arXiv:2603.05132v1 [cond-mat.mtrl-sci] 5 Mar 2026

基于频域微磁学与拓扑优化的二维磁振子晶体逆向设计

Ryunosuke Nagaoka[1], Takahiro Yamazaki[1,2],Chiharu Mitsumata[3],

Yuma Iwasaki[4],和 Masato Kotsugi[1]

[1]东京理科大学材料科学与技术系，东京 125-8585，日本[2]横滨国立大学工学部，横滨 240-8501，日本[3]筑波大学纯粹与应用科学研究生院，筑波 305-8571，日本[4]国立材料科学研究所材料基础研究中心(CBRM)，筑波 305-0047，日本

摘要

磁振子晶体（MCs）是新兴的自旋电子超材料，能够操控磁振子（即自旋波的量子）的传输特性。由于晶格几何与磁振子能带色散之间存在复杂关系，建立用于优化 MCs 目标特性的通用设计策略仍然颇具挑战。在本研究中，我们展示了一种用于二维 MCs 的逆向设计框架，以探索具有大磁振子带隙的非常规晶格结构。我们采用遗传算法，以具有完全带隙的结构作为目标特性，实现对结构的全局探索；同时采用频域微磁模拟，以高效评估带隙。所建立的逆向设计方法成功发现了数种此前未见报道的 MCs 设计方案，并通过时域微磁模拟验证了其性能。此外，我们观察到，在高阶能带处，设计景观变得越来越非凸，这表明可能存在多个设计解。总体而言，该逆向设计框架有望广泛适用于实验上可实现的材料体系和器件尺寸，从而促进 MCs 设计规则的制定。

1 引言

自旋波（SWs）是以相干方式传播的集体磁化激发，作为超越互补金属氧化物半导体技术的信息载体，已受到广泛关注 [1,2]。人们已提出并展示了广泛的应用，包括逻辑电路 [3, 4]存储器件 [5] 物理神经网络 [6], 和神经形态计算架构 [7–10]。在这些应用中，磁振子晶体（MCs）通过在空间上周期性调制自旋波（SWs）的磁性承载材料，被提出作为用于定制磁振子色散关系的超材料结构。这类周期性结构促进了相干自旋波（SWs）散射，从而产生经设计的磁振子能带色散和波函数。一维 [11], 二维 [12], 和三维 [13]磁振子晶体（MCs）均已在实验和理论上得到研究。此外，其产生的特性还可通过外部磁场和铁电性灵活调控。这种可调性使磁振子晶体（MCs）成为光子晶体 [14], 声子晶体 [15], 以及耦合不同波现象的多物理场超材料 [16, 17]的磁性对应物。

调控图案化磁性材料的几何结构，是定制 MCs 中磁振子能带色散的一种方法。例如，通过引入任意结构几何形状 [18–21] 并调控晶格对称性 [22, 23]，已实现几何设计的能带色散，包括非互易性、平带色散和带隙形成。在所实现的功能中，磁振子带隙（MBGs）是核心设计目标之一；在特定激发频率下，自旋波无法传播。由于 MBGs 可通过几何结构进行高度调控，且可通过微波测量直接进行实验测量 [24]，因此备受关注。

然而，由于晶格几何与磁振子色散之间的关系错综复杂，关于如何增大 MBGs 的全面设计准则，以及实现最大 MBGs 的最佳几何结构，仍不明确。在以往的大多数研究中，目标能带色散的搜索仅限于对少量与形状相关的参数（如散射体半径和体积分数）进行参数扫描，以确定最佳构型 [25]。此外，这些研究主要聚焦于低阶能带（例如第一至第三能带），以设计具有较大 MBG 开口的 MCs；因此，可能带来更大设计灵活性的高阶能带尚未得到充分探索。这是因为高阶能带对几何结构变化更加敏感，导致其行为较难预测，也使得直接调控更为复杂，从而妨碍了 MCs 的高效设计以及高阶磁子模式的积极应用。

在此背景下，高效探索能够实现所需特性的最优结构，一种很有前景的策略是逆向设计方法：将目标物理特性定义为目标函数，并通过机器学习或数学优化方法优化参数化设计区域。该方法能够灵活探索结构构型，并显著拓展实现非经验结构设计的设计空间。传统上，几何逆向设计已广泛应用于多种超材料，包括声学晶体 [26], 热超材料 [27], 和光学超表面 [28], ，但其在磁子学中的应用仍然有限。

近年来，这种逆向设计方法已开始应用于磁振子器件。例如，优化局部磁场分布已通过实验得到验证，并实现了对解复用特性和逻辑运算精度的改进控制 [29, 30]。在计算研究中，优化材料的空间分布已能够用于设计自旋波透镜 [31]、自旋波滤波器 [32], 和频率解复用器 [33]。最近，Voronov 等人展示了采用水平集方法进行拓扑优化，并设计出一种高效的自旋波频率解复用器 [34]。这种拓扑优化方法在灵活探索非直观器件设计方面尤其有效。然而，使用时域微磁模拟将二维磁子晶体的磁振子能带色散作为目标函数进行评估时，每次运行都必须在有限的截止时间内终止。因此，要获得具有高频谱分辨率的宽带频率响应，需要较长的模拟时间，这可能导致较高的计算成本，并降低带隙评估的精度。

本研究将基于频域朗道-利夫希茨-吉尔伯特（FD-LLG）方程的频域微磁模拟与遗传算法（GA）这一随机全局优化方法相结合，展示了二维磁子晶体的逆向设计拓扑优化。我们以完全磁振子带隙（CMBG）为目标特性，并利用遗传算法进行非经验结构探索。与时域模拟相比，FD-LLG模拟能够以更高的计算效率和可靠性评估磁振子能带色散。我们尤其关注高阶能带中的设计优化，而这一方向尚未得到广泛研究。

我们的目标是找出具有宽CMBG的、此前尚未探索过的磁子晶体设计。我们还通过时域微磁模拟中的宽带磁振子激发，验证优化设计的稳健性。为阐明优化结构背后的设计规则，我们开展无监督机器学习分析，以可视化优化结构的设计景观；我们此前曾将这一方法用于分析类伊辛磁畴结构 [35,36]。原则上，这种逆向设计方法也适用于更贴近实验条件的情形，从而实现高效的自旋波器件设计。我们预计，经过拓扑优化的二维磁子晶体有望开辟一条途径，在磁振子能带色散工程方面实现远超传统结构设计所能达到的灵活性。

2 磁振子晶体逆向设计方法

在本研究中，我们通过实现基于目标函数（CMBG）迭代反馈计算的逆向设计循环，对二维磁子晶体（二维磁子晶体）进行了自主设计探索。为评估CMBG，我们采用频域微磁模拟框架，该框架基于FD-LLG方程和有限元法（FEM） [37]。首先，我们从时域 Landau-Lifshitz-Gilbert 方程开始。LLG方程是支配纳米尺度长度和皮秒尺度时间上磁化动力学的运动方程，其中包含

进动和阻尼项，如下所示:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma \mu_0 \, \mathbf{m} \times [\mathbf{H}_{\text{eff}}(\mathbf{m}) + \mathbf{h}(\mathbf{r}, t)] + \alpha \, \mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \tag{1}$$

其中， γ 为旋磁比， α 为Gilbert阻尼常数，$\mathbf{H}_{\text{eff}}$ 为有效磁场。磁振子能带色散通常通过基于LLG方程 (1) 并结合时空快速傅里叶变换（FFT） [38] 的时域微磁模拟来估算，或者采用平面波方法（PWM） [39]等半解析方法。相比之下，FD-LLG模拟为估算由离散有限元表示的任意几何结构的色散关系提供了一种高效且可靠的途径。FD-LLG方程通过对磁化动力学进行线性化得到，其假设是磁化强度相对于平衡态仅有微小偏离；具体而言，磁化强度和有效场分解为静态平衡背景和微小动态扰动:

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{m}_0(\mathbf{r}) + \delta \mathbf{m}(\mathbf{r}, t) \tag{2}$$

$$\mathbf{H}_{\text{eff}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{h}_0^{\text{eff}}(\mathbf{r}) + \delta \mathbf{h}^{\text{eff}}(\mathbf{r}, t) \tag{3}$$

其中，$\mathbf{m}_0$ 和$\mathbf{h}_0^{\text{eff}}$为平衡分量，而 $\delta\mathbf{m}$ 和 $\delta\mathbf{h}^{\text{eff}}$ 分别为磁化强度和有效场的动态分量。这里假设磁矩的激发足够弱，因此可以采用线性近似（$\delta\mathbf{m} \ll \mathbf{m}_0$ 且$\mathbf{m}_0 \cdot \delta\mathbf{m} = 0$）。在线性自旋波激发下，磁化强度和磁场的动态分量均可通过时间傅里叶变换表示为谐波函数，形式如下:

$$\delta \mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \delta \mathbf{m}(\mathbf{r}, \omega) \, e^{i\omega t} \tag{4}$$

$$\delta \mathbf{h}^{\text{eff}}(\mathbf{r}, t) = \delta \mathbf{h}^{\text{eff}}(\mathbf{r}, \omega) \, e^{i\omega t} \tag{5}$$

其中， ω 是磁化强度在其平衡态$\mathbf{m}_0$附近发生磁化扰动时的角频率。这一近似可将时变LLG方程转换到频域。将方程（2）至（5）代入方程（1），可得FD-LLG方程如下:

$$i\omega\delta\mathbf{米} = -\gamma\mu_0(\mathbf{米_0} \times \delta\mathbf{小时}^{\mathrm{eff}} + \delta\mathbf{米} \times\mathbf{小时}_{\mathbf{0}}^{\mathrm{eff}}) + i\omega\alpha\mathbf{米_0} \times \delta\mathbf{米} \tag{6}$$

通过求解方程（6），可以确定各频率分量下磁化扰动的空间分布。本研究在有效场项中，仅考虑静态分量和动态分量对应的交换场与外场，分别表示为$\mathbf{h}_0^{\mathrm{eff}} = A_{\mathrm{ex}}\nabla^2\mathbf{m}_0 + \mathbf{h}_0$ 和 $\delta\mathbf{h}^{\mathrm{eff}} = A_{\mathrm{ex}}\nabla^2\delta\mathbf{m} + \delta\mathbf{h}$。这一近似确保激发的是交换模式下的自旋波。本研究所考虑的MCs，其晶格常数与交换长度相当，因此可以忽略静磁场。

此外，通过将方程（6）作为本征值问题求解，可以计算出 $\delta\mathbf{m}(\mathbf{r}\ \omega)$的本征模，从而通过扫描波矢$\mathbf{k}$计算MCs的自旋波色散关系。具体做法是在周期方向施加Bloch-Floquet边界条件。
Bloch-Floquet条件允许物理量的振幅和相位均具有周期性，其表达式为

$$\delta\mathbf{m}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \delta\mathbf{m}(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\,\mathbf{k}_{\mathrm{F}}\cdot\mathbf{R}} \tag{7}$$

其中，$\mathbf{k}_{\mathrm{F}}$ 是Floquet 波矢。在计算二维磁子晶体的磁子色散时，该边界条件设置在 x 和 y 方向。此周期性近似使我们能够将计算域限制为单个晶胞。通过求解每个$\mathbf{k}_{\mathrm{F}}$对应的本征模，可以获得以 $k - f$ 图表示的自旋波色散关系。本研究在图1a所示的第一布里渊区内进行计算。传统数值方法在时域求解LLG方程，而频域表述在评估复杂系统（包括具有复杂几何结构的系统）的自旋波色散关系时，在速度和精度方面均具有显著优势，因此适用于迭代优化循环。

在带隙评估中，采用了离散单胞近似，如图1a所示。我们选择由氧化铕（EuO）和铁（Fe）组成的双组分磁振子晶体作为模型系统。由于材料参数反差较大，这种材料组合有利于形成宽广的CMBG，这是本研究的目标特性。我们采用边长为 2 nm 的长方体网格，并将磁振子晶体的晶格常数设为 $a = 32$ nm。此外，如图1a所示，我们在 x 和 y 方向施加了布洛赫–弗洛凯边界作为边界条件。静磁场 $\mathbf{h}_0$ 垂直于薄膜施加（沿 z 方向），其大小设为 $\mu_0 h_0^z$ =0.1 T。假设静态平衡磁化 $\mathbf{m}_0$ 沿 z方向均匀分布，因此磁化强度的单位矢量设为 $\mathbf{m}_0 = (0,0,1)$。各材料的仿真参数设置如下：对于EuO， $A_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{EuO}} = 0.1 \times 10^{-11}$J/m 和 $M_{\mathrm{EuOs}} = 1.91 \times 10^6$

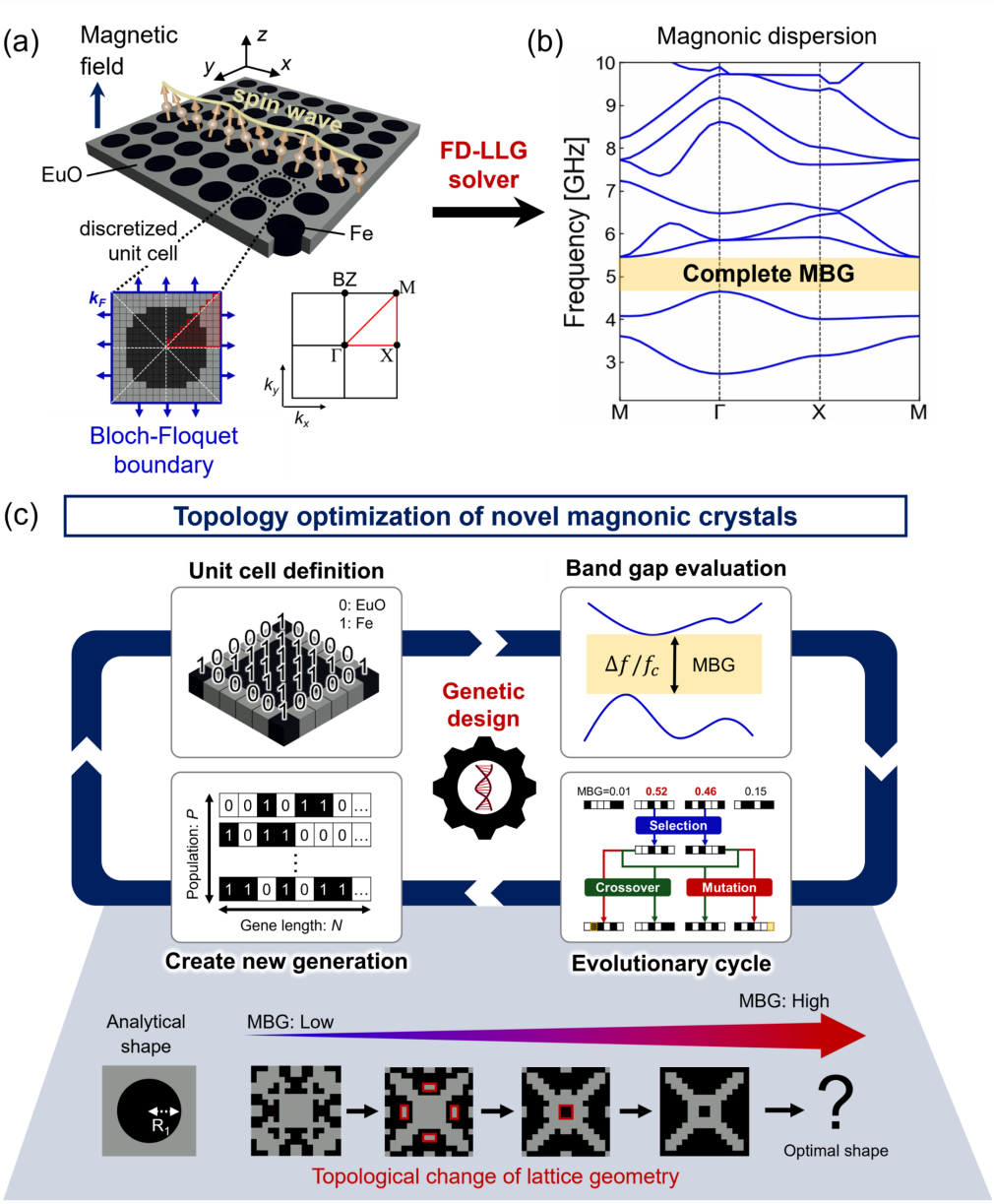


图1：a）由 EuO基体和 Fe圆形点组成的方圆形二维磁性晶体示意图。下方展示了磁性晶体的空间离散化晶胞结构以及第一布里渊区示意图。b）根据 a）中所示晶胞计算得到的相应色散关系。c）本研究所采用的逆向设计循环概念示意图。

A/m；对于 Fe，$A_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{Fe}} = 2.11 \times 10^{-11}\,\mathrm{J/m}$ 和 $M_{\mathrm{s}}^{\mathrm{Fe}} = 1.752 \times 10^{6}\,\mathrm{A/m}$ [40]。由于分析聚焦于交换模自旋波，因此仅将交换刚度常数 A_{ex} 和饱和磁化强度 M_{s}视为材料相关参数，因为色散关系的解析表达式

单一介质中交换模磁振子的关系为 $f(k) = \frac{\gamma\mu_0}{2\pi}[h_0 + \frac{2A_{\mathrm{ex}}}{\mu_0 M_{\mathrm{s}}}k^2]$ [41]。两种材料的阻尼常数均设为 $\alpha = 0.001$ 。此外，在定义材料分布时，如图1a所示，我们利用镜像对称性，仅定义了晶胞中总面积的八分之一（红框所示）。这样，材料分布只需在感兴趣区域内定义，对应36个维度。尽管这种近似将对称性限制为方形对称性，但有研究指出，对于交换模自旋波，当散射体与晶格点具有相同的对称性时，可能获得最大的带隙 [40]。因此，我们重点研究方形对称性；然而，具有六重对称性的蜂窝晶格有望产生更大的磁振子带隙，因此应在未来的工作中加以研究。上述计算采用有限元仿真软件 COMSOL Multiphysics 提供的第三方微磁学模块实现，本征值问题则由求解器软件包 ARPACK 求解 [37]。

图1b展示了使用有限差分朗道-利夫希茨-吉尔伯特方法计算的图1a所示方形-圆形磁子晶体的能带色散。能带结构显示，存在一个频率范围，在该范围内，磁振子在任何传播方向上都不会被激发。这个频率范围对应于CMBG。我们将这一特性作为模型目标，研究如何为Fe-EuO体系确定能够使CMBG最大化的最优几何结构。

图1c展示了旨在使MCs的CMBG最大化的设计优化循环概念示意图。本研究采用二进制编码方案，并使用遗传算法作为优化器。遗传算法是一种成熟的元启发式算法，其灵感源自自然选择和生物进化，最初在仿生计算领域发展起来 [42]。遗传算法是一种随机的无梯度方法，因此非常适用于全局优化问题；它有望找到能够实现较大磁振子带隙的非常规磁子晶体几何结构，而这些结构可能难以通过单纯扫描简单的形状相关参数获得。在所提出的逆向设计循环中，晶胞内的材料分布由长度为36的二进制向量（0/1）表示，并视为遗传序列。优化通过重复以下步骤迭代进行：(i) 定义晶胞材料分布，(ii) 使用FD-LLG模拟评估带隙，以及(iii) 通过遗传算法操作（选择、交叉和变异）生成下一代种群。(iv) 在新一代中创建比特数组并重新定义晶胞。通过这一循环，离散化晶胞结构逐渐转变为具有更大带隙的设计。作为示例，图1c展示了优化过程中结构演化的序列。通过反复迭代该循环，初始离散化拓扑不断更新，最终收敛为一种与传统解析形状截然不同的非直观拓扑。值得注意的是，在演化过程中，可以观察到孔洞和孤立岛的出现与消失，这表明发生了不连续的拓扑变化。这种非连续的拓扑变换使提出此前未曾探索的磁子晶体拓扑结构成为可能。

接下来，我们将详细介绍逆向设计过程的算法表述。最大化 CMBG宽度的优化问题可表述如下

$$\begin{cases} \text{maximize } C_n(\boldsymbol{\rho}) \qquad \text{w.r.t. } \boldsymbol{\rho} \in \{0,1\}^N \quad (N=36) \\ C_n(\boldsymbol{\rho}) = \dfrac{\Delta f}{f_c} = \dfrac{\min\limits_k :\ f_{n+1}(\mathbf{k}) \ - \ \max\limits_k :\ f_n(\mathbf{k})}{\frac{1}{2}[\min\limits_k :\ f_{n+1}(\mathbf{k}) \ + \ \max\limits_k :\ f_n(\mathbf{k})]} \end{cases} \tag{8}$$

这里， $C_n(\rho)$是本研究定义的目标函数，表示第 n 与第（$n+1$）能带之间 CMBG 的相对宽度。$\mathbf{k}$ 为波矢， Δf和 f_c 分别是带隙之间磁振子带隙的绝对值和中心频率。相对带隙宽度通常用于在光子晶体和声子晶体的逆向设计中，作为尺度不变参数来评估带隙宽度 [43, 44]。ρ 是材料的二元密度变量，其维度为 N=36，分配给各个有限元单元。利用密度变量 ρ的元素，材料参数定义为 $A_{\mathrm{ex}}(\rho_i)$ $=(1-\rho_i)A_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{EuO}} + \rho_i A_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{Fe}}$和 $M_{\mathrm{s}}(\rho_i)$ $=(1-\rho_i)M_{\mathrm{s}}^{\mathrm{EuO}} + \rho_i M_{\text{铁s}}$。当 $\rho_i = 0$时，第 i个单元被赋予 EuO 的参数；而当 $\rho_i = 1$时，则被赋予铁的参数。这意味着存在 $2^{36} \approx 10^{10}$ 种可能的材料分布，因此用穷举搜索寻找最优解并不可行。

图2展示了设计优化过程的算法图。首先，初始分布是随机生成的。所生成的特征向量数量（称为种群）被设为 P=20。在生成二进制编码的0/1向量后，即可将材料分布映射到每个有限元单元上。随后，对每种设计执行有限差分LLG模拟，以评估其CMBG宽度。在带隙评估之前，我们应用了密度滤波步骤，以抑制拓扑中虚假的、噪声状特征。具体而言，若孤立比特的最近邻主要由相反比特构成，则将其翻转以与周围比特一致。该滤波可去除不利于制造的点状伪影，并提高优化设计的稳健性。在评估CMBG的相对宽度之后，执行遗传算法的核心过程——自然选择过程，以寻找候选结构。遗传算法的详细过程见方法部分。经过遗传算法序列后，会产生数量同为 P 的新一代，并重复相同流程，直至满足收敛准则；具体而言，当适应度值在超过规定代数 M 后仍未改善时，优化即终止（此处我们设为 $M = 50$）。通过这一过程，最终获得具有较大CMBG的候选结构。上述整个优化过程均使用MATLAB [45]实现。

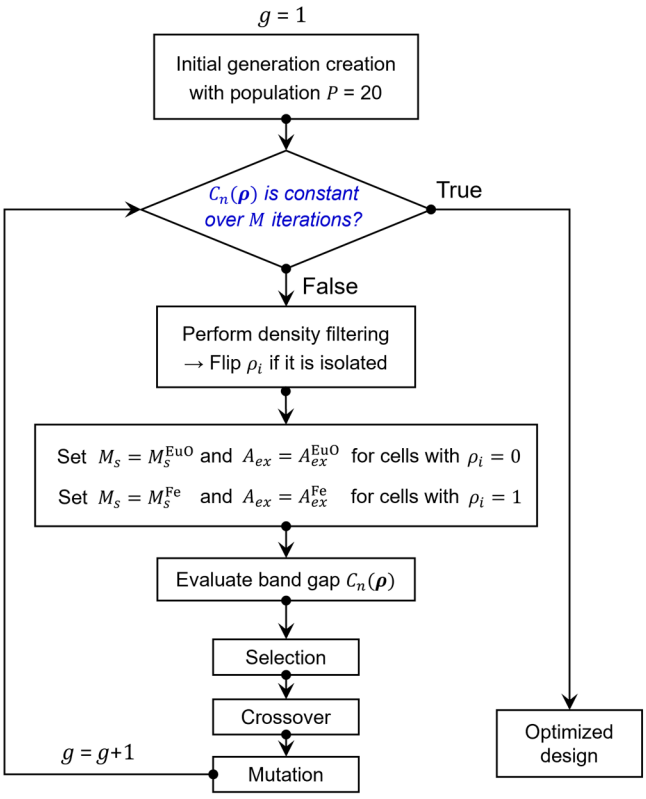


图2：设计优化过程的算法图

3 结果与讨论

3.1 逆向设计演示

作为逆向设计的初步演示，我们探索使 $n = 2$ 与 $n = 3$模式之间相对CMBG最大化的结构，该问题在以往研究中得到了最为广泛的分析。图3a展示了优化过程中磁振子晶体（MC）的结构演化。随着迭代进行，CMBG的相对值经由一系列变换而增大，从$\Delta f/f_{\mathrm{c}} = 0.331$变化至最终代中的 $\Delta f/f_{\mathrm{c}} = 0.598$。可以看到，变换过程包括连通性的改变以及孔洞或岛状结构的产生与湮灭，因此观察到了拓扑变换。此外，最终优化结构与先前提出的、方形杆旋转 45° 的方形-方形-方形（SSS）结构十分相似。该几何结构是在 $n = 2$ 与 $n = 3$模式之间打开带隙的有前景候选，因为已知在正方晶格的面心位置引入额外散射体杆可促进CMBG的形成 [46]。 45° 旋转提高了晶胞内散射体的填充率，这很可能有助于形成较宽的CMBG。因此，

通过数据驱动的结构探索再次发现了最优设计，这表明遗传算法（GA）进行全局探索的有效性。

确认遗传算法（GA）全局优化成功的另一种方法是观察适应度值的变化趋势。如图3b所示，虽然每一代的最佳适应度在优化过程中逐步提升，但种群的平均适应度并未收敛，而是持续波动。这表明，尽管算法持续在当前最优解附近搜索，种群多样性仍得以保留，从而能够同时探索搜索空间中的其他区域。因此，平均适应度的这种变化表明，全局探索已成功实现。

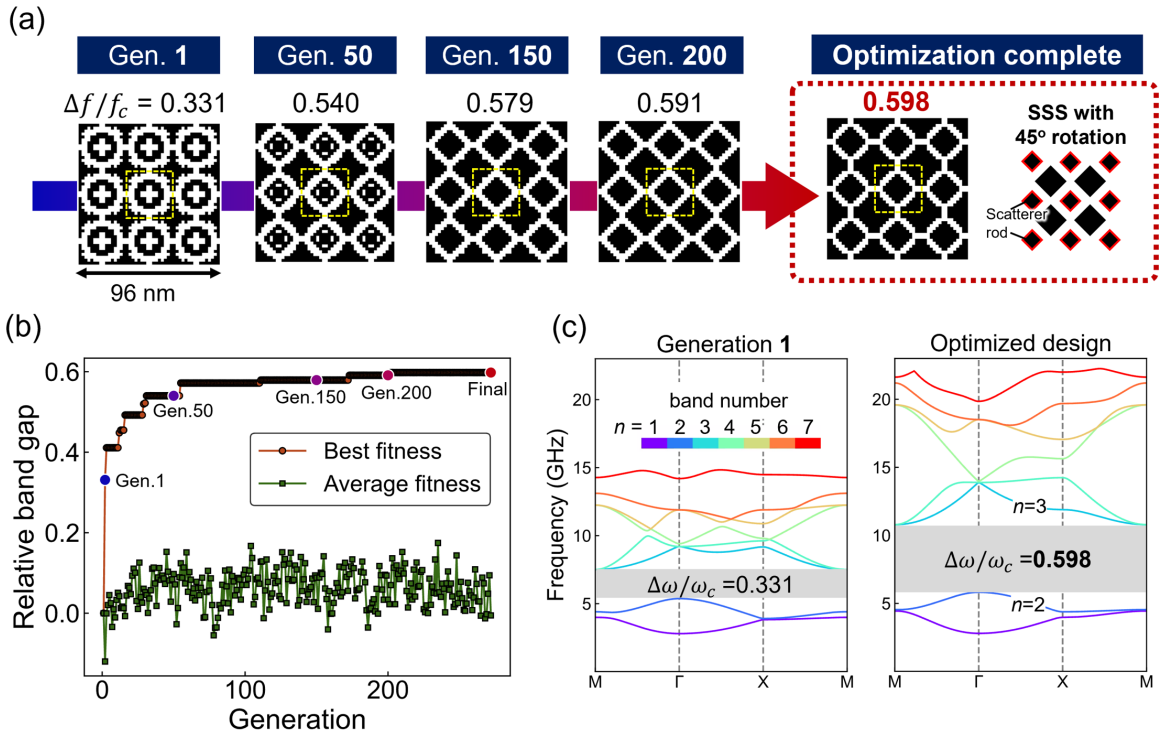


图3：a）在优化过程中，MC设计的拓扑变形使模式 $n=2$ 和 $n=3$之间的CMBG最大化。请注意，为了便于可视化，晶胞扩展为 3×3 矩阵。b）CMBG相对宽度这一适应度值随代数变化的历史。c）第1代和最终代中最优个体的色散关系。

因此，以$n=2$ 和 $n=3$ 能带之间 CMBG 的相对宽度为目标进行数据驱动的结构探索，得到的结构与宽MBG的MCs的既有理论认识一致。这种一致性支持了当前框架在识别 $n=2$ 和 $n=3$ 能带之间具有较大 CMBG 的结构方面的有效性。然而，对初始代和最终代中最优个体计算所得的能带色散（图3c）进一步表明

虽然 $n=1$ 和 $n=2$ 能带的色散关系基本保持不变，但发现高阶能带（$n \geq 3$）的色散关系对几何调制较为敏感。这意味着通过几何设计对高阶色散关系的可控性更高，但也表明晶格几何与其形成的能带结构之间存在复杂且非平凡的关系。这种复杂性阻碍了具有高阶能带大磁振子带隙的MCs设计。因此，此前的研究尚未系统探索高阶能带MCs的设计规则。

3.2 探索高阶能带中的优化设计

接下来，我们以 CMBG 的相对宽度为目标函数，在更高阶的（$n \geq 3$）能带上进行拓扑优化。下文将带隙位于第 n 带与第（$n+1$）带之间的优化结构称为能带n-（$n+1$）结构。图 4a 展示了各能带数对应的代表性优化结构及其能带色散。每种结构都呈现了此前未曾提出的非平凡 MC 设计。观察随能带数变化的结构趋势可以发现，随着目标能带数增加，结构特征逐渐变得复杂，结构单元之间也出现了纤细的连接。这一趋势在 TE 模式下光子晶体的拓扑优化中也曾出现 [43]。从物理上看，这一趋势表明，高阶本征模对应于波长更短的磁振子，因此预期它们会与特征长度尺度更小的结构发生共振。

观察各个设计可以发现，能带 3-4 结构通常由相互垂直交叉的 EuO 线构成，这些线相对于 Floquet 波矢的取向为 45° 。尤其值得关注的是能带 4-5 结构，它由简单排列的方形铁点构成。据我们所知，这种几何结构此前未被提出过作为具有大磁振子带隙的 MCs，这表明本次优化揭示了 Fe-EuO 磁子晶体系统中一种此前被忽视的结构。对于能带5-6、第6–7带和第7–8带设计，不同优化运行得到的收敛结构呈现出各异的拓扑结构。这表明在高阶能带中确定全局最优几何结构存在困难（详见第 3.4 节）。

在模式分析方面，我们聚焦于优化后的第 4–5 能带结构，该结构几何构型简单且 CMBG宽度较大，并展示 x分量磁化扰动 $\delta m_x(\mathbf{r}\ \omega)$ 的空间分布。由于带隙形成于第 $n=4$和第 $n=5$能带之间的 Γ 点，因此展示了该 Γ 点处的本征模。结果表明，对于位于带隙下边缘以下的能带，本征模局域于方形 Fe 点内；而对于位于带隙上边缘以上的能带，模式则局域于 EuO 线状区域内。这种模式局域化的差异可能是优化结构中形成较大 CMBG 的原因。

与以往研究的结构相比，优化设计的 CMBG宽度显著提升。具体而言，我们对各种方形晶格 MCs（见补充图 S2）进行了全面比较，并通过 FD-LLG分析比较了相对带隙宽度。对于能带4-5、能带5-6、第6–7带和第7–8带设计，与表现最佳的

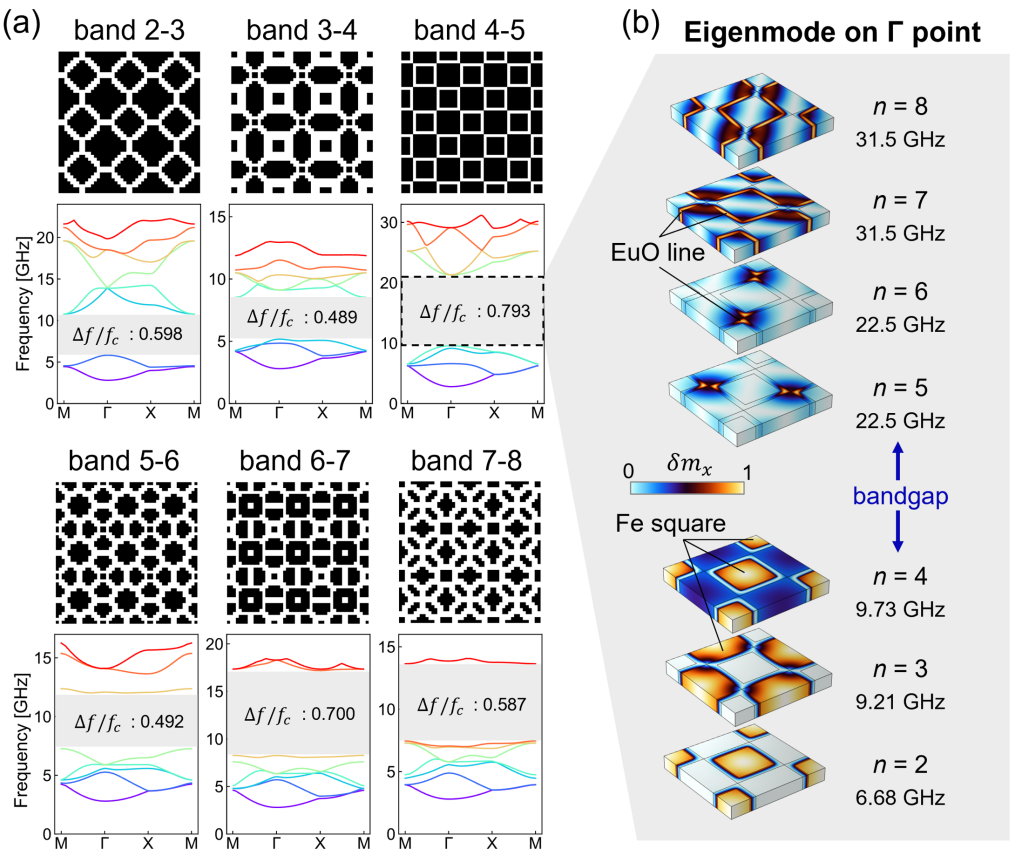


图4：a）不同能带数的优化结果及相应的色散关系。b）能带4-5优化结构在 Γ点处 δm_x 的空间模态分布。

传统结构相比，相对 CMBG 宽度分别提高了约 90%、440%、170% 和 830%。值得注意的是，对于第 3–4 带设计，只有拓扑优化结构中观察到了 n=3与n=4 之间的 CMBG，而此前提出的结构在这一能带范围内均未出现带隙。这些发现表明，逆向设计结构探索在高阶能带中的有效性。

3.3 采用宽带磁振子激发评估优化设计

为评估有限维度下优化结构中自旋波的传播动力学，我们由优化晶胞构建超晶胞，并使用MuMax3微磁模拟器 [47]计算磁振子的激发谱。对于谱计算，通过向优化晶格注入磁场sinc脉冲来实现宽带磁振子激发，如图5a所示。所注入的脉冲由下式描述

$$H_{\mathrm{pulse}}(t) = \mu_0 H_{\mathrm{a}} \frac{\sin\left[2\pi f_{\max}(t - t_0)\right]}{2\pi f_{\max}(t - t_0)} \tag{9}$$

激励波形参数设置为 $\mu_0 H_{\mathrm{a}} = 0.01$T和 $f_{\max} = 25$ GHz。参考时间设为 $t_0 = T/2$，其中 T 为总激励时间30 ns。晶胞在 x 和 y 方向上扩展至1.024 μm × 1.024 μm以构建超晶胞，并在边界上设置周期性边界条件（PBC）。采用与优化循环中所用相同的单元尺寸和材料参数。激发谱通过对受激自旋波信号进行时间傅里叶变换获得。

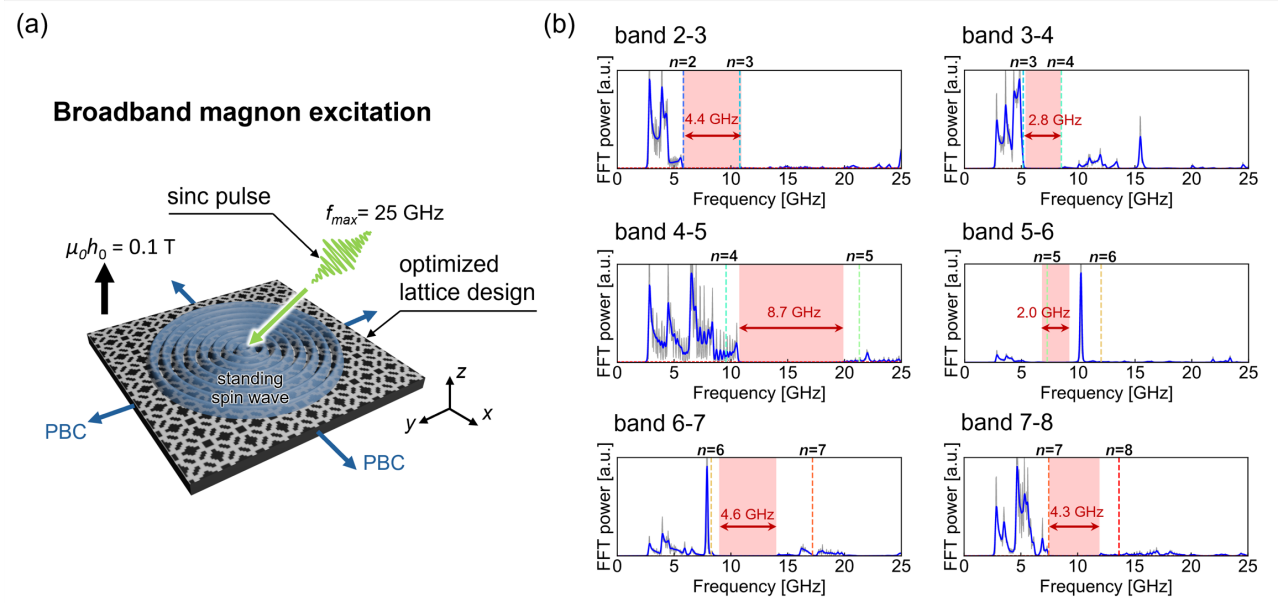


图5：a）使用 MuMax3 模拟器进行宽带磁振子激发的示意图。在优化晶格的扩展超晶胞中施加了磁场 sinc 脉冲。b）优化结构中受激自旋波的 FFT 频谱。竖直虚线表示通过 FD-LLG分析获得的带隙上下频率界限。

计算得到的激发谱如图5b所示。对于所有优化结构，禁频带隙的存在清楚地证实了CMBG的存在。同时，可以观察到一些FFT强度峰值较高的带通频率，它们大致对应于能带数。值得注意的是，正如能带色散所预示的，第4至第5能带设计呈现出较大的绝对带隙，其宽度测得为 Δf =8.7 GHz。值得注意的是，纳入高阶带隙可以得到更大的带隙，而仅使用低阶能带则无法实现这一点。对于 $n = 5$以内的其他几何结构，它们呈现出 $\Delta f = 4.4 - 5.5$ GHz的频率间隔，表明

其带隙性能同样优异。此外，我们确认，即使施加的磁场发生变化，由于能带色散呈线性移动，绝对带隙宽度随能带数变化的排序趋势也不会改变。这或许表明，在优化晶格中可以调节频率范围，同时保持较大的CMBG。

总体而言，时域磁振子激发的结果支持 CMBG 的存在，也验证了优化后的 MCs 能够调控自旋波传播特性的有效性。然而，对于高阶能带（$n \geq 4$），FD-LLG分析估算的带隙高频边缘（图5b中的竖直虚线）与频谱中的频率间隙并不完全吻合。高模态能带往往对边界条件较为敏感，这可能导致其与实验结果不匹配。虽然仍有必要考虑自旋波的边界反射和散射及其对传播特性的影响，但频域逆向设计框架取得了有望的结果，为筛选非常规 MC设计提供了强有力的工具。

3.4 通过降维可视化设计景观

为评估优化过程，我们针对每个能带数使用不同的随机种子，系统地执行了 12 次逆向设计循环，以便为每次运行生成不同的初始结构，从而降低优化结果对初始条件的依赖。由于遗传算法是一种随机优化算法，并会在连续多代中生成多个设计候选解，我们预计它能够发现多个设计解，并实现对全局设计景观的可视化。为了可视化设计探索空间，我们对优化过程中生成的所有二进制设计数组进行了无监督降维，并将其映射到二维空间中。

我们将二维快速傅里叶变换（2D FFT）与多维尺度分析（MDS）相结合，后者是一种用于二维映射的降维技术。我们认为，二维快速傅里叶变换适用于当前数据集，因为晶胞结构在两个维度上具有平移对称性，从而可以通过频域特征刻画结构周期性。MDS 通过保留原始空间中的距离，将高维数据表示在低维数据空间中，从而提高聚类和相似性分析的可解释性。具体流程如图6a所示。首先，将每个36维设计向量扩展为晶胞阵列（16×16），并应用二维快速傅里叶变换以获得傅里叶谱并提取结构周期性信息。随后，将傅里叶谱展平为256维向量，并基于欧氏距离执行MDS，将维度从256降至2。在MDS计算中，使用了用于机器学习的Python软件包Scikit-learn [48]。

图6b展示了各个能带序号对应的 MDS 映射。颜色映射表示各结构的相对带隙值，每个点对应一种晶胞几何结构。对于第1至第2、第2至第3、第3至第4以及第4至第5能带设计，最终优化得到的结构（以星号标记）在降维空间中形成局部团簇。这表明，对于较低能带，优化过程通常会收敛到相似的结构。相比之下，对于能带5-6、第6–7带以及

第7–8带设计，优化后的结构分布范围更广，各个解之间的结构相似性显著降低。这些结果表明，在高阶能带中，每次运行得到的优化解各不相同，且存在多个局部最优解，这意味着设计景观具有越来越强的非凸性。优化拓扑的变化可见补充图 S1。从物理角度来看，这种现象可以理解为：高阶共振能够支持多种共振模态，因为更精细几何结构所具有的更多自由度，使得可能的构型数量增加。

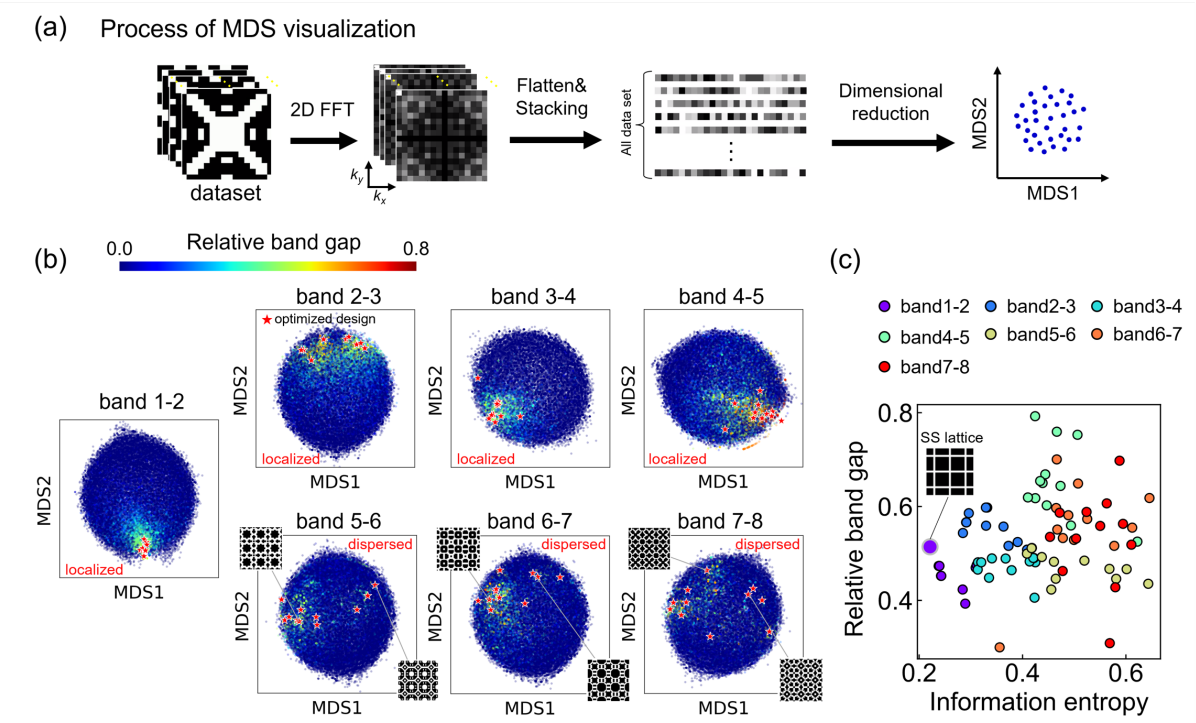


图 6：a）各能带数对应的晶胞结构的 MDS 映射。颜色映射表示 CMBG 的相对宽度，星形标记表示最终的最优设计。b）由晶胞结构计算得到的信息熵与相对带隙之间的相关性。

此外，为了量化优化后几何结构的复杂度，我们引入了香农信息熵。香农熵最初用于描述海森堡自旋模型中的构型熵，后来被用作衡量超表面结构几何复杂度的指标 [49]。图 6c 展示了每个能带中最终优化结构的香农熵与相应带隙宽度之间的相关性。值得注意的是，能带序号与信息熵呈正相关，这与高阶能带中观察到的结构逐步细化现象一致。这一发现表明，香农熵可作为一种有用的定量设计参数，用于根据能带序号设计 MCs。此外，对于第6–7带和第7–8带等高阶能带，带隙值的离散性较大。这一发现还表明，通过

结合熵估计与遗传算法探索，可以通过数据驱动方式提取宽MBGMCs背后的设计规则趋势。

4 结论与展望

在本研究中，我们结合频域朗道–利夫希茨–吉尔伯特（FD-LLG）分析与遗传算法，展示了二维磁子晶体的逆向设计拓扑优化。我们高效地识别出若干具有非平凡拓扑构型、适用于高阶能带的铁–EuO双组分磁子晶体。通过时域微磁模拟，我们证明这些拓扑优化结构可实现高达 $\Delta f = 4.3-5.5$ GHz的CMBG宽度。值得注意的是，以$n = 4$ 至 $n = 5$ 之间CMBG相对宽度为优化目标的设计，具有最大的带隙宽度（$\Delta f = 8.7$ GHz）。该设计结构简单且带隙足够大，因此尤其具有应用前景。此外，对MDS进行降维后进一步发现，随着能带阶数升高，设计景观变得愈发非凸（$n \geq 5$）。这表明存在多个有前景的候选设计，且每种设计都具有能够支持独特高阶磁子本征模的拓扑结构。这些结果凸显了MC设计策略的有效性：通过高维结构探索拓展设计空间，并利用高阶磁子模式。不同于仅基于有限数量参数（如偏置磁场和尺寸参数，例如周期宽度与散射体面积）进行的传统优化，对二维或三维拓扑进行优化，或可为设计灵活性大幅提升的磁子能带色散工程开辟道路。我们提出的框架不仅有望发现非常规磁子晶体，还可揭示逆向工程磁子晶体中隐藏的设计原理，并为实现更高效、更稳健的MC设计提供见解。最终，该框架或可助力建立面向下一代自旋电子学应用的磁振子器件非常规设计方案。

5 方法

5.1 遗传算法

遗传算法中的进化循环过程（选择 $\rightarrow$ 交叉 $\rightarrow$ 变异）实现如下：

1. $Selection$：此过程基于目标函数的评估结果进行。我们采用了轮盘赌选择方法。在该方案中，个体被选中的概率与其适应度值 C_n （即第 n个相对带隙）成正比。这意味着表现更好的个体更有可能将其基因传递到下一 $Crossover$ 或 $Mutation$ 过程中。在单代中选择第 i个个体（$1 \leq i \leq P$）的概率 q_i 可表示为 $q_i = C_n^i / \sum_{j=1}^{P} C_n^j$。

2. $Crossover$：此操作可促进遗传信息的重组，并在保留亲代结构特征的同时，推动对解空间的探索。对在 $Selection$过程中选出的亲代基因向量$\mathbf{x}$ 应用“两点交叉”算子，随机选取两个交叉点，并交换一对亲代向量之间的相应片段以生成子代向量；这些子代向量将在下一代中作为亲代向量。

3. $Mutation$：该过程旨在维持遗传多样性，并鼓励探索当前已探索的搜索空间区域之外的范围。本文采用了幂变异法，当优化问题具有整数约束时，这是一种合适的变异算法 [50]。在此方法中，通过随机过程，从继承自 $Selection$ 的父向量生成新的子代向量$\mathbf{x}_{\mathrm{c}}$ （下一代中的父向量）。子代向量的第 k 个分量定义为：

$$\mathbf{x}_{\mathrm{c}} = \begin{cases} \mathbf{x}(k) - s(\mathbf{x}(k) - \mathbf{l}(k)) & (\text{if } d < r) \\ \mathbf{x}(k) + s(\mathbf{u}(k) - \mathbf{x}(k)) & (\text{if } d \geq r) \end{cases} \tag{10}$$

其中， s 是从幂分布中抽取的随机变量，$\mathbf{l}$ 和$\mathbf{u}$ 分别是各元素下界和上界组成的数组，在本研究中分别为$\mathbf{l} = \mathbf{0}$ 和$\mathbf{u} = \mathbf{1}$ 。 d 和 r 分别是$\mathbf{x}(k)$与$\mathbf{l}(k)$之间的缩放距离（定义为 $d = \frac{x-l}{u-x}$ ），以及从 0 到 1 的均匀分布中抽取的随机数。这种随机变异使算法能够以预设概率进行位翻转变异，从而摆脱局部最优解并探索搜索空间中的新区域。

5.2 熵计算

香农熵按以下公式计算

$$S = -[x \log_2 x + (1-x) \log_2 (1-x)],\ x = \frac{V_{\mathrm{EuO}}}{V_{\mathrm{total}}} \tag{11}$$

这里， V_{EuO}和 V_{total} 分别表示 EuO 相的体积和晶胞的总体积。在熵计算中，准备了 2×2 个核，并对晶胞中随机抽取的核内熵进行$L = 10^5$ 次评估，随后计算其平均值 $S_{ave} = L^{-1} \sum_{i=1}^{L} S_i$。我们采用这一量，以便量化 MCs 中随着能带数增加而不断上升的构型复杂度。

6 致谢

本研究得到日本学术振兴会青年科学家研究奖学金（DC1）（编号：25KJ2117）对 R. N. 的资助。本研究的部分工作得到 JST ACT-X（编号：JPMJAX22AL）对 T. Y. 的资助，以及 JST CREST（编号：JPMJCR21O1）对 M. K. 和 Y. I. 的资助。

参考文献

[1] B. Flebus、D. Grundler、B. Rana、Y. Otani、I. Barsukov、A. Barman、G. Gubbiotti、P. Landeros、J. Akerman、U. Ebels、P. Pirro、V. E. Demidov、K. Schultheiss、G. Csaba、Q. Wang、F. Ciubotaru、D. E. Nikonov、P. Che、R. Hertel、T. Ono、D. Afanasiev、J. Mentink、T. Rasing、B. Hillebrands、S. V. Kusminskiy、W. Zhang、C. R. Du、A. Finco、T. van der Sar、Y. K. Luo、Y. Shiota、J. Sklenar、T. Yu 和 J. Rao，“2024年磁子学路线图”，《物理学杂志：凝聚态物质》，第 36 卷，第 363501 页，2024年9月。

[2] A. V. Chumak、P. Kabos、M. Wu、C. Abert、C. Adelmann、A. O. Adeyeye、J. Akerman、F. G. Aliev、A. Anane、A. Awad、C. H. Back、A. Barman、G. E. W. Bauer、M. Becherer、E. N. Beginin、V. A. S. V. Bittencourt、Y. M. Blanter、P. Bortolotti、I. Boventer、D. A. Bozhko、S. A. Bunyaev、J. J. Carmiggelt、R. R. Cheenikundil、F. Ciubotaru、S. Cotofana、G. Csaba、O. V. Dobrovolskiy、C. Dubs、M. Elyasi、K. G. Fripp、H. Fulara、I. A. Golovchanskiy、C. Gonzalez-Ballestero、P. Graczyk、D. Grundler、P. Gruszecki、G. Gubbiotti、K. Guslienko、A. Haldar、S. Hamdioui、R. Hertel、B. Hillebrands、T. Hioki、A. Houshang、C.-M. Hu、H. Huebl、M. Huth、E. Iacocca、M. B. Jungfleisch、G. N. Kakazei、A. Khitun、R. Khymyn、T. Kikkawa、M. Klaui、O. Klein、J. W. Klos、S. Knauer、S. Koraltan、M. Kostylev、M. Krawczyk、I. N. Krivorotov、V. V. Kruglyak、D. Lachance-Quirion、S. Ladak、R. Lebrun、Y. Li、M. Lindner、R. Macedo、S. Mayr、G. A. Melkov、S. Mieszczak、Y. Nakamura、H. T. Nembach、A. A. Nikitin、S. A. Nikitov、V. Novosad、J. A. Otalora、Y. Otani、A. Papp、B. Pigeau、P. Pirro、W. Porod、F. Porrati、H. Qin、B. Rana、T. Reimann、F. Riente、O. Romero-Isart、A. Ross、A. V. Sadovnikov、A. R. Safin、E. Saitoh、G. Schmidt、H. Schultheiss、K. Schultheiss、A. A. Serga、S. Sharma、J. M. Shaw、D. Suess、O. Surzhenko、K. Szulc、T. Taniguchi、M. Urbanek、K. Usami、A. B. Ustinov、T. van der Sar、S. van Dijken、V. I. Vasyuchka、R. Verba、S. V. Kusminskiy、Q. Wang、M. Weides、M. Weiler、S. Wintz、S. P. Wolski和X. Zhang，“磁学进展：自旋波计算路线图”，《*IEEE* 磁学汇刊》，第58卷，第1–72页，2022年6月。

[3] A. Khitun、M. Bao 和 K. L. Wang，《磁振子逻辑电路》，物理学杂志*D*：应用物理，第 43 卷，页码 264005，2010年7月。

[4] N. Kanazawa, T. Goto, K. Sekiguchi, A. B. Granovsky, C. A. Ross, H. Takagi, Y. Nakamura, 和M. Inoue，《鲁棒磁子自旋波干涉仪的演示》，《科学报告》，第6卷，第30268页，2016年7月。

[5] Y. Fan, M. J. Gross, T. Fakhrul, J. Finley, J. T. Hou, S. Ngo, L. Liu, 和 C. A. Ross, 《磁振子诱导的磁性绝缘体通道中的相干畴壁运动》, 《自然·纳米技术》, 第18卷, 第1000–1004页, 2023年9月。[6] Ã. Papp, W. Porod, 和 G. Csaba, 《利用非线性自旋波干涉构建纳米尺度神经网络》, 《自然·通讯》, 第12卷, 第6422页, 2021年11月。[7] S. Nagase, S. Nezu, 和 K. Sekiguchi, 《具备短期记忆功能、用于高速估算外部磁场的自旋波储备池芯片》, 《物理评论应用》, 第22卷, 第024072页, 2024年8月。[8]W. Namiki, D. Nishioka, T. Tsuchiya, 和 K. Terabe, 《利用非线性干涉自旋波实现快速物理储备池计算》, 《神经形态计算与工程》, 第4卷, 第024015页, 2024年6月。[9] J. C. Gartside, K. D. Stenning, A. Vanstone, H. H. Holder, D. M. Arroo, T. Dion, F. Caravelli, H. Kurebayashi, 和 W. R. Branford, 《通过自旋波指纹识别在人工自旋涡旋冰中实现可重构训练和储备池计算》, 《自然·纳米技术》, 第17卷, 第460–469页, 2022年5月。[10]L. Körber, C. Heins, T. Hula, J.-V. Kim, S. Thlang, H. Schultheiss, J. Fassbender, 和 K. Schultheiss, 《利用磁振子散射储备池在倒易空间中进行模式识别》, 《自然·通讯》, 第14卷, 第3954页, 2023年7月。[11] A. V. Chumak, P. Pirro, A. A. Serga, M. P. Kostylev, R. L. Stamps, H. Schultheiss, K. Vogt, S. J. Hermsdoerfer, B. Laegel, P. A. Beck, 和 B. Hillebrands, 《自旋波在微结构磁振子晶体中的传播》, 《应用物理快报》, 第95卷, 第262508页, 2009年12月。[12]K. Mori, T. Koguchi, T. Watanabe, Y. Yoshihara, H. Miyashita, D. Grundler, M. Inoue, K. Ishiyama, 和 T. Goto, 《含有重新定位铜圆盘六角晶格的超低阻尼亚铁磁波导中取向依赖的二维磁振子晶体模式》, 《物理评论应用》, 第21卷, 第014061页, 2024年1月。[13] M. Krawczyk 和 H. Puszkarski, 《三维磁振子晶体的平面波理论》, 物理评论*B*, 第77卷, 第054437页, 2008年2月。[14] J. Ge 和 Y. Yin, 《响应型光子晶体》, 《德国应用化学国际版》, 第50卷, 第7期, 第1492–1522页, 2011年。[15] L. Liao, J. Liu, J. Puebla, Q. Shao, 和 Y. Otani, 《混合磁振子-声子晶体》, *npj*自旋电子学, 第2卷, 第1–6页, 2024年9月。[16] T. G. Burns, A. Huynh, G. Mackertich-Sengerdy, S. D. Campbell, 和 D. H. Werner, 《多功能自由形态超材料天线罩的多物理场逆向设计》, 《*Small Structures*》, 第6卷, 第e202500397页, 2025年12月。

[17] F. Sun、H. Zhang、Y. Liu、W. Qin 和 D. Li, 《用于统一调控多种物理场的多物理场超材料》, 《*Small Structures*》, 第6卷, 2500352页, 2025年11月。[18]D. Prajapati 和 C. Banerjee, 《在无 Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用的工程化手性磁振子晶体中实现选择性自旋波非互易性》, 物理评论*B*。, 第110卷, 224410页, 2024年12月。[19] G. Park、J. Yang 和 S.-K. Kim, 《反点晶格分形磁振子晶体中自旋波多重态的递归演化》, 《科学报告》, 第11卷, 22604页, 2021年11月。[20] A. De、K. Dutta、S. Mondal、S. Barman、Y. Otani 和 A. Barman, 《复杂几何结构的磁振子晶体》, 物理评论*B*。, 第103卷, 2021年2月。[21] H. Yang、G. Yun 和 Y. Cao, 《笼目晶格二维磁振子晶体中的自旋波平带》, 《应用物理学杂志》, 第137卷, 113904页, 2025年3月。[22] J.W. Kłos、M. L.Sokolovskyy、S.Mamica 和M. Krawczyk, 《晶格对称性与夹杂物形状对二维磁振子晶体能谱的影响》, 《应用物理学杂志》, 第111卷, 123910页, 2012年6月。[23] H. Yang、G. Yun 和 Y. Cao, 《二维磁振子晶体中旋转方形杆产生的自旋波带隙》, 《物理学杂志*D*: 应用物理》, 第44卷, 455001页, 2011年11月。[24] Z. K. Wang、V. L. Zhang、H. S. Lim、S. C. Ng、M. H. Kuok、S. Jain 和 A. O. Adeyeye, 《具有尺寸可调带隙的纳米结构磁振子晶体》, 《*ACS Nano*》, 第4卷, 第643–648页, 2010年2月。[25] Q. Wang、Z. Zhong、L. Jin、X. Tang、F. Bai 和 H. Zhang, 《引入额外晶格散射体产生的大磁振子带隙》, 《应用物理学杂志》, 第113卷, 153905页, 2013年4月。[26] F. Wu、Z. Liu 和 Y. Liu, 《二维晶格中旋转方形杆产生的声学带隙》, 《物理评论*E*: 统计、非线性与软物质物理》, 第66卷, 046628页, 2002年10月。[27] P. Jin、S. Yang、L. Xu、G. Dai、J. Huang 和 X. Ouyang, 《利用块体各向同性材料实现双层热传感器的粒子群优化》, 《国际热质传递杂志》, 第172卷, 121177页, 2021年6月。[28] Z. Jin、S. Mei、S. Chen、Y. Li、C. Zhang、Y. He、X. Yu、C. Yu、J. K. W. Yang、B. Luk'yanchuk、S. Xiao 和 C.-W. Qiu, 《利用分段分层进化算法进行超构光学的复杂逆向设计》, 《*ACS Nano*》, 第13卷, 第821–829页, 2019年1月。[29] N. Zenbaa、F. Majcen、C. Abert、F. Bruckner、N. J. Mauser、T. Schrefl、Q. Wang、D. Suess 和 A. V. Chumak, 《逆向设计磁振子逻辑门的实现》, 《科学进展》, 第11卷, eadu9032页, 2025年5月。

[30] N. Zenbaa、C. Abert、F. Majcen、M. Kerber、R. O. Serha、S. Knauer、Q. Wang、T. Schrefl、D. Suess 和 A. V. Chumak，《通用逆向设计磁振子器件》，《自然·电子学》，2025年1月。[31] M. Kiechle、L. Maucha、V. Ahrens、C. Dubs、W. Porod、G. Csaba、M. Becherer 和 A. Papp，《机器学习设计的自旋波透镜的实验演示》，《*IEEE* 磁学快报》，第13卷，第1–5页，2022年。[32] Z. R. Yan、Y. W. Xing 和 X. F. Han，《磁振子滤波器的逆向设计》，《磁学与磁性材料杂志》，第563卷，169976页，2022年12月。[33] Q. Wang、A. V. Chumak 和 P. Pirro，《逆向设计磁振子器件》，《自然·通讯》，第12卷，2636页，2021年5月。[34] A. A. Voronov、M. Cuervo Santos、F.Bruckner、D. Suess、A. V. Chumak 和 C. Abert，《利用水平集方法对磁振子器件进行逆向设计拓扑优化》，《*npj* 自旋电子学》，第3卷，19页，2025年5月。[35] R. Nagaoka、K. Masuzawa、M. Taniwaki、A. Lira Foggiatto、T. Yamazaki、I. Obayashi、Y. Hi-raoka、C. Mitsumata 和 M. Kotsugi，《利用拓扑数据分析量化不同频率下软磁材料的矫顽力因子》，《*IEEE* 磁学汇刊》，第60卷，第1–5页，2024年9月。[36] K. Masuzawa、A. L. Foggiatto、S. Kunii、R. Nagaoka、M. Taniwaki、T. Yamazaki、C. Mitsumata、I. Obayashi、Y. Hiraoka 和 M. Kotsugi，《通过扩展朗道自由能模型并加入熵特征，对复杂迷宫状磁畴结构进行可解释分析》，《科学报告》，第1–19页，2026年2月。[37] J. Zhang、W. Yu、X. Chen 和 J. Xiao，《基于 COMSOL Multiphysics 的频域微磁模拟模块》，《*AIP*进展》，第13卷，2023年5月。[38] D. Kumar、J. W. Kłos、M. Krawczyk 和 A. Barman，《纳米尺度二维磁振子晶体中的磁振子能带结构、完全带隙与集体自旋波激发》，《应用物理学杂志》，第115卷，043917页，2014年1月。[39] J. Romero Vivas、S. Mamica、M. Krawczyk 和 V. V. Kruglyak，《利用平面波方法研究三维磁振子晶体中的自旋波阻尼》，《物理评论*B*：凝聚态物质与材料物理》，第86卷，2012年10月。[40] Y. Cao、G. Yun、X. Liang 和 N. Bai，《具有不同散射体形状与排列方式的二维磁振子晶体的能带结构》，《物理学杂志*D*：应用物理》，第43卷，305005页，2010年8月。

[41] S. M. Rezende，《磁振子学基础》。物理学讲义，Cham，瑞士：Springer Nature，第1版，2020年8月。[42] S. Heiles和R. L. Johnston，“利用电子结构方法对团簇进行全局优化”，《国际量子化学》，第113卷，第2091–2109页，2013年9月。[43] O. Sigmund和K. Hougaard，“最优光子晶体的几何性质”，《物理评论快报》，第100卷，第153904页，2008年4月。[44] X. K. Han和Z. Zhang，“基于遗传算法的声子晶体薄板拓扑优化”，《科学报告》，第9卷，第8331页，2019年6月。[45] “The MathWorks, inc.（2025）。MATLAB版本：25.2.0（R2025b）。”
https://www.mathworks.com/。访问日期：2026年2月8日。[46] Q. Wang、H. Zhang、X. Tang、H. Su、F. Bai、Y. Jing和Z. Zhong，“对称性降低对二维磁振子晶体中磁振子带隙的影响”，《物理学杂志*D*：应用物理》，第47卷，第065004页，2014年2月。[47] A. Vansteenkiste、J. Leliaert、M. Dvornik、M. Helsen、F. Garcia-Sanchez和B. Van Waeyenberge，“MuMax3的设计与验证”，《*AIP*进展》，第4卷，第107133页，2014年10月。[48] F. Pedregosa、G. Varoquaux、A. Gramfort、V. Michel、B. Thirion、O. Grisel、M. Blondel、P. Prettenhofer、R. Weiss、V. Dubourg、J. Vanderplas、A. Passos、D. Cournapeau、M. Brucher、M. Perrot和E. Duchesnay，“Scikit-learn：Python中的机器学习”，《机器学习研究杂志》，第12卷，第2825–2830页，2011年。[49] T.-J. Cui、S. Liu和L.-L. Li，“编码超表面的信息熵”，《光：科学与应用》，第5卷，第e16172页，2016年11月。[50] K. Deep、K. P. Singh、M. Kansal和C. Mohan，“一种用于求解整数优化问题和混合整数优化问题的实数编码遗传算法”，《应用数学与计算》，第212卷，第2期，第505–518页，2009年。