\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}ds\\&+C(\phi)\frac{1}{h}\mathbb{E}\int_t^{t+h}\left\|I_{\{[h^{1-\varepsilon'}/2,h^{1-\varepsilon'}]\}}(\bar\rho)\nabla\sqrt{\bar\rho}\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}ds\Big]=0.\end{aligned}$$

对于 $I_{4,\,2}$，利用链式法则，我们注意到

$$\begin{aligned}\nabla[\nabla(\phi\eta_\beta(\bar\rho))\sigma(\bar\rho)]=&\nabla[\nabla\phi\,\eta_\beta(\bar\rho)\,\sigma(\bar\rho)+\phi\,\eta'_\beta(\bar\rho)\,\nabla\bar\rho\,\sigma(\bar\rho)]\\\leqslant&\nabla^{\otimes2}\phi\,\eta_\beta(\bar\rho)\,\sigma(\bar\rho)+\nabla\phi\,\eta'_\beta(\bar\rho)\otimes\nabla\bar\rho\,\sigma(\bar\rho)+\nabla\phi\,\eta_\beta(\bar\rho)\otimes\nabla\sigma(\bar\rho)\\&+\nabla\phi\,\eta'_\beta(\bar\rho)\otimes\nabla\bar\rho\,\sigma(\bar\rho)+\phi\,\eta''_\beta(\bar\rho)\,\nabla\bar\rho\otimes\nabla\bar\rho\,\sigma(\bar\rho)+\phi\,\eta'_\beta(\bar\rho)\,\nabla[\nabla\bar\rho\sigma(\bar\rho)].\end{aligned}$$

在假设 $\rho_0\geqslant c>0$ 和 ρ_0 光滑的条件下，上述量属于 $L^\infty([0,T];\,L^\infty(\mathbb{T}^d))$。因此,

$$\begin{aligned}I_{4,2}\leqslant&\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{T}^d}\left|\int_{\mathbb{T}^d}\left|\delta(\varepsilon)^{-d}\eta\left(\frac{x-y}{\delta(\varepsilon)}\right)\nabla(\phi\,\eta_\beta(\bar\rho))\,\sigma(\bar\rho)(x)-\nabla(\phi\,\eta_\beta(\bar\rho))\,\sigma(\bar\rho)(y)\right|dy\right|^2dx\\\lesssim&\|\nabla[\nabla(\phi\,\eta_\beta(\bar\rho))\,\sigma(\bar\rho)]\|^2_{L^\infty([0,T];L^\infty(\mathbb{T}^d))}\int_{\mathbb{T}^d}\left|\int_{\mathbb{T}^d}\eta_{\delta(\varepsilon)}(x-y)\,|x-y|\,dy\right|^2dx\\\leqslant&C(\rho_0)\,\delta(\varepsilon)^2.\end{aligned}$$

对于 $I_{4,3}$，采用选择 $\beta=h^{1-\varepsilon'}$，显然有

$$\lim_{h\to0}I_{4,3}=0.$$

对于 $I_{4,4}$，由函数 $t\mapsto\int_0^t\|\nabla\phi\,\sigma(\bar\rho(s))\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}ds$ 的可微性可得

$$\lim_{h\to0}I_{4,4}=0.$$

对 I_5 的估计。通过分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}I_5=&-\frac{\varepsilon^{1/2}}{2}F_{1,\delta(\varepsilon)}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\nabla\phi\,\eta_\beta(\rho_\varepsilon)\cdot\sigma'(\rho_\varepsilon)^2\,\nabla\rho_\varepsilon\,dx\,ds\\=&\frac{\varepsilon^{1/2}}{2}F_{1,\delta(\varepsilon)}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\nabla\cdot(\nabla\phi\,\eta_\beta(\rho_\varepsilon))\left(\int_0^{\rho_\varepsilon}\sigma'(\zeta)^2\,d\zeta\right)dx\,ds.\end{aligned}$$

因此，利用 η_β 的紧支集以及性质 $\sigma'(\zeta)\lesssim\zeta^{-1/2}$，我们推得

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\mathbb{E}(I_5)^2\lesssim&\frac{1}{h}\mathbb{E}\left(\frac{\varepsilon^{1/2}}{2}F_{1,\delta(\varepsilon)}\int_t^{t+h}\int_{\mathbb{T}^d}\nabla\cdot(\nabla\phi\,\eta_\beta(\rho_\varepsilon))\left(\int_{\beta/2}^{\rho_\varepsilon}\sigma'(\zeta)^2\,d\zeta\right)dx\,ds\right)^2\\ \lesssim_\varepsilon& F_{1,\delta(\varepsilon)}^2\,C(\phi)\left[h\beta^{-1/2}(\log\beta-\log\frac{\beta}{2})\mathbb{E}\|\nabla\sqrt{\rho_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2\right]\\ \leqslant_\varepsilon& F_{1,\delta(\varepsilon)}^2\,C(\phi,\rho_0)\left[h\beta^{-1/2}(\log\beta-\log\frac{\beta}{2})\right].\end{aligned}$$

采用选择 $\beta=\beta(h)=h^{1-\varepsilon'}$，我们看到两者

$$h\beta(h)^{-1/2}\Big(\log\beta(h)-\log\frac{\beta(h)}{2}\Big)\to0\quad\text{and}\quad\beta(h)^2h^{-1}\to0,\quad\text{as }h\to0.$$

回到（6.3），我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{h\to0}\frac{1}{h}\mathbb{E}\Big(\varepsilon^{-1/2}\langle\rho_\varepsilon(t+h)-\rho_\varepsilon(t),\phi\rangle\Big)^2\\ \leqslant&\limsup_{\varepsilon\to0}\Big(C(\rho_0)\varepsilon F_{1,\delta(\varepsilon)}+C(\rho_0)\delta(\varepsilon)^2\Big)+\langle\sigma(\bar\rho(t))^2\nabla\phi,\nabla\phi\rangle\\ =&\langle\sigma(\bar\rho(t))^2\nabla\phi,\nabla\phi\rangle.\end{aligned}$$

因此，我们得出

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{h\to0}\left|\frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left(\left\langle\varepsilon^{-1/2}(\rho_\varepsilon-\bar\rho)(t+h)-\varepsilon^{-1/2}(\rho_\varepsilon-\bar\rho)(t),\phi\right\rangle\right)^2-\langle\sigma(\bar\rho(t))^2\nabla\phi,\nabla\phi\rangle\right|\\ \lesssim&\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{h\to0}\left|\frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left(\left\langle\varepsilon^{-1/2}\rho_\varepsilon(t+h)-\varepsilon^{-1/2}\rho_\varepsilon(t),\phi\right\rangle\right)^2+C(\rho_0)\varepsilon^{-1}h-\langle\sigma(\bar\rho(t))^2\nabla\phi,\nabla\phi\rangle\right|\\ =&0.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

类似地，对于 Dean-Kawasaki 方程的情形，也可以通过相同的方法得到恒等式结果。

定理 6.4. 设 $\sigma(\zeta)=\sqrt{\zeta(1-\zeta)}$。假设 ρ_0 满足假设 2.1。令 ρ_ε 为 (2.16)的重整化动理学解。在以下标度区间下

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\delta(\varepsilon)^{-d-2}=0,$$

对于每个测试函数 $\phi\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ 以及每个 $t\in[0,T]$，以下渐近涨落恒等式成立：

$$\lim_{\varepsilon\to0}\liminf_{h\to0}\frac{1}{h}\,\mathbb{E}\left(\left\langle\varepsilon^{-1/2}(\rho_\varepsilon-\bar\rho)(t+h)-\varepsilon^{-1/2}(\rho_\varepsilon-\bar\rho)(t),\phi\right\rangle\right)^2=\langle\sigma(\bar\rho(t))^2\nabla\phi,\nabla\phi\rangle.$$

证明。 证明基本沿用了定理 6.3的相同策略。不过，由于系数 $\sqrt{\zeta(1-\zeta)}$ 现在有两个奇异点，我们需要在 $\zeta=1$附近引入额外的截断。更具体地说，应用引理 6.2证明中的相同论证，可得

$$\mathbb{E}\left(h^{-1+\varepsilon'}p_\varepsilon\Big([t,t+h]\times\mathbb{T}^d\times\Big[\tfrac{h^{1-\varepsilon'}}{2},h^{1-\varepsilon'}\Big]\cup\Big[1-h^{1-\varepsilon'},1-\tfrac{h^{1-\varepsilon'}}{2}\Big]\Big)\right)^2\leqslant C(\rho_0),$$

对所有 $t\in[0,T]$，$\varepsilon'\in(0,\ 1/4)$、 $\varepsilon\in(0,\ 1)$ 和 $h\in(0,\ 1/4)$ 均成立。此外，我们引入一个截断函数，将 0 和 1 处的奇点局部化。固定 $\beta\in(0,\ 1/4)$，并令 η_β 为一个光滑的截断函数，满足 $\eta_\beta(\zeta)=1$ 对 $\zeta\in[\beta,1-\beta]$，$\eta_\beta(\zeta)=0$ 对 $\zeta\in[0,\beta/2]\cup[1-\beta/2,1]$，且

$$\eta_\beta'\lesssim\beta^{-1}I_{\left\{[\frac{\beta}{2},\beta]\cup[1-\beta,1-\frac{\beta}{2}]\right\}}.$$

令 $\chi_\varepsilon = I_{\{0<\zeta<\rho_\varepsilon\}}$ 表示动理学函数。接下来我们将其分解为

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{-1/2}\left\langle \rho_\varepsilon(t+h)-\rho_\varepsilon(t),\phi\right\rangle\\&=\varepsilon^{-1/2}\left\langle \chi_\varepsilon(t+h)-\chi_\varepsilon(t),\eta_\beta\phi\right\rangle_{L^2(\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}_+)}+\varepsilon^{-1/2}\left\langle \chi_\varepsilon(t+h)-\chi_\varepsilon(t),(1-\eta_\beta)\phi\right\rangle_{L^2(\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}_+)}.\end{aligned}$$

有了这一分解，定理 6.3 的论证便可加以调整，从而得到所需结果。

□

致谢 本研究由美国陆军研究办公室资助，并在编号为 W91INF-23-1-0230 的拨款项目下完成。本文所载的观点和结论均为作者所有，不应被解读为代表美国陆军研究办公室或美国政府的官方政策，无论这些政策是明示还是暗示。尽管本文包含任何版权声明，美国政府仍有权为政府用途复制和分发本文的再印本。ND 感谢慕尼黑工业大学的热情接待。

我们感谢 Mario Ayala 提供的有益讨论。

References

[AZ24] Mario Ayala 和 Johannes Zimmer. 带长程跳跃的对称包含过程的水动力学极限与非平衡涨落，2024年。 [BDSG+15] Lorenzo Bertini、Alberto De Sole、Davide Gabrielli、Giovanni Jona-Lasinio 和 Claudio Landim. 宏观涨落理论。 *Rev. Modern Phys.*, 87(2):593–636, 2015年。 [CF23] Federico Cornalba 和 Julian Fischer. 扩散粒子系统的 Dean-Kawasaki 方程与密度涨落结构。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 247(5):第 76 号论文，59，2023年。 [CF25] Andrea Clini 和 Benjamin Fehrman. 非线性守恒型随机偏微分方程的中心极限定理。

Stoch. , . [CFIR26]

Partial Differ. Equ. Anal. Comput. 2025

Federico Cornalba、Julian Fischer、Jonas Ingmanns 和 Claudia Raithel. 通过 Dean–Kawasaki 方程研究弱相互作用粒子系统中的密度涨落。 *Ann. Probab.*, 54(1):155–215, 2026年。 [CY92] Chih Chung Chang 和 Horng-Tzer Yau. 非平衡状态下单维金兹堡-朗道模型的涨落。 *Comm. Math. Phys.*, 145(2):209–234, 1992年。 [Dea96] David S. Dean. 相互作用朗之万过程系统密度的朗之万方程。

J. Phys. , ( ):L –L . [

A 29 24 613 617, 1996

Der07] Bernard Derrida. 非平衡稳态：密度与流的涨落和大偏差。 *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, (7):P07023, 45, 2007年。 [DFG24] Nicolas Dirr、Benjamin Fehrman 和 Benjamin Gess. 对称简单排斥过程的守恒型随机偏微分方程与涨落。arxiv: 2012.02126., 2024年。 [DG20] Konstantinos Dareiotis 和 Benjamin Gess. 带非线性梯度噪声的非线性扩散方程。 *Electron. J. Probab.*, 25:第 35 号论文，43，2020年。 [DJP25] Ana Djurdjevac、Xiaohao Ji 和 Nicolas Perkowski. 光滑平均场相互作用下 Dean-Kawasaki 方程的弱误差。 *arXiv preprint arXiv:2502.20929*, 2025年。 [DKP22] Ana Djurdjevac、Helena Kremp 和 Nicolas Perkowski. Dean-Kawasaki 方程非线性随机偏微分方程近似的弱误差分析。 *arXiv preprint arXiv:2212.11714*, 2022年。 [DSK25] Lorenzo Dello Schiavo 和 Vitalii Konarovskyi. 纯噪声 Dean-Kawasaki 方程的不适定性。 *Electronic Communications in Probability*, 30(none), 2025年1月。 [DV10] Arnaud Debussche 和 Julien Vovelle. 带随机驱动的标量守恒律。 *J. Funct. Anal.*, 259 4 1014 1042, 2010 ( ): – . [EDZR18] Peter Embacher、Nicolas Dirr、Johannes Zimmer 和 Celia Reina. 从非平衡粒子模型计算扩散率。 *Proc. A.*, 474(2212):20170694, 21, 2018年。 [Feh25] Benjamin Fehrman. 具有相关非平稳 Stratonovich 噪声的 Dean–Kawasaki 型随机偏微分方程。 *arXiv preprint arXiv:2504.18370*, 2025年。 [FG19] Benjamin Fehrman 和 Benjamin Gess. 带非线性守恒噪声的非线性扩散方程的适定性。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 233(1):249–322, 2019年。 [FG23] Benjamin Fehrman 和 Benjamin Gess. 非平衡大偏差与具有不规则漂移的抛物-双曲型偏微分方程。 *Invent. Math.*, 234(2):573–636, 2023年。 [FG24] Benjamin Fehrman 和 Benjamin Gess. 具有相关噪声的 Dean–Kawasaki 方程与非线性 Dawson–Watanabe 方程的适定性。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 248(2):第 20 号论文，2024年。 [FG25] Benjamin Fehrman 和 Benjamin Gess. 全空间上的守恒型随机偏微分方程。

Stoch. Partial , .

Differ. Equ. Anal. Comput 2025

[FGG22] Benjamin Fehrman、Benjamin Gess 和 Rishabh S Gvalani. 守恒型随机偏微分方程的遍历性与随机动力系统。 *arXiv preprint arXiv:2206.14789*, 2022年。[FGL00] P. A. Ferrari、A. Galves 和 C. Landim. 对称简单排斥过程趋近平衡的速率。 *Markov Process. Related Fields*, 6(1):73–88, 2000年。 [FPSV91] P. A. Ferrari、E. Presutti、E. Scacciatelli 和 M. E. Vares. 对称简单排斥过程。I. 概率估计。 *Stochastic Process. Appl.*, 39(1):89–105, 1991年。 [GJ14] Patr´icia Gon¸calves 和 Milton Jara. 弱非对称相互作用粒子系统的非线性涨落。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 212(2):597–644, 2014年。 [GK24] Benjamin Gess 和 Vitalii Konarovskyi. 简单对称排斥过程的定量中心极限定理，2024年。[GS17] Benjamin Gess 和 Panagiotis E. Souganidis. 随机标量守恒律的长时间行为、不变测度与正则化效应。 *Comm. Pure Appl. Math.*, 70(8):1562–1597, 2017年。 [GWZ26] Benjamin Gess、Zhengyan Wu 和 Rangrang Zhang. 奇异极限下非线性随机热方程的高阶涨落展开。 *Stochastic Process. Appl.*, 193:第 104847 号论文，2026年。 [HWZ25] Zimo Hao、Zhengyan Wu 和 Johannes Zimmer. 带涨落的动力学理论：Vlasov–Fokker–Planck–Dean–Kawasaki系统的强适定性，2025年。 [Jar09] Milton Jara. 带长程跳跃的简单排斥过程中的标记粒子的非平衡标度极限。 *Comm. Pure Appl. Math.*, 62(2):198–214, 2009年。 [Kaw98] Kyozi Kawasaki. 致密流体动态密度泛函方程的微观分析。

J. , (-): – . [KL

Statist. Phys. 93 3 4 527 546, 1998

99] Claude Kipnis 和 Claudio Landim. *Scaling limits of interacting particle systems*, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*第 320 卷。施普林格出版社，柏林，1999年。 [KLvR19] Vitalii Konarovskyi、Tobias Lehmann 和 Max-K. von Renesse. Dean-Kawasaki动力学：不适定性与平凡性。 *Electron. Commun. Probab.*, 24:第 8 号论文，9，2019年。[KLvR20] Vitalii Konarovskyi、Tobias Lehmann 和 Max von Renesse. 关于具有光滑漂移势的 Dean-Kawasaki动力学。 *J. Stat. Phys.*, 178(3):666–681, 2020年。 [KM24] Vitalii Konarovskyi 和 Fenna M¨uller. 初始条件属于正分布空间的 Dean-Kawasaki 方程。 *J. Evol. Equ.*, 24(4):第 92 号论文，20，2024年。 [KV86] C. Kipnis 和 S. R. S. Varadhan. 可逆马尔可夫过程加性泛函的中心极限定理及其在简单排斥过程中的应用。 *Comm. Math. Phys.*, 104(1):1–19, 1986年。 [LL87] Lew D. Landau 和 Evgeny M. Lifshitz. *Course of theoretical physics. Vol. 6*. Pergamon Press，牛津，第二版，1987年。流体力学，由 J. B. Sykes 和 W. H. Reid 根据俄文第三版译出。[MGP+22] Francesco Magaletti、Mirko Gallo、Sergio P. Perez、Jos´e A. Carrillo 和 Serafim Kalliadasis. 涨落流体力学的保正格式。 *J. Comput. Phys.*, 463:第 111248 号论文，19，2022年。 [MM24] Adrian Martini 和 Avi Mayorcas. Keller-Segel-Dean-Kawasaki动力学的加性噪声近似：小噪声结果，2024年。[MM25] Adrian Martini 和 Avi Mayorcas. Keller-Segel-Dean–Kawasaki动力学的加性噪声近似：旁控解的局部适定性。 *Stochastics and Partial Differential Equations:Analysis and Computations*, 2025年。 [MvRZ25] Fenna M¨uller、Max von Renesse 和 Johannes Zimmer. Vlasov-Fokker-Planck 型 Dean-Kawasaki 模型的适定性。 *Proc. R. Soc. A*, 481:20250089, 2025年。[Pop25a] Shyam Popat. 具有 Dirichlet 边界条件的守恒型随机偏微分方程的小噪声涨落与大偏差，2025年。[Pop25b] Shyam Popat. 有界区域上带相关噪声的广义Dean–Kawasaki方程的适定性。 *Stochastic Process. Appl.*, 179: 第 104503 号论文，32，2025 年。[PW25] Shyam Popat 和 Zhengyan Wu. 带 Dirichlet 边界条件的 Dean–Kawasaki 方程的遍历性：驯服平方根，2025年。[Rav92] K. Ravishankar. 对称简单排斥过程在 Z^d中的流体动力学极限所产生的涨落。 *Stochastic Process. Appl.*, 42(1):31–37, 1992年。 [Sch25] Lorenzo Dello Schiavo. 大质量粒子系统、Wasserstein布朗运动与 Dean-Kawasaki 方程，2025年。[Spo12] Herbert Spohn. *Large scale dynamics of interacting particles*. 施普林格科学与商业媒体，2012年。[Wu25] Zhengyan Wu. 伊辛–卡克–川崎模型的涨落流体力学与临界性附近的非线性涨落，2025年。[WWZ24] Likun Wang、Zhengyan Wu 和 Rangrang Zhang. 带奇异相互作用的 Dean-Kawasaki 方程及其在动态伊辛–卡克模型中的应用。arxiv:2207.12774, 2024年。[WZ24] Zhengyan Wu 和 Rangrang Zhang. 具有不规则漂移的 McKean–Vlasov偏微分方程及其在守恒型随机偏微分方程大偏差中的应用，2024年。[Yau91] Horng-Tzer Yau. 相对熵与金兹堡-朗道模型的流体动力学。 *Lett. Math. Phys.*, 22 1 63( ): –80, 1991年。

（N. Dirr） Cardiff School of Mathematics, Cardiff University, Cardiff, UK*Email address*: dirrnp@cardiff.ac.uk（Z. Wu） Department of Mathematics, Technische Universität München, Boltzmannstr. 3, 85748 Garching,Germany*Email address*: wuzh@cit.tum.de（J. Zimmer） Department of Mathematics, Technische Universität München, Boltzmannstr. 3, 85748Garching, Germany*Email address*: jz@tum.de