arXiv:2603.05144v1 [math.MG] 5 Mar 2026

[1]

p-仿射对偶曲率测度的闵可夫斯基问题

Youjiang Lin 与 Yuchi Wu

摘要。对于 $p \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ 以及内部包含原点的凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$，我们构造了关于 K 的一族 p-仿射对偶曲率测度 $\mathcal{I}_p(K, \cdot)$。仿射不变测度 $\widetilde{C}^a_{n-1}(K, \cdot)$ 在文 [9] 中给出，是 $\mathcal{I}_p(K, \cdot)$ 当 $p \to 1^-$ 时的极限情形。经典锥体积测度是仿射测度 $2|p|\mathcal{I}_p(K, \cdot)/(n^2 V(I_p K))$ 在 $p \to 0$ 且 $V(K) = 2$ 时的极限情形，其中 $I_p K$ 表示 K 的 L_p 交体。我们提出并研究了 p-仿射对偶曲率测度的闵可夫斯基问题。具体而言，我们给出了 p-仿射对偶曲率测度的偶闵可夫斯基问题解存在的一个充分条件。此外，当 $p \in (0,1)$ 时给出了一个必要条件。该闵可夫斯基问题的光滑情形等价于求解一类关于 p-余弦变换的新型偏微分方程。

1. 引言

闵可夫斯基问题是布伦-闵可夫斯基理论中的主要问题之一。经典闵可夫斯基问题提出：对于S^{n-1}上的有限博雷尔测度 μ，要使 μ 成为凸体K 在 $\mathbb{R}^n$中的表面积测度$S(K, \cdot)$，需要满足哪些充要条件？闵可夫斯基 [55, 56] 提出并完全解决了这一问题的离散版本。一般情形则由亚历山德罗夫 [1, 2] 和芬切尔-耶森 [14]分别独立解决。

由 Lutwak 引入的L_p 表面积测度是L_p 布伦-闵可夫斯基理论中的一个基本概念，其中包含经典表面积测度（$p = 1$的情形）和锥体积测度（$p = 0$的情形）这两个重要特例。Lutwak 提出的L_p 闵可夫斯基问题（例如参见 [43]）旨在寻找充分必要条件，以确保单位球面上的给定测度是某个凸体的L_p 表面积测度；例如参见 [5, 11, 12, 30, 43, 45, 51, 70]。L_p 闵可夫斯基问题对所有实数p 都有意义，并包含经典闵可夫斯基问题（$p = 1$的情形）和对数闵可夫斯基问题（$p = 0$的情形）这两个重要

[1]第一作者获得中国国家自然科学基金委员会 NSFC 12371137 和 NSFC 11971080 资助；第二作者获得上海市科学技术委员会 22DZ2229014 和国家自然科学基金委员会青年基金 NSFC 12401067 资助。2020 数学学科分类号。52A20, 52A30, 52A40。关键词与短语。仿射闵可夫斯基问题、L_p 交体、仿射对偶曲率测度、p-余弦变换以及非线性偏微分方程。

特例。L_p 闵可夫斯基问题的解在仿射等周不等式中有重要应用；例如参见 [13, 24, 25, 29, 47, 49, 50, 64]。

与布伦-闵可夫斯基理论相对应，还有一个平行的对偶布伦-明可夫斯基理论，由 Lutwak 于 1975年 开创（例如，参见 [57]）。在一篇杰出的论文[31], 中，Huang-Lutwak-Yang-Zhang 发现了凸体的一系列基本对偶曲率测度 $\mathbb{R}^n$。他们研究了相应的对偶 Minkowski 问题，并证明了偶对偶 Minkowski 问题的解的存在性。有关对偶闵可夫斯基问题的近期研究，例如参见 [7, 17, 18, 31, 33, 66, 67]。

最近，Lutwak-Xi-Yang-Zhang [46] 在积分几何中构造了一族新的几何测度。它们是弦幂积分的微分，统称为弦测度。与之相关的闵可夫斯基问题称为弦闵可夫斯基问题。所谓的（$n-2$）阶克里斯托费尔-明可夫斯基问题（例如参见 [21]）是弦闵可夫斯基问题的一个重要特例。关于闵可夫斯基问题的更多成果，见文献 [8, 32, 36, 46]。

凸体的仿射几何研究在仿射变换和中心仿射变换下保持不变的几何泛函。过去半个世纪以来，人们研究了各种新的仿射不变量，参见例如 [35, 40, 41, 44, 47–49, 53, 58, 61, 65, 69]。一些仿射不变量可通过可加性刻画，参见例如 [23, 37–39, 42]。锥体积测度是n 维 L_p-表面积测度中唯一的 SL(n) 不变测度。相应的对数闵可夫斯基问题由 B¨or¨oczky-Lutwak- Yang-Zhang 于 [5] 针对对称凸体求解。对于 μ 为离散非对称测度的情形，Stancu 研究了对数闵可夫斯基问题 [59, 60], Zhu [68]。Chen-Li-Zhu [10] 证明了非对称测度情形下对数闵可夫斯基问题解的存在性。

对偶仿射拟混合体积由 Lutwak 提出，见 [57]。其定义为：令 $\Phi_0(K) = V(K)$，且 $\Phi_n(K) = \omega_n$；而对于 $m = 1, \ldots, n-1$,

$$\widetilde{\Phi}_{n-m}(K) := \frac{\omega_n}{\omega_m}\left(\int_{G(n,m)} V_m(K \cap \xi)^n d\nu_m(\xi)\right)^{1/n},$$

其中 ω_k 表示 k 维单位球的体积，G(n,m) 表示 $\mathbb{R}^n$ 中所有 m 维子空间构成的格拉斯曼流形。利用对偶仿射拟混合体积，Cai-¯Leng-Wu-Xi [9] 提出了仿射不变测度 $C_m^a(K, \cdot)$（精确定义见第 2.3 节），并证明了以下变分公式。对于内部包含原点的凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$，以及每个 $f \in C\left(S^{n-1}\right)$,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[\widetilde{\Phi}_{n-m}([K, f]_t)^n\right] = n\left(\frac{\omega_n}{\omega_m}\right)^n \int_{S^{n-1}} f(v) d\widetilde{C}_m^a(K, v),$$

其中，当充分小的 $|t|$时，对数 Wulff 形状 $[K, f]_t$ 由式（17）给出。Cai-¯Leng-Wu-Xi [9] 研究了关于仿射不变量测度的闵可夫斯基问题 $C_m^a(K, \cdot)$。

当$m = n$时，关于测度$C_n^a(K,\cdot)$的闵可夫斯基问题就是对数闵可夫斯基问题。

当 $m = n-1$时，对偶仿射拟体积积分 Φ_1 与星体 [40] K 的交体 IK（由 Lutwak 首次定义并命名）密切相关$K \subset \mathbb{R}^n$，其定义如下：

$$\rho_{\mathrm{IK}}(u) = V_{n-1}\left(K \cap u^{\perp}\right).$$

简单计算可知，K 的交体体积与$\widetilde{\Phi}_1(K)$的关系为：

$$V(\mathrm{I}K) = \frac{\omega_{n-1}^n}{\omega_n^{n-1}}\widetilde{\Phi}_1(K)^n.$$

对于$p \in (-\infty,0) \cup (0,1)$，原点对称星体$K \subset \mathbb{R}^n$ 的L_p 交体定义为星体 I_pK，其径向函数为

$$\rho\left(\mathrm{I}_pK, x\right) = \left(\frac{1-p}{2}\int_K |x\cdot y|^{-p}dy\right)^{1/p}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}, \tag{1}$$

其中 $x\cdot y$ 是 x、$y \in \mathbb{R}^n$的通常内积，积分则是关于勒贝格测度进行的。经过归一化后，L_p 交体等于 Lutwak-Zhang [52]给出的极体L_{-p} 质心体。请注意，L_p 交体的定义与 [22] 中给出的定义略有不同，区别在于用 $(1-p)/2$ 替换 $1/\Gamma(1-p)$。当$p \to 1^-$时，L_p 交体 I_pK 收敛于经典交体 $\mathrm{I}K$。

本文通过计算 L_p 交体在 $p \in (-\infty,0)\cup(0,1)$ 时的变分公式，得到了一类新的仿射不变测度 $\mathcal{I}_p(K,\cdot)$（见定义1）。特别地，对于$K \in \mathcal{K}_o^n$、$f \in C\left(S^{n-1}\right)$，并令$K_t$ 为由h_K 和f生成的 Wulff形体对数族。于是，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} V\left(\mathrm{I}_pK_t\right) = \mathrm{sgn}(p)\int_{S^{n-1}} f(u)d\mathcal{I}_p(K,u), \tag{2}$$

其中，sgn 表示符号函数。 [9] 中给出的仿射不变测度 $\mathrm{C}_{n-1}^a(\mathrm{K},\cdot)$ 是 $\mathcal{I}_p(\mathrm{K},\cdot)$ 在 $\mathrm{p} \to 1^-$ 时的极限情形。此外，我们证明，当 $\mathrm{p} \to 0$ 且 $\mathrm{V(K)} = 2$ 时，经典锥体积测度 $\mathrm{V}_K(\cdot)$ 是测度 $2|\mathrm{p}|\mathcal{I}_p(\mathrm{K},\cdot)/(\mathrm{n}^2\mathrm{V}(\mathrm{I}_p\mathrm{K}))$ 的极限情形。

定义 1. 对于任意球面博雷尔集 $\eta \subset S^{n-1}$, $\alpha_K^*(\eta)$ 表示其反向径向高斯像（精确定义见第 *2* 节）。设 $p \in (-\infty,0)\cup(0,1)$ 且 $K \in \mathcal{K}_o^n$。p 仿射对偶曲率测度 $\mathcal{I}_p(K,\cdot)$定义如下：

$$\mathcal{I}_p(K,\eta) = \frac{1-p}{2|p|}\int_{\alpha_K^*(\eta)} \rho_K^{n-p}(v)T_{-p}\rho_{\mathrm{I}_pK}^{n-p}(v)dv. \tag{3}$$

对于 $p > -1$，$T_p f$表示函数$f \in C\left(S^{n-1}\right)$的$p$-余弦变换，其定义为

$$T_p f(u) = \int_{S^{n-1}} f(v)|u \cdot v|^p dv, \text{ for } u \in S^{n-1}. \tag{4}$$

由（1）、（3）和（4），可得

$$\mathcal{I}_p(K,\eta) = \frac{n-p}{|p|} \int_{\alpha_K^*(\eta)} \rho_K^{n-p}(v)\rho_{\mathrm{I}_p^2 K}^p(v)dv, \tag{5}$$

其中 $\mathrm{I}_p^2 K$ 表示 I_p K 的 $L_p K$交体。利用（5）和极坐标变换，可得

$$\mathcal{I}_p(K,\eta) = \frac{(n-p)^2}{|p|} \int_{x\in K, x/|x|\in\alpha_K^*(\eta)} \rho_{\mathrm{I}_p^2 K}^p(x)dx. \tag{6}$$

仿射闵可夫斯基问题，关于 $\mathcal{I}_p(K,\cdot)$。设 $p \in (-\infty,0) \cup (0,1)$ 固定。求有限博雷尔测度 μ 在S^{n-1}上的必要充分条件，使得存在某个凸体$K \in \mathcal{K}_o^n$满足 $\mu = \mathcal{I}_p(K,\cdot)$。

当测度 μ 具有密度函数 $\mathrm{g}: \mathrm{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 时，关于$\mathcal{I}_p(\mathrm{K},\cdot)$ 的闵可夫斯基问题等价于研究 S^{n-1} 上以下 Monge-Amp`ère 型方程：$\mathrm{c(n,p)T_{-p}\circ T^{(}n\text{-}p\ p\ )_{-p}\circ\mathcal{D}^{(-n+p)}(h)}\left(\nabla^{\nabla}\mathrm{h}+\mathrm{h}|\nabla \underline{+} \mathrm{h}\,\mathrm{h}_{\iota}|\right)(\mathrm{v})\cdot|\nabla\mathrm{h}(\mathrm{v})+\mathrm{h}(\mathrm{v})\mathrm{v}|^{-p}\mathrm{h}(\mathrm{v})\det\left(\nabla^2\mathrm{h}(\mathrm{v})+\mathrm{h}(\mathrm{v})\mathrm{I}\right)=\mathrm{g}(\mathrm{v})$，其中 $\mathrm{h}: \mathrm{S}^{n-1} \to (0,\infty)$ 是待求未知函数，$\nabla\mathrm{h}$ 和 $\nabla^2\mathrm{h}$ 分别表示球面梯度和球面海森矩阵，$\mathrm{h}_{\iota}(\mathrm{w}) := \mathrm{h}(\mathrm{w})\mathrm{w}$，$\forall\,\mathrm{w} \in \mathrm{S}^{n-1}$，I 是恒等映射，$\mathrm{T}_{-p}$ 表示（–p）-余弦变换，而对偶算子 $\mathcal{D}$ 和常数 c(n, p) 定义如下

$$\mathcal{D}h(u) = \max_{v\in S^{n-1}} \frac{u\cdot v}{h(v)}, \quad \text{and} \quad c(n,p) = \frac{n-p}{|p|}\left(\frac{1-p}{2(n-p)}\right)^{\frac{n}{p}}.$$

下面的定理给出了关于p-仿射对偶曲率测度的偶闵可夫斯基问题的解存在性的一个充分条件。我们主要采用变分方法，其中泛函是L_p 交体的体积与一个熵积分之和。我们首先证明关于L_p 交体与交体的径向函数的不等式，见引理5。然后，我们给出熵积分的一个估计，该估计在 [7], 中给出，见引理6。最后，我们针对一个精心选取的障碍凸体，给出L_p交体体积的一个估计。有限博雷尔测度μ在S^{n-1} 上被称为满足严格子空间集中不等式，如果对每一个子空间 ξ（即 $\mathbb{R}^n$ 的子空间），且 $0 < \dim\xi < n$,

$$\frac{\mu\left(\xi \cap S^{n-1}\right)}{\mu\left(S^{n-1}\right)} < \frac{1}{n}\dim\xi. \tag{7}$$

定理 1. 设 $p \in (-\infty,0) \cup (0,1)$ 且μ 是单位球面S^{n-1}上的非零偶有限博雷尔测度。如果μ 满足严格子空间集中不等式*(7)*，则在 $\mathbb{R}^n$ 中存在一个原点对称凸体K，使得μ $= \mathcal{I}_p(K,\cdot)$。

在 [6], B¨or¨oczky-Lutwak-Yang-Zhang 中，作者给出了偶对数闵可夫斯基问题存在解的充要条件。具体而言，单位球面 S^{n-1} 上的非零有限偶博雷尔测度是某个原点对称凸体在 $\mathbb{R}^n$ 中的锥体积测度，当且仅当它满足子空间集中条件。关于原点对称凸多面体的锥体积测度子空间集中不等式的研究可追溯至 He-Leng-Li [26], Henk-Sch¨urmann-Wills [28] 和 Xiong [62]。后来，Henk-Linke [27]证明，质心位于原点的多胞体的锥体积测度满足子空间集中不等式。关于广义 p 阶对偶曲率测度，B¨or¨oczky-Henk-Pollehn [4] 证明了对称凸体的对偶曲率测度满足一个紧致的子空间集中不等式。沿着 [4], 中的思路，我们给出了 p-仿射对偶曲率测度存在解的一个必要条件，其中 $0 < p < 1$。

定理 2. 设 $0 < p < 1$ 且 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为原点对称凸体。则对 $\mathbb{R}^n$ 的每一个满足 $0 <$ 维$\xi < n$ 的子空间 ξ，p-仿射对偶曲率测度 $\mathcal{I}_p(K,\cdot)$满足

$$\frac{\mathcal{I}_p\left(K,\xi\cap S^{n-1}\right)}{\mathcal{I}_p\left(K,S^{n-1}\right)} < \frac{\dim\xi}{n-p}. \tag{8}$$

2. 预备知识

我们引入一些记号，并为便于后文查阅，列出关于凸体的若干基本事实。关于凸体理论的优秀综合性参考文献可见 Gardner [15], Gruber [20] 与 Schneider [57]的著作。

令 $\mathbb{R}^n$ 表示具有标准内积 x·y 的 n 维欧几里得空间，其中 x、y $\in\mathbb{R}^n$；全文假设 n ≥ 2。令 o 表示 $\mathbb{R}^n$ 的原点。记 $|x| = \sqrt{x\cdot x}$ 为 x 的范数。令 S^{n-1} 表示$\overline{\mathbb{R}^n}$ 中的单位球面。令 B^n 表示以 $\mathbb{R}^n$原点为中心的单位球。单位球 B^n 的 n 维体积记为 ω_n。令 C(S n_{-1}) 表示定义在 S^{n-1} 上的连续函数集。令 C_e(S n_{-1}) 表示定义在 S^{n-1} 上的偶连续函数集。令 C^+(S n_{-1}) 表示定义在 S n_{-1} 上的正连续函数集。令 $C_e^+(S^{n-1})$ 表示定义在 S^{n-1} 上的偶正连续函数集。$\mathbb{R}^n$ 的特殊线性变换群记为 SL(n)。m 维豪斯多夫测度记为 $\mathcal{H}^m$，m 维勒贝格测度记为 $\mathcal{L}^m$。考虑位于 $\mathbb{R}^n$的一个 m 维仿射子空间中的 m 维凸体 L 时，我们记 V_m(L)，而不记 $\mathcal{L}^m$(L)。对于 K $\subset\mathbb{R}^n$，简记 V(K) 为 V_n(K)。令 K|ξ 表示

K 的正交投影$K \subset \mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$的仿射子空间 ξ 上。令 $\xi^\perp$ 表示 $\mathbb{R}^n$中线性子空间 ξ 的正交补空间。令 $u^\perp$ 表示单位向量 $u \in S^{n-1}$ 的正交补空间。对于 $K \subset \mathbb{R}^n$，令 conv K 表示 K 的凸包。对于定义在 S^{n-1} 上的有限测度 μ，我们记 $|\mu|$ 为其总质量，即 $|\mu| = \mu\left(S^{n-1}\right)$。符号函数 sgn：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为 $\mathrm{sgn}(x) = x/|x|$，若$x \neq 0$，且 $\mathrm{sgn}(0) = 0$。

2.1. **凸体与星体**。 $\mathbb{R}^n$ 中凸体 （具有非空内部的紧凸子集）的集合记为 $\mathcal{K}^n$，包含原点于其内部的凸体集合记为 $\mathcal{K}_o^n$，而 $\mathcal{K}_e^n \subset \mathcal{K}_o^n$ 表示关于原点对称的凸体集合。

对于两个集合K、$L \subset \mathbb{R}^n$，闵可夫斯基和 $K + L$ 定义为

$$K + L = \{x + y : x \in K, y \in L\}.$$

K 的数乘 λK 定义为

$$\lambda K = \{\lambda x : x \in K\}, \quad \lambda > 0.$$

$K \subset \mathcal{K}_o^n$的极体$K^*$ 定义为

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n : x \cdot y \leq 1, \forall x \in K\}.$$

非空紧凸集$K \subset \mathbb{R}^n$的支撑函数 $h_K : S^{n-1} \to \mathbb{R}$是定义在单位球面$S^{n-1}$上的连续函数，定义为

$$h_K(v) = \max\{x \cdot v : x \in K\}. \tag{9}$$

凸体由其支撑函数唯一确定。凸体的集合可视为一个带有豪斯多夫度量的度量空间，其中K与L 之间的豪斯多夫距离定义为

$$d_H(K, L) := \min\{t \geq 0 : \ K \subset L + tB^n, \ L \subset K + tB^n\}. \tag{10}$$

对所有$v \in S^{n-1}$以及所有 $\varphi \in \mathrm{SL}(n)$,

$$h_{\varphi K}(v) = \left|\varphi^t v\right| h_K\left(\left\langle \varphi^t v \right\rangle\right) \tag{11}$$

其中 $\langle x \rangle = x/|x|$ 对$x \in \mathbb{R}^n \backslash \{o\}$成立，并且 φ^t 是 φ的转置。

紧致星形集$K \subset \mathbb{R}^n$（相对于原点）的径向函数 ρ_K： $\mathbb{R}^n \backslash \{o\} \to \mathbb{R}$定义为

$$\rho_K(x) = \max\{t \geq 0 : tx \in K\}. \tag{12}$$

显然,

$$\rho_{\varphi K}(x) = \rho_K(\varphi^{-1} x), \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{o\}, \quad \varphi \in \mathrm{SL}(n). \tag{13}$$

若星形集 K 的 ρ_K 在单位球面 S^{n-1}上连续且为正，则称其为星体。星体集合记为 $\mathcal{S}_o^n$，$\mathcal{S}_e^n \subset \mathcal{S}_o^n$ 表示原点对称星体的集合。对于 $K \in \mathcal{S}_o^n$，我们有以下体积公式：

$$V(K) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \rho_K^n(u)du, \tag{14}$$

其中，du 表示球面勒贝格测度。

径向距离 定义为K与$L \in \mathcal{S}_o^n$ 之间的距离

$$d_R(K,L) := |\rho_K - \rho_L|_\infty = \max_{u\in S^{n-1}} |\rho_K(u) - \rho_L(u)|. \tag{15}$$

设$h \in C^+\left(S^{n-1}\right)$、$f \in C\left(S^{n-1}\right)$以及 $\delta > 0$。设$h_t \in C\left(S_{n^{-1}}\right)$为定义在每个$t \in (-\delta, \delta)$和每个$v \in S^{n-1}$ 上的函数，其定义如下

$$\log h_t(v) = \log h(v) + tf(v). \tag{16}$$

由 $[h_t]$ 表示由h_t确定的 Wulff形，

$$[h_t] = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x\cdot v \leqslant h_t(v) \text{ for all } v \in S^{n-1}\right\}. \tag{17}$$

我们称 $[h_t]$ 为由（h，f）形成的对数族 *Wulff* 形。有时，我们将 $[h_t]$ 记作 $[h, f]_t$；如果h 恰好是凸体$K \in \mathcal{K}_o^n$的支撑函数，也可以记作 $[K, f]_t$，或简记为 K_t。

2.2. **径向高斯像及其反向**。 在 [31], Huang-Lutwak-Yang-Zhang 给出了径向高斯像和反向径向高斯像的定义。对于 $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $\eta \subset S^{n-1}$，径向高斯像 $\boldsymbol{\alpha}_K(\eta)$ 是 K 在边界点 $\rho_K(u)u$处的外单位法向量的集合，其中$u \in \eta$；即，

$$\boldsymbol{\alpha}_K(\eta) = \bigcup_{u\in\eta}\left\{v \in S^{n-1} : \rho_K(u)u\cdot v = h_K(v)\right\}.$$

反向径向高斯像 $\boldsymbol{\alpha}_K^*(\eta)$ 是所有径向方向的集合$u \in S^{n-1}$，使得其中的一个元素 η 是 ∂K 在点 $\rho_K(u)u \in \partial K$处的外单位法向；即，

$$\boldsymbol{\alpha}_K^*(\eta) = \bigcup_{v\in\eta}\left\{u \in S^{n-1} : \rho_K(u)u\cdot v = h_K(v)\right\}.$$

将 $\omega_K \subset S_{n-1}$ 记作如下集合：$u \in S^{n-1}$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_K(\{u\})$包含多于一个点；也就是说，点 $\rho_K(u)u \in \partial K$ 具有多于一个外单位法向。我们现在定义径向高斯映射

$$\alpha_K : S^{n-1}\backslash\omega_K \longrightarrow S^{n-1},$$

满足 $\boldsymbol{\alpha}_K(\{u\}) = \{\alpha_K(u)\}$。众所周知，$\mathcal{H}^{n-1}(\omega_K) = 0$ （见 [57]）。

将 $\eta_K \subset S^{n-1}$ 记为所有 $v \in S_{n-1}$ 的集合，其中 $\alpha_K^*(\{v\})$ 包含多于一个元素；也就是说，存在多于一个径向方向 $u \in S^{n-1}$，使得 v 是 $\rho_K(u)u$的单位外法向量。类似地，逆径向高斯映射定义为

$$\alpha_K^* : S^{n-1}\backslash\eta_K \longrightarrow S^{n-1},$$

由 $\alpha_K^*(\{u\}) = \left\{\alpha_K^*(u)\right\}$。集合 η_K 也具有 $\mathcal{H}^{n-1}$-测度零（见 [57]）。

2.3. **仿射对偶曲率测度。给定一个球面博雷尔测度 μ，以及** $\varphi \in$SL(n)，则 $\varphi\mu$（其仿射像）定义如下（见 [6]）：

$$\varphi\mu(\eta) = \mu\left(\left\langle\varphi^{-1}\eta\right\rangle\right), \quad \text{for each Borel } \eta \subset S^{n-1}, \tag{18}$$

其中 $\langle x\rangle = x/|x|$，对于$x \in \mathbb{R}^n\backslash\{o\}$。

设$m \in \{1, ..., n-1\}$，并设$K \in \mathcal{K}_o^n$。Cai-Leng-Wu-Xi [9] 给出了仿射对偶曲率测度的定义，其中K 的定义为

$$\widetilde{C}_m^{\mathrm{a}}(K,\eta) = \int_{\alpha_K^*(\eta)} \rho_K(u)^m \int_{u\in\xi\in G(n,m)} V_m(K\cap\xi)^{n-1} d\xi du,$$

对于每个博雷尔集 $\eta \subset S^{n-1}$，其中$G(n, m)$表示 $\mathbb{R}^n$中由m维子空间构成的格拉斯曼流形。对于每个 $\varphi \in$ SL(n)，凸体的仿射对偶曲率测度满足仿射逆变性质:

$$\widetilde{C}_m^{\mathrm{a}}(\varphi K,\cdot) = \varphi^{-\mathrm{t}}\widetilde{C}_m^{\mathrm{a}}(K,\cdot).$$

星体交体$K \in \mathcal{S}_o^n$ 是中心星体 IK，定义为

$$\rho_{\mathrm{I}K}(u) = V_{n-1}\left(K\cap u^\perp\right) = \frac{1}{n-1} R\left(\rho_K^{n-1}\right)(u), \tag{19}$$

对每个$u \in S_{n-1}$。此处R 表示球面拉东变换，对于$f \in C\left(S^{n-1}\right)$，定义为

$$Rf(u) = \int_{S^{n-1}\cap u^\perp} f(v)dv, \quad u \in S^{n-1}.$$

~仿射测度 $C_m^{\mathrm{a}}(K,\cdot)$ 可以通过张氏交体得到几何解释（参见 [63]）。事实上，对于 $m = n-1$，回顾（19），可以证明，对于 $u \in S^{n-1}$,

$$\int_{u\in\xi\in G(n,n-1)} V_{n-1}(K\cap\xi)^{n-1} d\xi = \frac{n-1}{n\omega_n}\rho_{\mathrm{I}^2K}(u),$$

其中 $\mathrm{I}^2K = \mathrm{I}(\mathrm{I}K)$ 是 IK 的交体。因此

$$\widetilde{C}_{n-1}^{\mathrm{a}}(K,\eta) = \frac{n-1}{n\omega_n}\int_{\alpha_K^*(\eta)} \rho_K(u)^{n-1}\rho_{\mathrm{I}^2K}(u)du. \tag{20}$$

3. p-仿射对偶曲率测度的变分公式

引理1. *[31]* 设 $h \in C^+(S^{n-1})$ 且 $f \in C(S^{n-1})$。设 K_t 为由 (h,f)构成的 *Wulff*形体对数族，并将 K_0 简记为 K。那么，对于几乎所有的 $u \in S^{n-1}$,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\rho_{K_t}(u)-\rho_K(u)}{t}=\rho_K(u)f(\alpha_K(u)). \tag{21}$$

此外，存在 $\delta_0>0$ 和 $M_0>0$，使得

$$\left|\rho_{K_t}(u)-\rho_K(u)\right|\le M_0|t|, \tag{22}$$

对于所有 $u \in S^{n-1}$ 以及所有 $t \in (-\delta_0,\delta_0)$。

定理3. 设 $p \in (-\infty,0)\cup(0,1)$，$K \in \mathcal{K}_o^n$，$f \in C\left(S^{n-1}\right)$，且设 K_t 为由 h_K 和 f 生成的 *Wulff* 形体对数族。那么，

$$\lim_{t\to 0}\frac{V\left(\mathrm{I}_pK_t\right)-V\left(\mathrm{I}_pK\right)}{t}=\mathrm{sgn}(p)\int_{S^{n-1}}f(u)d\mathcal{I}_p(K,u). \tag{23}$$

证明。 首先，由（14）、（1）以及极坐标变换可得,

$$\begin{aligned}
V(\mathrm{I}_pK) &= \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_{\mathrm{I}_pK}(u)^n du\\
&= \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\left(\frac{1-p}{2}\int_K |x\cdot u|^{-p}\,dx\right)^{\frac{n}{p}}du\\
&= \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\left(\frac{1-p}{2}\int_{S^{n-1}}\int_0^{\rho_K(v)}|v\cdot u|^{-p}\,r^{n-p-1}drdv\right)^{\frac{n}{p}}du\\
&= \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\left(\frac{1-p}{2(n-p)}\int_{S^{n-1}}|v\cdot u|^{-p}\rho_K(v)^{n-p}dv\right)^{\frac{n}{p}}du.
\end{aligned} \tag{24}$$

因此，由（24）、（22）、勒贝格控制收敛定理、（21）、Fubini定理、（4）和（3），

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{V\left(\mathrm{I}_pK_t\right)-V\left(\mathrm{I}_pK\right)}{t}\\
=\;& \frac{1-p}{2p}\int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}}\rho_{\mathrm{I}_pK}^{n-p}(u)|v\cdot u|^{-p}\rho_K^{n-p}(v)f(\alpha_K(v))dvdu\\
=\;& \frac{1-p}{2p}\int_{S^{n-1}}\rho_K^{n-p}(v)f(\alpha_K(v))\int_{S^{n-1}}\rho_{\mathrm{I}_pK}^{n-p}(u)|v\cdot u|^{-p}dudv\\
=\;& \frac{1-p}{2p}\int_{S^{n-1}}\rho_K^{n-p}(v)f(\alpha_K(v))T_{-p}\rho_{\mathrm{I}_pK}^{n-p}(v)dv\\
=\;& \mathrm{sgn}(p)\int_{S^{n-1}}f(u)d\mathcal{I}_p(K,u).
\end{aligned}$$

□ □

4. $\mathcal{I}_p(K,\cdot)$ 的仿射逆变性

设 $\{\mu(K,\cdot)\}_{K\in\mathcal{K}^n}$ 是一族由凸体集合$K\in\mathcal{K}^n$参数化的球面博雷尔测度。我们称μ为一个仿射协变族，如果对每个$K\in\mathcal{K}^n$以及每个 $\varphi\in \mathrm{SL}(n)$,

$$\mu(\varphi K,\cdot)=\varphi\mu(K,\cdot);$$

并称 μ 为仿射逆变族，如果对每个$K\in\mathcal{K}^n$ 及每个 $\varphi\in \mathrm{SL}(n)$,

$$\mu(\varphi K,\cdot)=\varphi^{-\mathrm{t}}\mu(K,\cdot),$$

其中 $\varphi^{-\mathrm{t}}$ 是 φ 转置的逆矩阵。

引理2. 设 $K\in\mathcal{K}_o^n$ 且 $\varphi\in \mathrm{SL}(n)$。则

$$\mathrm{I}_p(\varphi K)=\varphi^{-t}\mathrm{I}_pK. \tag{25}$$

证明。 根据 L_P 交体 (1) 的定义，令 $u\in S^{n-1}$ 且 $v=\varphi^t u/|\varphi^t u|$,

$$\rho\left(\mathrm{I}_p(\varphi K),u\right)^p=\frac{1-p}{2}\int_{\varphi K}|x\cdot u|^{-p}\,dx=\frac{1-p}{2}\left|\varphi^t u\right|^{-p}\int_K|y\cdot v|^{-p}\,dy. \tag{26}$$

此外，由（13）和（1），

$$\rho\left(\varphi^{-t}\mathrm{I}_pK,u\right)^p=\rho\left(\mathrm{I}_pK,\varphi^t u\right)^p=\frac{1-p}{2}\int_K\left|x\cdot\varphi^t u\right|^{-p}dx=\frac{1-p}{2}\left|\varphi^t u\right|^{-p}\int_K|x\cdot v|^{-p}\,dx. \tag{27}$$

By (26), (27) and the arbitrariness of $u\in S^{n-1}$, (25) is established. □ □

命题1。 p-仿射对偶曲率测度 $\mathcal{I}_p(K,\cdot)$ 是一个仿射逆变族，即对于任意 $\varphi\in \mathrm{SL}(n)$, 均有

$$\mathcal{I}_p(\varphi K,\eta)=\varphi^{-t}\mathcal{I}_p(K,\eta).$$

证明。 对于 $K\in\mathcal{K}_o^n$和$f\in C\left(S^{n-1}\right)$， 令 $[K,f]_t$为 Wulff 形状的对数族。根据 $\varphi\in \mathrm{SL}(n)$， 引理 2 和定理 3，可得

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}V\left(\mathrm{I}_p\left(\varphi[K,f]_t\right)\right)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}V\left(\mathrm{I}_p[K,f]_t\right)=\mathrm{sgn}(p)\int_{S^{n-1}}f(u)d\mathcal{I}_p(K,u). \tag{28}$$

将f扩展为定义在 $\mathbb{R}^n\backslash\{o\}$上的零次齐次函数。利用（2.1）和（17），可将集合 $\varphi[K,f]_t$ 改写如下:

$$\begin{aligned}\varphi[K,f]_t&=\left\{\varphi x:\log(x\cdot v)_+\le\log h_K(v)+tf(v),\quad\forall v\in S^{n-1}\right\}\\&=\left\{y:\log(y\cdot w)_+\le\log h_{\varphi K}(w)+tf\left(\varphi^{\mathrm{t}}w\right),\quad\forall w\in S^{n-1}\right\}\\&=\left[\varphi K,f\circ\varphi^{\mathrm{t}}\right]_t.\end{aligned}$$

由定理 3可知

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}V\left(\mathrm{I}_p\left(\varphi[K,f]_t\right)\right)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}V\left(\mathrm{I}_p\left[\varphi K,f\circ\varphi^{\mathrm{t}}\right]_t\right)=\mathrm{sgn}(p)\int_{S^{n-1}}f\left(\left\langle\varphi^{\mathrm{t}}v\right\rangle\right)d\mathcal{I}_p(\varphi K,u). \tag{29}$$

由于f是S^{n-1}上的任意连续函数，且我们所考虑的是S^{n-1}上的有限博雷尔测度，因此对f的积分可以用博雷尔集的特征函数的积分来代替。于是，上述方程连同(28)蕴含

$$\int_{S^{n-1}} 1_\eta(v)d\mathcal{I}_p(K,v) = \int_{S^{n-1}} 1_\eta\left(\left\langle\varphi^{\mathrm{t}}v\right\rangle\right)d\mathcal{I}_p(\varphi K,v),$$

对于每个博雷尔子集$\eta \subset S_{n-1}$。由于对$v \in S^{n-1}$，我们有$\langle\varphi^{\mathrm{t}}v\rangle \in \eta$当且仅当$v \in \langle\varphi^{-\mathrm{t}}\eta\rangle$，因此

$$\mathcal{I}_p(K,\eta) = \mathcal{I}_p\left(\varphi K,\left\langle\varphi^{-\mathrm{t}}\eta\right\rangle\right) = \varphi^{\mathrm{t}}\mathcal{I}_p(\varphi K,\eta),$$

其中右边的等式由定义（18）得出。这立即得到所需的事实：$\mathcal{I}_p(\varphi K,\cdot) = \varphi^{-\mathrm{t}}\mathcal{I}_p(K,\cdot)$。□　　□

5. p-仿射对偶曲率测度的若干特殊情形。

命题 2。设$K \in \mathcal{K}_o^n$。则测度$\mathcal{I}_p(K,\cdot)$弱收敛于测度$\widetilde{n\omega_n C^{\mathrm{a}}_{n-1}}(K,\cdot)$，该测度由（20）给出，当$p \to 1^-$时。

证明。众所周知，

$$\lim_{p\to 1^-}\frac{1-p}{2}T_{-p}f = Rf, \tag{30}$$

对于每个$f \in C\left(S^{n-1}\right)$，参见[19]或[34]。由[16, 命题 3。1], $\mathrm{I}_p K$在径向距离意义下收敛于$\mathrm{I}K$，当$p \to 1^-$时，即：

$$\lim_{p\to 1^-} d_R(\mathrm{I}_p K,\mathrm{I}K) = 0. \tag{31}$$

对于任意球面博雷尔集$\eta \subset S^{n-1}$，由（3）、（30）、（31）和（20），

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 1^-}\mathcal{I}_p(K,\eta) &= \lim_{p\to 1^-}\frac{1-p}{2p}\int_{\alpha^*_K(\eta)}\rho_K^{n-p}(v)T_{-p}\rho^{n-p}_{\mathrm{I}_p K}(v)dv\\
&= \lim_{p\to 1^-}\frac{1}{p}\int_{\alpha^*_K(\eta)}\rho_K^{n-p}(v)\frac{1-p}{2}T_{-p}\rho^{n-p}_{\mathrm{I}_p K}(v)dv\\
&= \int_{\alpha^*_K(\eta)}\rho_K^{n-1}(v)R\rho^{n-1}_{\mathrm{I}K}(v)dv\\
&= (n-1)\int_{\alpha^*_K(\eta)}\rho_K^{n-1}(v)\rho_{\mathrm{I}^2 K}(v)dv\\
&= n\omega_n\widetilde{C}^{\mathrm{a}}_{n-1}(K,\eta).
\end{aligned}$$

这就是所要证明的结论。　　□　　□

命题 3. 设$K \in \mathcal{K}_o^n$具有C^1边界。那么$\mathcal{I}_p(K,\cdot)$当$p \to -\infty$时收敛到零测度。

证明。 由 (1) 和 (5),

$$\begin{aligned}\left(\frac{\rho_{\mathrm{I}_p^2K(v)}}{\rho_K(v)}\right)^p &= \frac{(1-p)\int_{\mathrm{I}_pK}|v\cdot x|^{-p}dx}{2\rho_K^p(v)}\\ &= \frac{(1-p)\int_{S^{n-1}}\int_0^{\rho_{\mathrm{I}_pK}(u)}|v\cdot u|^{-p}r^{n-p-1}drdu}{2\rho_K^p(v)}\\ &= \frac{1-p}{2(n-p)}\int_{S^{n-1}}|v\cdot u|^{-p}\rho_K^{-p}(v)\rho_{\mathrm{I}_pK}^{n-p}(u)du\\ &= \frac{1-p}{2(n-p)}\int_{S^{n-1}}|v\cdot u|^{-p}\rho_K^{-p}(v)\left(\frac{1-p}{2(n-p)}\int_{S^{n-1}}|u\cdot w|^{-p}\rho_K(w)^{n-p}dw\right)^{-1}\rho_{\mathrm{I}_pK}^n(u)du\\ &= \int_{S^{n-1}}\left(\int_{S^{n-1}}\left(\frac{|u\cdot w|\rho_K(w)}{|v\cdot u|\rho_K(v)}\right)^{-p}\rho_K(w)^ndw\right)^{-1}\rho_{\mathrm{I}_pK}^n(u)du\\ &= \frac{1}{nV(K)}\int_{S^{n-1}}\left(\frac{1}{V(K)}\int_K\left(\frac{|u\cdot x|\rho_K(x)}{|v\cdot u|\rho_K(v)}\right)^{-p}dx\right)^{-\frac{1}{p}\times p}\rho_{\mathrm{I}_pK}^n(u)du. \end{aligned}\tag{32}$$

对于具有 C^1 边界且固定 $v\in S^{n-1}$ 的$K\in\mathcal{K}_o^n$，对几乎处处的$u\in S^{n-1}$,

$$\lim_{p\to-\infty}\left(\frac{1}{V(K)}\int_K\left(\frac{|u\cdot x|\rho_K(x)}{|v\cdot u|\rho_K(v)}\right)^{-p}dx\right)^{-\frac{1}{p}}=\operatorname{ess\,sup}\left\{\frac{|u\cdot x|\rho_K(x)}{|v\cdot u|\rho_K(v)}:\ x\in K\right\}=\frac{h_K(u)}{|v\cdot u|\rho_K(v)}>1.$$

因此，对于几乎处处的$u\in S^{n-1}$,

$$\lim_{p\to-\infty}\left(\frac{1}{V(K)}\int_K\left(\frac{|u\cdot x|\rho_K(x)}{|v\cdot u|\rho_K(v)}\right)^{-p}dx\right)^{-\frac{1}{p}\times p}=0.\tag{33}$$

此外，由 [52, P.2], 当 $r>0$ 足够小时,

$$\limsup_{p\to-\infty}\rho_{\mathrm{I}_pK}\le\lim_{p\to-\infty}\rho_{\mathrm{I}_p(B_r)}=\lim_{p\to-\infty}\rho_{\mathrm{I}_{-p}^*(B_r)}=\rho_{(B_r)^*}=\frac{1}{r}.\tag{34}$$

由（32）、（33）和（34），可得

$$\lim_{p\to-\infty}\left(\frac{\rho_{\mathrm{I}_p^2K(v)}}{\rho_K(v)}\right)^p=0.\tag{35}$$

由（5）、（35）以及 $K\in\mathcal{K}_o^n$ 具有C^1 边界，$\mathcal{I}_p(K,\cdot)$收敛到零测度，当$p\to-\infty$。 □ □

命题 4. 设 $K\in\mathcal{K}_o^n$且 $V(K)=2$。则 $\frac{2|p|}{n^2V(\mathrm{I}_pK)}\mathcal{I}_p(K,\cdot)$ 收敛于锥体积测度 $V_K(\cdot)$，当 $p\to0$时。

证明。 设 I_0K 为由其径向函数定义的星体

$$\rho(\mathrm{I}_0K,u):=\lim_{p\to0}\rho(\mathrm{I}_pK,u)=\lim_{p\to0}\left(\frac{1-p}{2}\int_K|x\cdot u|^{-p}dx\right)^{\frac{1}{p}},\quad\forall\,u\in S^{n-1}.\tag{36}$$

由$V(K)=2$以及简单计算可得,

$$\rho(\mathrm{I}_0K,u)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_K\ln|u\cdot x|dx-1\right\},\quad\forall\,u\in S^{n-1}.\tag{37}$$

由 (36)，我们得到

$$V(\mathrm{I}_0K) = \lim_{p\to 0} V(\mathrm{I}_pK). \tag{38}$$

由$V(K) = 2$, (32) 和 (36)，可得

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 0}\left(\frac{\rho_{\mathrm{I}_p^2K(v)}}{\rho_K(v)}\right)^p &= \lim_{p\to 0}\int_{S^{n-1}}\left(n\int_K\left(\frac{|u\cdot x|\rho_K(x)}{|v\cdot u|\rho_K(v)}\right)^{-p}dx\right)^{-1}\rho^n_{\mathrm{I}_pK}(u)du\\ &= \frac{1}{2n}\int_{S^{n-1}}\rho^n_{\mathrm{I}_0K}(u)du = \frac{1}{2}V(\mathrm{I}_0K).\end{aligned} \tag{39}$$

因此，由 (5)、(38) 和 (39)，对任意球面博雷尔集 $\eta\subset S^{n-1}$,

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 0}\frac{2|p|}{n^2V(\mathrm{I}_pK)}\mathcal{I}_p(K,\eta) &= \lim_{p\to 0}\frac{2(n-p)}{n^2V(\mathrm{I}_pK)}\int_{\alpha^*_K(\eta)}\rho_K^{n-p}(v)\rho^p_{\mathrm{I}_p^2K}(v)dv\\ &= \lim_{p\to 0}\frac{2(n-p)}{n^2V(\mathrm{I}_pK)}\int_{\alpha^*_K(\eta)}\rho^n_K(v)\left(\frac{\rho_{\mathrm{I}_p^2K}(v)}{\rho_K(v)}\right)^p dv\\ &= \frac{1}{n}\int_{\alpha^*_K(\eta)}\rho^n_K(v)dv = V_K(\eta).\end{aligned}$$

□　□

6. 通过极大化求解闵可夫斯基问题

若 μ 是 S^{n-1} 上非零的有限偶博雷尔测度，则 μ 的熵泛函 $E\mu : C_e^+\left(S^{n-1}\right)\to\mathbb{R}$定义为

$$E_\mu(f) = -\frac{1}{|\mu|}\int_{S^{n-1}}\log f(v)d\mu(v). \tag{40}$$

对于$K\in\mathcal{K}^n_e$，令 $E\mu(K)$ 表示 $E\mu(h_K)$。

令$p\in(-\infty,0)\cup(0,1)$，且 μ 是 S^{n-1} 上非零的有限偶博雷尔测度。定义泛函

$$\Phi_{\mu,p} : C_e^+\left(S^{n-1}\right)\to\mathbb{R}$$

by

$$\Phi_{\mu,p}(f) = \frac{p}{n(n-p)}\log V(\mathrm{I}_p[f]) + E_\mu(f). \tag{41}$$

由 (24) 及 $E\mu(f)$ 的定义可知，$\Phi_{\mu,\,p}$是 0 次齐次的，即 $\Phi_{\mu,\,p}(cf) = \Phi_{\mu,\,p}(f)$，对所有实数$c>0$均成立。

极大化问题 I. 给定 S^{n-1} 上非零的有限偶博雷尔测度 μ，是否存在$f_0\in C_e^+\left(S^{n-1}\right)$ 使得

$$\Phi_{\mu,p}(f_0) = \sup\left\{\Phi_{\mu,p}(f) : f\in C_e^+\left(S^{n-1}\right)\right\}?$$

注意，$\mathcal{K}^n_e$ 中凸体的支撑函数集合是$C_e^+\left(S^{n-1}\right)$的一个凸子锥，因此我们可以限制泛函$\Phi_{\mu,p}$：$\mathcal{K}^n_e\to\mathbb{R}$，它将$K$ 映射到$\Phi_{\mu,p}(h_K)$,

并将其简记为$\Phi_{\mu,p}(K)$。由此得到如下最大化问题。

极大化问题 II. 给定S^{n-1}上的一个非零有限偶博雷尔测度 μ，是否存在$K_0 \in \mathcal{K}_e^n$使得

$$\Phi_{\mu,p}(K_0) = \sup\left\{\Phi_{\mu,p}(K) : K \in \mathcal{K}_e^n\right\}?$$

我们首先证明，极大化问题 II 的解就是极大化问题 I 的解。

引理 3. 给定一个非零有限偶博雷尔测度μ，假设存在一个凸体 $K_0 \in \mathcal{K}_e^n$ 使得

$$\Phi_{\mu,p}(K_0) = \sup\left\{\Phi_{\mu,p}(K) : K \in \mathcal{K}_e^n\right\}. \tag{42}$$

Then

$$\Phi_{\mu,p}(K_0) = \sup\left\{\Phi_{\mu,p}(f) : f \in C_e^+\left(S^{n-1}\right)\right\}. \tag{43}$$

证明. 设$f \in C_e^+(S_{n-1})$，则 $h_{[f]}(u) \leq f(u)$ 对任意 $u \in S_{n-1}$。此外，$\left[h_{[f]}\right] = [f]$。因此，

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mu,p}([f]) &= \Phi_{\mu,p}\left(h_{[f]}\right) \\
&= \frac{p}{n(n-p)}\log V(\mathrm{I}_p[f]) - \frac{1}{|\mu|}\int_{S^{n-1}}\log h_{[f]}(u)d\mu(u) \\
&\geq \frac{p}{n(n-p)}\log V(\mathrm{I}_p[f]) - \frac{1}{|\mu|}\int_{S^{n-1}}\log f(u)d\mu(u) \\
&= \Phi_{\mu,p}(f).
\end{aligned} \tag{44}$$

因此，极大化问题 I 可在某个 $K_0 \in \mathcal{K}_e^n$ 的支撑函数处取得。所求等式（43）现由（42）推出。 □ □

下面的引理表明，极大化问题 I 的解是 p-仿射对偶曲率测度的仿射闵可夫斯基问题的解。

引理 4. 设 $p \in (-\infty,0) \cup (0,1)$。给定一个非零有限偶博雷尔测度 μ，假设存在凸体 $K_0 \in \mathcal{K}_e^n$ 使得

$$\Phi_{\mu,p}(K_0) = \sup\left\{\Phi_{\mu,p}(f) : f \in C_e^+\left(S^{n-1}\right)\right\}. \tag{45}$$

则 $\mu = \mathcal{I}_p(cK_0,\cdot)$ 对某一正实数 c 成立。

证明。 假设 K_0 是（45）中的极大化者。由于泛函 $\Phi_{\mu,\ p}(K)$ 是 0 次齐次的，并且 $V\left(\mathrm{I}_pK\right)$ 由（*24*）可知是 $n-p)/p$ 次齐次的，因此可找到一个正实数 c使得

$$V\left(\mathrm{I}_p(cK_0)\right) = \frac{|p||\mu|}{n(n-p)} \tag{46}$$

且 cK_0 也是（45）中的极大化者。记 $K_t = [cK_0, g]_t$，其中 $g \in C_e(S^{n-1})$。由定理3 和（46），

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\Phi_{\mu,p}(K_t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{n(n-p)}\log V\left(\mathrm{I}_p K_t\right) - \frac{1}{|\mu|}\int_{S^{n-1}}\log h_{K_t}d\mu\right)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{p}{n(n-p)}\cdot\frac{1}{V(\mathrm{I}_p(cK_0))}\left(\frac{d}{dt}V\left(\mathrm{I}_p K_t\right)\Big|_{t=0}\right) - \frac{1}{|\mu|}\int_{S^{n-1}} g(u)d\mu \\
&= \frac{|p|}{n(n-p)}\cdot\frac{1}{V(\mathrm{I}_p(cK_0))}\int_{S^{n-1}} g(u)d\mathcal{I}_p(cK_0,u) - \frac{1}{|\mu|}\int_{S^{n-1}} g(u)d\mu \\
&= \frac{1}{|\mu|}\int_{S^{n-1}} g(u)d\mathcal{I}_p(cK_0,u) - \frac{1}{|\mu|}\int_{S^{n-1}} g(v)d\mu,
\end{aligned}$$

这意味着

$$\int_{S^{n-1}} g(u)d\mathcal{I}_p(cK_0,u) = \int_{S^{n-1}} g(v)d\mu$$

对于每个 $g \in C_e\left(S^{n-1}\right)$。因此 $\mu = \mathcal{I}_p(cK_0,\cdot)$。 □ □

7. 仿射闵可夫斯基问题的解

引理5. 设 $p \in (-\infty,0)\cup(0,1)$。对所有 $K \in \mathcal{K}_e^n$，存在与体 K 无关的常数 $c_{n,p} > 0$，使得

$$c_{n,p}V(K)^{\frac{1-p}{p}}\rho(\mathrm{I}K,u) \le \rho\left(\mathrm{I}_p K,u\right) \le 2^{\frac{p-1}{p}}V(K)^{\frac{1-p}{p}}\rho(\mathrm{I}K,u), \quad \forall u \in S^{n-1}. \tag{47}$$

证明. 以下两个事实可见于文献 [54]。对于可测函数$f\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ 以及 $Q \in \mathcal{K}_e^n$，函数

$$F_1(q) := \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^n}\rho_Q(x)^{-q}f(x)dx}{\int_Q \rho_Q(x)^{-q}dx}\right)^{1/(n+q)}$$

在 $(-n,\infty)$ 上递增。设 $\psi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 满足 $\psi(0) = 0$，ψ 且 $\psi(x)/x$在 $(0,t]$ 上递增，并且对 $x \geqslant t$ 有 $\psi(x) = \psi(t)$。令 $g\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 为在 $\psi(t)$ 处为零的递减连续函数。则

$$F_2(q) := \left(\frac{\int_0^\infty g(\psi(x))x^q dx}{\int_0^\infty h(x)x^q dx}\right)^{1/(1+q)}$$

是 $(-1,\infty)$ 上的递减函数。

为证明 (47) 中的右不等式，令 $Q := [-1,1] \subset \mathbb{R}$ 且 $f(x) := A_{K,u}(x)\,A_{K,u}(0)$，其中

$$A_{K,u}(x) = V_{n-1}\left(K \cap \{z \in \mathbb{R}^n :\ z\cdot u = x\}\right).$$

布伦定理表明，$A_{K,u}(\cdot)^{1/(n-1)}$ 在 $[-h(K,u),h(K,u)]$ 上是凹函数，这意味着偶函数 $A_{K,u}(\cdot)$ 在 $[0,\infty)$ 上单调递减，因此 $f(x) \le f(0) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$。

因此，当 $p \in (0,1)$ 时，$F_1(-p) \leqslant F_1(0)$，即

$$\left(\frac{(1-p)\int_{\mathbb{R}}|x|^{-p}A_{K,u}(x)dx}{2V_{n-1}(K\cap u^{\perp})}\right)^{1/(1-p)} \leqslant \frac{V(K)}{2V_{n-1}(K\cap u^{\perp})}.$$

并且当 $p \in (-\infty,0)$ 时，$F_1(-p) \geqslant F_1(0)$，也就是说

$$\left(\frac{(1-p)\int_{\mathbb{R}}|x|^{-p}A_{K,u}(x)dx}{2V_{n-1}(K\cap u^{\perp})}\right)^{1/(1-p)} \geqslant \frac{V(K)}{2V_{n-1}(K\cap u^{\perp})}.$$

在上述两种情况下，根据 Fubini定理和（1），我们可以得到

$$\rho\left(\mathrm{I}_p K,u\right) \leqslant 2^{\frac{p-1}{p}} V(K)^{\frac{1-p}{p}}\rho(\mathrm{I}K,u).$$

为证明（47）中的左侧不等式，令 $g(x) = (1-x)^{n-1}\mathbb{I}_{[0,1]}(x), x \geqslant 0$ 且

$$\psi(x) = 1-\left(\frac{A_{K,u}(x)}{A_{K,u}(0)}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

对于某个给定的 $u \in S^{n-1}$（$\mathbb{I}$ 表示特征函数）。布伦定理表明，ψ 是定义在 $[0, h(K,u)]$ 上的凸函数。因此，g 和 ψ 满足上述条件，从而保证 F_2的单调性。因此，当 $p \in (0,1)$ 时，$F_2(-p) \geqslant F_2(0)$，即，

$$\left(\frac{\int_0^{\infty}A_{K,u}(x)x^{-p}dx}{V_{n-1}(K\cap u^{\perp})B(1-p,n)}\right)^{1/(1-p)} \geqslant \frac{nV(K)}{2V_{n-1}(K\cap u^{\perp})}, \tag{48}$$

其中，$B(\cdot,\cdot)$ 表示贝塔函数。并且当 $p \in (-\infty,0)$ 时，$F_2(-p) \leqslant F_2(0)$，即，

$$\left(\frac{\int_0^{\infty}A_{K,u}(x)x^{-p}dx}{V_{n-1}(K\cap u^{\perp})B(1-p,n)}\right)^{1/(1-p)} \leqslant \frac{nV(K)}{2V_{n-1}(K\cap u^{\perp})}. \tag{49}$$

由（1）、（48）和（49），对于 $p \in (-\infty,0)\cup(0,1)$，

$$\rho\left(\mathrm{I}_p K,u\right) \geqslant 2^{\frac{p-1}{p}}\left((1-p)\beta(1-p,n)n^{1-p}\right)^{1/p} V(K)^{\frac{1-p}{p}}\rho(\mathrm{I}K,u).$$

Let

$$C_{n,p} := 2^{\frac{p-1}{p}}\left((1-p)\beta(1-p,n)n^{1-p}\right)^{1/p}.$$

我们得到了所需的结果。 □ □

下面引理 6 的证明与 [7, 引理 4。2], 的证明类似，因此省略。两个引理的区别在于，$q \in (1,n)$ 在 [7, 引理 4。2] 中，而下面的引理 $q = n$ 中为6。

引理 6. 设 $\epsilon_0 > 0$。假设 $(e_{1l},\ldots,e_{nl})$，其中 $l = 1,2,\ldots$，是 $\mathbb{R}^n$ 的一列有序标准正交基，并收敛于有序标准正交基 $(e_1,\ldots,e_n)$。再假设 $(a_{1l},\ldots,a_{nl})$ 是一列 n 元组，对所有 l 满足 $0 < a_{1l} \leq a_{2l} \leq \cdots \leq a_{nl}$，并且存在 $\epsilon_0 > 0$，使得对所有 l 有 $a_{nl} > \epsilon_0$。对每个 $l = 1,2,\ldots$，令

$$Q_l = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x\cdot e_{1l}|^2/a_{1l}^2 + \cdots + |x\cdot e_{nl}|^2/a_{nl}^2 \leq 1\right\}$$

表示由 $(e_{1l},\ldots,e_{nl})$ 与 $(a_{1l},\ldots,a_{nl})$生成的椭球。若 μ 是 S^{n-1} 上满足严格子空间集中不等式 (7) 的偶博雷尔测度，则存在与 l 无关的 t_0、 δ_0、$l_0>0$ 以及 $c_{n,\epsilon_0,\delta_0,t_0}$，使得对每个 $l>l_0$,

$$E_\mu(Q_l)\le -\frac{\log(a_{1l}\cdots a_{n-1,l})}{n}+t_0\log a_{1l}+c_{n,\epsilon_0,\delta_0,t_0}. \tag{50}$$

定理 4. 设 $p\in(-\infty,0)\cup(0,1)$ 且 μ 是定义于 S^{n-1}上的非零有限偶博雷尔测度。若 μ 满足严格子空间集中不等式（7），则存在 $K_0\in\mathcal{K}_e^n$使得

$$\Phi_{\mu,p}(K_0)=\sup\left\{\Phi_{\mu,p}(K):K\in\mathcal{K}_e^n\right\}. \tag{51}$$

证明。 设存在序列 $\{K_j\}\subset\mathcal{K}_e^n$ 使得

$$\lim_{j\to\infty}\Phi_{\mu,p}(K_j)=\sup\left\{\Phi_{\mu,p}(K):K\in\mathcal{K}_e^n\right\}. \tag{52}$$

由于$\Phi_{\mu,p}(cK)=\Phi_{\mu,p}(K)$对任意$c>0$成立，我们可以假设$\max\{|x|:x\in K_j\}=1$，对所有$j$。由布拉施克选择定理，存在 $\{K_j\}$的一个子序列，为方便起见仍记为 $\{K_j\}$，满足$\lim_{j\to\infty}K_j=K_0$。容易看出K_0是关于原点对称的紧凸集。

接下来，我们证明K 的内部包含原点。否则，K_0 包含于 $\mathbb{R}^n$的一个真子空间中。由约翰定理可知，存在一个椭球Q_j 使得

$$Q_j\subset K_j\subset\sqrt{n}Q_j,\quad j=1,2,\ldots. \tag{53}$$

将Q_j 记为

$$Q_j=\left\{x\in\mathbb{R}^n:|x\cdot e_{1j}|^2/a_{1j}^2+|x\cdot e_{2j}|^2/a_{2j}^2+\cdots+|x\cdot e_{nj}|^2/a_{nj}^2\le 1\right\},$$

其中 $\{e_{ij}\}_{i=1}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基，且 $0<a_{1j}\le a_{2j}\le\cdots\le a_{nj}$。

根据 [15,推论 8.1.7],中关于交体的性质

$$\mathrm{I}Q_j=\frac{\omega_{n-1}V(Q_j)}{\omega_n}Q_j^*.$$

因此，我们有

$$V(\mathrm{I}Q_j)=\left(\frac{\omega_{n-1}V(Q_j)}{\omega_n}\right)^n V(Q_j^*)=\frac{\omega_{n-1}^n}{\omega_n^{n-2}}V(Q_j)^{n-1}. \tag{54}$$

因此，当 $p\in(0,1)$ 时，由式（24）、（53）、（5）和（54），存在 $\hat{c}_{n,p}>0$ 和 $\check{c}_{n,p}>0$，使得

$$\begin{aligned}\frac{p}{n(n-p)}\log V(\mathrm{I}_pK_j) &\le \frac{p}{n(n-p)}\log V\left(\mathrm{I}_p\left(\sqrt{n}Q_j\right)\right)\\ &\le \frac{p}{n(n-p)}\log\left(2^{\frac{n(p-1)}{p}}\sqrt{n}^{\frac{n(n-p)}{p}}V(Q_j)^{\frac{n(1-p)}{p}}V\left(\mathrm{I}Q_j\right)\right)\\ &= \hat{c}_{n,p}+\frac{p}{n(n-p)}\log V(Q_j)^{\frac{n-p}{p}}\end{aligned} \tag{55}$$

$$= \quad \check{c}_{n,p} + \frac{1}{n}\log\left(a_{1j}a_{2j}\cdots a_{nj}\right).$$

并且，当 $p \in (-\infty,0)$ 时，由式（24）、（53）、（5）和（54），存在 $c_{n,p} > 0$, $\bar{c}_{n,p} > 0$ 和 $\tilde{c}_{n,p}$，使得

$$\begin{aligned}
\frac{p}{n(n-p)}\log V\left(\mathrm{I}_p K_j\right) &\leq \frac{p}{n(n-p)}\log V\left(\mathrm{I}_p(\sqrt{n}Q_j)\right) \\
&\leq \frac{p}{n(n-p)}\log\left(c_{n,p}^{n}\sqrt{n}^{\frac{n(n-p)}{p}}V(Q_j)^{\frac{n(1-p)}{p}}V\left(\mathrm{I}Q_j\right)\right) \\
&= \bar{c}_{n,p} + \frac{p}{n(n-p)}\log V(Q_j)^{\frac{n-p}{p}} \\
&= \tilde{c}_{n,p} + \frac{1}{n}\log\left(a_{1j}a_{2j}\cdots a_{nj}\right).
\end{aligned} \tag{56}$$

接下来我们估计 E_μ 的上界。根据定义（40），有 $\mathrm{E}_\mu(\mathrm{K}j) \leq \mathrm{E}_\mu\left(\mathrm{Q}\,\mathrm{j}\right)$。由 $\{\mathrm{e}_{ij}\}_{i=1}^{n}$ 的紧性和正交性，对每个 j，都存在 $\left(\mathrm{e}^{1j},\ldots,\mathrm{e}_{nj}\right)$ 的一个子序列收敛到 $(\mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_n)$，其中 $\{\mathrm{e}_i\}_{i=1}^{n}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基。同理，$\left\{\mathrm{a}_{ij}\right\}$ 存在收敛子序列，对 i = 1, . . . , n 均如此。因此，不失一般性，我们假设 $\left(\mathrm{e}^{ij},\ldots,\mathrm{e}_{nj}\right)$ 收敛到 $(\mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_n)$，且对每个 i，$\mathrm{a}_i\mathrm{j}$ 收敛到 a_i。

由于 $Q_j \subset K_j \subset \sqrt{n}\bar{Q}_j$ 以及 $\max\{|x|: x \in K_j\} = 1$，我们有

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq a_{nj} \leq 1. \tag{57}$$

根据（50），存在正实数 t_0、δ_0、j_0 以及常数 $c_{n,\,\delta_0,\,t_0,}$，它们与 j 无关，使得对于 $j > j_0$，

$$E_\mu\left(Q_j\right) \leq -\frac{1}{n}\log\left(a_{1j}a_{2j}\cdots a_{n-1,j}\right) + t_0\log a_{1j} + c_{n,\delta_0,t_0}. \tag{58}$$

由于 K_0 包含于一个真子空间中，且 a^{ij} 收敛于 a_i，存在 $1 < k \leq n$ 满足

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-1} = 0, \quad a_k,\ldots,a_n > 0.$$

由（41）、（55）、（56）、（58）和（57），对于 $j > j_0$

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mu,p}\left(K_j\right) &= \frac{p}{n(n-p)}\log V\left(\mathrm{I}_p K_j\right) + E_\mu\left(K_j\right) \\
&\leq \frac{p}{n(n-p)}\log V\left(\mathrm{I}_p K_j\right) + E_\mu\left(Q_j\right) \\
&\leq \frac{1}{n}\log a_{nj} + t_0\log a_{1j} + \check{c}_{n,p} + \tilde{c}_{n,p} + c_{n,\delta_0,t_0} \to -\infty \ \text{ as } j \to \infty.
\end{aligned}$$

But

$$-\infty = \lim_{j\to\infty}\Phi_{\mu,p}\left(K_j\right) \geq \Phi_{\mu,p}\left(B^n\right) = \frac{p}{n(n-p)}\log V(\mathrm{I}_p B^n)$$

由此得到矛盾。因此，K_0 具有非空内部，即 $K_0 \in \mathcal{K}_e^n$。□ □

8. p-仿射对偶曲率测度的子空间集中界的必要性

本节的主要结果讨论$p \in (0,1)$时，p-仿射对偶曲率测度满足子空间集中界的必要性。函数f：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$的上水平集定义为

$$L^+(f,h) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq h\}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

如果f的每个上水平集都是闭凸集，则称f为单峰。

引理 7。 *[4, 引理 3。1]* 设 f： $\mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ 是单峰函数，且 $f(x) = f(-x)$ 对每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立，并且 f 在紧凸集上可积。设 $K \subset \mathbb{R}^n$是一个紧凸集，且 $\dim K = k$。则对于 $\lambda \in [0,1]$,

$$\int_{\lambda K+(1-\lambda)(-K)} f(x)\mathrm{d}\mathcal{L}^k(x) \geq \int_K f(x)\mathrm{d}\mathcal{L}^k(x). \tag{59}$$

此外，等式成立当且仅当对每一个 $h > 0$

$$V_k\left([\lambda K + (1-\lambda)(-K)] \cap L^+(f,h)\right) = V_k\left(K \cap L^+(f,h)\right). \tag{60}$$

定理的证明2 对于 $y \in K \mid \xi$， 记 $y = \rho_{K|\xi}(y)y$,

$$F_y = \mathrm{conv}\left\{0, K \cap \left(\overline{y} + \xi^\perp\right)\right\}, \quad \text{and} \quad M_y = \mathrm{conv}\left\{K \cap \xi^\perp, K \cap \left(\overline{y} + \xi^\perp\right)\right\}.$$

注意到

$$M_y \cap \left(\overline{y} + \xi^\perp\right) = F_y \cap \left(\overline{y} + \xi^\perp\right) = K \cap \left(\overline{y} + \xi^\perp\right). \tag{61}$$

由（6）、Fubini定理以及如下事实$M_y \cap (y + \xi^\perp) \subseteq K \cap (y + \xi^\perp)$ 我们可以写成

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_p\left(K, S^{n-1}\right) &= \frac{(n-p)^2}{p} \int_K \rho^p_{\mathrm{I}^2_p K}(x)dx \\
&= \frac{(n-p)^2}{p} \int_{K|\xi} \left(\int_{K \cap (y+\xi^\perp)} \rho^p_{\mathrm{I}^2_p K}(z)\, \mathrm{d}\mathcal{L}^{n-k}(z) \right) \mathrm{d}\mathcal{L}^k(y) \\
&\geq \frac{(n-p)^2}{p} \int_{K|\xi} \left(\int_{M_y \cap (y+\xi^\perp)} \rho^p_{\mathrm{I}^2_p K}(z)\, \mathrm{d}\mathcal{L}^{n-k}(z) \right) \mathrm{d}\mathcal{L}^k(y).
\end{aligned} \tag{62}$$

为了估计内层积分，令$y \in K \mid \xi$， $y \neq 0$，并为简便起见，我们设$\lambda = \rho_{K|\xi}(y)^{-1} \leq 1$。然后由$K$ 的对称性，我们得到

$$\begin{aligned}
M_y \cap \left(y + \xi^\perp\right) &\supseteq \lambda\left(K \cap \left(\overline{y} + \xi^\perp\right)\right) + (1-\lambda)\left(K \cap \xi^\perp\right) \\
&\supseteq \lambda\left(K \cap \left(\overline{y} + \xi^\perp\right)\right) + (1-\lambda)\left(\frac{1}{2}\left(K \cap \left(\overline{y} + \xi^\perp\right)\right) + \frac{1}{2}\left(-\left(K \cap \left(\overline{y} + \xi^\perp\right)\right)\right)\right) \\
&= \frac{1+\lambda}{2}\left(K \cap \left(\overline{y} + \xi^\perp\right)\right) + \frac{1-\lambda}{2}\left(-\left(K \cap \left(\overline{y} + \xi^\perp\right)\right)\right).
\end{aligned} \tag{63}$$

[3, P921] 中的定理表明，对于 0 ≠ p < 1，原点对称凸体的L_p-交体是原点对称凸体。因此，对于K ∈ $\mathcal{K}_e^n$，I_p^2K是原点对称凸体。因此，若我们定义 ρ^p I_p^2K(0) = +∞，则当p ∈ (0,1)时，函数 ρ^p I_p^2K(z)的上水平集是闭的且凸的。因此，函数 ρ^p I_p^2K(·)是单峰的。由(63)和引理 7，我们得到

$$\int_{M_y\cap(y+\xi^\perp)} \rho^p_{I_p^2K}(z)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^{n-k}(z) \geq \int_{K\cap(\bar{y}+\xi^\perp)} \rho^p_{I_p^2K}(z)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^{n-k}(z), \tag{64}$$

对于每个 $y \in K\mid\xi, y \neq 0$. 结合 (62)，我们得到下界

$$\mathcal{I}_p\left(K, S^{n-1}\right) \geq \frac{(n-p)^2}{p}\int_{K|\xi}\left(\int_{K\cap(\bar{y}+\xi^\perp)} \rho^p_{I_p^2K}(z)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^{n-k}(z)\right)\mathrm{d}\mathcal{L}^k(y). \tag{65}$$

接下来，我们来计算 $\mathcal{I}_p\left(K, S^{n-1}\cap\xi\right)$。注意，对于 $x \in K$，有 $x/|x| \in \alpha_K^*\left(S^{n-1}\cap\xi\right)$ 当且仅当边界点 $\rho_K(x)x$ 具有 ξ 中的外单位法向。因此，

$$\{x\in K : x/|x| \in \alpha_K^*\left(S^{n-1}\cap\xi\right)\}\cup\{0\} = \bigcup_{\bar{y}\in\partial(K|\xi)} \mathrm{conv}\left\{0, \left(\bar{y}+\xi^\perp\right)\cap K\right\}$$

利用 (6) 和 Fubini定理，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_p\left(K, S^{n-1}\cap\xi\right) \\
=\ & \frac{(n-p)^2}{p}\int_{K|\xi}\left(\int_{F_y\cap(y+\xi^\perp)} \rho^p_{I_p^2K}(z)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^{n-k}(z)\right)\mathrm{d}\mathcal{L}^k(y) \\
=\ & \frac{(n-p)^2}{p}\int_{K|\xi}\left(\int_{\rho_{K|\xi}(y)^{-1}(K\cap(\bar{y}+\xi^\perp))} \rho^p_{I_p^2K}(z)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^{n-k}(z)\right)\mathrm{d}\mathcal{L}^k(y) \\
=\ & \frac{(n-p)^2}{p}\int_{K|\xi}\rho_{K|\xi}(y)^{k+p-n}\left(\int_{K\cap(\bar{y}+\xi^\perp)} \rho^p_{I_p^2K}(z)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^{n-k}(z)\right)\mathrm{d}\mathcal{L}^k(y).
\end{aligned} \tag{66}$$

由于内积分与$y \in K\mid L$的长度无关，因此可将其视为可测函数 $g: S^{n-1}\cap\xi \to [0,\infty)$。因此，利用球面坐标，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_p\left(K, S^{n-1}\cap\xi\right) &= \frac{(n-p)^2}{p}\int_{K|\xi}\rho_{K|\xi}(y)^{k+p-n}g(y/|y|)\mathrm{d}\mathcal{L}^k(y) \\
&= \frac{(n-p)^2}{p}\int_{S^{n-1}\cap\xi} g(u)\left(\int_0^{\rho_{K|\xi}(u)}\rho_{K|\xi}(ru)^{k+p-n}r^{k-1}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\mathcal{H}^{k-1}(u) \\
&= \frac{(n-p)^2}{p}\int_{S^{n-1}\cap\xi} g(u)\rho_{K|\xi}(u)^{k+p-n}\left(\int_0^{\rho_{K|\xi}(u)} r^{n-p-1}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\mathcal{H}^{k-1}(u) \\
&= \frac{n-p}{p}\int_{S^{n-1}\cap\xi} g(u)\rho_{K|\xi}(u)^k\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{k-1}(u).
\end{aligned} \tag{67}$$

对（65）的右侧应用相同的变换，得到

$$\mathcal{I}_p\left(K, S^{n-1}\right) \geq \frac{(n-p)^2}{p}\int_{K|\xi} g(y/|y|)\mathrm{d}\mathcal{H}^k(y) \tag{68}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(n-p)^2}{p}\int_{S^{n-1}\cap\xi} g(u)\left(\int_0^{\rho_{K|\xi}(u)} r^{k-1}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\mathcal{H}^{k-1}(u)\\ &= \frac{(n-p)^2}{p}\frac{1}{k}\int_{S^{n-1}\cap\xi} g(u)\rho_{K|\xi}(u)^k\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{k-1}(u)\\ &= \frac{n-p}{k}\mathcal{I}_p\left(K, S^{n-1}\cap\xi\right), \end{aligned}$$

其中最后一个等式由（67）得出。因此，

$$\frac{\mathcal{I}_p\left(K, S^{n-1}\cap\xi\right)}{\mathcal{I}_p\left(K, S^{n-1}\right)} \le \frac{k}{n-p}. \tag{69}$$

应用引理7 的等号条件于（64）中的等号情形，可得

$$V_{n-k}\left(M_y\cap\left(y+\xi^\perp\right)\cap L^+(\rho^p_{\mathrm{I}^2_pK}, h)\right) = V_{n-k}\left(K\cap\left(\bar{y}+\xi^\perp\right)\cap L^+(\rho^p_{\mathrm{I}^2_pK}, h)\right)$$

对每个 h ＞0 都成立。然而，当 h 充分大时，K∩(y+$\xi^\perp$) ⊂ ∂K 与 L+(ρ^p I$_p^2$K, h) 的交集为空，而当 y 充分接近原点时，M$_y$ ∩ (y ＋$\xi^\perp$) ∩ L+(ρ^p I$_p^2$K, h) 非空。因此，不等式（64）是严格不等式，（69）也是如此。□

参考文献

[1] A.D. 亚历山德罗夫，关于凸体混合体积理论。III. 将闵可夫斯基关于凸多面体的两个定理推广到任意凸体。Mat. Sb., 3 (1938), 27-46（俄文）；英文译文见 Aleksandrov, A.D., Selected Works, Part 1, Chapter 4, pp. 61-97, Gordon and Breach, 阿姆斯特丹, 1996.[2] A.D. 亚历山德罗夫，关于凸体的面积函数。Mat. Sb., 6 (1939), 167-174（俄文）；英文译文见 Aleksandrov, A.D., Selected Works, Part 1, Chapter 9, pp. 155-162, Gordon and Breach, 阿姆斯特丹, 1996.[3] G. Berck，L_p-交体的凸性，《数学进展》222 (2009), no. 3, 920-936.[4] K.J. B¨or¨oczky、M. Henk 和 H. Pollehn，对称凸体的对偶曲率测度的子空间集中，《微分几何杂志》 109 (2018), no. 3, 411-429.[5] K.J. B¨or¨oczky、E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang，对数闵可夫斯基问题，J. A mer. Math. Soc. 26 (2013), no. 3, 831-852.[6] K.J. B¨or¨oczky、E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang，各向同性测度的仿射像，《微分几何杂志》99 (2015), no. 3, 407-442.[7] K.J. B¨or¨oczky、E. Lutwak、D. Yang、G. Zhang 和 Y. Zhao，对称凸体的对偶 Minkowski 问题，《数学进展》356 (2019), 106805.[8] K. B¨or¨oczky、E. Lutwak、D. Yang、G. Zhang 和 Y. Zhao，高斯像问题，Comm. Pure Appl. Math. 73 (2020), no. 7, 1406-1452.[9] X. Cai、G. Leng、Y. Wu 和 D. Xi，仿射对偶闵可夫斯基问题，《数学进展》467 (2025), Paper No. 110184, 35 pp.[10] S. Chen、Q.-R. Li 和 G. Zhu，非对称测度的对数闵可夫斯基问题，Trans. Amer. Math. Soc. 371 (2018), no. 4, 2623-2641.[11] W. Chen，数据不一定为正的 L_p 闵可夫斯基问题，《数学进展》201 (2006), no. 1, 77-89.[12] K.-S. Chou 和 X.-J. Wang，中心仿射几何中的 L_p-闵可夫斯基问题与闵可夫斯基问题，《数学进展》205 (2006), no. 1, 33-83.

[13] A. Cianchi、E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang，仿射 Moser-Trudinger 与 Morrey-Sobolev 不等式，《变分法与偏微分方程》36 (2009), no. 3, 419-436.[14] W. Fenchel 和 B. Jessen，集合函数与凸体。Danske Vid. Selskab. Mat.-Fys. Medd., 16 (1938), no. 3, 1-31.¨R.J. Gardner，几何断层成像，《数学及其应用百科全书》第58卷。剑桥大学出版社，纽约，第2版，2006.[15] R.J. Gardner 和 A.A. Giannopoulos，p-截面体，《印第安纳大学数学杂志》48 (1999), No. 2, 593-614.[16] R.J. Gardner、D. Hug、S. Xing 和 D. Ye，奥利茨-布伦-明可夫斯基理论中的广义体积及相关闵可夫斯基问题 I，《变分法与偏微分方程》58 (2019), no. 1, Paper No. 12, 35 pp.[17] R.J. Gardner、D. Hug、S. Xing 和 D. Ye，奥利茨-布伦-明可夫斯基理论中的广义体积及相关闵可夫斯基问题 II，《变分法与偏微分方程》59 (2020), no. 1, Paper No. 15, 33 pp.[18] E. Grinberg 和 G. Zhang，卷积、变换与凸体，《伦敦数学会会刊》78 (1999), no. 3, 77-115.[19] P.M. Gruber. 凸几何与离散几何，《数学基础原理》第336卷。施普林格，柏林，2007.[20] P. Guan 和 X.-N. Ma，克里斯托费尔-明可夫斯基问题 I：Hessian 方程解的凸性，《数学发明》151 (2003), no. 3, 553-577. [C. Haberl，L]交体，《数学进展》223 (2010), no. 1, 220-242.[21] C. Haberl 和 L. Parapatits，中心仿射哈德维格定理，J. Amer. Math. Soc. 27 (2014), no. 3, 685-705.[22] C. Haberl 和 F.E. Schuster，广义 L_p 仿射等周不等式，《微分几何杂志》83 (2009), no. 1, 1-26.[23] C. Haberl 和 F.E. Schuster，非对称仿射 L[24] Sobolev 不等式，《泛函分析杂志》257 (2009), no. 3, 641-658.$_p$ B. He、G. Leng 和 K. Li，对称多胞体的投影问题，《数学进展》207 (2006), no. 1, 73-90.[25] M. Henk 和 E. Linke，多胞体的锥体积测度。《数学进展》253 (2014), 50-62.$_p$ M. Henk、A. Sch[26] urmann 和 J.M. Wills，埃尔哈特多项式与连续极小值，《Mathematika》52 (2005), no. 1-2, 1-16.[27] C. Haberl、F.E. Schuster 和 J. Xiao，非对称仿射 P[28] olya-Szeg¨o 原理，《数学年刊》352 (2012), no. 3, 517-542.[29] Y. Huang、J. Liu 和 L. Xu，关于 L´-闵可夫斯基问题的唯一性：¨中的常数 p 曲率情形，《数学进展》281 (2015), 906-927.[30] Y. Huang、E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang，对偶布伦-明可夫斯基理论中的几何测度及其相关闵可夫斯基问题，《数学学报》216 (2016), no. 2, 325-388.$_p$Y. Huang、D. Xi 和 Y. Zhao，高斯概率空间中的闵可夫斯基问题，《数学进展》385 (2021), 107769. $\mathbb{R}^3$Y. Huang 和 Y. Zhao，关于 L[31] 对偶闵可夫斯基问题，《数学进展》332 (2018), 57-84.[32] A. Koldobsky，关于 Blaschke-[33] Levy 表示的反演公式，《休斯敦数学杂志》23 (1997), no. 1, 95-107.$_p$ K. Leichtweiss，凸体的仿射几何，Johann Ambrosius Barth，海德堡，1998.

[36] G.V. Livshyts，闵可夫斯基定理的推广及其在测度投影问题中的应用，《数学进展》356 (2019), 106803.[37] M. Ludwig，椭球与矩阵值赋值，Duke Math. J. 119 (2003), no. 1, 159-188. [38] M. Ludwig，交体与赋值，Amer. J. Math. 128 (2006), no. 6, 1409-1428.[39] M. Ludwig and M. Reitzner，SL(n) 不变赋值的分类，Ann. of Math. (2) 172 (2010), no. 2, 1219-1267.[40] E. Lutwak，交体与对偶混合体积，《数学进展》71 (1988), no. 2, 232-261.[41] E. Lutwak，质心体与对偶混合体积，《伦敦数学会会刊》60 (1990), no. 2, 365-391.[42] E. Lutwak，广义仿射表面积，《数学进展》85 (1991), no. 1, 39-68.[43] E. Lutwak，Brunn-Minkowski-Firey 理论 I：混合体积与闵可夫斯基问题，《微分几何杂志》38 (1993), no. 1, 131-150.[44] E. Lutwak，Brunn-Minkowski-Firey 理论 II：仿射与几何极小表面积，《数学进展》118 (1996), no. 2, 244-294.[45] E. Lutwak and V. Oliker，闵可夫斯基问题推广的解的正则性，《微分几何杂志》41 (1995), no. 1, 227-246.[46] E. Lutwak, D. Xi, D. Yang, and G. Zhang，积分几何中的弦测度及其闵可夫斯基问题，Comm. Pure Appl. Math. 77 (2024), no. 7, 3277-3330.[47] E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang，与凸体相关联的一种新椭球，Duke Math. J. 104 (2000), no. 3, 375-390.[48] E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang，L^p 仿射等周不等式，《微分几何杂志》56 (2000), no. 1, 111-132.[49] E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang，星体的 Cramer-Rao 不等式，Duke Math.J. 112(2002), no. 1, 59-81.[50] E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang，尖锐仿射 L^p Sobolev 不等式，《微分几何杂志》62 (2002), no. 1, 17-38.[51] E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang，关于 L^p-闵可夫斯基问题，Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), no. 11, 4359-4370.[52] E. Lutwak and G. Zhang，Blaschke-Santal´o 不等式，《微分几何杂志》47 (1997), no. 1, 1-16.[53] M. Meyer and E. Werner，关于 p-仿射表面积，《数学进展》152 (2000), no. 2, 288-313.[54] V.D. Milman and A. Pajor，赋范 n 维空间单位球的各向同性位置、惯性椭球与 zonotope，载于：泛函分析的几何方面，1987-88，《数学讲义》，第 1376 卷，施普林格，柏林，1989，第 64-104 页。[55] H. Minkowski，关于凸多面体的一般定理。哥廷根科学学会消息 (1897), 198-219.[56] H. Minkowski，体积与表面。《数学年刊》57 (1903), no. 4, 447-495.[57] R. Schneider，凸体：Brunn-Minkowski 理论，第二版，《数学及其应用百科全书》，剑桥大学出版社，剑桥，2014. [58] C. Sch¨utt, E. Werner，表面体与 p-仿射表面积，《数学进展》187 (2004), no. 1, 98-145.[59] A. Stancu，离散平面 L_0-闵可夫斯基问题，《数学进展》167 (2002), no. 1, 160-174.[60] A. Stancu，离散二维 L_0-闵可夫斯基问题的解的数量，《数学进展》180 (2003), no. 1, 290-323.[61] E. Werner and D. Ye，混合 p-仿射表面积的不等式，《数学年刊》347 (2010), no. 3, 703-737.[62] G. Xiong，凸多胞体锥体积泛函的极值问题，《数学进展》225 (2010), no. 6, 3214-3228.[63] G. Zhang，凸体截面，Amer. J. Math. 118 (1996), no. 2, 319-340.

[64] G. Zhang，仿射 Sobolev 不等式，《微分几何杂志》53 (1999), no. 1, 183-202.[65] Y. Zhao，关于 L_p-仿射表面积与曲率测度，《国际数学研究通知》5 (2016), no. 5, 1387- 1423.[66] Y. Zhao，负指标的对偶 Minkowski 问题，*Calc. Var. PartialDi分Equations*56 (2017), no. 2, Paper No. 18, 16 pp.[67] Y. Zhao，偶对偶 Minkowski 问题解的存在性，《微分几何杂志》110 (2018), no. 3, 543-572.[68] G. Zhu，多胞体的对数 Minkowski 问题，《数学进展》262 (2014), 909-931.[69] G. Zhu，多胞体的中心仿射 Minkowski 问题，《微分几何杂志》101 (2015), no. 1, 159-174.[70] G. Zhu，多胞体的 L_p Minkowski 问题，p 为 $0 < p < 1$，《泛函分析杂志》269 (2015), no. 4, 1070-1094.

(Y. Lin)河北师范大学数学科学学院，中国河北石家庄，050024 电子邮箱：yjlin @hebtu.edu.cn (Y. Wu) 华东师范大学数学科学学院、上海市 PMMP 重点实验室，中国上海 200241 电子邮箱：ycwu@math.ecnu.edu.cn