arXiv:2603.05100v1 [math.CO] 5 Mar 2026

弱弦图子类中的极小韧性

J. PASCAL GOLLIN[†]、MARTIN MILANIČ[†, ‡]以及 LAURA OGRIN[†]

摘要。图 G 的坚韧度定义为满足以下条件的最大实数 t：对于任意满足 $G-S$ 不连通的集合 $S \subseteq V(G)$，S 的元素数量至少是 $G-S$ 连通分支数量的 t 倍（除非 G 是完全图，此时坚韧度定义为无穷大）。如果删除任意一条边都会降低坚韧度，则称该图为极小坚韧图。一个尚未解决的问题是，是否存在坚韧度大于 1 的极小坚韧非完全弦图。我们开始研究弱弦图这一更大的图类中的极小坚韧图，并完整刻画了以下弱弦图子类中的极小坚韧图：补图直径至少为 3 的余弦图、无网余弦图、森林的补图、P_4-自由图以及完全多部图。我们的方法还为 Dallard、Fernández、Katona、MILANIČ 和 Varga 关于极小坚韧图的两个结果给出了简明证明。

§1. 引言

坚韧度是图的连通性的一种度量，粗略地说，它给出了图中任意分隔集的基数与剩余图的连通分支数之比的下界。更精确地说，对于实数 t，若对每一个使得 $G-S$ 不连通的集合 $S \subseteq V(G)$ 都有 $|S| \geqslant t \cdot c(G-S)$ 成立，则称图 G 是 t-坚韧的，其中 $c(H)$ 表示图 H的连通分支数。每个哈密顿图都是1-坚韧的，Chvátal猜想存在一个实数 t_0，使得每个 t_0-坚韧图都是哈密顿的（见 [1, 3, 7]）。这一猜想至今仍未解决。

图 G 的坚韧度记作 $\tau(G)$，定义为满足 G 是 t-坚韧的最大实数 t（除非 G 是完全图，此时坚韧度定义为 ∞）。从图 G 中删除一条边不会增加其坚韧度，因此，每个坚韧度为 t 的图 G 都包含一个坚韧度为 t 的极小生成子图。这样的子图必然是极小 t-坚韧的，也就是说，从图中删除任意一条边都会使其坚韧度严格小于 t。因此，Chvátal 猜想等价于：存在一个实数 t_0，使得每个极小t_0-坚韧图都是哈密顿图。这促使我们研究对于某个 t 而言是极小t-坚韧的图，或简称极小坚韧图。

(†) FAMNIT，普里莫尔斯卡大学，科佩尔，斯洛文尼亚。(‡) IAM，普里莫尔斯卡大学，科佩尔，斯洛文尼亚。电子邮件地址： pascal.gollin@famnit.upr.si， martin.milanic@upr.si， laura.ogrin@famnit.upr.si。日期：2026年3月6日。2020 数学主题分类。05C42, 05C40, 05C70, 05C07, 05C38, 05C69。关键词和短语。坚韧度，极小坚韧图，P_4-自由图，完全多部图，余弦图，森林的补图，图的联图。1

这个问题远非简单。对于每个正有理数 t，任意图都是某个极小 t-坚韧图的诱导子图（见 [22]），而判定极小 t-坚韧图的问题是 DP 完全的[1]（见 [21]）。对于每个正有理数$t \leqslant 1$，判定 t-坚韧二分图的复杂度是 coNP 完全的（见 [24]）；然而，据我们所知，判定极小 t-坚韧二分图的复杂度仍未解决。

对于无爪图类，当 $t < 3/2$ 时（见 [22, 23]）；对于任意 t 的分裂图（见 [23]）；对于 $t \leqslant 1$ 的弦图（见 [20,23]）；对于任意 t 的区间图（见 [9, 20]）；以及对于任意 t 的强弦图，已有对极小 t-坚韧图的刻画。这些结果综合了 [9, 20, 23] 的研究（另见 [29, 推论 3.8]）。Katona 和 Varga [23] 证明，以下图类可在多项式时间内识别：极小 t-坚韧分裂图，其中任意正有理数 t 均适用；对于任意正有理数 t，极小 t-坚韧、$2K_2$-自由图；以及对于任意正有理数 $t \leqslant 1$，极小 t-坚韧无爪图。此外，树宽有界图的坚韧度可在多项式时间内计算（见 [19]），因此，对于任意正有理数 t，存在一个多项式时间算法，可识别树宽有界的极小 t-坚韧图。对于 $2K_2$-自由图类，Ma、Hu 和 Yang（见 [26, 27]）还得到了关于极小 t-坚韧图的其他结果。Dallard 等人 [9] 猜想，对于任意实数 $t > 1/2$,，都不存在极小t-坚韧弦图。事实上，虽然已知当 $1/2 < t \leqslant 1$ 时不存在极小 t-坚韧弦图（见 [23]），但尚不清楚是否存在一个实数 $\hat{t}$，使得每个具有有限坚韧度且满足 $t \leqslant \hat{t}$ 的极小 t-坚韧弦图都如此。

Kriesell 猜想，每个极小 1-韧性图都含有一个度为 2 的顶点（见 [18]）。Katona 和 Varga 提出了一个更一般的猜想，称为广义 Kriesell 猜想（见 [23]）：对于每个 $t > 0$，每个极小t-韧性图都有一个度为 $\lceil 2t \rceil$ 的顶点。Zheng 和 Sun [34], 反驳了广义 Kriesell 猜想，即使对于 $2K_2$-自由图类也是如此。Hasanvand [15]也反驳了该猜想对线图（因而也对无爪图）的成立性。另一方面，对于 $t \leqslant 1$ 的分裂图 [23],弦图类（见 [20, 23]）以及 $t < 2$ 的无爪图类（见 [22, 23, 25]；另见 [28]），该猜想已得到验证。Kriesell 猜想仍未解决，但除弦图和无爪图外，该猜想已在 $2K_2$-自由图（见 [26, 定理 1.7]）、独立数至多为 3 [5], 的图以及其他一些情形中得到验证 [6]。更多详情见 [29,第 3 节。2]

我们的研究始于 Dallard 等人关于极小坚韧弦图的上述猜想。 [9]我们在一个更广泛的图类——弱弦图中探讨极小韧性。弱弦图的定义是：不含长度至少为 5 的圈及其补图作为诱导子图（例如，参见 [4, 16, 17]）。弱弦图类在取补图运算下封闭；除所有弦图外，它还包含弦图的补图（称为余弦图），以及所有无 P_4 图，即不含四顶点路径作为诱导子图的图。

[1]复杂性类 DP 由 Papadimitriou 和 Yannakakis 于 1984 年提出（参见 [30]），它包含所有可表示为 NP 语言与 coNP 语言交集的语言。

如前所述，目前尚无已知的极小坚韧弦图具有超过 $1/2$ 的（有限）坚韧度；而我们证明，存在坚韧度可任意大的极小坚韧弱弦图。这是我们的主要结果的推论：我们完整刻画了以下弱弦图子类中各自的极小坚韧图：

- 补图直径不等于 2 的余弦图，
- 无网余弦图，
- 森林的补图，
- P_4-自由图，以及
- 完全多部图。

特别地，我们证明了存在坚韧度任意大的极小坚韧完全多部图。

为了详细陈述我们的结果，我们需要先介绍一些定义。我们将完全图和无边图称为平凡的极小坚韧图，并将所有其他极小坚韧图称为非平凡的极小坚韧图。如果一个图的顶点集可以划分为称为部集的子集，且图中两个不同顶点相邻当且仅当它们属于不同部集，则称该图为完全多部图。对于一个正整数序列 $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_k$，我们用 $K_{n_1,\ldots,n_k}$ 表示具有 k 个部集 $V_1, \ldots, V_k$ 的完全多部图，其中 $|V_i| = n_i$ 对所有 $i \in [k]$均成立。我们用 $T_{n,k}$ 表示具有 n 个顶点和 k 个部集的完全多部图，其各部集的基数尽可能相等。[2] 我们主要关注所有部集的基数均为 2、至多有一个部集的基数为 1 的情形，也就是图 $T_{2\ell,\ell}$ 和 $T_{2\ell-1,\ell}$，其中 $\ell \geqslant 2$。

定理 1.1。 当且仅当一个 P_4-自由图同构于某个 $K_{2,\,3}$, $K_{1,\,\ell}$, $T_{2\ell,\,\ell}$，或 $T_{2\ell-1,\,\ell}$（其中 $\ell \geqslant 2$）时，它才是非平凡极小坚韧的。

由于所有完全多部图都是 P_4-自由的，且所有极小坚韧的 P_4-自由图都是完全多部图，定理 1.1 给出了极小坚韧完全多部图的如下分类。

定理 1.2。 当且仅当一个完全多部图同构于某个 $K_{2,\,3}$, $K_{1,\,\ell}$, $T_{2\ell,\,\ell}$，或 $T_{2\ell-1,\,\ell}$（其中 $\ell \geqslant 2$）时，它才是非平凡极小坚韧的。

给定一个图 G，G 的余直径 是 G的补图的直径。

定理 1.3。 当且仅当一个余弦图的余直径至少为3，且它同构于某个 P_4, $K_{2,\,3}$, $K_{1,\,\ell}$, $S_{k,\,\ell}$, $T_{2\ell,\,\ell}$，或 $T_{2\ell-1,\,\ell}$（其中 $k \geqslant 1$ 和 $\ell \geqslant 2$）时，它才是非平凡极小坚韧的。

我们对无网余弦图也得到了类似的分类。网是通过向完全图 K_3 的每个顶点连接一条悬挂边而得到的图。

定理 1.4。 无网余弦图是非平凡极小坚韧图，当且仅当它同构于某个 P_4, $K_{2,\,3}$, $K_{1,\,\ell}$, $S_{k,\,\ell}$, $T_{2\ell,\,\ell}$，或 $T_{2\ell-1,\,\ell}$，其中 $k \geqslant 1$ 和 $\ell \geqslant 2$。

[2]这些图通常称为 图兰图。

值得注意的是，无网余弦图这一类包含所有区间图的补图，更一般地，也包含所有强弦图的补图；参见 [2]。

定理 1.5. 森林的补图是非平凡极小坚韧图，当且仅当它同构于 P_4、$T_{2\ell,\ell}$ 或 $T_{2\ell-1,\ell}$，其中 $\ell \geqslant 2$。

为便于快速查阅，我们在表 1.1 中汇总了定理 1.1 至 1.5的刻画中出现的所有极小坚韧图的坚韧度。表中的数值由命题 4.16 以及树 T 的最大度为 Δ 时其坚韧度等于 $1/\Delta$ 这一事实推出（例如，参见 [3]）。

图	P_4	$S_{k,\ell}$	$K_{2,3}$	$K_{1,\ell}$	$T_{2\ell,\ell}$	$T_{2\ell-1,\ell}$
坚韧度	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\ell+1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{\ell}$	$\ell-1$	$\ell-\frac{3}{2}$

表 1.1. 所讨论的各种极小坚韧图的坚韧度，其中 $\ell \geqslant 2$ 和 $1 \leqslant k \leqslant \ell$。

容易验证，我们所有刻画中出现的图都包含一个度为 $\lfloor 2t \rfloor$ 的顶点，其中 t 是相应图的坚韧度。因此，广义 Kriesell 猜想对 P_4-自由图、余直径至少为 3 的余弦图、无网余弦图以及森林的补图均成立。

我们的方法。 在上述所有结果中，我们首先考虑图的补图不连通的情形，也就是说，该图是两个较小图的联图。为此，我们提出以下关于两个图的联图为极小坚韧图的必要条件。

条件 1.6（联结条件）。 如果两个图中的一个包含联图中的一个最大度顶点，那么另一个图必须是正则图。

该条件对于证明我们对极小坚韧的 P_4-自由图的分类至关重要。此外，它还使得我们能够简洁地证明 Dallard 等人 [9]关于极小坚韧图的两个已知结果：

- 对于 $t > 1$，不存在具有全邻顶点的极小t-坚韧弦图这一事实。
- 对所有 $t \leqslant 1$，具有全邻顶点的极小 t-坚韧图的分类。事实上，我们将这一分类扩展到所有 $t \leqslant 3/2$。

对于 P_4-自由图以及直径至少为3 的连通弦图的补图，我们的方法同样基于图中存在一条支配边，也就是说，这条边的每个端点都至少与图中的每个顶点之一相邻。应用 Dallard 等人提出的一个引理 [9], ，我们刻画了删除某条支配边不会改变图的坚韧度的情形，这意味着该图不是极小坚韧的。作为极小坚韧 P_4-自由图分类工作的另一项进展，我们确定了完全多部图的坚韧度（见命题 4.16），推广了 Chvátal 关于完全二部图的类似结果 [7]。

最后，通过利用 Groshaus 和 Szwarcfiter 对遗传闭邻域-Helly 图的刻画，将问题归结为直径至少为 3 的弦图的补图，从而获得了无网余弦图类中极小坚韧图的分类 [12]。

论文结构。第2 节总结一些标准的图论术语和符号，以及关于连通度和弦图的一些广为人知的结果。在第 3 节和4中，我们将介绍一些基本工具，并在后续各节中加以应用。具体而言，在第 3 节中，我们利用二部图中的匹配，在某些情况下确定局部连通度。在第 4 节中，我们给出关于图的坚韧度和极小坚韧度的一些初步结果。特别地，我们聚焦于具有支配边的图，并确定完全多部图的坚韧度。在第 5 节中，我们探讨图的联图的极小坚韧度，并将所得结果应用于具有全邻顶点的图。在第 6 节中，我们刻画极小坚韧的 P_4无图。在第 7 节中，我们得到本文最复杂的结果：刻画余直径至少为3的极小坚韧余弦图。由此，我们还对极小坚韧无网余弦图和极小坚韧森林的补图进行了分类。最后，我们在第 8 节提出一些开放问题。

§2. 预备知识

对于正整数 n，我们用 $[n]$ 表示前 n 个正整数的集合。本文未解释的图论概念和记号，请参见 [10]。本文所考虑的所有图都是有限的、简单的无向图。阶为 0 的图称为空图，阶至多为 1 的图称为平凡图。对于图 G中的顶点 v，其度、开邻域和闭邻域分别记为 $d_G(v)$、$N_G(v)$ 和 $N_G[v]$；当上下文中图的指代明确时，省略下标 G。图 G 的最小度和最大度分别记为 $\delta(G)$和 $\Delta(G)$。

对于图 G 和任意集合 $U \subseteq V(G)$，我们用 $G[U]$ 表示 G 中顶点集为 U的诱导子图。对于任意集合 $U \subseteq V(G)$，我们用 $G-U$表示从 G 中删除 U 中的所有顶点及与其中至少一个顶点关联的所有边后得到的图，即 $G-U=G[V(G)\setminus U]$。若 $U=\{u\}$，则记作 $G-u$而非$G-\{u\}$。对于边 $e=uv\in E(G)$，我们用 $G-e$或 $G-uv$表示从 G 中删除边 e后得到的图。对于不相交子集 $U,W\subseteq V(G)$，若边 uw 满足$u\in U$ 和 $w\in W$，则称其为一条 U-W边；此外，我们用 $G[U,W]$表示顶点集为 $U\cup W$、边集由所有 U-W 边组成的图。

图 G 的补图 $\overline{G}$是顶点集为 $V(G)$ 的图，其定义为：当且仅当 $uv\notin E(G)$时，$uv\in E(\overline{G})$。令 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$ 为两个顶点不相交图。G_1 和 G_2的不交并 是图 G_1+G_2，其顶点集为$V_1\cup V_2$，边集为 $E_1\cup E_2$。此外，对于 $k\geqslant 1$ 和图 G，我们用 kG表示由 k 个两两不相交的 G副本组成的图。G_1 和 G_2的联图记作 G_1*G_2，其顶点集为 $V_1\cup V_2$，边集是 E_1、E_2 以及连接 V_1 和 V_2的所有边的并集。

对于正整数 n，我们分别用 P_n、 C_n和 K_n表示 n顶点路径图、 n顶点圈图（当 $n \geqslant 3$ 时）以及 n顶点完全图。对于图 G 和两个顶点 $u, v \in V(G)$， u-v 路径 G 是 G 中的一个子图，它是一条从 u 到 v的路径。如果 u 和 v 是两条 u-v 路径仅有的公共顶点，则称这两条路径内部顶点不相交 。对于两个顶点集 $U, W \subseteq V(G)$，如果 $V(P) \cap U = \{v_1\}$ 且 $V(P) \cap W = \{v_k\}$，则称 $P = (v_1, \ldots, v_k)$ 为一条U-W路径。

图 G中两个顶点 u 与 v 之间的距离 记为 $d_G(u, v)$，是 G中一条最短 u-v 路径的长度。若不存在这样的路径，则令 $d_G(u, v) := \infty$。 G的直径 记为$\mathrm{diam}(G)$，是G中任意两个顶点之间的最大距离，即$\mathrm{diam}(G) = \max_{u,v \in V(G)} d_G(u, v)$。顶点 $u \in V(G)$的离心率 记为 $\epsilon(u)$，即$\max_{v \in V(G)} d_G(u, v)$。因此，$\mathrm{diam}(G) = \max_{u \in V(G)} \epsilon(u)$。

我们用 $c(G)$ 表示图 G的连通分支数。子集 $S \subseteq V(G)$ 是 G的分隔集，如果图 $G - S$ 有多于一个连通分支，即如果 $c(G - S) \geqslant 2$。此时我们说 S 分隔 G。对于两个顶点 u、$v \in V(G)$，集合 $S \subseteq V(G) \setminus \{u, v\}$是一个 u-v 分隔集，如果 $G - S$ 中没有 u-v 路径。此时我们说 S 在 G中分隔 u 与v 。对于整数 $k \geqslant 0$，称图 G 是 k-连通的，如果 $|V(G)| \geqslant k + 1$ 并且对每个满足 $|S| \leqslant k - 1$的集合 $S \subseteq V(G)$ ，$G - S$ 都是连通的。换言之， G 中任意两个顶点都不会被少于 k 个其他顶点所分隔。使得 G 为 k-连通的最大整数 k 称为 G的连通度，记为 $\kappa(G)$。对于任意不同的顶点 u、 $v \in V(G)$，我们用 $\kappa_G(u, v)$ 表示相应的局部连通度，即 G中两两内部顶点不相交的 u-v 路径的最大数目。若 u 与 v相邻，我们也计入路径 (u, v)。

接下来我们回顾两个相关的不等式。第一个不等式由“Menger 定理的全局版本” [10, 定理 3.3。6] （另见 [33, 定理 4.2。21]）推出，而第二个不等式则直接由定义得到。

引理 2.1。 设 u 和 v 是图 G中的两个不同顶点。则

$$\kappa(G) \leqslant \kappa_G(u, v) \leqslant \min\{d(u), d(v)\}.$$

图同构关系记为 $\cong$。图类 是一个在同构下封闭的图的集合。若一个图类在诱导子图下封闭，则称其为遗传的 。

如果图 G 没有与 P_4同构的诱导子图，则称其为 P_4-自由 。星图 是与完全二部图$K_{1,\,a}$同构的图；度为 a 的顶点是该星图的中心 。（在 $a = 1$的情况下，该星图$K_{1,\,a}$ 的两个顶点的度均为 a；在这种情况下，我们任意选取其中一个作为中心。）双星 是一个图，记为$S_{a,\,b}$，它由两个星图$K_{1,\,a}$ 和$K_{1,\,b}$ 的不交并通过在它们的中心之间添加一条边得到。类似地，我们用$S_{a,\,b,\,c}$ 表示由三个星图$K_{1,\,a}$、$K_{1,\,b}$和$K_{1,\,c}$ 的不交并通过在它们的中心之间添加一个三角形得到的图。

若图 G 不含长度至少为 4 的诱导圈，则称其为弦图。若图 G 的补图 $\overline{G}$ 是弦图，则称其为余弦图。若图 G 中顶点的邻域是一个团，则称该顶点为单纯顶点。每个非平凡弦图都有两个距离最大的单纯顶点，这很容易由 Voloshin、Farber 和 Jamison 的一项结果推出 [32] [11]（另见 [33, 引理 5.3。16]）。

引理 2.2。 设 G 是一个弦图，且其直径$(G)=d$ 为某个正整数 d。那么， G 中存在单纯顶点 u和 v ，它们之间的距离为 d。

弦图中单纯顶点的存在极大地限制了正则弦图的结构。

引理 2.3. 设 G 是一个连通弦图。若对某个 $d \geqslant 1$， G 是 d-正则的，则 G 同构于 K_{d+1}。

证明。 假设 G 是 d-正则的。设 $v \in V(G)$ 是 G 的一个单纯顶点。则 $N[v] \cong K_{d+1}$。假设存在一个顶点 $u \in V(G) \setminus N[v]$。由于 G 是连通的，在 G 中存在一条 v-u 路径 P。则存在一个顶点 $v' \in N(v)$ 和一个顶点 $u' \notin N[v]$，使得 $v'u' \in E(P)$。但此时 v' 与 u' 以及 $N[v] \setminus \{v'\}$ 中的所有顶点相邻。因此， $d(v') \geqslant d+1$，矛盾。所以 $V(G)=N[v]$，从而 $G \cong K_{d+1}$。 □

§3. 二部匹配与局部连通度

我们回顾一些与图中的匹配（特别是二部图中的匹配）相关的定义和观察，并用它们刻画二部图中某些顶点对的局部连通度证书的结构（引理 3.2），并推导图的补图中不同连通分支里的两个顶点之间的局部连通度公式（引理 3.3）。本节的结果将在全文的各项证明中使用。

图 G 中的一个匹配 是指一组端点互不共享的边。最大匹配 是图中所有匹配里大小最大的匹配。
我们将研究二部图 G 中的匹配与从 G得到的图中的内部顶点不相交路径集之间的关系，具体定义如下。

定义 3.1. 设 G 是一个二部图，其部集为 A 和 B。设 u 和 v 是两个新顶点，即 $\{u, v\} \cap V(G)=\varnothing$。 (u,v)-扩张 (G,A,B) 是图 $\widehat{G}$，其中 $V(G)=V(G) \cup \{u,v\}$ 且 $E(G)=E(G) \cup \{ua: a \in A\} \cup \{bv: b \in B\}$。对于 G中的每个匹配 M，记 $\mathrm{P}(M)$为集合 $\{(u,x,y,v): xy \in M\}$。注意， $\widehat{\mathrm{P}}(M)$ 是 G中一组两两内部顶点不相交的 u-v 路径。

下面的引理表明， G 中的任意最大集合的两两内部顶点-$\widehat{}$不相交的 u-v 路径都对应于 G 中的一个最大匹配。

$\widehat{}$**引理 3.2.** 设 G 是一个部集为 A 和 B的二部图。设 G 是 (G,A,B)的 (u,v)-扩展。那么，对于 G中的任意最大集合的两两内部顶点不相交$\widehat{}$$u$-$v$ 路径，存在 G 中的一个最大匹配 M，使得 $P(M)=P$。

证明。 设$\mathcal{P}$ 是 G中一组最大的两两内部顶点不相交的 u-v 路径$\widehat{}$。令 $p=|\mathcal{P}|$，并令 m 为 G中匹配的最大大小。
首先，注意到 P 中的每条路径都具有 (u,a,b,v) 的形式，其中 $a \in A$ 和 $b \in B$。$\widehat{}$事实上，由于 u 与 v 在 G 中的距离至少为 3，P 中的每条路径长度至少为 3，而任何长度大于 3 的路径都将具有 $(u,a_1,b_1,\ldots,a_k,b_k,v)$ 的形式，其中某些顶点为 $a_1,\ldots,a_k \in A$, $b_1,\ldots,b_k \in B$，且 $k \geqslant 2$。这样的路径可以替换为两条路径，即 (u,a_1,b_1,v) 和 (u,a_k,b_k,v)，这与 P 的极大性矛盾。

其次，由于$\mathcal{P}$ 中的路径是两两内部顶点不相交的，$\mathcal{P}$ 具有$\{(u、\ a_i、\ b_i、\ v)$的形式：$1 \leqslant i \leqslant p\}$ 其中 a_1，……，$a_p \in A$和 b_1，……，$b_p \in B$是两两不同的顶点。于是，$M = \{a_i b_i :$ $1 \leqslant i \leqslant p\}$是 G中的一个匹配，使得 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(M)$。
剩下要证明 M 是一个最大匹配。反设并非如此。于是 $|M| = p < m$。令 M'为 G 中的一个最大匹配。于是$\mathcal{P}(M')$ 是 G 中一组两两内部顶点不相交的 u-v 路径，且 $\mathcal{P}(M') = m > p$，这与$\mathcal{P}$的极大性矛盾。□

现在我们分析图的连接中顶点之间的局部连通度。

引理 3.3. 设 G_1 和 G_2 是两个顶点不相交图，且 $G = G_1 * G_2$。那么对于任意一对顶点 $u \in V(G_1)$ 和 $v \in V(G_2)$，有

$$\kappa_G(u, v) = \min\{d_G(u), d_G(v)\}.$$

证明。对于 $i \in [2]$，令 $V_i := V(G_i)$，令 $n_i := |V_i|$，并令 d_i 表示 $G[V_i]$的度函数，即 $d_{G[V_i]}$。
设 $u \in V_1$和 $v \in V_2$已给定。根据 引理 2.1 有 $\kappa_G(u,\ v) \leqslant$最小值$\{d_G(u),\ d_G(v)\}$。我们构造一个由 $\mathcal{P}$条内部顶点不相交的 u-v 路径组成的集合，该集合位于 G 中，大小为 最小值 $\{d_G(u),\ d_G(v)\}$具体如下。

设 $\mathcal{P}_1 = \{(u,\ v)\}$，设 $\mathcal{P}_2 = \{(u,\ x,\ v) \mid x \in N_G(u) \cap N_G(v)\}$，并设 $\mathcal{P}_3$为由内部顶点属于 $V(G) \setminus (N_G(u) \cap N_G(v))$的、长度为 3 的两两内部顶点不相交的 u-v 路径组成的最大集合。显然，$|\mathcal{P}_1| = 1$ 和

$$|\mathcal{P}_2| = |N_G(u) \cap N_G(v)| = d_1(u) + d_2(v)\,.$$

为确定 $\mathbf{P}_3$, 的基数，令 $A := V_2 \setminus N_{G_2}[v]$ 和 $B := V_1 \setminus N_{G_1}[u]$，并注意到 $\mathbf{P}_3$ 中的每条路径都具有如下形式：(u, a, b, v)，其中 $a \in A$和 $b \in B$。因此，$\mathbf{P}_3$ 是图 $G' := G[V_1 \setminus N_{G_1}(u), V_2 \setminus N_{G_2}(v)] - uv$中两两内部顶点不相交的 u-v 路径组成的最大集合。此外，由于在图 G中，顶点u 和 v 彼此不相邻，u 与 A中的每个顶点都相邻，而 v 与 B中的每个顶点都相邻，图 G是 $(G[A, B], A, B)$的 (u, v)-扩展。因此，根据引理 3.2，$\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}(M)$，其中 M是 $G[A, B]$中的某个最大匹配。由于$G[A, B]$ 是一个完全二部图，

$$|M| = \min\{|A|, |B|\} = \min\{n_2 - d_2(v) - 1, n_1 - d_1(u) - 1\}$$

并且因此，$|\mathcal{P}_3| = \min\{n_1 - d_1(u),\ n_2 - d_2(v)\} - 1$。
令 $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$。由于 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2,$ 和 $\mathcal{P}_3$ 两两不相交，我们有

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}| &= 1 + d_1(u) + d_2(v) + \min\{n_1 - d_1(u), n_2 - d_2(v)\} - 1 \\ &= \min\{n_1 + d_2(v), n_2 + d_1(u)\} \\ &= \min\{d_G(v), d_G(u)\}. \end{aligned}$$

由于$\mathcal{P}$ 是由内部顶点不相交的 u-v 路径组成的集合，我们得到

$$\kappa_G(u, v) \geqslant |\mathcal{P}| = \min\{d_G(v), d_G(u)\}\,,$$

由此完成证明。□

§4. 关于坚韧度和极小韧性的初步结果

设 G 是一个图，且 $t \in \mathbb{R}$。回顾一下，如果对于每个将 G 分开的 $S \subseteq V(G)$，都有 $t \leqslant \frac{|S|}{c(G-S)}$，则称 G 是 t-坚韧的。非完全图 G 的坚韧度记作 $\tau(G)$，是使得 G 为 t-坚韧的最大 t。由于完全图中没有分隔集，因此在这种情况下坚韧度定义为 ∞，即对所有 $n \geqslant 1$，都有 $\tau(K_n) = \infty$。另一方面，如果 G 不连通，则 $\tau(G) = 0$。反过来也成立，即 $\tau(G) = 0$ 当且仅当 G 不连通。

按照 $\min \varnothing = \infty$ 的约定，我们可以将坚韧度表示为

$$\tau(G) = \min_{\substack{S \subseteq V(G) \\ S \text{ separator}}} \frac{|S|}{c(G-S)}. \tag{4.1}$$

根据定义，对于 G 的每个分隔集 S，都有 $\tau(G) \leqslant \frac{|S|}{c(G-S)}$。达到等号的分隔集称为韧分隔集。注意，任何非完全图的坚韧度都是有理数。此外，通过在非完全图 G 中考虑大小最小的分隔集 S，我们立即得到坚韧度与连通度之间的如下关系。

引理4.1 (Chvátal [7, 命题1。3])。如果 G 是一个非完全图，则 $\tau(G) \leqslant \frac{\kappa(G)}{2}$。

对于 $x \in \mathbb{R}$，令 $\lceil x \rceil := \min\{m \in \mathbb{Z} \colon m \geqslant x\}$，即 $\lceil x \rceil$ 是区间 $[x, x+1)$ 中的唯一整数。由于 $\kappa(G)$ 是一个整数，我们得到以下推论。

推论 4.2. 如果 G 是非完全图，那么 $\lceil 2\tau(G) \rceil \leqslant \kappa(G)$。

注意，在图 G中删除一条边后，G 的坚韧度可能保持不变，也可能降低。在极端情况下，删除 G 中的任何一条边都会降低 G的坚韧度。这引出了极小坚韧图这一概念。

定义 4.3. 对于 $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，如果图 G 满足 $\tau(G) = t$且对所有边 $e \in E(G)$均有 $\tau(G-e) < t$，则称其为极小 t-坚韧的。如果某个图对于某个 $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$是极小 t-坚韧的，则称其为极小坚韧图。

注意，如果 G是非连通图，那么 G 是极小坚韧图，当且仅当 G是极小 0-坚韧图，当且仅当 G 是无边图。另一方面，如果 G 是完全图，那么对于每条边 $e \in E(G)$，都有 $\tau(G) = \infty$ 和 $\tau(G-e) < \infty$，因此完全图是极小坚韧图。回顾一下，我们将完全图和无边图称为平凡极小坚韧图。因此，从现在起，我们将着重研究连通的非完全图，并探讨非平凡极小坚韧图，也就是 t 为正有理数时的极小 t-坚韧图。请注意，每个非平凡极小坚韧图都是连通图。

我们将频繁使用以下关于非极小坚韧图的刻画。

定理 4.4 (Dallard 等人 [9, 定理 3.2])。设 G 是一个非完全图，且 t 是 G的坚韧度。那么，G 不是极小 t-坚韧图，当且仅当 G 包含一条边 $e = uv$，使得以下两个条件均成立：

(1) $\kappa_G(u, v) \geqslant 2t + 1$。

(2) G 中每一个同时也是 $G-e$ 中的 u-v 分隔集的分隔集 S 满足

$$|S| \geqslant t \cdot (c(G-S)+1).$$

为方便起见，我们将上述定理重新表述为以下等价形式。

推论 4.5。 设 G 是一个非完全图，且 t 是 G 的坚韧度。那么，G 是极小 t-坚韧的，当且仅当对于每条边 $e=uv$，以下条件至少有一个成立：

(1) $\kappa_G(u,\ v) < 2t+1$，或者(2) 在 G 中存在一个分隔集 S，它同时也是 $G-e$ 中的一个 u-v 分隔集，使得

$$|S| < t \cdot (c(G-S)+1).$$

接下来，我们证明上述推论中的条件 (1) 等价于另外两个条件。

引理 4.6。 设 G 是一个非完全图，t 是 G 的坚韧度，且 uv 是 G 中任意一条边。那么以下条件等价：

(i) $\kappa_G(u,\ v) < 2t+1$,

(ii) $\kappa_G(u,\ v) < \lceil 2t \rceil + 1$,

(iii) $\kappa_G(u,\ v) = \lceil 2t \rceil$。

证明。 显然 (i) 推出 (ii)，因为 $2t \leqslant \lceil 2t \rceil$。
接下来，我们证明 (ii) 推出 (iii)。假设 $\kappa_G(u,\ v) < \lceil 2t \rceil + 1$。由 推论 4.2，$\lceil 2t \rceil \leqslant \kappa(G)$。由 引理 2.1，$\kappa(G) \leqslant \kappa_G(u,\ v)$。因此，$\lceil 2t \rceil \leqslant \kappa(G) \leqslant \kappa_G(u,\ v) < \lceil 2t \rceil + 1$，于是 $\kappa_G(u,\ v) = \lceil 2t \rceil$，因为 $\kappa_G(u,\ v)$ 是一个整数。
Th在 (iii) 推出 (i) 可由向上取整函数的性质直接得到。 □

结合 推论 4.5 我们得到正则图是极小坚韧的一个充分条件。

引理 4.7。 设 G 为 $\lceil 2t \rceil$-正则图，其中 t 是 G的坚韧度。则 G 是极小坚韧的。

证明。注意，对于任意 $n \geqslant 1$，$G \ncong K_n$，因为 $\tau(K_n) = \infty$，而 K_n 是 $(n-1)$-正则图。若 $t=0$，则 G 是0-正则非完全图，因此 G 是极小坚韧的。若$t>0$，则 G 是连通的非完全图。特别地，$|E(G)| \geqslant 2$。设 $e=uv$为 G的任意一条边。根据引理 2.1，$\kappa_G(u,\ v) \leqslant \min\{d_G(u),\ d_G(v)\} = \lceil 2t \rceil < 2t+1$。因此，$G$的所有边都满足推论 4.5 的条件 (1)。于是 G 是极小坚韧的。□

4.1. **含支配边的图的极小韧性**。 图中的支配边 G是一条边 $e=uv \in E(G)$，满足 $N(u) \cup N(v) = V(G)$。我们证明，对于支配边，(2) 中的条件推论 4.5永远不成立。这有助于我们刻画含支配边的极小坚韧图，例如图的联图、完全多部图、 P_4-自由图、森林的补图，以及补图直径至少为3的余弦图。

我们首先用两种不同的方式刻画支配边。

Lemma 4.8. 对于图 G 中的每条边 uv，下列条件等价 .

(i) uv 是 G中的支配边。(ii) $S \cap \{u, v\} \neq \varnothing$ 对于 G中的每个分隔集 S。(iii) $d_G(u, v) \geqslant 3$。

证明。首先，假设 uv 是 G 中的一条支配边，并令 S 为 G 的任意一个分隔集。反设 $S \cap \{u, v\} = \varnothing$。由于图 $G[\{u, v\}]$ 是连通的，且 $S \cap \{u, v\} = \varnothing$，因此顶点 u 和 v 属于 $G - S$ 的同一个连通分支 C。此外，由于 S 是 G 的一个分隔集，$G - S$ 还存在另一个连通分支，记为 C'。令 w 为 C' 的任意一个顶点。那么 $w \in V(G) = N(u) \cup N(v)$。不失一般性，可以假设 $w \in N(u)$，这意味着 w 属于 C，矛盾。

接下来，假设对于 G 中的每个分隔集 S，都有 $S \cap \{u, v\} \neq \varnothing$。反设 $d_G(u, v) \leqslant 2$。由于 u 和 v 在 G 中相邻，因此它们在 G 中不相邻。因此，$d_G(u, v) = 2$；特别地，u 和 v 在 G 中有一个公共邻点，记为 x。由于顶点 x 在 G 中既不与 u 相邻，也不与 v 相邻，因此集合 $S := V(G) \setminus \{x, u, v\}$ 是 G 中的一个分隔集，且 $S \cap \{u, v\} = \varnothing$，矛盾。

最后，假设 $d_G(u, v) \geqslant 3$。那么 $uv \notin E(G)$ 和 $N_G(u) \cap N_G(v) = \varnothing$，或者等价地，$N_G[u] \cap N_G[v] = \varnothing$。因此，$(V(G) \setminus N_G(u)) \cap (V(G) \setminus N_G(v)) = \varnothing$。所以 $V(G) \setminus (N_G(u) \cup N_G(v)) = \varnothing$，这意味着 $N_G(u) \cup N_G(v) = V(G)$，也就是说，$uv$ 是 G中的一条支配边。□

推论 4.9。如果 $e = uv$ 是图 G中的一条支配边，那么 G 中的分隔集都不可能同时是 $G - e$中的一个 u-v 分隔集。

证明。根据 引理 4.8，的每个分隔集都 u 或 v，因此它不是 $G - e$中的一个 u-v分隔集。□

接下来，我们将极小坚韧图中一条支配边的局部连通度与该图的坚韧度联系起来。

引理 4.10。设 t 为一个实数，G 为一张极小坚韧的 t图，且 uv为 G中的一条支配边。那么 $\kappa_G(u, v) < 2t + 1$。

证明。由于 G 是极小坚韧的，条件(1) 或(2) 中的至少一个 推论 4.5对边 $e = uv$成立。但由于 uv 是一条支配边，根据 推论 4.9，在 G 中不存在同时也是 u-v 分隔集的分隔集 $G - e$，因此条件(2) 的推论 4.5 不成立。所以，条件(1) 必定成立，即 $\kappa_G(u, v) < 2t + 1$。□

引理 2.1、4.6 和4.10 以及推论 4.2 推出以下结论。

推论 4.11。设 t 为一个实数，G 为一张极小 t坚韧图，且uv 为 G中的一条支配边。那么 $\kappa(G) = \kappa_G(u, v) = \lceil 2t \rceil$。

作为将支配边应用于极小坚韧度的第一个具体例子，我们证明，完全图是唯一可能拥有多个全邻顶点的极小坚韧图，也就是说，这些顶点与所有其他顶点都相邻。

引理 4.12. 每个非完全极小坚韧图至多有一个全邻顶点。

证明。设 G 是一个阶为 n 的非完全极小坚韧图，且 t 是 G的坚韧度。假设 G 至少有两个全邻顶点，分别为 u 和 v。那么$|N_G(u) \cap N_G(v)| = n-2$，因此 $\kappa_G(u, v) = n-1$。由于 G不是完全图，$\kappa(G) \leqslant n-2$，所以根据推论 4.2，$\lceil 2t \rceil \leqslant n-2$。另一方面，$uv$ 是支配边，因此根据推论 4.11，$\kappa_G(u,v) = \lceil 2t \rceil$。由此得到 $n-1 = \kappa_G(u,v) = \lceil 2t \rceil \leqslant n-2$，矛盾。□

4.2. **完全多部图的坚韧度**。1973年，Chvátal 确定了完全二部图的坚韧度。

命题 4.13 (Chvátal [7]). 对于任意两个满足 $n \geqslant 2$ 的非负整数 $m \leqslant n$，完全二部图 $K_{m,n}$ 的坚韧度等于 $\frac{m}{n}$。

利用由引理 4.8给出的支配边的刻画，我们现在通过确定任意完全多部图的坚韧度来推广 Chvátal 的结果。每个至少有两个部集的完全多部图都是两个较小图的联图；特别地，每个这样的图都包含一条支配边。

观察 4.14。设 G_1 与 G_2 为任意不相交图，$u \in V(G_1)$ 与 $v \in V(G_2)$ 为任意顶点。设 $G = G_1 * G_2$。则 $N_G(u) = N_{G_1}(u) \cup V(G_2)$ 与 $N_G(v) = N_{G_2}(v) \cup V(G_1)$。特别地，$uv$ 是 G 中的一条支配边。

我们还需要以下引理。

引理 4.15. 设 G 是一个非完全图，且其补图 G 不连通；设 $V_1, \ldots, V_k$ 是 $\overline{G}$ 的各连通分支的顶点集。令 S 为 G 的任意一个分隔集。那么，存在 $i \in \{1, \ldots, k\}$，使得对所有 $j \neq i$，$V_j \subseteq S$。

证明。反设有两个不同的部集 V_i 和 V_j，它们并未完全包含在 S 中。那么，存在两个顶点 $u \in V_i$ 和 $v \in V_j$，使得$u, v \notin S$。注意到 G 是图 $G_1 := G[V_i]$ 与 $G_2 := G - V_i$ 的联图。由于$u \in V(G_1)$ 且 $v \in V(G_2)$，根据观察 4.14，uv 是 G 中的一条支配边。因此，根据引理 4.8，$S \cap \{u, v\} \neq \varnothing$，矛盾。□

利用上述引理，我们现在可以确定完全多部图的坚韧度，从而推广命题4.13。

命题 4.16。设 $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$，其中 $1 \leqslant n_1 \leqslant \ldots \leqslant n_k$ 且 $n_k > 1$。则完全多部图 $K_{n_1,\ldots,n_k}$ 的坚韧度为

$$\tau(K_{n_1,\ldots,n_k}) = \frac{n}{n_k} - 1\,.$$

证明。令 $G = K_{n_1,\ldots,n_k}$。由于 $n_k > 1$，图 G 不是完全图。此外，若 $k = 1$，则 G 是不连通的，因此 $\tau(G) = 0$，且公式成立，因为 $n = n_1$。因此，令 $k \geqslant 2$，并令 $V_1, \ldots, V_k$ 为 G 的部集，使得对所有 $i \in [k]$，都有 $|V_i| = n_i$。令S 为 G的一个分隔集。由于 $V_1, \ldots, V_k$ 是 G 的各连通分支的顶点集，根据引理 4.15，S 必须包含除一个部集（设为 V_i）之外其余所有部集的全部顶点。由此可得 $|S| \geqslant n - n_i \geqslant n - n_k$。还需注意，$c(G-S) \leqslant n_i \leqslant n_k$。因此，对于所有分隔集 S，都有 $\frac{|S|}{c(G-S)} \geqslant \frac{n-n_k}{n_k} = \frac{n}{n_k} - 1$。此外，当$S = V(G) \setminus V_k$时等号成立。因此，由 (4.1)，$\tau(G) = \frac{n}{n_k} - 1$。□

§5. 图的联图

本节探讨图的联图的极小韧性。我们首先证明联结条件（条件 1.6）：如果两个图中的一个含有联图中最大度的一个顶点，那么另一个图必须是正则的。我们在此更详细地重述该条件。

定理 5.1. 设 t 为一个实数，且 G 为一个极小 t-坚韧图，满足 $G = G_1 * G_2$ 是图 G_1 和 G_2的联图。设 t_2 为 G_2的坚韧度。此外，假设 G_1 包含 G中一个度最大的顶点。那么 G_2 是一个$\lceil 2t_2\rceil$-正则的极小坚韧图，并且 $\lceil 2t\rceil = \lceil 2t_2\rceil + |V(G_1)|$。

证明. 设 $n_1 = |V(G_1)|$。设 $v \in V(G_1)$ 为 G中度最大的顶点，即$d_G(v) = \Delta(G)$。设 u 为 G_2中的任意顶点。由于 uv 是 G中的一条支配边（见 观察 4.14），根据 推论 4.11 可得 $\kappa_G(u,\ v) = \lceil 2t\rceil$。另一方面，根据 引理 3.3，$\kappa_G(u,\ v) =$ 最小值 $\{d_G(u), d_G(v)\} = d_G(u)$。注意到 $d_G(u) = d_{G_2}(u)+n_1$，因此

$$d_{G_2}(u) + n_1 = \lceil 2t\rceil. \tag{5.1}$$

注意到 G_2 不是完全图，否则，G_2 中的每个顶点在 G中都是全局顶点，因此 v 在 G 中也会是全局顶点，这与 引理 4.12 矛盾。因此，G_2 中存在某个分隔集。令 S_2 为 G_2中的一个韧分隔集。于是$t_2 = \frac{|S_2|}{c(G_2-S_2)}$。此外，$S = S_2 \cup V(G_1)$ 是 G 中的一个分隔集，并且 $G - S = G_2 - S_2$，这意味着 $c(G - S) = c(G_2 - S_2)$。因此

$$t \leqslant \frac{|S|}{c(G-S)} = \frac{|S_2| + n_1}{c(G_2 - S_2)} = t_2 + \frac{n_1}{c(G_2 - S_2)}.$$

又因为 $c(G_2 - S_2) \geqslant 2$，我们得到

$$t \leqslant t_2 + \frac{n_1}{2}\,. \tag{5.2}$$

结合（5.1）和（5.2）可得 $d_{G_2}(u) + n_1 = \lceil 2t\rceil \leqslant \lceil 2t_2 + n_1\rceil = \lceil 2t_2\rceil + n_1$，因此 $d_{G_2}(u) \leqslant \lceil 2t_2\rceil$。
另一方面，由推论 4.2 以及由于 $\kappa(G_2) \leqslant \delta(G_2)$，可得

$$\lceil 2t_2\rceil \leqslant \kappa(G_2) \leqslant \delta(G_2) \leqslant d_{G_2}(u).$$

因此我们有 $\lceil 2t_2\rceil \leqslant d_{G_2}(u) \leqslant \lceil 2t_2\rceil$，所以 $d_{G_2}(u) = \lceil 2t_2\rceil$ 对每个 $u \in V(G_2)$都成立。因此，G_2 是 $\lceil 2t_2\rceil$-正则的，并且根据引理 4.7，是极小坚韧的。将等式$d_{G_2}(u) = \lceil 2t_2\rceil$ 与（5.1）结合，得到 $\lceil 2t\rceil = \lceil 2t_2\rceil + n_1$，如所述。□

作为一个简单的推论，我们观察到如下结论。

注 5.2. 如果在定理 5.1 中，G_1 和 G_2 都包含一个在 $G = G_1 * G_2$中具有最大度的顶点，那么 G_1 和 G_2 都必须是正则的。

接下来，我们从 定理 5.1 推导出一个重要结果，将某些极小坚韧图的联图的刻画问题缩减为一个特定的无限图族。该结果将成为证明定理 1.1 （见 第 6 节）以及对极小坚韧余弦图进行部分刻画之一的主要工具（参见引理 7.1）。

引理 5.3。 设 G 是一个极小坚韧图，使得 $G = G_1 * G_2$ 是图 G_1 和 G_2 的联图，其中 G_1 包含 G 中一个最大度顶点，且 G_2 不连通。那么，对于某个 $\ell \geqslant 2$， G 同构于 $K_{1,\ell}$, $K_{2,3}$, $T_{2\ell,\ell}$ 或 $T_{2\ell-1,\ell}$ 。

证明。 设 $n_1 = |V(G_1)|$ 且 $n_2 = |V(G_2)|$。由于 G_2 不连通， $n_2 \geqslant 2$。令t 为 G的坚韧度。注意到 $\tau(G_2) = 0$，因为 G_2 不连通。因此，根据定理 5.1， G_2 是 0-正则的，即无边。

如果 $n_1 = 1$，那么由于 $n_2 \geqslant 2$，我们可以推知 $G \cong K_{1,\, n_2}$。因此，从现在起，我们假设$n_1 \geqslant 2$。令 $v \in V(G_1)$ 为 G 中度最大的顶点，并令 $u \in V(G_2)$ 为任意一个顶点。首先， $d_G(v) = n_2 + d_{G_1}(v)$；又由于 v 是 G中度最大的顶点，因此它也必定是 G_1中度最大的顶点，所以 $d_G(v) = n_2 + d_{G_1}(v) = n_2 + \Delta(G_1)$。此外，由于 G_2 无边，我们有 $d_G(u) = n_1$，而不等式 $d_G(u) \leqslant d_G(v)$等价于

$$n_1 \leqslant n_2 + \Delta(G_1). \tag{5.3}$$

此外，根据 引理 3.3， $\kappa_G(u,\ v) = d_G(u) = n_1$。
其次，由于 G_2 是不连通的，集合 $S := V(G_1)$ 是 G 和$c(G - S) = n_2$中的一个分隔集，因此 $t \leqslant \frac{n_1}{n_2}$。此外， uv 是 G 中的一条支配边，因此根据 引理 4.10，

$$n_1 = \kappa_G(u, v) < 2t + 1 \leqslant 2\frac{n_1}{n_2} + 1\,.$$

由于 $n_1 \geqslant 2$，对不等式 $n_1 < 2\frac{n_1}{n_2} + 1$ 重新整理可得

$$n_2 < \frac{2n_1}{n_1 - 1} = 2 + \frac{2}{n_1 - 1} \leqslant 4\,. \tag{5.4}$$

因此 $n_2 \in \{2,\ 3\}$。我们分别讨论这两种情形。
情形 *1*： $n_2 = 3$。在此情形下，(5.4) 中的第一个不等式变为 $3 < 2 + \frac{2}{n_1 - 1}$，整理后得到 $n_1 < 3$。因此 $n_1 = 2$。由于根据 引理 4.12， G 不可能有两个全邻顶点，所以 $G_1 \cong 2K_1$。因此$G \cong K_{2,\ 3}$。
情形 *2:* $n_2 = 2$。在这种情况下，不等式 (5.3) 变为 $n_1 \leqslant \Delta(G_1) + 2$ 因此 $n_1 - 2 \leqslant \Delta(G_1) \leqslant n_1 - 1$。
若 $\Delta(G_1) = n_1 - 2$，则我们在 (5.3) 中取等号，因此 G_2 也包含 G 中一个最大度顶点。正如 注 5.2 中所观察到的，这意味着 G_1 是正则的。但此时， $\Delta(G_1) = n_1 - 2$ 的补图 $\overline{G_1}$ 是一个 1-正则图。因此， n_1 必须是偶数，且 $G_1 \cong \frac{n_1}{2} K_2$。由此可得 $G_1 \cong \overline{T_{n_1,\ n_1/2}}$。因此， $G \cong T_{n_1+2,\ n_1/2+1} = T_{2\ell,\ell}$, 其中$\ell := \frac{n_1}{2} + 1 \geqslant 2$。

另一方面，若 $\Delta(G_1) = n_1 - 1$，则 v 是 G_1 中的全邻顶点。此外，v 也是 G 中的全邻顶点，因为它与 G_2 的两个顶点都相邻。因此，我们可以将 G 视为 $G[\{v\}] * (G - v)$ 的联图。显然， $G[\{v\}]$ 在 G 中包含一个最大度顶点，因此根据定理 5.1， $G - v$ 是正则的。注意，$d_{G-v}(u) = n_1 - 1$，因为 $d_G(u) = n_1$。因此， $G - v$ 是一个 $(n_1 - 1)$-正则图。现在，令 $H := (G - v) - V(G_2) = G_1 - v$，并任取 $w \in V(H)$。于是 $d_H(w) = d_{G-v}(w) - 2 = n_1 - 3$，因为 $N_{G-v}(w) = N_H(w) \cup V(G_2)$ 且 $|V(G_2)| = 2$。因此， H 是一个有 $n_1 - 1$ 个顶点的 $(n_1 - 3)$-正则图，所以 H 是一个 1-正则图。由此可知， $n_1 - 1$ 必为偶数，且 $H \cong \frac{n_1 - 1}{2} K_2$。因此，$\overline{H} \cong T_{n_1-1,\ (n_1-1)/2}$，所以$G_1 \cong T_{n_1,\ (n_1+1)/2}$。因此， $G \cong T_{n_1,\ (n_1+1)/2} * (2K_1) \cong T_{n_1+2,(n_1+3)/2} = T_{2\ell-1,\ell}$，，其中

$\ell := \frac{n_1+3}{2} \geqslant 3$。（注意，对于 $\ell = 2$，图 $T_{2\ell-1,\ \ell} = T_{3,\ 2}$ 与 $K_{1,\ 2}$ 同构；后者已在 $n_1 = 1$ 的情形中讨论过。）□

5.1. **含有全邻顶点的图**。我们在引理 4.12中证明了，每个非完全极小坚韧图至多有一个全邻顶点。由于每个含有全邻顶点的非平凡图都可以表示为两个较小图的联图，定理 5.1 给出了含有全邻顶点的极小坚韧图的如下刻画。

定理 5.4。设 t 为一个实数，设 G 为一个坚韧度为 t 的图，且 G含有全邻顶点 v，并设 t' 为图 $G' := G - v$的坚韧度。那么，当且仅当 G' 是一个 $\lceil 2t' \rceil$-正则图且 $\lceil 2t \rceil = \lceil 2t' \rceil + 1$ 时，G是极小坚韧的。

证明。注意到 G 是图 $G[\{v\}]$ 和 G'的联图。
首先假设 G是极小坚韧的。由于 v 是 G中度最大的顶点，根据定理 5.1，G' 是 $\lceil 2t' \rceil$-正则的，且 $\lceil 2t \rceil = \lceil 2t' \rceil + 1$。
反之，设 G' 是一个 $\lceil 2t' \rceil$-正则图，且 $\lceil 2t \rceil = \lceil 2t' \rceil + 1$。我们通过验证对于 G 的每条边，推论 4.5 的条件 (1) 都成立，来证明 G 是极小 t-韧的。首先，我们考虑两个端点都在 $V(G')$ 中的边。设 $uw \in E(G')$ 是任意一条边。于是 $\kappa_G(u,\ w) = \kappa_{G'}(u,\ w) + 1$，因为 G' 中内部顶点不相交的 u-w 路径的一个最大集合，加上路径 $(u,\ v,\ w)$ 后，就得到 G 中内部顶点不相交的 u-w 路径的一个最大集合。因此，根据引理 2.1，

$$\kappa_G(u,w) = \kappa_{G'}(u,w) + 1 \leqslant \min\{d_{G'}(u), d_{G'}(w)\} + 1 = \lceil 2t' \rceil + 1 = \lceil 2t \rceil,$$

因此在这种情况下，条件(1) 的推论 4.5 成立。其次，我们考虑与 v关联的边。设 $u \in V(G')$ 为任意顶点。对于边 uv，有$\kappa_G(u,\ v) = d_{G'}(u) + 1 = \lceil 2t' \rceil + 1 = \lceil 2t \rceil$，因此对于这类边，条件 (1) 的 推论 4.5 也成立。因此，根据推论 4.5，G 是极小的 t-韧的。□

Dallard 等人证明，在 [9] 中，对于有理数 $t \leqslant 1$，唯一具有全邻顶点的极小 t-坚韧图是星图 $K_{1,\ \ell}$（当 $\ell \geqslant 2$ 时；见 [9, 定理 4.6]）。注意，$K_{1,\ \ell}$ 的坚韧度为 $1/\ell$（见命题 4.13）。Dallard 等人还指出，对于 $t > 1$，轮图是具有一个全邻顶点的极小 t-坚韧图的例子。对于整数 $\ell \geqslant 5$，轮图 W_ℓ 是 K_1 与圈 $C_{\ell-1}$ 的联图。Dallard 等人 [9, 在命题 4.7] 中证明，对所有 $\ell \geqslant 5$，轮图 W_ℓ 都是极小坚韧图；当 ℓ 为奇数时，其坚韧度等于 $1 + 2/(\ell - 1)$，当 ℓ 为偶数时，其坚韧度等于 $1 + 2/\ell$。利用定理 5.4，我们将他们对 $t \leqslant 1$ 时具有全邻顶点的极小 t-坚韧图的刻画推广到 $t \leqslant 3/2,$，并进一步证明，对于 $t \in (1,\ \frac{3}{2}]$，轮图是唯一具有全邻顶点的极小 t-坚韧图。

命题5.5。设 $t \in (0, 3/2]$，且 G 是具有一个全邻顶点的极小 t-韧性图。那么以下情况之一成立：

(1) $t \leqslant 1/2$ 和 $G \cong K_{1,\ \ell}$，其中 $\ell \geqslant 2$；
或者(2) $t > 1$ 和 $G \cong W_\ell$，其中 $\ell \geqslant 5$。

证明。设 v 是 G中的一个全邻顶点。设 $G' = G - v$，并设 t' 为G'的坚韧度。由定理 5.4，G' 是 $\lceil 2t' \rceil$-正则的，且 $\lceil 2t' \rceil = \lceil 2t \rceil - 1$。我们考虑三种情形。

首先假设 $t \in (0,\ 1/2]$。则 $\lceil 2t' \rceil = \lceil 2t \rceil - 1 = 0$，因此 G' 是 0-正则的，故对某个 $\ell \geqslant 2$ 有 $G' \cong \ell K_1$，从而 $G \cong K_{1,\ \ell}$。
现在假设 $t \in (1/2, 1]$。那么 $\lceil 2t' \rceil = \lceil 2t \rceil - 1 = 1$，因此 G' 是 1-正则的。所以$G' \cong mK_2$ 对 $m \geqslant 2$ 成立（$m \neq 1$，因为 G' 不是完全的）。但此时 G' 是不连通的，因此 $t' = 0$，这与 $\lceil 2t' \rceil = 1$矛盾。因此，对于 $t \in (1/2, 1]$,，不存在具有全邻顶点的极小t-坚韧图。

假设 $t \in (1,\ 3/2]$。那么 $\lceil 2t' \rceil = \lceil 2t \rceil - 1 = 2$，因此 G' 是 2-正则的；又由于 $t' > 0$，G' 是连通的。此外，G' 不是完全的。因此，对于某个 $m \geqslant 4$，$G' \cong C_m$ 成立，进而 $G \cong W_{m+1}$。□

最后，我们利用定理 5.4 给出以下 [9]中的结果的一个新证明。

定理 5.6 (Dallard 等人 [9, 定理 4。8])。对于任意实数 $t > 1$，都不存在带有全邻顶点的极小 t-坚韧弦图。

证明。设 $t > 1$ 为一个实数，并假设存在一个带有全邻顶点 v的极小 t-坚韧弦图 G。设 $G' = G - v$，并令 t' 为 G'的坚韧度。由定理 5.4，G' 是 $\lceil 2t' \rceil$-正则的，且 $\lceil 2t' \rceil = \lceil 2t \rceil - 1$。特别地，由于 $t > 1$，我们得到 $\lceil 2t' \rceil \geqslant 2$，因此 G' 是一个连通的 d-正则图，其中某个 $d \geqslant 2$。接下来注意到，由于 G 是弦图，G'也是弦图。由引理 2.3，$G' \cong K_{d+1}$，因此，$G \cong K_{d+2}$。于是，$t = \infty$，矛盾。□

§6. P_4无图

本节将刻画极小坚韧的 P_4无图。为此，我们需要以下定理，它描述了连通 P_4无图的结构。

定理 6.1 (Corneil 等人 [8], Gurvich [13, 14], Sumner [31])。设 G 是一个连通P_4无图，且满足 $|V(G)| \geqslant 2$。那么，存在 $V(G)$ 的唯一划分，使其分成最多数量的 $k \geqslant 2$ 部集 V_1、……、V_k，并满足以下条件。

(1) 对于每个 $i \in \{1$、……、$k\}$，$G[V_i] \cong K_1$ 或 $G[V_i]$ 是不连通的。
(2) 对于满足 $i \neq j$的每个 $u \in V_i$ 和 $v \in V_j$，都有 $\{u$、$v\} \in E(G)$。

现在我们可以证明定理 1.1；事实上，我们将证明它的以下加强版。

定理 6.2. 设 G 是一个无 P_4 图。那么，以下条件等价。

(i) G 是非平凡极小坚韧的。(ii) G 同构于以下图之一：$K_{1,\ell}$, $K_{2,3}$, $T_{2\ell,\ell}$，或 $T_{2\ell-1,\ell}$，其中 $\ell \geqslant 2$。(iii) G 是一个具有 n 个顶点的完全多部图 $K_{n_1,\ldots,n_k}$，有 $k \geqslant 2$ 个部集，且$n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_k$和 $n - n_2 < \binom{2n}{n_k} - 1$。

证明。不妨设 G 是连通图且至少有两个顶点，否则三个条件均不成立。根据 定理 6.1，$V(G)$ 存在唯一的划分，使部集数量最大，$k \geqslant 2$ 这些部集为 $V_1, \ldots, V_k$ 且满足该定理的条件 (1) 和(2) 。

我们来证明(i) 蕴含(ii)。假设 G 是非平凡极小坚韧的。令u 为 G中度最大的顶点，令 $i \in [k]$ 为包含u 的部分的指标（即 $u \in V_i$），并任取一个 $j \in [k] \setminus \{i\}$。那么，$G[V_j]$ 是不连通的，

否则， V_j 中的唯一顶点将是 G中的全邻顶点；根据 u 的选取，这意味着 u 也是全邻顶点，这与引理 4.12矛盾。注意，G 是图 $G_1 \coloneqq G - V_j$ 和 $G_2 \coloneqq G[V_j]$的联图。由于 $u \in V(G_1)$ 且 G_2 不连通，引理 5.3 推出 G 同构于$K_{1、\ell}$、 $K_{2、3}$、 $T_{2\ell、\ell}$或$T_{2\ell-1、\ell}$ 中的一个，其中 $\ell \geqslant 2$为某个值。

事实(ii)蕴含(iii)可由一个留给读者完成的简单计算得出。为证明(iii)蕴含(i)，假设 G 满足(iii)的条件。设 t 为 G的坚韧度。由于 G 不是完全图， $n_k > 1$；因此，根据命题 4.16， $t = \frac{n}{n_k} - 1$。注意，完全多部图中的每条边都是支配边。我们通过应用G 来证明其为极小坚韧图推论 4.5。根据推论 4.9，推论 4.5 的第二个条件永远不成立，因此只需证明，对于每条边 $\kappa_G(u,\ v) < 2t + 1$ 均成立 $uv \in E(G)$。

设 $uv \in E(G)$ 为任意一条边， V_i 和 V_j为分别包含 u 和 v的部集，且 $1 \leqslant i < j \leqslant k$。注意， G 是图 $G_1 \coloneqq G[V_i]$与图 $G_2 \coloneqq G - V_i$的联图。此外，由于完全多部图 G的部集恰为集合 V_1、.....、 V_k，我们可得 $d_G(u) = n - n_i \geqslant n - n_j = d_G(v)$。由于 $u \in V(G_1)$ 且 $v \in V(G_2)$，根据引理 3.3， $\kappa_G(u,\ v) = n - n_j$。又由于根据假设，$n_2 \leqslant n_j$ 且 $n - n_2 < \frac{2n}{n_k} - 1$，可得 $\kappa_G(u,\ v) \leqslant n - n_2 < \frac{2n}{n_k} - 1 = 2t + 1$，正如所需。□

回顾广义 Kriesell 猜想：对于每个正实数 t，每个极小 t-坚韧图都有一个度为 $\lceil 2t \rceil$ 的顶点。由定理 6.2 可知，广义 Kriesell 猜想对 P_4-free 图成立。

推论 6.3。 设 t 为正实数，且 G 为一个极小 t-坚韧 P_4-*free* 图。则 G 有一个度为 $\lceil 2t \rceil$的顶点。

证明。 由于 t 为正实数， G 是非平凡极小坚韧图。因此，根据定理 6.2， G 同构于$K_{1、\ell}$、 $K_{2、3}$、 $T_{2\ell、\ell}$或 $T_{2\ell-1、\ell}$ 中的一个，其中某个 $\ell \geqslant 2$。下面我们证明在上述每种情形下都有 $\delta(G) = \lceil 2t \rceil$。
若 $G \cong K_{1、\ell}$对某个 $\ell \geqslant 2$成立，则根据命题 4.13， $t = \frac{1}{\ell}$。-显然，$\delta(K_{1、\ell}) = 1$，从而 $\delta(G) = 1 = \lceil 2t \rceil$。若 $G \cong K_{2、3}$，则根据命题 4.13， $t = \frac{2}{3}$。由于$\delta(K_{2、3}) = 2$，我们有 $\delta(G) = 2 = \lceil 2t \rceil$。最后，若 G 同构于$T_{2\ell、\ell}$或 $T_{2\ell-1}$，其中某个 $\ell \geqslant 2$，则 G 是一个最大部分大小为 2 的完全多部图，因此根据命题 4.16， $t = \frac{n}{2} - 1$，其中 n 是 G的阶。此外，容易看出 $\delta(G) = n - 2$。因此， $\delta(G) = n - 2 = \lceil 2t \rceil$。□

§7. 余弦图

本节刻画余直径至少为 3 的极小坚韧余弦图。我们先讨论余直径为无穷大的情形，也就是补图不连通的情形。

引理 7.1。补图不连通的余弦图是非平凡极小坚韧的，当且仅当它同构于 $K_{1、\ell}$、 $K_{2、3}$、 $T_{2\ell、\ell}$ 或 $T_{2\ell-1、\ell}$，其中某个 $\ell \geqslant 2$。

证明。 设 G 是一个补图不连通的余弦图。设 $v \in V(G)$ 是 G 中的最大度顶点，并设 Q 是 G 的一个不包含 v的连通分支。则 $G = Q * (G - V(Q))$。假设 G 是非平凡极小坚韧的。那么，根据定理 5.1， Q 是正则的。此外，根据引理 4.12， G 至多包含一个全邻顶点，因此， $|V(Q)| \geqslant 2$。特别地， Q 是一个至少有两个顶点的正则弦图。根据引理 2.3， Q 是完全的，这意味着图 Q 是无边的，因而是不连通的。因此，结论由引理 5.3得证。
逆命题由定理 6.2得出。 □

由引理 2.2 可知，在每个具有正且有限直径的弦图中， d存在两个距离为 d的单纯顶点。在下一个引理中，我们考虑$d \geqslant 3$ 的情形，并确定图的补图中这对顶点的局部连通度。

引理 7.2。 设 G 为余弦图，其余直径为 $d \geqslant 3$；设 u、w 为 G 中的单纯顶点，且它们在 G中的距离为 d；设 $U := N_G(u)$，设 $W := N_G(w)$，设$X := V(G) \setminus (U \cup W \cup \{u, w\})$；并设 m 为 $G[U \cup W]$中匹配的最大规模。那么 $\kappa_G(u, w) = |X| + m + 1$。

证明。 参见图 7.1 以了解该引理设置的示意图。

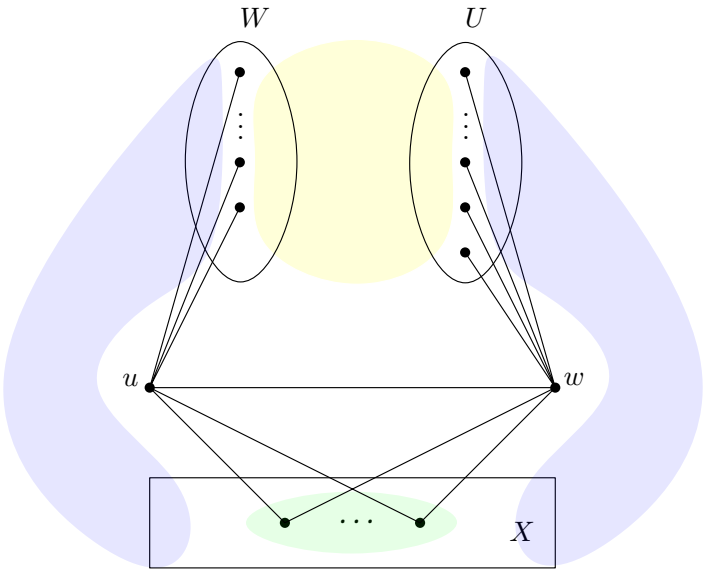

图 7.1。余弦图的结构，其余直径至少为 3。该图展示了与 u 或 w 相 incident 的所有边，而 U 和 W 是独立集。此外，U 与 W （黄色）之间、 $U \cup W$ 与 X （紫色）之间以及 X 内部可能存在一些边。

令 $\mathcal{P}^*$ 是 G 中 u-w 路径的一个最大集合，这些路径两两内部顶点不相交，并且 总长度 $\mathcal{P}^*$（即 $\sum_{P \in \mathcal{P}^*} |E(P)|$） 最小。
首先，由 $\mathcal{P}^*$ 的极大性可知， $(u, w) \in \mathcal{P}^*$。
其次，对于每个 $x \in X$，根据 X 的定义可知， (u, x, w) 是 G 中的一条路径。此外， $(u, x, w) \in \mathcal{P}^*$。事实上，若对于某个 $x \in X$，路径 $(u, x, w) \notin \mathcal{P}^*$，那么 x 要么不是 $\mathcal{P}^*$ 中任何路径的顶点，要么存在一条长度至少为 3 且包含 x 的路径 $P' \in \mathcal{P}^*$ 。在第一种情况下，这与极大性相矛盾

对于 $\mathcal{P}^*$ 而言，因为可以将路径 $(u,\ x,\ w)$ 加入 $\mathcal{P}^*$。在第二种情况下，可以用路径 $(u,\ x,\ w)$ 替换 P'，这与 $\mathcal{P}^*$ 的总长度最小这一点相矛盾。

最后，令 $\mathbf{P}_3^*$ 为 $\mathbf{P}^*$中剩余的路径，即，$\mathbf{P}_3^*$ 是 $\mathbf{P}^*$ 中不属于集合 $\{(u,w)\}\cup\{(u,x,w)$ 的路径集合：$x\in X\}$。那么，$\mathbf{P}_3^*$是图 $G:=G[U\cup W\cup\{u,w\}]-uw$ 中$\widehat{}$条两两内部顶点不相交的 u-w 路径的最大集合。$\widehat{}$注意到 $G[U\cup W]$ 是一个二部图，$N_{\widehat{G}}(u)=W$，且 $N_{\widehat{G}}(w)=U$。因此，G 是 $(G[U\cup W],W,U)$ 的 (u,w)-扩展（见定义 3.1），故根据引理 3.2，对于某个 $G[U\cup W]$ 中的最大匹配 M，有 $\mathbf{P}_3^*=\mathbf{P}(M)$。于是，$|\mathbf{P}_3^*|=m$。所以，$\kappa_G(u,w)=|\mathbf{P}^*|=|\{(u,w)\}|+|\{(u,x,w)\colon\ x\in X\}|+|\mathbf{P}_3^*|=1+|X|+m$。

□

接下来，我们使用引理 7.2 来证明不存在补图连通且余直径至少为 4的极小坚韧余弦图。

引理 7.3. 设 G 是补图连通且余直径大于或等于 4 的余弦图。则 G 不是极小坚韧的。

证明。由于 $\overline{G}$ 是弦图且 $\operatorname{diam}(G)\geqslant 4$，根据引理 2.2，存在单纯顶点 u和 w，它们在 G中的距离为 $\operatorname{diam}(G)$。我们按引理 7.2 定义 U、W、X和 m，并得出 $\kappa_G(u、\ w)=|X|+m+1$。不失一般性，假设$|W|\leqslant|U|$，并注意到 $G[U\cup W]$ 是完全二部图。因此 $m=|W|$，从而 $\kappa_G(u、\ w)=|X|+|W|+1$。

设 t 为 G的坚韧度。由于 u 与 w 在 G 中的距离至少为4，由引理 4.8，$u\overline{w}$ 是 G中的一条支配边。因此，由引理 4.10，要证明 G 不是极小坚韧的，只需证明 $2t+1\leqslant\kappa_G(u,\ w)$。

由于 $N_{\overline{G}}(u)=U$，我们推断 U 非空，否则 G 将不包含任何u-$\overline{w}$ 路径，这与 G 连通这一事实相矛盾。类似地，W 非空。我们考虑两种情形。

情形 *1*：$|U|=1$。设 $n:=|V(G)|$。在此情形下，$|W|=1$，因此 $n=|X|+4$与$\kappa_G(u,w)=|X|+2=n-2$。此外，由于 G 连通且直径$(G)\geqslant 4$，存在一个顶点 $x\in V(\overline{G})$ 满足 $d_G(x)\geqslant 2$。于是 $d_G(x)\leqslant n-3$，且 $N_G(x)$ 是 G中的一个分隔集。因此$t\leqslant\binom{n-3}{2}$。所以，$2t+1\leqslant n-3+1=\kappa_G(u,\ w)$。

情形 *2*：$|U|\geqslant 2$。注意 $|X|\geqslant 1$，否则 G 将不连通，因为在 G中 $U\cup\{u\}$ 与 $W\cup\{w\}$ 之间没有边。此外，集合$S=X\cup W\cup\{w\}=N_{\overline{G}}(u)$是 G和 $V(G)\setminus S=U\cup\{u\}$中的分隔集。由于 $U\cup\{u\}$在 G中是独立的，我们有 $c(G-S)=|U|+1$，从而 $t\leqslant\frac{|X|+|W|+1}{|U|+1}\leqslant\binom{|X|+|W|+1}{3}$，因为 $|U|\geqslant 2$。因此

$$2t+1\leqslant\frac{2}{3}(|X|+|W|+1)+1=\frac{2}{3}\kappa_G(u,w)+1\leqslant\kappa_G(u,w)\,,$$

其中最后一个不等式由 $\kappa_G(u,w)=|X|+|W|+1\geqslant 3$这一事实得出。□

最后，我们应用引理 7.2 来证明余直径为3 的唯一极小坚韧余弦图是双星。

引理 7.4. 设 G 是余直径为3的余弦图。则 G 是极小坚韧的，当且仅当 G 同构于$S_{k,\ell}$，对某些 k、$\ell\geqslant 1$。

证明. 所述条件的充分性由双星是树这一事实得出，因此它们是极小坚韧的。

为证明必要性，假设 G 是极小坚韧的。由于 G 是弦图，且直径$(G) = 3$，根据引理 2.2，存在单纯顶点 u 和 w，它们之间的距离为3，且位于 G中。再次采用引理 7.2中的设定，可得 $\kappa_G(u, v) = |X| + m + 1$。
令 t 表示 G的坚韧度。根据 uw，引理 4.8表明它是一条支配边；结合引理 4.10可得 $\kappa_G(u, w) < 2t + 1$，进而得到 $\kappa_G(u, w) = \lceil 2t \rceil$，由引理 4.6可知。因此，

$$|X| + m + 1 = \lceil 2t \rceil. \tag{7.1}$$

对于任意一对顶点 $u' \in U$ 和 $w' \in W$，由（7.1）、推论 4.2和引理 2.1可得

$$|X| + m + 1 = \lceil 2t \rceil \leqslant \kappa(G) \leqslant \kappa_G(u', w'). \tag{7.2}$$

此外，定义 $\mathbf{P}(u', w')$ 为 G 中连接 u' 与 w' 的内部顶点不相交路径的最大集合，并令 $\mathbf{P}_X(u', w') := \{P \in \mathbf{P}(u', w') : V(P) \cap X \neq \varnothing\}$ 为 $\mathbf{P}(u', w')$ 中至少包含一个来自 X 的顶点的路径集合。由于 $\mathbf{P}(u', w')\widehat{\ }$ 中的路径内部顶点不相交，$|\mathbf{P}_X(u', w')| \leqslant |X|$。令 $\mathbf{P}(u', w') := \mathbf{P}(u', w') \setminus \mathbf{P}_X(u', w')$。我们首先证明以下断言。

断言。 如果 $m = 0$，那么 $|X| = 0$。

断言的证明。 假设 $m = 0$。与引理 7.3的证明类似，集合U 和 W 均非空。

任取 $u' \in U$ 和 $w' \in W$ 作为顶点。由于 $m = 0$，U 与 W之间没有边。因此，在 u'-w' 中唯一的路径（即唯一可能的不包含来自 X的任何顶点的 u'-w'路径）是 (u', w, u, w')，因此$\left|\widehat{\mathcal{P}}(u', w')\right| \leqslant 1$。但是，根据（7.2），

$$|X| + 1 \leqslant \kappa_G(u', w') = |\mathcal{P}(u', w')| = |\mathcal{P}_X(u', w')| + \left|\widehat{\mathcal{P}}(u', w')\right| \leqslant |X| + 1,$$

这意味着 $\mathcal{P}(u', w') = \{(w', u, w, u')\}$ 且 $|\mathcal{P}_X(u', w')| = |X|$。
由于 $|\mathbf{P}_X(u', w')| = |X|$，$\mathbf{P}_X(u', w')$ 中的每条路径都恰好包含一个属于 X 的顶点。此外，由于 $(w', u, w, u') \in \mathbf{P}(u', w')$，$\mathbf{P}_X(u', w')$ 中的路径均不可能包含顶点 u 和 w。由于 U 与 W之间没有边，$\mathbf{P}_X(u', w')$ 中长度大于 2 的每条路径都必须至少包含两个来自 X 的顶点；因此，这样的路径不可能存在。于是，$\mathbf{P}_X(u', w')$ 中的所有路径长度都为 2；特别地，$\mathbf{P}_X(u', w') = \{(u', x, w') : x \in X\}$，因为 $|\mathbf{P}_X(u', w')| = |X|$。这意味着 X 中的每个顶点在 G 中都与 u' 和 w'相邻。
由于 $u' \in U$ 和 $w' \in W$ 的选择是任意的，X 中的每个顶点在G 中都与 $U \cup W$中的每个顶点相邻。此外，根据 X的定义，X 中的每个顶点在 G 中都同时与 u 和 w相邻。这意味着 $G = (\overline{G - X}) * X$。因此，若 $|X| \geqslant 1$，则 G 是不连通的，这与 $\operatorname{diam}(G) = 3$ 矛盾。□

若 $m = 0$，则上述断言意味着 $G \cong S_{k,\ell}$，其中 $k = |U| \geqslant 1$ 且$\ell = |W| \geqslant 1$。

在证明的余下部分，我们假设 $m \geqslant 1$，并证明在这种情况下不存在极小坚韧图。由于 u 与 w 在 G 中的距离为 3，因此存在一条

u-w 长度为 3 的 G，记作 $(u,\ u_0,\ w_0,\ w)$，其中 $u_0 \in U,\ w_0 \in W$。于是 $u_0w_0 \notin E(G)$，由（7.2）可得

$$|X| + m + 1 \leqslant \kappa_G(u_0, w_0). \tag{7.3}$$

我们考虑上文定义的 u_0-w_0 路径集合 $\mathbf{P} := \mathbf{P}(u_0, w_0)$, $\mathbf{P}_X := \mathbf{P}_X(u_0, w_0)$ 以及 $\mathbf{P} := \mathbf{P}(u_0, w_0)$。令 $p := \left|\mathbf{P}\right|$。我们有 $\kappa_G(u_0, w_0) = |\mathbf{P}| = |\mathbf{P}_X| + \left|\mathbf{P}\right| \leqslant |X| + p$。结合不等式 (7.3)，可得 $|X| + m + 1 \leqslant \kappa_G(u_0, w_0) \leqslant |X| + p$。因此$m + 1 \leqslant p$. 特别地，由于 $m \geqslant 1$, 我们有 $p \geqslant 2$。

现在我们证明，在这些假设下，总能构造出一个匹配 M in$G[U \cup W]$，其大小至少为 $p \geqslant m + 1$。这将进而与将 m 选作 $G[U \cup W]$ 中最大匹配的大小相矛盾。

令$\mathcal{P}_{uw} := \{P \in \mathcal{P}$为：$V(P) \cap \{u, w\} \neq \varnothing\}$即$\mathcal{P}$中至少包含顶点 u 或 w之一的路径所组成的子集。由于$\mathcal{P}$ 中的路径是内部顶点不相交的，$|\mathcal{P}_{uw}| \leqslant 2$。注意到$\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_{uw}$ 中的每条路径长度至少为 3，并且在 U 中的顶点与 W中的顶点之间交替。我们分两种情形讨论。

情形 1：$|\mathbf{P}_{uw}| \leqslant 1$。由于 $2 \leqslant p = \left|\mathbf{P}\right| = \left|\mathbf{P} \setminus \mathbf{P}_{uw}\right| + |\mathbf{P}_{uw}|$，假设 $|\mathbf{P}_{uw}| \leqslant 1$意味着 $\left|\mathbf{P} \setminus \mathbf{P}_{uw}\right| \geqslant 1$。我们按如下方式构造一个匹配 M。首先从$M = \varnothing$开始。然后任取一条路径 $Q \in \mathbf{P} \setminus \mathbf{P}_{uw}$，并将 M 中与 u_0 和 w_0 相 incident 的 Q 的边加入其中（注意，由于 Q 的长度至少为 3，这两条边不相交）。最后，对于每条路径 $P \in \mathbf{P} \setminus (\mathbf{P}_{uw} \cup \{Q\})$, 我们将 P中任意一条不与 u_0 或 w_0相 incident 的边加入 M。由于 $\mathbf{P} \setminus (\mathbf{P}_{uw} \cup \{Q\})$中至少有 $p - 2$ 条路径，且每条路径长度至少为 3，因此我们在 M中至少得到 $p - 2$ 条边。再加上路径 Q中的两条边，我们由此得到 $|M| \geqslant p$。于是，M确实是 $G[U \cup W]$中的一个匹配，因为 $\mathbf{P} \setminus \mathbf{P}_{uw}$ 中的路径是内部顶点不相交的，端点 u_0 和 w_0各自只与 M中的一条边相 incident，并且 M中所有边的端点都在 $U \cup W$中。

情形 2：$|\mathcal{P}_{uw}| = 2$。在这种情况下，$|\mathcal{P}_{uw}| = 2$，也就是说，P_u 和 P_w 中存在两条不同的路径，位于$\mathcal{P}_{uw}$ 中，使得 $u \in V(P_u)$ 和 $w \in V(P_w)$。此外，由于 P_u 和 P_w 内部顶点不相交，P_u 不包含 w。因此，存在一个顶点 $w_1 \in W \setminus \{w_0\}$，使得 $u_0w_1 \in E(P_u)$。类似地，存在一个顶点 $u_1 \in U \setminus \{u_0\}$，使得$w_0u_1 \in E(P_w)$。我们通过取边 u_0w_1和 w_0u_1，在 $G[U \cup W]$ 中构造一个匹配 M。此外，对于每条路径 $P \in \mathcal{P} \setminus \{P_u, P_w\}$，我们向 M 中添加任意一条与 u_0和 w_0 均不关联的边。然后，与之前一样，M是 $G[U \cup W]$ 中的一个匹配，且 $|M| = p$。

因此，无论哪种情况，我们都会与以下事实矛盾：$m < p$ 和 m 是 $G[U \cup W]$中的最大匹配的大小。□

结合引理 7.1、7.3 和7.4 以及以下事实：$S_{1,\ 1} \cong P_4$ 即可证明定理 1.3。为方便读者，现重述如下。

定理 1.3。余弦图的余直径至少为3 时，它是非平凡极小坚韧图，当且仅当它同构于 P_4、$K_{2,\ 3}$、$K_{1,\ \ell}$、$S_{k,\ \ell}$、$T_{2\ell,\ \ell}$或$T_{2\ell-1,\ \ell}$，其中 $k \geqslant 1$ 和 $\ell \geqslant 2$。

由定理 1.3 可知，广义 Kriesell 猜想对余直径至少为3的余弦图成立。

推论 7.5. 设 t 为正实数，并设 G 为余直径至少为3的极小 t-坚韧余弦图。则 G 有一个度为 $\lceil 2t \rceil$的顶点。

证明。 由于 t 是一个正实数， G 是非平凡极小坚韧的。因此，根据 定理 1.3， G 要么是无 P_4 的，要么与某个 $k, \ell \geqslant 1$ 的 $S_{k,\ell}$ 同构。前一种情况下，由 推论 6.3，断言成立。现在假设 $G \cong S_{k,\ell}$ ，其中某个$k, \ell \geqslant 1$ ，并且不失一般性地假设 $k \leqslant \ell$。于是 $t = \frac{1}{\ell+1}$ （参见例如 [3]），并且$\delta(G) = 1 = \lceil 2t \rceil$。□

7.1. **无网余弦图。** 现在我们利用 定理 1.4 、定理 1.3以及 Groshaus 和 Szwarcfiter 给出的遗传闭邻域-Helly 图的如下刻画 [12]，推导出 定理 1.4 。如果图 G 的顶点闭邻域构成的族具有 Helly 性质，即 G 的闭邻域中任意两两相交的子族都有公共元素，则称图为闭邻域-*Helly* 图。如果图 G 的每个诱导子图都是闭邻域-Helly 图，则称图 G 为遗传闭邻域-*Helly* 图。回顾一下，网 是图 $S_{1,1,1}$，也就是从完全图 K_3 出发，在每个顶点上各附加一条悬挂边所得到的图。补网 是网的补图。（补网在文献中还有多个其他名称，包括 3-太阳 和*Hajós* 图。）

定理 7.6 (Groshaus 和 Szwarcfiter [12, 定理 3.2])。 图 G 是遗传闭邻域-*Helly* 图，当且仅当它不含 C_4、 C_5、 C_6 或补网作为诱导子图。

定理 1.4。 无网余弦图是非平凡极小坚韧的，当且仅当它同构于以下某个图： P_4、 $K_{2,3}$、 $K_{1,\ell}$、 $S_{k,\ell}$、 $T_{2\ell,\ell}$或 $T_{2\ell-1,\ell}$ ，其中 $k \geqslant 1$和 $\ell \geqslant 2$满足相应条件。

证明。 设 H 是无补网弦图，且 G 是 H的补图。若 H的直径至少为 3，则由定理 1.3可知该等价关系成立，因为对于 $k \geqslant 1$ 和 $\ell \geqslant 2$ ，图 P_4、 $K_{2,3}$、 $K_{1,\ell}$、 $S_{k,\ell}$、 $T_{2\ell,\ell}$以及 $T_{2\ell-1,\ell}$ 均为无网图。
现在假设 H 的直径至多为 2。那么，任意两个闭邻域都有非空交集。由于 H 不含 C_4、 C_5、 C_6 或补网作为诱导子图，根据 定理 7.6， H 的闭邻域有一个公共元素，也就是说， H 有一个全邻顶点。因此， G 有一个孤立顶点，且定理中的两个条件均不成立。□

特别地，广义 Kriesell 猜想对无网余弦图成立。还需指出，由于每个区间图都是强弦图，而每个强弦图都是无补网弦图，定理 1.4 蕴含了区间图的补图类和强弦图的补图类中非平凡极小坚韧图的类似刻画。相关陈述与定理 1.4相同，只需分别将“无网余弦图”替换为“区间图的补图”和“强弦图的补图”。

7.2. **森林的补图。** 最后，我们由定理 1.5 推出定理 1.3。

定理 1.5. 森林的补图是非平凡极小坚韧的，当且仅当它同构于 P_4, $T_{2\ell,\ \ell}$，或 $T_{2\ell-1,\ \ell}$ ，其中 $\ell \geqslant 2$。

证明。设 F 是一个森林，G 是 F 的补图。若 F 的直径至多为 1，则 G 无边，定理中的两个条件均不成立。若 F 的直径为 2，则 F 同构于一个至少有两个叶子的星图，此时 G 不连通，定理中的两个条件仍均不成立。

现在假设 G 的余直径至少为 3。由于 G 是余弦图，定理 1.3意味着：当且仅当 G 同构于某个 P_4, $K_{2,3}$, $K_{1,\ell}$, $S_{k,\ell}$, $T_{2\ell,\ell}$ 或 $T_{2\ell-1,\ell}$（其中 $k \geqslant 1$ 和 $\ell \geqslant 2$ 取某些值）时，G 才是非平凡极小坚韧。注意，$T_{3,2} \cong K_{1,2}$。因此，由于图 $K_{2,3}$, $K_{1,\ell}$（其中 $\ell \geqslant 3$ 取某值）以及 $S_{k,\ell}$（其中 $k \geqslant 1$ 和 $\ell \geqslant 2$ 取某些值）都不是森林的补图，定理得证。□

作为一个推论，类似于 推论 7.5，我们得到广义 Kriesell 猜想对森林的补图成立。

§8. 未解决的问题

本研究留下的主要未解决问题是，定理 1.1 至 1.5 是否存在一个共同的推广，可由对以下问题的回答给出。

问题 8.1. 刻画极小坚韧弱弦图。

该问题作为一个特例，包含对非平凡极小坚韧弦图的刻画。Dallard 等人猜想，坚韧度超过 1 时此类图不存在 [9]。

另一个有趣的特例是余弦图的情形。那些同时也是弦图的图为分裂图，其极小韧性已被完全刻画 [23]。对于余弦图的一般情形，我们得到了部分刻画（见定理 1.3 和 1.4），仅余补图直径为 2 且包含诱导余网的情形尚未解决。对于这一情形，我们猜想非平凡极小坚韧图恰好是由三个星图$K_{1,\ell}$ 的不交并（对正整数 ℓ ）通过在它们的中心之间添加一个三角形而得到的图；我们将这些图记为$S_{\ell,\ell,\ell}$。这些图是余直径为 2 的仅有的极小坚韧分裂图；参见 Katona 和 Varga [23]。

猜想 8.2。设 G 是一张余弦图，其余直径为 2。那么 G 是非平凡极小韧的，当且仅当 G 同构于某个 $\ell \geqslant 1$ 所对应的 $S_{\ell、\ell、\ell}$。

由于所有图 $S_{\ell、\ell、\ell}$ 的坚韧度都至多为 $1/2,$，因此，证明 猜想 8.2 的一个可能更容易的第一步，是探讨以下问题。

问题 8.3。余直径为2的极小坚韧余弦图的最大坚韧度是多少?

我们已经证明，广义 Kriesell 猜想对余直径至少为 3 的余弦图成立（见推论 7.5）。注意到，猜想 8.2 若成立，则可推出广义 Kriesell 猜想对整个余弦图类都成立。

致谢

本研究部分得到了斯洛文尼亚研究与创新局（I0-0035、研究计划P1-0285以及研究项目J1-60012、J1-70035、J1-70046、

和N1-0370）的资助，同时还得到了普里莫尔斯卡大学CogniCom研究计划（0013103）的资助。

参考文献

[1] Douglas Bauer、Hajo Broersma 和 Edward Schmeichel，《图的坚韧度——综述》，Graphs Combin.，22(1):1–35，2006年。数字对象标识符：10.1007/s00373-006-0649-0 数学评论：2221006[2] Andreas Brandstädt、Van Bang Le 和 Jeremy P. Spinrad，《图类：综述》（SIAM 离散数学与应用专著）。工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州，1999年。数字对象标识符：10.1137/1.9780898719796 数学评论：1686154[3] Hajo Broersma，《坚韧度究竟有多坚韧？》，Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci. EATCS，(117):28–52，2015年。https://bulletin.eatcs.org/index.php/beatcs/article/view/362 数学评论：3443703[4] Kathie Cameron、R. Sritharan 和 Yingwen Tang，《在弱弦图中寻找最大导出匹配》，离散数学，266(1-3):133–142，2003年。数字对象标识符：10.1016/S0012-365X(02)00803-8 数学评论：1991712[5] Shiyu Cao、Jing Chen 和 Wei Zheng，《独立数较小的极小1-坚韧图的结构》，Graphs Combin.，41(2)，论文编号37，13页，2025年。数字对象标识符：10.1007/s00373-025-02902-z 数学评论：4866588[6] Shiyu Cao、Jing Chen 和 Wei Zheng，《关于极小 t-坚韧图及其 $t \leqslant 1$》，离散数学，349(2)，论文编号114814，15页，2026年。数字对象标识符：10.1016/j.disc.2025.114814 数学评论：4964068[7] V. Chvátal，《坚韧图与哈密顿回路》，离散数学，5:215–228，1973年。数字对象标识符：10.1016/0012-365X(73)90138-6 数学评论：316301[8] D. G. Corneil、H. Lerchs 和 L. Stewart Burlingham，《补可约图》，离散应用数学，3(3):163–174，1981年。数字对象标识符：10.1016/0166-218X(81)90013-5 数学评论：619603[9] Clément Dallard、Blas Fernández、Gyula Y. Katona、Martin Milanič 和 Kitti Varga，《关于极小坚韧弦图》，2025年。arXiv: 2210.00383v4[10] Reinhard Diestel，《图论》（数学研究生教材），第六版。施普林格，柏林，2025年，第173卷。数学评论：4874150[11] Martin Farber 和 Robert E. Jamison，《图与超图中的凸性》，SIAM J. Algebraic Discrete Methods，7(3):433–444，1986年。数字对象标识符：10.1137/0607049 数学评论：844046[12] Marina Groshaus 和 Jayme L. Szwarcfiter，《关于图的遗传Helly类》，离散数学、理论计算机科学，10(1):71–78，2008年。数学评论：2383735[13] V. A. Gurvič，《无重复布尔函数》，Uspehi Mat. Nauk，32(1(193)):183–184，1977年。数学评论：441560[14] V. A. Gurvič，《完全边色图与超图的一些性质及应用》，英文，Sov. Math., Dokl.，30:803–807，1984年。[15] Morteza Hasanvand，《关于具有较大最小度的极小坚韧图的存在性》，2025年。arXiv: 2505.08131[16] Ryan B. Hayward，《弱三角化图》，J. Combin. Theory Ser. B，39(3):200–208，1985年。数字对象标识符：10.1016/0095-8956(85)90050-4 数学评论：815392[17] Ryan B. Hayward、Jeremy P. Spinrad 和 R. Sritharan，《弱弦图的改进算法》，ACM Trans. Algorithms，3(2):第14篇，19页，2007年。数字对象标识符：10.1145/1240233.1240237 数学评论：2335297[18] T. Kaiser，《关于控制圈研讨会中的问题》，2003年。http://iti.zcu.cz/history/2003/Hajek[19] Gyula Y. Katona 和 Humara Khan，《一种计算树宽有界图坚韧度的高效算法》，Graphs Combin.，40(5)，论文编号100，11页，2024年。数字对象标识符：10.1007/s00373-024-02828-y 数学评论：4788734

[20] Gyula Y. Katona 和 Humara Khan，《坚韧度至多为1/2的极小坚韧弦图》，英文，离散数学，347(8):7，2024年，编号113491。数字对象标识符：10.1016/j.disc.2023.113491[21] Gyula Y. Katona、István Kovács 和 Kitti Varga，《识别极小坚韧图的复杂性》，离散应用数学，294:55–84，2021年。数字对象标识符：10.1016/j.dam.2021.01.022 arXiv: 1705.10570 数学评论：4214951[22] Gyula Y. Katona、Dániel Soltész 和 Kitti Varga，《极小 t-坚韧图的性质》，离散数学，341(1):221–231，2018年。数字对象标识符：10.1016/j.disc.2017.08.033 数学评论：3713403[23] Gyula Y. Katona 和 Kitti Varga，《特殊图类中的极小坚韧度》，离散数学、理论计算机科学，25(3)，论文编号1，17页，2023年。数字对象标识符：10.46298/dmtcs.10180 arXiv: 1802.00055 数学评论：4698185[24] Gyula Y. Katona 和 Kitti Varga，《加强关于图坚韧度的一些复杂性结果》，讨论数学与图论，43(2):401–419，2023年。数字对象标识符：10.7151/dmgt.2372 arXiv: 1910.08752 数学评论：4535703[25] Hui Ma、Xiaomin Hu 和 Weihua Yang，《极小1-坚韧无三角形图和极小3/2-坚韧无爪图的最小度》，离散数学，346(6)，论文编号113352，9页，2023年。数字对象标识符：10.1016/j.disc.2023.113352 数学评论：4544585[26] Hui Ma、Xiaomin Hu 和 Weihua Yang，《极小 t-坚韧 $2K_2$-自由图的结构》，离散应用数学，346:1–9，2024年。数字对象标识符：10.1016/j.dam.2023.11.034 数学评论：4674928[27] Hui Ma、Xiaomin Hu 和 Weihua Yang，《针对 $1 < t \leqslant 2$的极小 t-坚韧 $2K_2$-自由图的刻画》，离散应用数学，377:43–50，2025年。数字对象标识符：10.1016/j.dam.2025.06.045[28] Hui Ma、Xiaomin Hu 和 Weihua Yang，《关于极小 t-坚韧无爪图的最小度》，图论杂志，110(3):366–373，2025年。数字对象标识符：10.1002/jgt.23278 arXiv: 2311.08634 数学评论：4958083[29] LAURA OGRIN，《若干图类中极小坚韧图的刻画》，硕士论文，滨海大学，科佩尔，斯洛文尼亚，2025年。http://hdl.handle.net/20.500.12556/RUP-21735[30] C. H. 帕帕季米特里乌和 M. 亚纳卡基斯，《面（以及复杂性的一些方面）的复杂性》，计算机与系统科学杂志，28(2):244–259，1984年。数字对象标识符：10.1016/0022-0000(84)90068-0 数学评论：760546[31] 大卫·波西·萨姆纳，《不可分解图》，博士论文，马萨诸塞大学阿默斯特分校，1971年，86页。数学评论：2620781[32] V. I. 沃洛申，《三角剖分图的性质》，载于《运筹学与程序设计》，第24–32页，“什廷察”出版社，基希讷乌，1982年。数学评论：763692[33] 道格拉斯·B·韦斯特，《图论导论》。普伦蒂斯·霍尔公司，上萨德尔河，新泽西州，1996年。数学评论：1367739[34] Wei Zheng 和孙磊，《反驳关于极小 t-坚韧图的一个猜想》，离散数学，347(7)，P

a-

编号 113982，4 页，2024 年。数字对象标识符：10.1016/j.disc.2024。113982 数学评论：4720493