通过基于级数的解析延拓焕新非高斯雷达杂波的自回归过程仿真

Xingxing Liao，Junhao Xie，*IEEE*高级会员

arXiv:2603.05154v1 [eess.SP] 5 Mar 2026

摘要——**由于概念简单，线性滤波框架，尤其是自回归（AR）过程，在仿真具有指定概率密度函数（PDF）和自相关函数（ACF）的杂波序列方面已有悠久历史。然而，线性滤波不可避免地会使输入分布发生失真，从而可能导致概率密度函数复现不准确，或将适用范围限制在非常简单的自相关函数上。为应对这些挑战，本文提出了一种基于级数的解析延拓策略，通过准确预先计算补偿AR滤波所需的输入预失真，焕新了AR过程杂波仿真。首先，根据AR过程的输入输出关系推导AR输入的矩和累积量，分别为拉普拉斯变换（LT）和对数拉普拉斯变换在零点附近的矩展开和累积量展开提供基础。其次，通过帕德逼近（PA）对这两种级数展开进行解析延拓，以恢复整个复平面上的LT。值得注意的是，基于PA的矩展开延拓虽然是传统选择，但当LT呈现强烈振荡时可能会非常不准确。相比之下，鉴于对数LT通常具有更简单的结构，累积量展开的延拓提供了一种更稳定、更准确的替代方案。第三，由累积量展开恢复的LT结合随机变量变换方法，可快速仿真AR输入非高斯白序列，从而实现高效的AR过程。最后，仿真结果表明，所提出的策略能够准确、快速地仿真非高斯相关杂波序列。**

索引词—**雷达杂波仿真、线性滤波、自回归 (AR) 过程、解析延拓、帕德逼近 (PA)**。

I. 引言

ACCURATE 雷达杂波建模在分析海上监视雷达的探测性能方面发挥着重要作用 [1], [2]。复合高斯（CG）分布族已被广泛用于在特定条件下对真实海杂波建模，并经验证适用，其中包括K分布、帕累托分布，以及具有逆高斯纹理的CG分布 [3]。具体而言，近期提出的具有正温和 α-稳定（PTαS）纹理的CG模型，凭借灵活调节尾部特性的能力，能够准确拟合具有广泛尾部行为的实测海杂波数据 [4]。

本研究得到国家自然科学基金委员会项目（62371162）资助。作者来自哈尔滨工业大学海洋环境监测与信息处理重点实验室，地址：中国哈尔滨，邮编 150001。电子邮箱：(beehater552x@gmail.com; xj@hit.edu.cn)。（通讯作者：*Junhao Xie*。）

在雷达系统的整个开发和测试过程中，高质量的雷达杂波仿真都至关重要 [5]。工程师依靠高保真杂波仿真，在受控且可重复的条件下评估算法性能。对于CG杂波仿真，最常见的做法是分别仿真斑点和纹理分量。相干复高斯斑点可以通过成熟的方法生成，而非高斯相关正纹理分量的仿真则要困难得多。用于仿真具有指定概率密度函数（PDF）和自相关函数（ACF）或功率谱密度（PSD）的实值非高斯过程的两种典型框架是零记忆非线性（ZMNL）变换和线性滤波，下面将对此进行介绍：

- *ZMNL*。 它采用两步模拟过程：首先生成相关高斯过程；随后将其输入非线性变换，以获得所需的非高斯相关过程 [6]。由于用于分布控制的非线性变换也会扭曲相关性，因此该方法的关键步骤是预先计算底层高斯过程的相关性。目前，ZMNL 是用于仿真杂波纹理的最广泛采用的技术，包括伽马纹理（产生 K 分布）和逆伽马分布纹理（产生帕累托分布） [7]–[10]。

  然而，对于更复杂的纹理模型（例如 PTαS），ZMNL 的实现难度会显著增加，因为它依赖高效的逆累积分布函数（CDF）算法，或对相关变换进行快速数值计算，而这些方法可能无法获得。因此，值得探索用于模拟此类杂波纹理的替代框架。

- 线性滤波。与 ZMNL 相比，另一种两步框架自然而然地存在：首先生成非高斯白序列；随后将其通过线性滤波器，以获得所需的非高斯相关过程。由于用于控制相关性的线性滤波也会扭曲分布，因此该方法的关键步骤是预先计算底层非高斯白序列的分布。

  早期研究中，Oliver 和 Tough [11] 提出了精确和近似两种方法：将不相关的伽马分布序列通过移动平均

滤波器。具体而言，精确方法生成具有指数型自相关函数的伽马序列；对于更一般的自相关函数，近似方法则仅保留一阶和二阶矩。Szajnowski 和 Wynne[12] 采用一阶自回归（AR）过程来模拟正 α 稳定（PαS）序列，其自相关函数为指数型。这种方法本质上等同于 [11] 中的精确方法；原则上，它适用于具有无限可分性的分布。

尽管早期已有这些探索，但在21世纪的非高斯杂波仿真文献中，线性滤波框架受到的其他关注相对较少。在这一框架下，如何准确仿真具有各种自相关函数的非高斯序列，长期以来仍是一个基本未解决的问题，直到风致结构工程领域出现相关研究 [13]–[17]。

在 [13],中，Li 和 Li 首先生成具有指定分布的白序列，然后将其输入自回归过程，以施加期望的相关性。然而，由于自回归滤波也会改变分布，所得序列通常会偏离期望分布。为解决这一问题，Ma等人 [14]根据输入输出关系推导出自回归输入的前四阶矩。利用这些矩，他们采用传统的 Johnson 变换生成底层非高斯输入序列，期望自回归输出同时匹配指定的概率密度函数和自相关函数。尽管如此，仅依赖四阶矩通常不足以完整表征底层概率密度函数。为缓解这一局限，研究者引入最大熵原理，利用更多的矩恢复输入的概率密度函数 [15], [16], , 但这会牺牲计算效率。此外，使用大量矩可能会导致概率密度函数尾部出现伪振荡或波动[16], [17]。因此，开发自回归框架下的替代技术，以实现对非高斯相关序列的准确、高效仿真，具有重要意义。

受上述考虑的启发，本研究提出一种基于级数的解析延拓策略，以革新非高斯过程的自回归过程仿真。首先，根据自回归过程的输入输出关系，推导自回归输入的矩和累积量。随后利用这些统计量构造矩展开和累积量展开，分别表示零点附近的拉普拉斯变换（LT）和对数拉普拉斯变换。其次，鉴于这两种级数展开都包含LT的完整信息 [18,第V章8],，我们分别对每种级数进行解析延拓，以恢复整个复平面上的LT。具体而言，按照传统思路，首先对矩展开应用帕德逼近（PA）[19] 。然而，对于呈现强烈振荡衰减的拉普拉斯变换，这种方法可能导致恢复效果有限。相比之下，对数拉普拉斯变换通常结构更简单，因此对累积量展开进行基于PA的延拓更加稳定、准确。获得输入LT后，即可通过拉普拉斯逆变换（ILT）恢复相应的概率密度函数。数值分析表明，与矩展开方法相比，累积量展开方法能够更稳定、准确地恢复LT和概率密度函数。第三，基于从累积量展开中恢复的LT，实现了自回归输入非高斯白序列的快速仿真，并据此详细介绍了完整的自回归过程仿真流程。针对不同PTαS杂波纹理的仿真验证了这种基于累积量展开的解析延拓策略兼具准确性和效率。

本研究的贡献总结如下：

- 我们通过基于级数的解析延拓策略，重新实现了非高斯过程的自回归仿真。其中，在对数拉普拉斯变换域中对累积量展开进行基于PA的延拓，可准确恢复AR输入的拉普拉斯变换及概率密度函数。
- 通过随机变量（RV）变换方法利用恢复后的拉普拉斯变换的乘法结构，我们开发了一种快速的AR输入仿真方案，避免了数值累积分布函数反演或耗时的拒绝重采样。
- 与线性滤波框架中的其他方法相比，例如 Johnson 变换 [14]和最大熵方法 [15]–[17], , 所提方法更容易利用更丰富的累积量/矩，仅通过简单运算即可实现准确仿真。相较于 ZMNL 框架，该方法尤其适用于无法获得闭式逆累积分布函数的模型。

本文其余部分的组织结构如下。第II 节回顾仿真中需要复现的 CG 杂波特性。第III节简要介绍用于杂波仿真的 ZMNL 方法和基于 AR 过程的线性滤波，并说明本研究采用并重新实现基于 AR 的仿真的动机。第IV 节介绍所提出的基于级数的解析延拓策略，用于准确预先计算 AR 输入的拉普拉斯变换和概率密度函数。基于第IV节，第V 节设计了快速 AR 输入仿真方案，并详细说明 AR 过程仿真的完整流程。第VI节评估所提解析延拓策略的仿真性能。最后，第VII 节总结全文。

II. 海杂波的特性

人们普遍认为，CG分布族是最适合描述海杂波的统计模型之一[7] ，并已广泛应用于雷达检测的设计与分析 [20]。假设背景噪声可忽略，CG杂波模型表示为

$$X_{\mathrm{I}} + jX_{\mathrm{Q}} = \sqrt{V}\,[Z_{\mathrm{I}} + jZ_{\mathrm{Q}}] \tag{1}$$

其中， $Z_{\mathrm{I}} + jZ_{\mathrm{Q}}$ 和 V 分别表示复高斯斑点和非负纹理。$Z_{\mathrm{I}} + jZ_{\mathrm{Q}}$ 和 V 相互独立。纹理 V 可以是任意适当的非负随机变量。

A. 幅度分布

如（1）所示，CG 模型的统计特性由纹理决定。在现有纹理

模型中，伽马分布目前是文献中接受度和采用率最高的分布。其他常用的纹理模型包括逆高斯分布、逆伽马分布和PαS分布。此外，正tempered α-stable（PTαS）分布是一种最近提出的杂波纹理模型，其中伽马分布、逆高斯分布和PαS分布都是其特例。

下面简要介绍应用最广泛的伽马纹理模型和最先进的PTαS纹理模型。

- 伽马分布：

$$f_V(v;\alpha_{\text{gm}},\lambda_{\text{gm}})=\frac{1}{\Gamma(\alpha_{\text{gm}})\lambda_{\text{gm}}^{\alpha_{\text{gm}}}}v^{\alpha_{\text{gm}}-1}\exp\left(-\frac{v}{\lambda_{\text{gm}}}\right) \tag{2}$$

其中，α_{gm} 和 λ_{gm} 分别是形状参数和尺度参数。

- *PTαS* 分布：对于服从PTαS分布的随机变量，其拉普拉斯变换可定义为

$$\mathcal{L}_V(s)=\exp\left[\frac{\gamma}{\alpha\eta^{\alpha}}\left(1-(\eta s+1)^{\alpha}\right)\right] \tag{3}$$

其中，$\alpha\in(0,1]$、$\gamma>0$和 $\eta\in(0,+\infty)$ 分别为特征指数、尺度参数和截断参数。当 $\eta\to\infty$时，它可化简为PαS分布的拉普拉斯变换 $\exp\left[-\gamma s^{\alpha}/\alpha\right]$。因此，PTαS的概率密度函数可表示为

$$f_V(v;\alpha,\gamma,\eta)=\exp\left(-\frac{v}{\eta}+\frac{\gamma}{\alpha\eta^{\alpha}}\right)f_{\text{P}\alpha\text{S}}(v;\alpha,\gamma) \tag{4}$$

其中，$f_{\text{P}\alpha\text{S}}(v;\ \alpha,\ \gamma)$ 是PαS分布[21]的概率密度函数，可通过以下方式计算

$$\begin{aligned}f_{\text{P}\alpha\text{S}}(v;\alpha,\gamma)&=\mathcal{L}^{-1}\left[\exp\left(-\gamma s^{\alpha}/\alpha\right)\right](v)\\&=v^{-1}H_{1,1}^{0,1}\left[\frac{\alpha}{\gamma}v^{\alpha}\middle|\begin{array}{c}(1,1)\\(1,\alpha)\end{array}\right]\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{L}^{-1}$ 表示逆拉普拉斯变换，且 $H:\ [\cdot|\cdot]$表示Fox H函数[22]。除PαS分布外，当 $\alpha\to0$时，式（4）可化简为式（2）中的伽马分布，其中 $\alpha_{\text{gm}}=\gamma$ 且 $\lambda_{\text{gm}}=\eta$；当 $\alpha=0.5$ 时，则可化简为逆高斯分布。

设 Z_{I} 和 Z_{Q} 为相互独立的高斯随机变量，$Z_{\text{I}},Z_{\text{Q}}\sim\mathcal{N}(0,2)$，则幅度随机变量 $R=\sqrt{X_{\text{I}}^2+X_{\text{Q}}^2}$ 的概率密度函数可表示为[4]

$$f_R(r)=\int_0^{\infty}\frac{r}{2v}\exp\left(-\frac{r^2}{4v}\right)f_V(v)dv \tag{5}$$

其中，$f_V(v)$ 为纹理概率密度函数，作为混合分布。

B. 斑点和纹理分量的时间相关性

与局部表面几何形态和散射机制有关的散斑分量变化迅速，其相关时间为毫秒量级。短期散斑相关性通常采用高斯形状的多普勒谱来建模[23]。在较长时间尺度上，在相对平静海况下，长波的影响通常较为温和。然而，在高海况下，长波对海面布拉格散射体的调制会导致纹理分量的时间相关性呈周期性衰减。这种行为可用余弦项调制的指数衰减函数来建模[9], [10]。

众所周知，对于CG杂波，虽然相干复高斯斑点很容易生成，但模拟纹理——即非高斯相关过程——则更具挑战性。如下文所述并比较，ZMNL和线性滤波是模拟非高斯相关过程的两种传统框架。

III. ZMNL与基于AR过程的线性滤波综述

图1比较了ZMNL方法与线性滤波的仿真流程。如图所示，这两种方法互为补充：ZMNL主要依赖相关失真，而线性滤波则依赖分布失真。这一根本差异导致两种方法的实现流程显著不同，详见下文。

A. ZMNL

在图1(a)中，非线性变换输入的自相关函数应通过对规定输出进行回溯来恢复。为此，ZMNL首先设计非线性变换，以匹配 $y(m)$的期望分布。随后利用该变换推导 $u(m)$的相关性。（根据这两步的结果，可以很容易地确定线性滤波器的设计。）

1）期望输出分布的逆变换
利用误差函数将零均值单位方差高斯分布映射为均匀分布。随后利用其逆累积分布函数将均匀分布映射为期望概率密度函数。对于累积分布函数为 $F_{\text{dis}}(\cdot)$的序列 ς，MNLT为

$$\varsigma(x)=F_{\text{dis}}^{-1}(\text{erfc}(x/\sqrt{2})/2) \tag{6}$$

其中erfc(·)是互补误差函数。在某些情况下，例如指数分布，逆累积分布函数存在解析函数。

2) 所需输出相关性的相关性预失真输出过程的相关函数 ς 为

$$\begin{aligned}&\langle\varsigma(0)\varsigma(t)\rangle=\\&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varsigma(x_1)\varsigma(x_2)P_U(x_1,x_2,R_U(t))\,dx_1dx_2\end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned}P_U(x(0),x(t),R_U(t))&=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-R_U^2(t)}}\\&\times\exp\left(-\frac{x^2(0)+x^2(t)-2x(0)x(t)R_U(t)}{2\left(1-R_U^2(t)\right)}\right)\end{aligned} \tag{8}$$

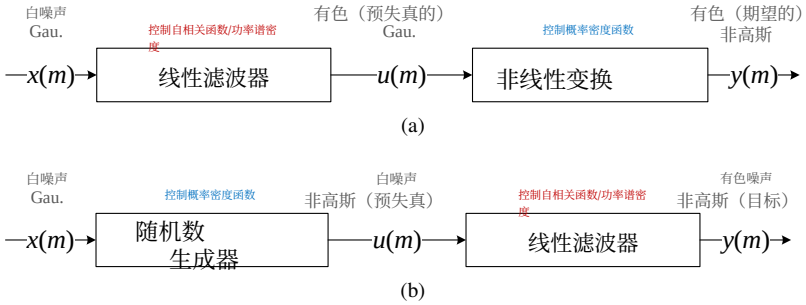


图1. 两种传统实值序列仿真框架的仿真流程比较。(a) 通过相关失真实现 ZMNL；(b) 通过分布失真实现线性滤波。

利用7，即可避免其中隐含的二维积分

$$P_U\left(x_1,x_2,R_U\left(t\right)\right)=\frac{\exp\left(-(x_1^2+x_2^2)/2\right)}{2\pi}\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x_1/\sqrt{2})H_n(x_2/\sqrt{2})}{2^n n!}R_U^n(n)\tag{9}$$

其中， $H_n(\cdot)$ 是物理学家所用的厄米多项式 [24]。

于是，高斯过程的目标相关函数与相关函数 $R_U(t)$ 之间的关系可通过厄米多项式 $H_n(x)$ 的级数展开给出：

$$\langle\varsigma(0)\varsigma(t)\rangle=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R_U^n(t)}{2^n n!}\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-x^2\right)H_n(x)F_{\text{dis}}^{-1}\left(\frac{\operatorname{erfc}(x)}{2}\right)dx\right]^2.\tag{10}$$

如该级数复杂的形式所示，为了实际实现 ZMNL，需要能够高效计算逆累积分布函数，即 $F^{-1}{}_{\text{分布}}(\cdot)$。得益于伽马分布和逆伽马分布逆累积分布函数快速算法的发展，对于这些模型，这一步可以通过数值计算轻松完成 [7]–[9]。此外，式（10）中的积分可使用少量节点的高斯-厄米特求积高效计算。形状参数较大时，级数收敛迅速；而随着形状参数减小，收敛速度会变慢。

更重要的是，对于更复杂的纹理模型（例如 PTαS 分布，它能提供更准确的拟合，但其概率密度函数仅以积分形式给出 [4]），ZMNL 的实现会困难得多，因为目前既没有高效的逆累积分布函数算法，也没有可直接使用的快速数值方法来计算相关变换。因此，值得探索其他仿真框架来建模此类杂波纹理。这一考虑促使我们在下文研究线性滤波框架。

B. 通过 *AR* 过程进行线性滤波

与ZMNL类似，我们需要以逆向方式从规定的输出推断线性滤波器的输入信息。如图1(b)所示，线性滤波首先被设计为匹配 $y(m)$的期望相关性。随后利用该线性变换推导 $u(m)$的分布。（根据这两个步骤的结果，可以确定成熟随机数生成器的设计，例如非线性变换和拒绝采样。）

1) 满足目标输出相关性的 *AR* 过程

AR 和自回归滑动平均（ARMA）过程常用于近似随机过程的任意自相关函数结构。它们通常表示为

$$y(m)=-\sum_{k=1}^{p}a_k y(m-k)+u(m)\tag{11}$$

$$y(m)=-\sum_{k=1}^{p}a_k y(m-k)+\sum_{l=0}^{q}b_l u(m-l)\tag{12}$$

其中， $y(m)$ 和 $u(m)$ 分别为输出过程和均值为零的白输入噪声。 p 和 q 分别为自回归分量和滑动平均分量的阶数。 a_k 和 b_l 为过程系数。给定指定的自相关函数，可使用尤尔-沃克方法计算 a_k 和 b_l [25，第 3]章。具体而言，阶数足够高的 AR 过程能够达到与任意阶 ARMA 过程相当的仿真精度。因此，为简化讨论且不失一般性，以下分析将聚焦于 AR 过程。

文献中广泛采用（11）形式的AR过程。然而，对于依赖独立性的分析方法而言，这种过程可能并不方便。以二阶自回归过程（即 $y(m)=-a_1y(m-1)-a_2y(m-2)+u(m)$ 为例，输入元素 $y(m-1)$ 和 $y(m-2)$彼此相关。幸运的是，AR过程的输出可以转换为

$$y(m)=\sum_{i=0}^{\infty}h_i u(m-i)\simeq\sum_{i=0}^{L_{\text{IR}}}h_i u(m-i)\tag{13}$$

其中， h_i 是单位脉冲响应。理论上， h_i 是一个无限长序列，对于稳定系统，其幅度会随着 i增大而趋近于零。脉冲响应的衰减速率由底层线性方程组的传递函数决定。对于弱相关序列，脉冲响应衰减迅速；而对于强相关序列，其衰减则较慢。 L_{IR} 表示

无限求和被截断时对应的有限滞后，选择该滞后使得 $|h_i|$ 低于预定义阈值（例如，$|h_i| < 10^{-3}$），从而确保实际应用中的截断误差可以忽略不计。

2) 针对期望输出分布进行分布预失真为确保 AR 输出同时达到期望的自相关函数和概率密度函数，必须对驱动序列的分布 $u(m)$ 进行适当的预失真。为此，典型研究会通过 [14]–[16]推导输入过程与输出过程之间的前几阶矩关系。

$$\mathbb{E}\left\{[y(m)]^n\right\} = \mathbb{E}\left\{\left[\sum_{i=0}^{L_{\text{IR}}} h_i u(m-i)\right]^n\right\}, n = 1, 2, \cdots \quad (14)$$

其中，$\mathbb{E}\{\cdot\}$ 表示期望算子。

随后，利用传统的 Johnson 变换 [14] 匹配前四阶矩，或利用最大熵原理 [15], [16], 匹配更多矩，即可生成非高斯序列 $u(m)$。然而，前者通常不足以充分表征概率密度函数；而后者则面临计算效率与准确性之间的权衡，且可能收敛至局部最优解，从而产生虚假的尾部振荡。

为实现准确且快速的非高斯相关序列仿真，我们提出一种基于级数的解析延拓方法，以确定线性滤波器输入 $u(m)$ 的分布，具体如下。

IV. 针对自回归输入统计量的基于级数的解析延拓

本节提出一种基于级数的解析延拓策略，用于快速、准确地仿真复杂的非高斯相关过程。首先，分别构建自回归输入的拉普拉斯变换的矩展开和对数拉普拉斯变换的累积量展开。其次，利用帕德逼近对这两个级数展开进行解析延拓，以获得自回归输入的拉普拉斯变换和概率密度函数。最后，对基于PA的延拓在这两种不同级数展开上的性能进行比较。

A. AR 输入的拉普拉斯变换的级数展开

令 Y 和 U 分别表示式（ y 和 u 中对应的随机变量（13）。与之间的拉普拉斯变换关系可表示为

$$\mathcal{L}_Y(s) = \prod_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_U(h_i s) \simeq \prod_{i=0}^{L_{\text{IR}}} \mathcal{L}_U(h_i s). \quad (15)$$

根据（15），n阶累积量与 Y 和 U 之间的关系可表示为

$$\begin{aligned}\kappa_{Y,n} &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \ln \mathcal{L}_Y(s)\Big|_{s=0} \\ &= \sum_{i=0}^{L_{\text{IR}}} (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \ln \mathcal{L}_U(h_i s)\Big|_{s=0} \\ &= \sum_{i=0}^{L_{\text{IR}}} h_i^n \kappa_{U,n}.\end{aligned} \quad (16)$$

由（16）可知，AR输入 U 的累积量可用输出 Y的累积量表示，即

$$\kappa_{U,n} = \kappa_{Y,n}/\iota_n \quad (17)$$

其中 $\iota_n = \sum_{i=0}^{L_{\text{IR}}} h_i^n$。然后，可根据 U 的累积量求得其矩: [26]

$$M_{U,n} = B_n\left(\kappa_{U,1}, \kappa_{U,2}, \ldots, \kappa_{U,n}\right) \quad (18)$$

其中，$B_n(\cdot)$ 是第 n 个完全贝尔多项式 [27]。

给定某个分布的累积量/矩，对于较小的取值，可通过级数展开近似相应的拉普拉斯变换。具体而言，U的拉普拉斯变换及其对数拉普拉斯变换在零点附近的泰勒展开，分别得到以下以矩 $M_{U,\,n}$ 和累积量 $\kappa_{U,\,n}$表示的幂级数:

$$\mathcal{L}_U(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{U,n}}{n!}(-s)^n, \quad s \to 0^+, \quad (19)$$

$$\log \mathcal{L}_U(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{U,n}}{n!}(-s)^n, \quad s \to 0^+. \quad (20)$$

这些级数通常会遇到发散问题。例如，该级数（19）的收敛半径为 [28, 3。39 定理]

$$R_{\text{con}} = 1/c_{\text{lim}}, \text{ with } c_{\text{lim}} = \lim_{n\to\infty} |M_{U,n}/n!|^{1/n}. \quad (21)$$

如果 $c_{\text{lim}} = 0$，$R_{\text{con}} = \infty$；而如果 $c_{\text{lim}} = \infty$，则 $R_{\text{con}} = 0$。那么，式（19）中的级数在 $|s| < R_{\text{con}}$时收敛，在 $|s| > R_{\text{con}}$时发散。以 U 为伽马变量为例，分析式（19）中级数的收敛性。伽马概率密度函数见式（2），相应的 n 阶矩为$\lambda_{\text{gm}}^n \Gamma(n+\alpha_{\text{gm}})/\Gamma(\alpha_{\text{gm}})$。因此，收敛半径为

$$R_{\text{con}} = 1/\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda_{\text{gm}}^n}{\Gamma(\alpha_{\text{gm}})} n^{\alpha_{\text{gm}}-1}\right)^{1/n} = 1/\lambda_{\text{gm}}. \quad (22)$$

因此，（19）中的级数在 $|s| < 1/\lambda_{\text{gm}}$时收敛；而在 $|s| < 1/\lambda_{\text{gm}}$时发散。这意味着，直接计算（19）中的级数以求得 $\mathcal{L}_U(s)$，对于较大的 $|s|$ 值并不实用。更重要的是，即使在其收敛域内，该级数作为泰勒展开，通常也只能在展开点附近提供较高的精度。因此，要在展开点的局部邻域之外获得可靠的近似值，就需要采用其他技术。

解析延拓是一种强大的工具，可将局部收敛的级数扩展到更广的区域 [18, 第 V 章8]。这是复分析中的一个基本结论：在某点解析的函数，其所有性质都完全由该点处的幂级数展开决定。因此，解析延拓在近似理论及相关领域中发挥着重要作用。

PA 是一种典型的解析延拓技术[29], [30]。目前，当已知函数在零点附近的泰勒展开（表示其局部或渐近行为）时，PA 被广泛用于延拓级数表示并恢复函数的全局行为 [31]–[34]。接下来，我们将运用该方法进行解析延拓，以恢复 AR 输入的统计量 U。

B. AR 输入的拉普拉斯变换与概率密度函数的级数解析延拓

本部分分别使用帕德逼近对（19）中的矩展开和（20）中的累积量展开进行解析延拓，以获得AR输入的拉普拉斯变换和概率密度函数 U。

1) 矩展开（*19*）的解析延拓：传统方法

利用帕德逼近处理矩展开，以获得整个复域上的拉普拉斯变换，是一种常规方法 [19]。为获得AR输入的拉普拉斯变换 U，我们首先遵循这一思路，并直接将帕德逼近应用于（19）：

$$[K,L]_{\mathcal{L}}(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}\simeq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M_{U,n}}{n!}(-s)^n \tag{23}$$

其中 $P(s)$和 $Q(s)$分别为 K 阶和 L阶多项式，即

$$P(s)=\sum_{i=0}^{K}P_i s^i,\quad Q(s)=\sum_{j=0}^{L}Q_j s^j \tag{24}$$

其中 P_i 和 Q_j 为常数系数，通过将 $[K,L]_{\mathcal{L}}(s)$与 $\mathcal{L}_U(s)$相匹配来确定，该过程采用直接的基于矩阵的线性代数方法，仅涉及若干小规模线性方程组的求解。为便于阅读，详细求解过程见附录 A。

需要指出的是，在本研究中，我们仅考虑对角（$K=L$）和次对角（$K=L-1$）帕德逼近，因为它们在Pad´e序列的收敛中起着特殊作用。特别地，它们为任意斯蒂尔切斯级数提供上界和下界，并且若问题是确定的，它们收敛于唯一解 [29]。一旦获得 P_i 和 Q_j，（23）便可通过部分分式分解改写为

$$\mathcal{L}_U(s)\simeq[K,L]_{\mathcal{L}}(s)=\frac{\sum_{i=0}^{K}P_i s^i}{\sum_{j=0}^{L}Q_j s^j}=\sum_{j=1}^{L}\frac{\lambda_j}{s+a_j},\quad s\in\mathbb{C} \tag{25}$$

其中，a_i 表示相应极点的相反数，λ_i 表示对应的留数。注意，如果任何 a_j 为负（对应于右半平面中的极点），则显然违背了正确的解析结构，因此应将其视为不可接受的近似并舍弃 [30]。

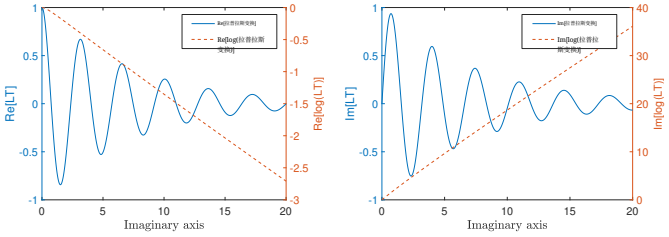
利用拉普拉斯变换对 $\mathcal{L}^{-1}[1/(u+a)](s)=\exp(-as)$，我们可以对（25）进行逆拉普拉斯变换，得到 U 的概率密度函数

$$f_U(u)=\sum_{j=1}^{L}\lambda_j\exp(-a_j u),\quad x>0 \tag{26}$$

其中，u 表示 U的实现。

2) 累积量展开的解析延拓（*20*）：一种新方法

当复值拉普拉斯变换呈现强烈的振荡衰减时，对矩展开的帕德逼近（19）往往无法在整个复平面上准确恢复拉普拉斯变换，第四节IV-C 将对此进行说明。为克服这一局限，我们转而提出对累积量展开应用帕德逼近，以进行解析延拓



(a) (b)

图2. 参数为 $\alpha=0.95$、$\gamma=2$、$\eta=4$的PTαS分布的拉普拉斯变换与对数拉普拉斯变换对比。（a）实部；（b）虚部。

（20），它对应于函数结构更简单的对数拉普拉斯变换（见 PTαS 示例，图2）。

对于（20），首先进行重新编号，以便应用帕德逼近：

$$\log\mathcal{L}_U(s)=-s\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\kappa_{U,n+1}}{(n+1)!}(-s)^n,\quad s\to 0^+. \tag{27}$$

然后，通过附录 A 中给出的帕德逼近，阶数为 27 的级数 $K+L$ 可写为

$$[K,L]_{\log\mathcal{L}}(s)=\sum_{j=1}^{L}\frac{-\lambda_j s}{s+a_j} \tag{28}$$

其中，a_i 表示相应极点的负值，λ_i 表示相应的留数。为确保正确的解析结构，排除任何负的 a_j。

对（28）进行指数运算，得到近似的拉普拉斯变换：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_U(s)&\simeq\exp\left([K,L]_{\log\mathcal{L}}(s)\right)\\&=\exp\left(\sum_{j=1}^{L}\frac{-\lambda_j s}{s+a_j}\right)=\prod_{j=1}^{L}\exp\left(\frac{-\lambda_j s}{s+a_j}\right),\quad s\in\mathbb{C}^+.\end{aligned} \tag{29}$$

因此，U 可表示为独立随机变量之和：

$$U=\sum_{j=1}^{L}Z_j,\ \text{with}\ \mathcal{L}_{Z_j}(s)=\exp\left(\frac{-\lambda_j s}{s+a_j}\right) \tag{30}$$

其中，Z_j、$j=1,2,\cdots,L$相互独立。

因此，U 的概率密度函数满足

$$f_U(u)=f_{Z_1}(u)*f_{Z_2}(u)*\cdots*f_{Z_L}(u) \tag{31}$$

其中 $*$ 表示卷积符号。利用 [35, 第255页给出的拉普拉斯变换对，并经过一些运算，我们可以得到

$$\begin{aligned}f_{Z_j}(u)&=\mathcal{L}^{-1}\left[\exp\left(\frac{-\lambda_j s}{s+a_j}\right)\right](u)\\&=e^{-\lambda_i}\delta(u)+e^{-a_i u-\lambda_i}\sqrt{\frac{a_i\lambda_i}{u}}I_1\left(2\sqrt{a_i\lambda_i u}\right)\end{aligned} \tag{32}$$

其中 $j=1、2、\cdots、L$, $\delta(\cdot)$ 表示狄拉克δ函数，$I_1(\cdot)$ 表示一阶第一类修正贝塞尔函数。

如式（31）和式（32）所示，式（29）的逆拉普拉斯变换难以获得闭式解。鉴于卷积运算的复杂性，如有需要，可使用基于快速傅里叶变换的反演方法高效计算 U 的概率密度函数 [36]

$$f_U(u) = \mathcal{L}^{-1}\left[\prod_{j=1}^{L} \exp\left(\frac{-\lambda_j s}{s + a_j}\right)\right](u) \tag{33}$$

其中 $\mathcal{L}^{-1}$ 通过快速傅里叶变换实现。

C. 不同级数的解析延拓比较

为比较基于 PA 的不同级数解析延拓的 LT 恢复性能（即（19）中的矩展开和（20）中的累积量展开），我们考虑 U 服从伽马分布和 PTαS 分布的情形，分别作为两个代表性示例，其定义见（2）和（4）。它们的 n 阶累积量分别为 $\kappa_{U,\,n} = \alpha_{\mathrm{gm}}\lambda_{\mathrm{gm}}^{n}\Gamma(n)$ 和 $\kappa_{U,\,n} = \gamma\eta^{n-\alpha}\Gamma(n-\alpha)/\Gamma(1-\alpha)$。伽马分布的参数设为： $\alpha_{\mathrm{gm}} = 2$ 和 $\lambda_{\mathrm{gm}} = 1$；PT$\alpha$S 分布的参数设为： $\alpha = 0.95$、 $\gamma = 2$、 $\eta = 4$，据经验，这对应于重尾杂波情形。PA 阶数设为 $K = 16$和 $L = 17$。

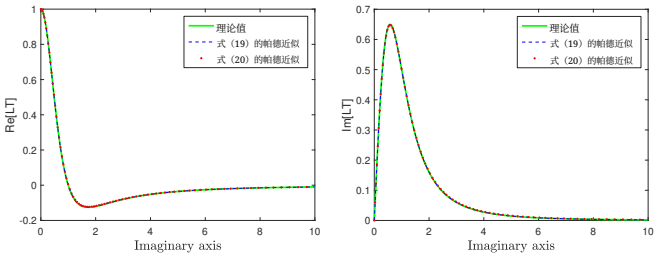
请注意，在此阶段，我们直接假设 AR输入 U 的概率密度函数，而不是通过 AR过程构造 U，以匹配指定的输出 Y。这是因为后一种情况下， U 的理论概率密度函数通常难以求得，因此不便对恢复性能进行定量比较。

1）U统计量的恢复性能

Fi图3 比较基于PA的延拓，对伽马分布的拉普拉斯变换恢复性能进行比较，所用级数分别为式（19）中的矩展开和式（20）中的累积量展开。类似地，图 4 展示了 PTαS 分布的相应比较。可以看出，对于复值拉普拉斯变换振荡相对较弱的伽马分布，两种级数的基于PA的延拓均能实现令人满意的恢复性能。相比之下，对于复值拉普拉斯变换振荡衰减明显的 PTαS 分布，只有累积量展开的基于PA的延拓能够保持良好的恢复精度。这种现象可归因于矩展开级数和累积量展开级数分别直接逼近拉普拉斯变换和对数拉普拉斯变换。对数拉普拉斯变换通常具有更简单的函数结构（例如，图 2）中的 PTαS 示例），因此更适合进行精确的有理逼近。因此，矩展开的基于PA的延拓在伽马分布的情况下表现良好，

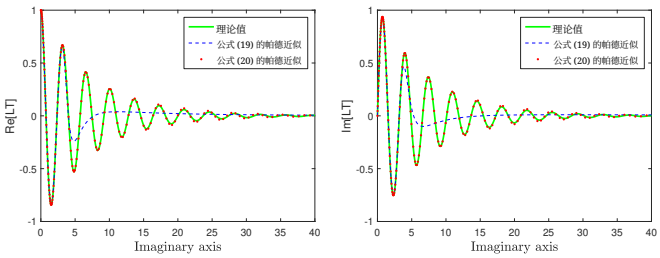
但对于 PTαS 分布，它仅在虚轴小于 5 的范围内提供可靠结果；超过该范围后，恢复精度会迅速下降。

图中所示的概率密度函数恢复性能3 和4 分别见图5和 6。可以看出，概率密度函数恢复性能与相应的拉普拉斯变换重构结果一致。具体而言，对于



(a) (b)

图 3. 通过不同级数的基于PA的延拓比较伽马拉普拉斯变换的恢复性能。(a) 拉普拉斯变换的实部；(b) 拉普拉斯变换的虚部。



(a) (b)

图 4. 通过不同级数的基于PA的延拓比较 PTαS 拉普拉斯变换的恢复性能。(a) 拉普拉斯变换的实部；(b) 拉普拉斯变换的虚部。

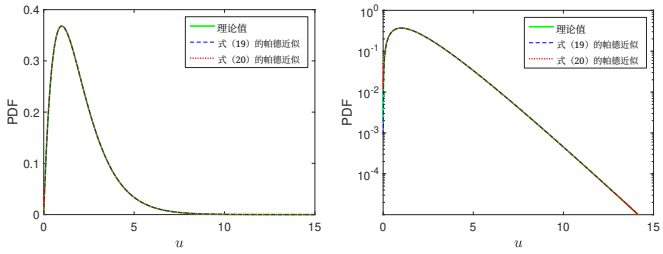
伽马分布，基于这两种级数的帕德逼近延拓均取得了令人满意的概率密度函数恢复性能。对于 PTαS 分布，基于矩展开的帕德逼近延拓仅在极端尾部区域（概率密度函数低于 10^{-3}）提供了准确拟合，而基于累积量展开的延拓则在主体区域和尾部区域均能准确恢复。

上述分析表明，与基于矩展开级数的方法相比，采用基于PA的延拓对累积量展开进行延拓，能够获得更准确的拉普拉斯变换和概率密度函数恢复结果。此外，该策略在快速 AR过程仿真方面也具有优势，只需进行简单运算，详见第 V 节。

2）计算复杂度

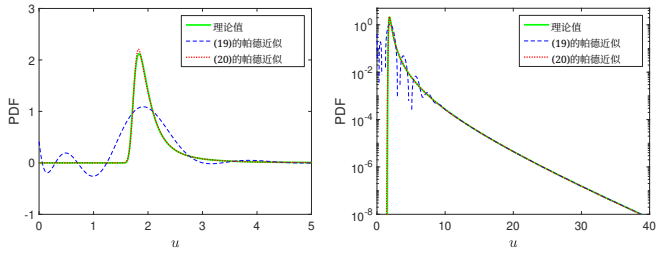
对于基于PA的矩展开和累积量展开延拓，以获得 U 的拉普拉斯变换，主要计算成本来自求解式（46）中的线性方程组，其中涉及对一个大小为 $L \times L$ 的稠密矩阵求逆，因此计算复杂度为 $\mathcal{O}(L^3)$。

由于矩展开的基于PA的延拓在（26）中给出了闭式概率密度函数，概率密度函数求值仅涉及逐点计算，因此计算复杂度为 $\mathcal{O}(L_x)$，其中 L_x 为概率密度函数样本数。相比之下，累积量展开的基于PA的延拓难以从（32）中的逆拉普拉斯变换得到闭式概率密度函数表达式，需要借助快速傅里叶变换进行数值反演。因此，计算复杂度为 $\mathcal{O}(L_x L_s \log L_s)$，其中 L_s 表示拉普拉斯变换样本数。



(a) (b)

图 5. 通过不同级数的基于帕德逼近的延拓比较伽马概率密度函数的恢复性能。(a) 线性刻度；(b) 对数刻度。



(a) (b)

图 6. 通过不同级数的基于帕德逼近的延拓比较 PTαS 概率密度函数的恢复性能。(a) 线性刻度；(b) 对数刻度。

综上所述，两种级数的基于帕德逼近的延拓均表现出中等的计算复杂度，因为阶数 L较小（通常小于20）。当需要进行概率密度函数求值时，累积量展开的基于PA的延拓因需要进行概率密度函数的数值计算而产生更高的计算成本；不过，借助快速傅里叶变换，这一成本并不高。

对于从矩展开和累积量展开恢复的两种概率密度函数，其累积分布函数的反函数均无法用闭式表达。在这种情况下，可以采用合成法或拒绝采样等通用随机数生成技术来仿真序列；然而，这些方法计算效率低，不适用于实时实现。

值得注意的是，基于累积量展开进行自回归过程仿真时，可以避免这些问题。具体而言，我们无需计算自回归输入的概率密度函数；相反，利用式 (29) 中拉普拉斯变换的乘法结构，即可实现快速且准确的仿真，详述如下。

V. 快速 AR过程仿真

如上所述，我们已经证明，基于帕德逼近的累积量展开延拓能够准确恢复 AR 输入的拉普拉斯变换，这为本节基于随机变量变换方法开发的快速 AR过程仿真奠定了基础。

*A. AR*输入非高斯白序列的仿真

累积量展开的基于PA的延拓表明 $U=\sum_{j=1}^{L} Z_j$ （见（30）），基于此，仿真

表 I 用于恢复 AR输入 U 的统计量的不同级数的基于帕德逼近的延拓的计算复杂度

级数	恢复 U 的 LT	恢复 U的 PDF
矩展开见（19）	$\mathcal{O}(L^3)$	$\mathcal{O}(L_x)$
累积量展开见（20）	$\mathcal{O}(L^3)$	$\mathcal{O}(L_x L_s$ 对数 $L_s)$

U可简化为首先仿真 Z_j、 $j=1$，2、$\cdots$、L。下面我们将利用定理 *1*证明，仿真 Z_j 只需进行简单的运算。

定理 *1*：设 N 为泊松随机变量，记作 N ~Pois(λ_j)。其概率质量函数为

$$f_N(k)=\exp(-\lambda_j)\lambda_j^k/k! \tag{34}$$

其中， k 是表示N实现的非负整数。设 E_n, $n=1$，2，$\cdots$， N为率参数为 a_j的独立同分布指数随机变量。也就是说，其概率密度函数和拉普拉斯变换为

$$f_{E_n}(x)=a_j\exp(-a_j x),\ \ \mathcal{L}_{E_n}(s)=a_j/(s+a_j). \tag{35}$$

我们有

$$Z=\sum_{n=1}^{N} E_n \overset{d}{=} Z_j \tag{36}$$

其中， $\overset{d}{=}$表示分布相等。

证明：见附录 B。

定理 *1* 表明， Z_j, $j=1,2,\cdots,L$可由 N 个独立同分布的指数随机变量之和得到，其中 N 是一个泊松随机变量。这意味着 Z_j, $j=1,2,\cdots,L$服从形状参数为整数的条件伽马分布（即厄朗分布）。具体而言，条件 Z_j服从形状参数为 k 、尺度参数为 $1/a_j$的伽马分布，记作

$$Z_j \mid N=k \sim \mathrm{GM}(k,1/a_j),\ \text{with}\ N\sim\mathrm{Pois}(\lambda_j) \tag{37}$$

其中，当 $k=0$时， $Z_j=0$ 。

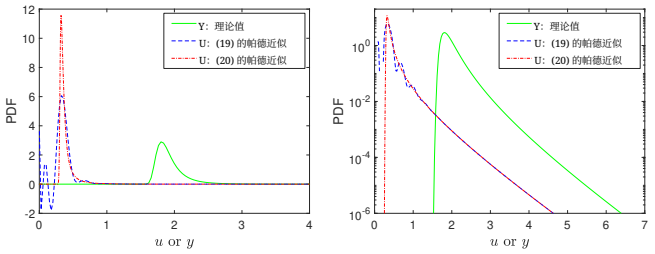
因此，可通过成熟的泊松随机变量和伽马随机变量生成方法，独立生成 Z_j, $j=1,2,\cdots,L$的样本。随后，将这些独立样本相加，即可得到 U的仿真样本，即 $u(m)$。

上述AR输入序列的仿真是核心步骤，基于此，我们在下文给出完整的AR过程仿真流程。

B. 自回归过程仿真的完整流程

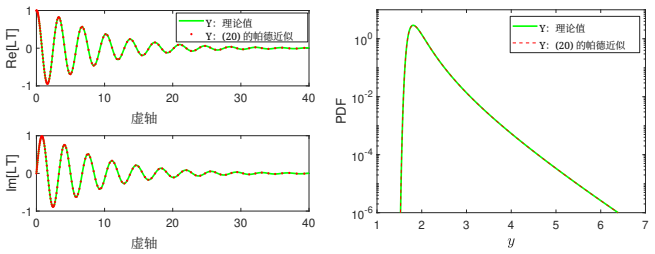
基于累积量展开解析延拓的自回归过程仿真流程总结如下：

- 步骤 1：使用尤尔–沃克方法，根据给定的自相关函数/功率谱密度建立自回归模型；
- 步骤 2：根据 AR模型的系数计算式（13）中的单位脉冲响应；



(a) (b)

图7. 示例1中，基于不同级数的延拓，比较AR输入 U的概率密度函数的恢复性能。同时给出了AR输出Y的概率密度函数。(a) 线性刻度；(b) 对数刻度。



(a) (b)

图 8. 理论AR输出 Y 与通过基于累积量展开的帕德逼近延拓生成的 U 驱动AR过程所得输出之间的比较。(a) 拉普拉斯变换；(b) 概率密度函数。

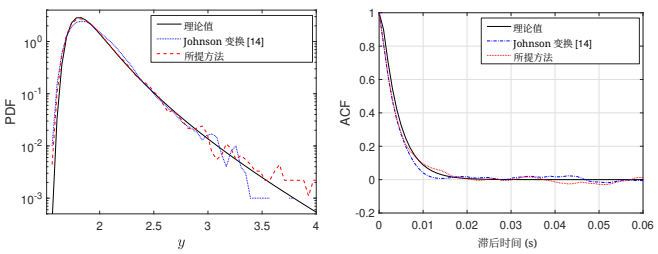
- 步骤 3：给定 h_i，通过式（17）计算 AR输入的累积量，然后通过式（20）中的累积量展开构造 U在零点处的拉普拉斯变换；
- 步骤4：利用基于累积量展开的帕德逼近延拓，通过(U29)，获得其在整个复平面上的拉普拉斯变换，该变换由参数 λ_j 和 a_j, j =1、2, $\cdots, L$;
- 步骤5：对于每个 $j = 1, 2, \cdots, L$，独立生成泊松样本$s_{\text{泊松}}(m)$，其服从 $N \sim$泊松(λ_j)；给定 $N = s_{\text{泊松}}(m)$的条件下，生成伽马样本 $z_j(m)$，其服从 $Z_j \sim$ GM($s_{\text{泊松}}(m)$ $1/a_j$)；
- 步骤6：将这些样本相加得到 U的样本，即$u(m)$ $= \sum_{j=1}^{L} z_j(m)$；• 步骤7：从 $u(m)$中去除均值，然后将零均值样本输入已建立的AR模型以获得输出；再将期望均值加回输出，得到 $y(m)$。

上述步骤3-6对应于AR输入序列的仿真。

值得注意的是，整个过程不涉及任何复杂运算，例如ZMNL中的无穷级数求和与数值积分，或基于最大熵的方法所需的优化 [15], [16]。

VI. 杂波纹理仿真的性能评估

为评估基于累积量展开解析延拓的AR过程在杂波纹理仿真中的性能，本文考虑两个具有代表性的示例，分别对应重尾程度较轻和



(a) (b)

图 9. 示例1中仿真的PTαS纹理。(a) 概率密度函数；(b) 自相关函数。

重尾行为较明显的纹理。具体而言，采用近期提出的 PTαS 分布[4], 对纹理建模，该分布将常用的伽马和逆高斯杂波纹理模型作为特例。

A. 尾部相对较轻的*PT*α*S*纹理

第一个示例对应于一种相对轻尾的纹理，其中PTαS变量 Y 由参数 $\alpha = 1.9$、 $\gamma = 2$和 $\eta = 0.5$指定。轻尾纹理通常与相对平静的海况相关，在这种情况下，纹理表现出较弱的长程依赖和不太明显的时间变异性。因此，在此情况下，简单的自回归模型已足够，并采用参数为 $a_1 = 0.9$ 和 $a_2 = -0.1$ 的AR(2)模型。其他关键仿真参数如下：脉冲重复频率（PRF）设为 $F_a = 1000$Hz，仿真纹理序列的长度为 $L_{\text{sim}} = 10000$

图 7比较了通过所提出的基于PA的累积量展开延拓获得的AR输入 U 的概率密度函数恢复性能。作为比较，还给出了基于矩展开的结果。正如预期，累积量展开的延拓产生了有效的概率密度函数，而矩展开的延拓则产生了包含负值的无效概率密度函数。这种行为可归因于它们各自的拉普拉斯变换恢复性能，具体分析见第 IV-C节。

利用通过基于PA的累积量展开延拓恢复的AR输入 U 来驱动AR过程，我们可以得到AR输出 Y相应的拉普拉斯变换和概率密度函数，即

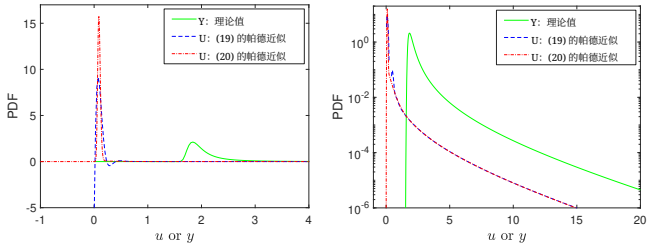
$$\mathcal{L}_{Y_{\text{sim}}}(s) = \sum_{i=1}^{L_{\text{IR}}} \mathcal{L}_U(h_i s) = \sum_{i=1}^{L_{\text{IR}}} \prod_{j=1}^{L} \exp\left(\frac{-\lambda_j h_i s}{h_i s + a_j}\right) \tag{38}$$

$$f_{Y_{\text{sim}}}(y) = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{L_{\text{IR}}} \prod_{j=1}^{L} \exp\left(\frac{-\lambda_j h_i s}{h_i s + a_j}\right)\right](y) \tag{39}$$

其中 y 表示 Y的实现。

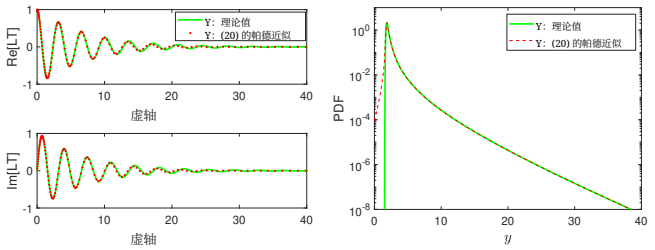
图8 比较了 Y 在（38）和（39）中所得的拉普拉斯变换和概率密度函数与给定的PTαS分布的相应结果，表明在复值拉普拉斯变换和概率密度函数两方面均高度吻合。这些结果证实了所提出的基于PA的累积量展开延拓的有效性。

为评估实际仿真性能，图9比较了仿真PTαS纹理的概率密度函数和自相关函数与理论值。为进行比较评估，高效的



(a) (b)

图 10. 通过示例 2 中不同级数的基于帕德逼近的延拓，对 AR输入 U'的概率密度函数恢复性能进行比较。同时给出了 AR输出 Y'的概率密度函数。（a）线性刻度；（b）对数刻度。



(a) (b)

图11. 理论 AR输出 Y 与通过使用示例 2 中由累积量展开的基于帕德逼近的延拓所生成的 U 驱动 AR过程得到的结果之间的比较。（a）拉普拉斯变换；（b）概率密度函数。

在线性滤波框架下设计的Johnson变换方法 [14]也被采用。结果表明，与Johnson变换方法相比，所提方法在主体区域与理论概率密度函数吻合更好，而两种方法的自相关函数结果相近。

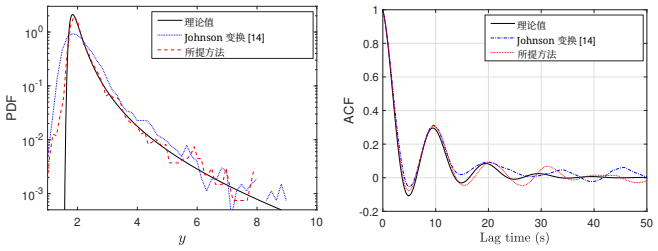
B. 具有相对重尾的 *PTαS* 纹理

第二个示例对应于一种具有相对重尾的纹理，其中 PTαS 变量 Y 的参数指定为 $\alpha = 1.9$、$\gamma = 2$ 和 $\eta = 4$。在重尾情况下，存在长程依赖和显著的时间变异性，纹理时间相关性可采用由余弦项 [10]调制的指数衰减函数进行建模

$$R_{\text{tex}}(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau}{t_0}\right)\left[d_{\text{mod}}\cos\left(\frac{2\pi\tau}{T_0}\right) + (1 - d_{\text{mod}})\right] \tag{40}$$

其中，t_0 为纹理去相关时间，T_0 为变化周期，d_{mod}（$0 < d_{\text{mod}} < 1$）为表示余弦函数影响的常数。为充分反映波动效应，将纹理调制参数设为$d_{\text{mod}} = 0.6$，去相关时间设为 $t_0 = 8$s，变化周期设为$T_0 = 10$s。因此，需要采用更高阶的 AR模型来表示余弦项引入的调制。其他关键仿真参数如下：$F_a = 1000$Hz 和$L_{\text{sim}} = 10000$。

图 10 比较了使用不同级数的基于帕德逼近的延拓得到的 AR 输入 U 的概率密度函数恢复性能。与示例1类似，只有所提出的



(a) (b)

图 12. 示例 2 中仿真的 PTαS 纹理。(a) 概率密度函数；(b) 自相关函数。

基于累积量展开的延拓能够得到有效的概率密度函数。此外，图11 比较了相应 AR 输出 Y 的拉普拉斯变换和概率密度函数与预设结果。复值拉普拉斯变换和概率密度函数均表现出极佳的一致性，表明所提出的基于帕德逼近的累积量展开延拓是有效的。

在实际仿真评估中，图12 比较了示例 2 中仿真的 PTαS 纹理的概率密度函数和自相关函数与其理论对应项。结果表明，与 Johnson 变换方法相比，所提方法在主体区域和尾部区域都能更准确地匹配指定的概率密度函数，而两种方法在重现给定自相关函数方面的精度相当。具体而言，在比较两种方法在不同尾部特性下的仿真性能时，可以看到，Johnson 变换方法对于尾部相对较轻的杂波表现良好（见图 9），但对于重尾杂波，性能会显著下降（见图 12）；相比之下，所提方法始终表现良好。这种差异可归因于 Johnson 变换方法仅限于使用前四阶矩，而所提方法则可以轻松利用丰富得多的一组累积量（矩）。

图 9 和 12 中的观察结果进一步得到了表 II的佐证。该表报告了两个示例在 500 次独立蒙特卡洛试验中，概率密度函数和自相关函数的平均绝对误差（MAE）。MAE 的计算公式为

$$MAE = \frac{1}{L_{\text{err}}}\sum_{i=1}^{L_{\text{err}}} |D_{\text{theo},i} - D_{\text{theo},i}| \,. \tag{41}$$

计算概率密度函数的 MAE 时，$L_{\text{err}} = \sqrt{L_{\text{sim}}}$ 表示直方图箱的数量，其中 $D_{\text{theo},\,i}$ 和 $D_{\text{dat},\,i}$ 分别表示每个箱的理论概率密度函数值和模拟概率密度函数值。计算自相关函数的 MAE 时，$L_{\text{err}} = 200$ 表示滞后数，其中 $D_{\text{theo},\,i}$和$D_{\text{dat},\,i}$ 分别表示各个滞后处的理论自相关函数值和模拟自相关函数值。

此外，两种方法的平均耗时均已记录。如图所示，两种方法在仿真长度为 $L_{\text{sim}} = 10000$的序列时均非常高效。特别是，仅涉及非常简单运算的Johnson变换方法，其速度比所提方法快一倍以上。尽管如此，值得注意的是，所提方法同样依赖于相对简单的运算，计算量最大的步骤是对阶数小于20的矩阵求逆，而这可以高效处理

表II 概率密度函数 和自相关函数 平均绝对误差：模拟结果相对于理论值的平均绝对误差，以及不同方法的计算时间，对应于图图。9 和图图。12

方法	示例1			示例 2		
	概率密度函数平均绝对误差	自相关函数平均绝对误差	时间（秒）	概率密度函数平均绝对误差	自相关函数平均绝对误差	时间（秒）
Johnson 变换 [14]	0.0204	0.0182	0.0475	0.0534	0.0263	0.0436
所提方法	0.0067	0.0181	0.1155	0.0123	0.0263	0.0935

注：每种情况下的平均值均基于 500 次独立试验计算。

在各种平台上。所提方法的计算时间略长，主要是由于循环生成 $z_j(m)$、$j=1$、2、$\cdots$、L（见第V-B节，步骤5）。不过，该步骤适合并行实现，因此进一步加速十分直接。

VII. 结论

本文提出了一种基于级数的解析延拓策略，以增强非高斯过程的自回归过程仿真。具体而言，在对数拉普拉斯变换域中对累积量展开进行基于PA的延拓，可准确恢复自回归输入的统计量，并支持仅依靠简单运算实现快速仿真。与现有自回归仿真方法相比，所提方法能够更有效地利用矩信息，以简单运算实现准确仿真；与ZMNL方法相比，该方法尤其适用于缺少闭式逆累积分布函数的模型。仿真结果表明，所提方法能够可靠地再现轻尾和重尾情况下 PTαS 杂波纹理的指定概率密度函数和自相关函数。相比之下，Johnson 变换方法虽然速度相对较快，但应用于重尾 PTαS 杂波纹理时，其仿真结果与理论概率密度函数存在显著偏差。

本研究重点是仿真具有指定概率密度函数和自相关函数的一维实值序列。值得注意的是，这为自然扩展至复值、非平稳或二维杂波仿真奠定了基础，具体如下：

- 尽管性能分析部分只展示了模拟的杂波纹理，但将其与复高斯斑点相乘，即可轻松获得相应的复值CG杂波。
- 所提方法侧重于平稳杂波；不过，通过引入随时间演变的多普勒谱模型 [23]，可以自然地将其扩展至空间或时间上的非平稳杂波。
- 由于线性滤波下累积量具有可加性和缩放性质，所提方法可以直接扩展至多变量自回归过程。附录 C 给出了简要分析。

此外，基于级数的解析延拓所提方法也适用于其他应用领域，例如金融分析和结构工程，可用于仿真非高斯相关序列。不过，需要注意的是，该方法要求 AR 输出的矩为有限，因此对于矩发散的分布（如逆伽马分布），还需要进一步修改。

附录 A 帕德逼近（PA）基础

设 h 在 $z=0$的邻域内解析。那么，$h(z)$可表示为复变量 z的泰勒级数：

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \tag{42}$$

该级数在其收敛域内定义了该函数，并为向该区域之外进行解析延拓奠定了基础。帕德逼近通过构造一个关于 $h(z)$ 的有理逼近来实现这种延拓，该有理逼近的分子次数为 K、分母次数为 L，且其在 $z=0$处的泰勒展开与 $h(z)$ 的展开在 $L+M$ 阶以内一致。具体而言，级数 $h(z)$ 的 $[K,L]$ 阶帕德逼近可表示为如下有理函数：

$$[K,L]_h(z)=\sum_{i=0}^{K}P_i z^i \Big/ \sum_{j=0}^{L}Q_j z^j \tag{43}$$

其中，系数 P_i 和 Q_j 的取值应满足

$$\left(\sum_{n=0}^{K+L}c_n z^n\right)\left(\sum_{j=0}^{L}Q_j z^j\right)-\sum_{i=0}^{K}P_i z^i=\mathcal{O}\left(z^{K+L+1}\right) \tag{44}$$

其中，$\mathcal{O}\left(z^{K+L+1}\right)$ 表示高于 z^{K+L}阶的项。特别地，不失一般性，我们固定系数 $Q_0=1$。

式（44）对应于矩匹配方法。通过交叉相乘，可以将其显式地写成系数 Q_j和 P_i的形式。特别地，分母系数与幂级数系数之间的关系为

$$\sum_{j=1}^{L}c_{K+i-j}Q_j=c_{K+i},\quad 1\le i,j\le L \tag{45}$$

它们构成了一组用于求解 L 未知分母系数的 L线性方程。因此，分母系数

可通过构建并求解汉克尔矩阵和线性方程组得到，如下所示

$$\begin{bmatrix} c_{K-L+1} & c_{K-L+2} & \cdots & c_K \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{K-L+i} & c_{K-L+i+1} & \cdots & c_{K+i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_K & c_{K+1} & \cdots & c_{K+L-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_L \\ \vdots \\ Q_j \\ \vdots \\ Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{K+1} \\ \vdots \\ -c_{K+i} \\ \vdots \\ -c_{K+L} \end{bmatrix}. \tag{46}$$

分子中的系数则由（44）求得，如下：

$$P_n = \sum_{j=0}^{n} c_{n-j} Q_j, \quad 0 \le j \le K \tag{47}$$

其中，当 $j \ge L$ 时， $Q_j = 0$ 。

总之，（45）和（47）根据函数 $h(z)$ 的幂级数展开（42）确定其帕德逼近。在大多数标准数学计算环境中都可以进行帕德逼近的实际计算，包括 Mathematica、MATLAB 和 Maple。

附录 B 定理 1 的证明*定理 1*

根据 Z 在（36）中的定义，可得其条件拉普拉斯变换为

$$\mathbb{E}\left[e^{-sZ} \mid N = k\right] = \left(\frac{a_j}{s + a_j}\right)^k \tag{48}$$

其中， $\mathbb{E}[\cdot]$ 表示期望算子。

然后，可以通过以下方式推导（无条件）拉普拉斯变换：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Z(s) = \mathbb{E}\left[e^{-sZ}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) \mathbb{E}\left[e^{-sZ} \mid N = k\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\lambda_j) \frac{\lambda_j^k}{k!} \left(\frac{a_j}{s + a_j}\right)^k \\ &= \exp(-\lambda_j) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a_j \lambda_j}{s + a_j}\right)^k / k! \end{aligned} \tag{49}$$

其中， $\mathbb{P}(\cdot)$ 表示某个事件发生的概率。由于式（49）中的级数是指数分布的生成函数，因此可得

$$\mathcal{L}_Z(s) = \exp\left(-\lambda_j\right) \exp\left(\frac{a_j \lambda_j}{s + a_j}\right) = \exp\left(\frac{-\lambda_j s}{s + a_j}\right). \tag{50}$$

结果与 Z_j 在（30）中给出的拉普拉斯变换相同，证明至此完成。

附录 C 基于级数的解析延拓在多变量自回归过程仿真中的应用

对于多变量自回归或 ARMA 过程，将输出向量定义为 $\mathbf{Y}(m) = [y_1(m)\ y_2(m)\ \cdots,\ y_M(m)]$, 其中包含 M 相互相关的单变量非高斯相关过程。类似地，将输入向量定义为 $\mathbf{U}(m) = [u_1(m)\ u_2(m)\ \cdots,\ u_M(m)]$, 其中由 M 相互独立的单变量非高斯白噪声过程组成。于是，多变量自回归或 ARMA 过程可以改写为以下形式： [14]

$$\begin{aligned} y_p(m) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{M} h_{i,p,q} u_q(m - i) \\ &\simeq \sum_{i=0}^{L_{\mathrm{IR}}} \sum_{q=1}^{M} h_{i,p,q} u_q(m - i), \quad p = 1, 2, \cdots M \end{aligned} \tag{51}$$

其中， $h_{i,\ p,\ q}$ 表示根据输出向量 $\mathbf{Y}$ 的预设自相关函数和互相关函数计算得到的 $L_{\mathrm{IR}} \times M \times M$ 脉冲响应张量的第（i， p， q）个单位脉冲响应。

由于 u_q、 $q = 1$、2、 $\cdots$、 M相互独立，且$u_q(m)$在时间上独立同分布，因此 y_p 的拉普拉斯变换满足

$$\mathcal{L}_{y_p}(s) = \prod_{i=0}^{L_{\mathrm{IR}}} \prod_{q=1}^{M} \mathcal{L}_{u_q}(h_{i,p,q} s), \quad p = 1, 2, \cdots M. \tag{52}$$

根据式（52）， y_p 的第 n阶累积量可表示为

$$\begin{aligned} \kappa_{y_p,n} &= (-1)^n \frac{d^n}{d\xi^n} \ln \mathcal{L}_{y_r}(s)\,|_{s=0} \\ &= \sum_{i=0}^{L_{\mathrm{IR}}} \sum_{p=1}^{M} (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \ln \mathcal{L}_{u_p}(h_{i,p,q} s)|_{s=0} \\ &= \sum_{i=0}^{L_{\mathrm{IR}}} \sum_{p=1}^{M} h_{i,p,q}^n \kappa_{u_p,n}, \quad p = 1, 2, \cdots M. \end{aligned} \tag{53}$$

因此， u_q、 $q = 1$， 2， $\cdots M$的第 n 阶累积量可通过求解线性方程组计算得出

$$\begin{bmatrix} \kappa_{u_1,n} \\ \kappa_{u_2,n} \\ \vdots \\ \kappa_{u_M,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{L_{\mathrm{IR}}} h_{i,1,1}^n & \sum_{i=0}^{L_{\mathrm{IR}}} h_{i,1,2}^n & \cdots & \sum_{i=0}^{L_{\mathrm{IR}}} h_{i,1,M}^n \\ \sum_{i=0}^{L_{\mathrm{IR}}} h_{i,2,1}^n & \sum_{i=0}^{L_{\mathrm{IR}}} h_{i,2,2}^n & \cdots & \sum_{i=0}^{L_{\mathrm{IR}}} h_{i,2,M}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{L_{\mathrm{IR}}} h_{i,M,1}^n & \sum_{i=0}^{L_{\mathrm{IR}}} h_{i,M,2}^n & \cdots & \sum_{i=0}^{L_{\mathrm{IR}}} h_{i,M,M}^n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \kappa_{y_1,n} \\ \kappa_{y_2,n} \\ \vdots \\ \kappa_{y_M,n} \end{bmatrix}. \tag{54}$$

随后，每个序列 $u_q(m)$、 $q = 1$、2、 $\cdots M$，均可按照第

节V-B 中所述的仿真流程，通过所提出的基于级数的解析延拓策略生成。最后，将 (m)、 $q = 1$、2、 $\cdots M$输入式（51）中的多变量自回归过程，即可完成对 $\mathbf{Y}(m)$ 的仿真。

致谢

作者谨向副编辑和审稿人致谢，感谢他们提出宝贵意见和建议，以提高本文的质量。

参考文献

[1] K. D. Ward、S. Watts 和 R. J. Tough，《海杂波：散射、K分布与雷达性能》，第 2 版。英国史蒂文尼奇：IET，2013 年。[2] L. Rosenberg 和 S. Watts，《雷达海杂波：建模与目标检测》。英国史蒂文尼奇：IET，2021 年。[3] X.-Y. Xia、P.-L. Shui、Y.-S. Zhang、X. Li 和 X.-Y. Xu，“基于 X波段岛基雷达数据库的海杂波形状参数经验模型”，《IEEE地球科学与遥感快报》，第 20 卷，第 1–5 页，2023 年。[4] X. Liao、J. Xie 和 J. Zhou，“具有正温和α稳定纹理的复合高斯雷达杂波模型”，《IEEE 航空航天与电子系统汇刊》，第 61 卷，17 376，2025 年 6，17 364，第 – 页。[5] K. D. Ward 和 S. Watts，“海杂波模型在雷达设计与开发中的应用”，《IET雷达、声呐与导航》，第 4 卷，第 2 期，第 146–157 页，2010 年。[6] U. Gujar 和 R. Kavanagh，“生成具有指定概率密度函数和功率谱密度的随机信号”，IEEE 自动控制汇刊，第 13 卷，第 6 期，第 716–719 页，1968 年。[7] L. Rosenberg、S. Watts 和 M. S. Greco，“微波雷达海杂波统计特性建模”，《IEEE航空航天与电子系统杂志》，第 34 卷，第 10 期，第 44–75 页，2019 年。[8] S. Bocquet、L. Rosenberg 和 S. Watts，“具有逆伽马纹理的相干海杂波仿真”，载于 2014 年国际雷达会议。IEEE，2014 年，第 1–6 页。[9] S. Bocquet，“相关帕累托分布海杂波仿真”，载于 2013 年国际雷达会议。IEEE，2013 年，第 258–261 页。[10] J. Wang 和 X. Xu，“基于相位恢复的相关低掠射角海杂波仿真”，《IEEE地球科学与遥感汇刊》，第 53 卷，第 7 期，第 3917–3930 页，2015 年。[11] C. Oliver 和 R. Tough，“关于相关K分布随机杂波的仿真”，《光学学报：国际光学杂志》，第 33 卷，第 3 期，第 223–250 页，1986 年。[12] W. J. Szajnowski 和 J. B. Wynne，“对称α稳定杂波相关样本的仿真”，《IEEE信号处理快报》，第 8 卷，第 5 期，第 151–152 页，2002 年。[13] J. Li 和 C. Li，“具有目标功率谱密度和低阶矩的非高斯随机过程仿真”，《工程力学杂志》，第 138 卷，第 5 期，第 391–404 页，2012 年。[14] X. Ma 和 F. Xu，“一种高效的非高斯随机过程仿真算法”，《风工程与工业空气动力学杂志》，第 194 卷，文章编号 103984，2019 年。[15] F. Wu、X. Yao、B. Geng、Y. Su 和 N. Zhao，“一种基于自回归模型和最大熵方法的非高斯风压仿真新方法”，《机械系统与信号处理》，第 219 卷，文章编号 111604，2024 年。[16] N. Zhao、Y. Wu、F. Wu、X. Wang 和 S. Jia，“基于时变自回归模型和最大熵方法的非平稳非高斯风速仿真”，《风工程与工业空气动力学杂志》，第 256 卷，文章编号 105960，2025 年。[17] F. Wu、Y. Hu、Y. Lu、X. Yao、J. Xin 和 Y. Jiang，“一种用于多变量平稳非高斯风压过程仿真的新型 AR-MEM-PJTM 方法”，《风工程与工业空气动力学杂志》，第 257 卷，文章编号 105999，2025 年。[18] T. Gamelin，《复分析》。Springer Science & Business Media，2001 年。[19] H. Amindavar 和 J. A. Ritcey，“概率密度函数的帕德逼近”，《IEEE 航空航天与电子系统汇刊》，第 30 卷，第 2 期，第 416–424 页，2002 年。[20] A. De Maio 和 M. S. Greco，《现代雷达检测理论》。英国史蒂文尼奇：IET，2016 年。[21] V. A. Aalo、K. P. Peppas、G. Efthymoglou、M. Alwakeel 和 S. Al-wakeel，“α稳定杂波中 CA-CFAR 接收机的性能”，载于*IEEE* 信号处理与信息技术国际研讨会。IEEE，2013 年，第 000 130–000 134 页。[22] A. M. Mathai、R. K. Saxena 和 H. J. Haubold，*H* 函数：理论与应用。Springer Science & Business Media，2009 年。[23] S. Watts，“相干海杂波的建模与仿真”，*IEEE* 航空航天与电子系统汇刊，第 48 卷，第 4 期，第 3303–3317 页，2012 年。[24] E. W. Weisstein，“厄米多项式”，*https://mathworld. wolfram. com*，2002 年。[25] G. E. Box、G. M. Jenkins 和 G. C. Reinsel，时间序列分析：预测与控制，第 *4* 版。约翰·威立父子公司，1994 年。[26] C. S. Withers 和 S. Nadarajah，“由累积量求矩及反向转换”，《国际科学与技术数学教育杂志》，第 40 卷，第 6 期，第 842–845 页，2009 年。[27] T. Kim、D. S. Kim、L.-C. Jang、H. Lee 和 H.-Y. Kim，“与 Lah–Bell 数和多项式相关的完全与不完全贝尔多项式”，《差分方程进展》，第 2021 卷，文章 101，2021 年 1，第 页。[28] W. Rudin，《数学分析原理》，第 *3* 版。麦格劳-希尔公司，1976 年。[29] C. M. Bender 和 S. A. Orszag，科学家与工程师的高级数学方法 *I*：渐近方法与微扰理论。Springer Science & Business Media，1999 年。[30] G. A. Baker 和 P. Graves-Morris，帕德 逼近式，第 *2* 版。剑桥大学出版社，1996 年。[31] H. El-Refaei、I. Betty 和 D. Yevick，“复帕德逼近在光波导端面反射中的应用”，*IEEE* 光子技术快报，第 12 卷，第 2 期，第 158–160 页，2002 年。[32] M. Tourandaz Kenari、M. S. Sepasian、M. Setayesh Nazar 和 H. A. Mohammadpour，“用于概率潮流分析的累积量与拉普拉斯变换结合方法”，*IET* 发电、输电与配电，第 11 卷，第 14 期，第 3548–3556 页，2017 年。[33] V. Franceschini、V. Grecchi 和 H. J. Silverstone，“通过博雷尔-帕德逼近，由实微扰级数求氢的 LoSurdo-Stark 效应复能量”，《物理评论 *A*》，第 卷，第 页。[34] G. Lvarez 和 H. J. Silverstone，“一种对发散幂级数求和的新方法：educated match”，《物理学通讯》，第 1 卷，第 2 期，第 1–8 页，2017 年。[35] F. Oberhettinger 和 L. Badii，拉普拉斯变换表。柏林海德堡，美国纽约：施普林格出版社，1973 年。[36] B. Josso 和 L. Larsen，“拉普拉斯变换数值反演”，*Kappa*，第 1–18 页，2012 年。