arXiv:2603.05163v1 [math.PR] 5 Mar 2026

高频观测高斯过程参数估计的新 Berry-Esseen 界

[1,*]Khalifa Es-Sebaiy，[2]Yong Chen

[1]科威特大学理学院数学系，萨巴赫·阿尔·萨利姆大学城，邮政信箱 *5969*，萨法特 *13060*，沙达迪亚，科威特[2]保山学院大数据学院，中国云南省保山市，邮编 *678000*

[*]通讯作者电子邮箱：*khalifa.essebaiy@ku.edu.kw, zhishi@pku.org.cn*

摘要

本文旨在使用二阶矩估计量（SME），估计高频观测的渐近平稳高斯过程的极限方差。我们运用一些新颖技术和累积量的精确估计，研究 SME 中心极限定理在全变差、Kolmogorov 距离和 Wasserstein距离下的收敛速度。我们将该方法应用于高斯Ornstein-Uhlenbeck过程漂移参数估计量，给出其在 Kolmogorov 距离和 Wasserstein距离下的 Berry-Esseen界。此外，我们证明，我们的大多数估计都严格优于现有文献中的结果。

数学学科分类（2020）：60F05；60G15；62F12；60H07。

关键词：参数估计；中心极限定理；收敛速率；平稳高斯过程；分数Ornstein-Uhlenbeck模型。

1. Introduction

近年来，许多研究者对基于离散观测的渐近平稳高斯模型的统计推断进行了研究，例见[7, 12, 21] 及其中的参考文献。此外，这些结果还被用于研究高斯Ornstein-Uhlenbeck过程漂移参数估计的中心极限定理（CLT）收敛速率。

设 $Z := \{Z_t, t \geq 0\}$ 为连续中心化平稳高斯过程，并设$X := \{X_t, t \geq 0\}$ 为定义如下的渐近平稳高斯过程

$$X_t = Z_t - e^{-\theta t} Z_0, \quad t \geq 0.$$

本文首先利用二阶矩估计量 $v_n(Z)$和 $v_n(X)$估计极限方差 $\mathbb{E}(Z_0^2)$，这两个估计量分别在观测窗口 $T_n := n\Delta_n$上定义如下：

$$v_n(Z) := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Z_{t_i}^2 \text{ and } v_n(X) := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}^2,$$

其中，过程 Z和 X在离散时刻 $t_i = i\Delta_n$， $i = 0, \ldots, n$被观测，其中 Δ_n 是步长，且当 $n \to \infty$时趋于零。

接下来，我们考虑估计量 $f(v_n(X))$，用于估计 $f(\mathbb{E}(Z_0^2))$，其中 f是满足某些条件的函数。具体而言，我们研究二阶矩估计量 $v_n(Z)$和 $v_n(X)$的中心极限定理在全变差、Kolmogorov距离和Wasserstein距离意义下的收敛速度，以及估计量 $f(v_n(X))$在Kolmogorov距离和Wasserstein距离意义下的收敛速度。我们证明，我们的大多数界都严格优于现有文献中得到的结果。最后，我们应用这一方法，推导出第一类和第二类分数阶Ornstein-Uhlenbeck过程（fOU）漂移参数估计量的中心极限定理的显式Kolmogorov界和瓦瑟斯坦界。

本文的创新之处有两点。(i) 我们在 [7], 中，利用 $v_n(Z)$和 $v_n(X)$连续版本的 Berry-Esseen 界，研究二阶矩估计量 $v_n(Z)$ 和 $v_n(X)$ 在全变差和 Wasserstein度量下的相合性及收敛速度，以及估计量 $f(v_n(X))$ 在 Wasserstein距离下的相合性及收敛速度。这里，我们借鉴近期论文 [2], 中的新工具，给出了严格优于 [7], 所得结果的界，详见下文的定理 3.6 和定理 3.10。值得注意的是， [2] 仅研究了 X 为分数阶 Ornstein-Uhlenbeck过程的情形。(ii) 我们首先针对 Kolmogorov 距离推导了一些新的估计，详见下文的引理 3.5 和引理 3.7。随后，我们利用这些结果，为估计量 $v_n(Z)$、$v_n(X)$ 和 $f(v_n(X))$ 的正态逼近推导出显式的柯尔莫哥洛夫界，详见下文的定理 3.6 和定理 3.9。值得一提的是，我们得到的 Wasserstein界和柯尔莫哥洛夫界完全相同。

基于离散观测的若干高斯模型的统计推断已被许多研究者研究。我们将回顾其中一些结果，但需要指出，以下列表并非穷尽。

- 当时间网格 $\Delta_n \to 0$时：近期论文 [1, 3, 10, 11] 针对Itô型扩散的漂移参数估计，在中心极限定理中给出了显式的Wasserstein距离界和柯尔莫哥洛夫界。利用二阶矩方法对若干分数噪声驱动的Ornstein-Uhlenbeck过程进行的参数估计，近期在 [13, 21]中的论文里得到了研究。然而，这些论文并未给出其中所研究的中心极限定理的收敛速率。另一方面，如前所述，分别针对分数阶 Ornstein-Uhlenbeck过程以及渐近平稳高斯序列的参数估计、使用 Wasserstein距离的定量中心极限定理，已在 [2] 和 [7]中得到研究。
- 当时间网格 $\Delta_n = 1$时：一般高斯序列极限方差的SME在全变差和 Wasserstein距离意义下的相合性与收敛速度，及其在高斯 Ornstein-Uhlenbeck模型中的应用，近期在论文 [8, 12]中得到了发展。

本文其余部分安排如下。在第2 节中，我们回顾 Wiener 空间上的 Malliavin 演算的一些重要背景知识，使本文内容自成一体。主要结果及其证明见第3 节。在第4 节中，我们将所提出的方法应用于第一类和第二类分数阶奥恩斯坦-乌伦贝克过程，以展示我们在第3节中得到的结果和方法。

2. Elements of Malliavin calculus on Wiener space

本节简要概述 Malliavin 微积分中的一些有用事实，这些内容对于本文证明至关重要。感兴趣的读者可参阅 [16, 第 2] 章以及 [20, 第 1]章。

令 $Z=(Z_t)_{\geq 0}$ 为一般的中心化高斯过程。我们首先将过程 Z 与某个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的等距高斯过程 $X=\{X(h)\ h\in\mathcal{H}\}$ 对应起来，具体如下： X 是定义在同一概率空间 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ 上的中心化高斯族，并且对所有 $h_1,\ h_2\in\mathcal{H},\ \mathbb{E}[X(h_1)X(h_2)]=\langle h_1,\ h_2\rangle_{\mathcal{H}}$ 均成立。

可以将 $\mathcal{H}$ 定义为 $[0,\infty)$ 上实值阶梯函数在内积 $\langle \mathbf{1}_{[0,t]},\ \mathbf{1}_{[0,s]}\rangle_{\mathcal{H}}=\mathbb{E}[Z_tZ_s]$ 下的闭包。注意， $X(\mathbf{1}_{[0,t]})\overset{law}{=}Z_t$。
下一步涉及多重 *Wiener-Itˆo* 积分。我们通过 Hermite 多项式 H_p 定义多重 Wiener-Itˆo 积分 I_p。特别地，对于满足 $\|h\|_{\mathcal{H}}=1$ 的 $h\in\mathcal{H}$，以及任意的 $p\geq 1$,

$$H_p(X(h))=I_p(h^{\otimes p}).$$

按照约定，对于所有 $c\in\mathbb{R},\ I_0(c)=c$。
给定整数 $q\geq 2$，希尔伯特空间 $\mathcal{H}^{\otimes q}$ 和 $\mathcal{H}^{\odot q}$ 分别对应于 $\mathcal{H}$的 q阶张量积和 q阶对称张量积。若 $f\in\mathcal{H}^{\otimes q}$ 由 $f=\sum_{j_1,\ldots,j_q}a(j_1,\ldots,j_q)e_{j_1}\otimes\cdots e_{j_q}$给出，其中 $(e_{j_i})_{i\in[1,q]}$ 构成 $\mathcal{H}^{\otimes q}$的一组标准正交基，则˜对称化 f 由下式给出:

$$\tilde{f}=\frac{1}{q!}\sum_{\sigma}\sum_{j_1,\ldots,j_q}a(j_1,\ldots,j_q)e_{\sigma(j_1)}\otimes\cdots e_{\sigma(j_q)},$$

˜其中第一个求和遍历 $\{1,\ldots,q\}$的所有排列 σ。于是 f是$\mathcal{H}^{\odot q}$的一个元素。我们还要用到收缩的概念。两个张量积 $e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_p}$ 和 $e_{k_1}\otimes\cdots e_{k_q}$ 的 r阶收缩是 $\mathcal{H}^{\otimes(p+q-2r)}$ 中的一个元素，由下式给出:

$$\begin{aligned}&(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_p})\otimes_r(e_{k_1}\otimes\cdots\otimes e_{k_q})\\ =\ &\left[\prod_{\ell=1}^{r}\langle e_{j_\ell},e_{k_\ell}\rangle\right]e_{j_{r+1}}\otimes\cdots\otimes e_{j_q}\otimes e_{k_{r+1}}\otimes\cdots\otimes e_{k_q}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

固定整数 $p,q\geq 1$，以及 $f\in\mathcal{H}^{\odot p}$ 和 $g\in\mathcal{H}^{\odot q}$。

$$\mathbb{E}[I_q(f)I_q(g)]=\begin{cases}p!\langle f,g\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes p}} & \text{if } p=q\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{2.2}$$

设 $p,q\geq 1$。若 $f\in\mathcal{H}^{\odot p}$ 和 $g\in\mathcal{H}^{\odot q}$，则

$$I_p(f)I_q(g)=\sum_{r=0}^{p\wedge q}r!\binom{p}{r}\binom{q}{r}I_{p+q-2r}(f\widetilde{\otimes}_r g).\tag{2.3}$$

对每一个 $q\geq 1,\ \mathcal{H}_q$ 表示 X的第 q阶Wiener 混沌，定义为由随机变量 $\{H_q(X(h))\ h\in\mathcal{H},\|h\|_{\mathcal{H}}=1\}$生成的 $L^2(\Omega)$的闭线性子空间，其中 H_q 是第 q个Hermite多项式。对任意 $F\in\oplus_{l=1}^{q}\mathcal{H}_l$ （即在固定的Wiener混沌之和中），我们有超收缩性质:

$$\left(\mathbb{E}\left[|F|^p\right]\right)^{1/p}\leqslant c_{p,q}\left(\mathbb{E}\left[|F|^2\right]\right)^{1/2}\quad\text{for any } p\geq 2.\tag{2.4}$$

回顾一下，对于两个随机变量 X 和 Y， X 的分布与 Y 的分布之间的全变差、Kolmogorov和Wasserstein距离分别定义为

$$d_{TV}(X,Y) := \sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} |\mathbf{P}[X\in A] - \mathbf{P}[Y\in A]|, \tag{2.5}$$

其中上确界取遍所有 Borel集，

$$d_{Kol}(X,Y) := \sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(X\le z) - \mathbb{P}(Y\le z)|,$$

and

$$d_{W}(X,Y) := \sup_{f\in Lip(1)} |\mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f(Y)]|, \tag{2.6}$$

其中 $Lip(1)$ 表示所有 Lipschitz常数为 $\leqslant 1$ 的 Lipschitz函数构成的集合。注意，

$$d_{Kol}(X,Y) \le d_{TV}(X,Y). \tag{2.7}$$

令 $\mathcal{N}(0,1)$ 表示标准正态律。考虑一个序列 $X: X_n\in\mathcal{H}_q$，满足$\mathbb{E}X_n = 0$ 且 $Var[X_n] = 1$，并假设 X_n 依分布收敛于正态律，这等价于 $\lim_n \mathbb{E}[X_n^4] = 3$。那么，我们得到总变差距离的最优估计 $d_{TV}(X_n,\mathcal{N}(0,1))$，该结果称为最优四阶矩定理，证明见 [18]：对于上述序列 X，假设其收敛，则存在两个常数$c,C>0$，它们仅取决于过程的类型 F，而不取决于 n，使得

$$c\max\left\{\mathbb{E}\left[X_n^4\right]-3, \left|\mathbb{E}\left[X_n^3\right]\right|\right\} \leqslant d_{TV}(X_n,\mathcal{N}(0,1)) \leqslant C\max\left\{\mathbb{E}\left[X_n^4\right]-3, \left|\mathbb{E}\left[X_n^3\right]\right|\right\}. \tag{2.8}$$

鉴于 [7, 备注 2.2]，，这个最优估计对于 Wasserstein距离$d_W(X_n,\mathcal{N}(0,1))$ 同样成立，如下所示：存在两个常数 $c,C>0$，它们仅取决于序列 X，而不取决于 n，使得

$$c\max\left\{\mathbb{E}\left[X_n^4\right]-3, \left|\mathbb{E}\left[X_n^3\right]\right|\right\} \leqslant d_{W}(X_n,\mathcal{N}(0,1)) \leqslant C\max\left\{\mathbb{E}\left[X_n^4\right]-3, \left|\mathbb{E}\left[X_n^3\right]\right|\right\}. \tag{2.9}$$

我们 还要回顾一下，三阶与四阶累积量分别定义为 b y

$$\kappa_3(F) = \mathbb{E}\left[F^3\right] - 3\mathbb{E}\left[F^2\right]\mathbb{E}[F] + 2\mathbb{E}[F]^3,$$
$$\kappa_4(F) = \mathbb{E}\left[F^4\right] - 4\mathbb{E}[F]\mathbb{E}\left[F^3\right] - 3\mathbb{E}\left[F^2\right]^2 + 12\mathbb{E}[F]^2\mathbb{E}\left[F^2\right] - 6\mathbb{E}[F]^4.$$

特别地，当 $\mathbb{E}[F]=0$ 时，我们有

$$\kappa_3(F) = \mathbb{E}\left[F^3\right] \quad\text{and}\quad \kappa_4(F) = \mathbb{E}\left[F^4\right] - 3\mathbb{E}\left[F^2\right]^2.$$

若 $h\in\mathcal{H}^{\otimes 2}$，则根据 [17, 备注 5.2] （或分别参见 [4], 中的 (6.2) 和 (6.6)）， $I_2(h)$ 的三阶与四阶累积量满足以下估计：

$$\kappa_3(I_2(h)) = \mathbb{E}[(I_2(h))^3] = 8\langle h, h\otimes_1 h\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}, \tag{2.10}$$

and

$$\begin{aligned} |\kappa_4(I_2(h))| &= 16\left(\|h\otimes_1 h\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} + 2\|h\widetilde{\otimes}_1 h\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}\right) \\ &\le 48\|h\otimes_1 h\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

本文中，我们用 C 表示任意正实数常数，其具体取值可随行变化，只要不会引起歧义；各处的取值彼此独立。

3. 主要结果

本节关注平稳高斯过程的方差参数估计，该过程不一定是半鞅。

设 $Z := \{Z_t, t \geq 0\}$ 是一个连续中心化平稳高斯过程，可表示为 Wiener-Itˆo（多重）积分 $Z_t = I_1\left(\mathbf{1}_{[0,t]}\right)$，对每个 $t \geq 0$均成立。令$\rho(r) = \mathbb{E}(Z_r Z_0)$表示 Z 的协方差，对每个 $r \geq 0$均成立，并且令 $\rho(r) = \rho(-r)$ 对所有$r < 0$均成立。我们还将考虑由下式定义的非平稳过程 $X := \{X_t, t \geq 0\}$

$$X_t = Z_t - e^{-\theta t} Z_0, \quad t \geq 0. \tag{3.12}$$

根据 [19, 引理 A。6], ，我们得到以下有用的不等式。

引理 3.1 ([19])。 固定一个整数 $M \geq 2.$ ，则有

$$\sum_{\substack{|k_j| \leq n \\ 1 \leq j \leq M}} |\rho(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})| \prod_{j=1}^{M} |\rho(k_j)| \leq C \left(\sum_{|k| \leq n} |\rho(k)|^{1+\frac{1}{M}} \right)^M$$

其中 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_M)$，而 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^M$ 是一个固定向量，其分量为 *1* 或 *-1*。

本文始终采用的主要假设是：

假设($\mathcal{A}$)：我们假设

$$\sigma^2 := 4 \int_{\mathbb{R}} \rho^2(r) dr < \infty,$$

函数 $|\rho(t)|$ 和 $|\rho'(t)|$ 在 $[0, \infty)$ 上连续，并且存在 $\gamma > \frac{1}{2}$ 和 $m_0 > 1$，使得对每个 $t \geq m_0$,

$$|\rho(t)| \leq C t^{-\gamma}, \qquad |\rho'(t)| \leq C t^{-\gamma}, \tag{3.13}$$

对于某个仅依赖于 θ 和 $\rho(0)$ 的常数 $C > 0$ 。

我们的目标是使用二阶矩估计量 $v_n(X)$ 估计极限方差 $\rho(0) = \mathbb{E}(Z_0^2)$，该估计量在观测窗口 $T_n := n\Delta_n$ 上定义为

$$v_n(X) := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}^2,$$

其中，过程 X 在离散时刻 $t_i = i\Delta_n$ 被观测，其中 $i = 0, \ldots, n$，且 Δ_n 为步长。

接下来，我们将首先使用二阶矩估计量 $v_n(Z)$ 估计 $\rho(0)$，该估计量定义为

$$v_n(Z) := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Z_{t_i}^2.$$

下面我们来介绍

$$V_n(Z) := \sqrt{T_n} \left(v_n(Z) - \rho(0) \right), \tag{3.14}$$

and

$$V_n(X) := \sqrt{T_n} \left(v_n(X) - \rho(0) \right). \tag{3.15}$$

我们将使用以下技术引理。

引理 3.2. 设 $V_n(Z)$ 与 $V_n(X)$ 分别为(3.14) 与 (3.15)中给出的序列。则存在 $C>0$ 仅依赖于 θ 与 $\rho(0)$，使得对每个 $p \geqslant 1$以及所有 $n \geq 1$,

$$\|V_n(X)-V_n(Z)\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{C}{\sqrt{T_n}}. \tag{3.16}$$

证明。 根据（3.12），我们可以写出

$$\|V_n(X)-V_n(Z)\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{n\Delta_n}}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left\|e^{-2\theta t_i}Z_0^2-2e^{-\theta t_i}Z_0Z_{t_i}\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

接下来，利用 Z 是平稳高斯过程这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\|V_n(X)-V_n(Z)\|_{L^p(\Omega)} &\leq \frac{C\sqrt{n\Delta_n}}{n}\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\theta t_i}\\ &= \frac{C\sqrt{n\Delta_n}}{n}\frac{1-e^{-n\theta\Delta_n}}{1-e^{-\theta\Delta_n}}\\ &\leq \frac{C}{\sqrt{n\Delta_n}},\end{aligned}$$

这里我们使用了 $\left(1-e^{-\theta x}\right)/x \to \theta$，因为 $x \to 0$。因此得到了所需结果。

3.1. 的二阶矩估计量 Berry-Esseen 界 $\mathbb{E}(Z_0^2)$。

在这里，我们研究二阶矩估计量 $v_n(Z)$ 和 $v_n(X)$ 的中心极限定理收敛速率，并以全变差、Kolmogorov 距离和 Wasserstein距离来衡量。

我们将需要以下有用的引理。

引理 3.3。 如果假设 $(\mathcal{A})$ 成立，那么存在一个仅依赖于 θ 和 $\rho(0)$ 的 $C>0$，使得当 n 足够大时，

$$\left|\mathbb{E}\left(V_n^2(Z)\right)-\sigma^2\right| \leq C\Delta_n + C\begin{cases}\frac{1}{T_n} & if\ \gamma>1,\\ \frac{\log(T_n)}{T_n} & if\ \gamma=1,\\ T_n^{1-2\gamma} & if\ \frac{1}{2}<\gamma<1.\end{cases} \tag{3.17}$$

证明。 利用 Wick 公式，我们得到

$$\mathbb{E}\left(Z_t^2Z_s^2\right)=\mathbb{E}\left(Z_t^2\right)\mathbb{E}\left(Z_s^2\right)+2\left(\mathbb{E}\left(Z_tZ_s\right)\right)^2=\rho^2(0)+2\rho^2(t-s). \tag{3.18}$$

由此得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(V_n^2(Z)\right) &= T_n\left[\mathbb{E}v_n^2(Z) - 2\rho(0)\mathbb{E}v_n(Z) + \rho^2(0)\right] = T_n\left[\mathbb{E}v_n^2(Z) - \rho^2(0)\right] \\
&= T_n\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(Z_{t_i}^2 Z_{t_j}^2\right) - \rho^2(0)\right] = T_n\left[\frac{2}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1}\rho^2\left(t_j - t_i\right)\right] \\
&= \frac{2\Delta_n}{n}\sum_{i,j=0}^{n-1}\rho^2\left((j-i)\Delta_n\right) = 2\Delta_n\sum_{|k|<n}\rho^2\left(k\Delta_n\right)\left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \\
&= 2\Delta_n\sum_{|k|<n}\rho^2\left(k\Delta_n\right) - 2\Delta_n\sum_{|k|<n}\rho^2\left(k\Delta_n\right)\frac{|k|}{n} \\
&= -2\Delta_n\rho^2(0) + 4\Delta_n\sum_{k=0}^{n-1}\rho^2\left(k\Delta_n\right) - 4\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\Delta_n}{n}\rho^2\left(k\Delta_n\right) \\
&=: -2\Delta_n\rho^2(0) + A_n + B_n. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

此外,

$$\left|A_n - 4\int_0^\infty \rho^2(x)dx\right| \le \left|A_n - 4\int_0^{T_n}\rho^2(x)dx\right| + 4\int_{T_n}^\infty \rho^2(x)dx. \qquad (3.20)$$

M进行变量代换 $u = x/T_n$ 并利用（3.13），我们可以推得 at

$$\int_{T_n}^\infty \rho^2(x)dx \le CT_n^{1-2\gamma}. \qquad (3.21)$$

另一方面，由中值定理，存在 $\xi_{k,\ x} \in (t_k,\ t_{k+1})$, $k = 0,\ \ldots\ldots,\ n-1$，使得

$$\begin{aligned}
\left|A_n - 4\int_0^{T_n}\rho^2(x)dx\right| &= 4\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[\rho^2\left(t_k\right) - \rho^2(x)\right]dx\right| \\
&\le 8\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(x - t_k\right)\left|\rho\left(\xi_{k,x}\right)\rho'\left(\xi_{k,x}\right)\right|dx \\
&\le 8\sum_{\substack{0\le k\le n-1\\ t_k<m_0}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(x - t_k\right)\left|\rho\left(\xi_{k,x}\right)\rho'\left(\xi_{k,x}\right)\right|dx \\
&\quad + 8\sum_{\substack{0\le k\le n-1\\ t_k\ge m_0}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(x - t_k\right)\left|\rho\left(\xi_{k,x}\right)\rho'\left(\xi_{k,x}\right)\right|dx.
\end{aligned}$$

此外，利用（3.13）以及 $|\rho(t)\rho'(t)|$ 是连续的，可得，对于每个 $n>1$ 满足$T_n>m_0$,

$$\begin{aligned}\left|A_n-4\int_0^{T_n}\rho^2(x)dx\right| &\le C\sum_{\substack{0\le k\le n-1\\ t_k<m_0}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(x-t_k)dx+C\sum_{\substack{0\le k\le n-1\\ t_k\ge m_0}}t_k^{-2\gamma}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(x-t_k)dx\\ &= C\sum_{0\le k<\frac{m_0}{\Delta_n}}\frac{\Delta_n^2}{2}+C\sum_{\frac{m_0}{\Delta_n}\le k\le n-1}\frac{\Delta_n^2}{2}t_k^{-2\gamma}\\ &\le C\left(\Delta_n+\sum_{\frac{1}{\Delta_n}\le k\le n-1}\Delta_n^2\left(\lfloor k\Delta_n\rfloor\right)^{-2\gamma}\right).\end{aligned}$$

Nex，进行变量代换 $j=\lfloor k\Delta_n\rfloor$，那么，由于 $\gamma>\frac{1}{2}$，我们得到- n

$$\begin{aligned}\left|A_n-4\int_0^{T_n}\rho^2(x)dx\right| &\le C\left(\Delta_n+\frac{1}{\Delta_n}\sum_{j=1}^{\lfloor n\Delta_n\rfloor}\Delta_n^2j^{-2\gamma}\right)\\ &\le C\Delta_n\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}j^{-2\gamma}\right)\\ &\le C\Delta_n.\end{aligned}\tag{3.22}$$

此外，利用（3.13）以及 $\rho^2(t)$ 是连续的，对于每个 $n>1$ 满足$T_n>m_0$,

$$\begin{aligned}|B_n| &= 4\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\Delta_n}{n}\rho^2\left(k\Delta_n\right)\\ &= 4\sum_{1\le k<\frac{m_0}{\Delta_n}}\frac{k\Delta_n}{n}\rho^2\left(k\Delta_n\right)+\sum_{\frac{m_0}{\Delta_n}\le k\le n-1}\frac{k\Delta_n}{n}\rho^2\left(k\Delta_n\right)\\ &\le C\left(\frac{1}{n\Delta_n}+\sum_{\frac{m_0}{\Delta_n}\le k\le n-1}\frac{\lfloor k\Delta_n\rfloor}{n}\left(\lfloor k\Delta_n\rfloor\right)^{-2\gamma}\right).\end{aligned}$$

进行变量代换 $j=\lfloor k\Delta_n\rfloor$，那么，鉴于级数$\sum_{j=1}^{\infty}j^{1-2\gamma}$ 收敛当且仅当 $\gamma>1$，我们有

$$\begin{aligned}|B_n| &\le \frac{C}{n\Delta_n}\left(1+\sum_{j=1}^{\lfloor n\Delta_n\rfloor}j^{1-2\gamma}\right)\\ &\le C\begin{cases}\frac{1}{T_n} & \text{if } \gamma>1,\\ \frac{\log(T_n)}{T_n} & \text{if } \gamma=1,\\ T_n^{1-2\gamma} & \text{if } \frac{1}{2}<\gamma<1.\end{cases}\end{aligned}\tag{3.23}$$

因此，结合式（3.19）、（3.20）、（3.21）、（3.22）以及（3.23），即可得到估计（3.17）。

引理 3.4. 存在仅依赖于 θ 和 $\rho(0)$ 的 $C>0$，使得当 n,

$$|k_3(V_n(Z))| \leq C \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T_n}} & if\ \gamma > \frac{2}{3}, \\ \frac{\log^2(T_n)}{\sqrt{T_n}} & if\ \gamma = \frac{2}{3}, \\ T_n^{\frac{3}{2}-3\gamma} & if\ \frac{1}{2} < \gamma < \frac{2}{3}, \end{cases} , \tag{3.24}$$

and

$$|k_4(V_n(Z))| \leq C \begin{cases} \frac{1}{T_n} & if\ \gamma > \frac{3}{4}, \\ \frac{\log^3(T_n)}{T_n} & if\ \gamma = \frac{3}{4}, \\ T_n^{2-4\gamma} & if\ \frac{1}{2} < \gamma < \frac{3}{4}, \end{cases} ,. \tag{3.25}$$

因此，

$$\max\left(|k_3(V_n(Z))|, |k_4(V_n(Z))|\right) \leq C \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T_n}} & if\ \gamma > \frac{2}{3}, \\ \frac{\log^2(T_n)}{\sqrt{T_n}} & if\ \gamma = \frac{2}{3}, \\ T_n^{\frac{3}{2}-3\gamma} & if\ \frac{1}{2} < \gamma < \frac{2}{3}, \end{cases} , \tag{3.26}$$

证明。 利用（2.3）， $V_n(Z)$可表示为

$$V_n(Z) = \sqrt{\frac{\Delta_n}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} I_2(\mathbf{1}_{[0,t_i]}^{\otimes 2}) = I_2\left(\sqrt{\frac{\Delta_n}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_{[0,t_i]}^{\otimes 2}\right) =: I_2(\varepsilon_n). \tag{3.27}$$

鉴于 $\mathbf{1}_{[0,s]}^{\otimes 2} \otimes_1 \mathbf{1}_{[0,t]}^{\otimes 2} = \langle \mathbf{1}_{[0,s]}, \mathbf{1}_{[0,t]} \rangle_{\mathcal{H}} \mathbf{1}_{[0,s]} \otimes \mathbf{1}_{[0,t]} = \rho(t-s)\mathbf{1}_{[0,s]} \otimes \mathbf{1}_{[0,t]}$，我们可以写成

$$\varepsilon_n \otimes_1 \varepsilon_n = \frac{\Delta_n}{n} \sum_{i,j=0}^{n-1} \rho(t_j - t_i) \mathbf{1}_{[0,t_i]} \otimes \mathbf{1}_{[0,t_j]}. \tag{3.28}$$

利用（2.10）、（3.27）和（3.28，我们可以推导出

$$\begin{aligned} k_3(V_n(Z)) = k_3(I_2(\varepsilon_n)) &= 8 \langle \varepsilon_n, \varepsilon_n \otimes_1 \varepsilon_n \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \\ &= \frac{\Delta_n^{3/2}}{n^{3/2}} \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \rho(t_j - t_i)\rho(t_i - t_k)\rho(t_k - t_j) \\ &= \frac{\Delta_n^{3/2}}{n^{3/2}} \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \rho((i-j)\Delta_n)\rho((i-k)\Delta_n)\rho((j-k)\Delta_n). \end{aligned}$$

作变量替换 $i=i$，$k_1=i-j$，$k_2=i-k$ 并应用引理 3.1，其中 $M=2$ 和 $v=$（-1, **1**），得到

$$\begin{aligned}|k_3(V_n(Z))| &\leq \frac{\Delta_n^{3/2}}{n^{1/2}}\sum_{|k_1|,|k_2|<n}|\rho(k_1\Delta_n)\,\rho(k_2\Delta_n)\,\rho((k_2-k_1)\Delta_n)|\\ &\leq \frac{C\Delta_n^{3/2}}{n^{1/2}}\left(\sum_{|k|<n}|\rho(k\Delta_n)|^{3/2}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.29}$$

此外，鉴于（3.13）以及 $|\rho^2(t)|$ 是连续的，对于每个 $n>1$ 满足 $n\Delta_n>m_0$,

$$\begin{aligned}\sum_{|k|<n}|\rho(k\Delta_n)|^{3/2} &= \sum_{1\leq k<\frac{m_0}{\Delta_n}}|\rho(k\Delta_n)|^{3/2}+\sum_{\frac{m_0}{\Delta_n}\leq k\leq n-1}|\rho(k\Delta_n)|^{3/2}\\ &\leq C\left(\sum_{1\leq k<\frac{m_0}{\Delta_n}}1+\sum_{\frac{m_0}{\Delta_n}\leq k\leq n-1}|\rho(k\Delta_n)|^{3/2}\right)\\ &\leq C\left(\sum_{1\leq k<\frac{m_0}{\Delta_n}}1+\sum_{\frac{m_0}{\Delta_n}\leq k\leq n-1}|k\Delta_n|^{-\frac{3}{2}\gamma}\right)\\ &\leq C\left(\frac{1}{\Delta_n}+\sum_{\frac{m_0}{\Delta_n}\leq k\leq n-1}(\lfloor k\Delta_n\rfloor)^{-\frac{3}{2}\gamma}\right)\end{aligned}$$

现在，作变量代换 $j=\lfloor k\Delta_n\rfloor$，结合级数$\sum_{j=1}^{\infty}j^{-\frac{3}{2}\gamma}$收敛当且仅当 $\gamma>\frac{2}{3}$这一事实

$$\begin{aligned}\sum_{|k|<n}|\rho(k\Delta_n)|^{3/2} &\leq C\left(\frac{1}{\Delta_n}+\frac{1}{\Delta_n}\sum_{j=1}^{\lfloor n\Delta_n\rfloor}j^{-\frac{3}{2}\gamma}\right)\\ &\leq \frac{C}{\Delta_n}\times\begin{cases}1 & \text{if } \gamma>\frac{2}{3},\\ \log(T_n) & \text{if } \gamma=\frac{2}{3},\\ T_n^{1-\frac{3}{2}\gamma} & \text{if } \frac{1}{2}<\gamma<\frac{2}{3}.\end{cases}\end{aligned} \tag{3.30}$$

因此，利用（3.29）和（3.30），估计（3.24）成立。另一方面，利用（2.11）、（3.27）以及

$$\mathbf{1}_{[0,s]}^{\otimes 2}\otimes_1\mathbf{1}_{[0,t]}^{\otimes 2}=\langle\mathbf{1}_{[0,s]},\mathbf{1}_{[0,t]}\rangle_{\mathcal{H}}\mathbf{1}_{[0,s]}\otimes\mathbf{1}_{[0,t]}=\mathbb{E}[Z_sZ_t]\mathbf{1}_{[0,s]}\otimes\mathbf{1}_{[0,t]},$$

我们得到

$$\begin{aligned}
|k_4(V_n(Z))| &\leq 48\|\varepsilon_n \otimes_1 \varepsilon_n\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \\
&= 48\frac{\Delta_n^2}{n^2}\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=0}^{n-1}\left\langle \mathbf{1}^{\otimes 2}_{[0,t_{k_1}]} \otimes_1 \mathbf{1}^{\otimes 2}_{[0,t_{k_2}]}\mathbf{1}^{\otimes 2}_{[0,t_{k_3}]} \otimes_1 \mathbf{1}^{\otimes 2}_{[0,t_{k_4}]}\right\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \\
&= 48\frac{\Delta_n^2}{n^2}\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=0}^{n-1}\mathbb{E}[Z_{t_{k_1}}Z_{t_{k_2}}]\mathbb{E}[Z_{t_{k_3}}Z_{t_{k_4}}]\mathbb{E}[Z_{t_{k_1}}Z_{t_{k_3}}]\mathbb{E}[Z_{t_{k_2}}Z_{t_{k_4}}] \\
&= 48\frac{\Delta_n^2}{n^2}\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=0}^{n-1}\rho(t_{k_1}-t_{k_2})\rho(t_{k_3}-t_{k_4})\rho(t_{k_1}-t_{k_3})\rho(t_{k_2}-t_{k_4}), \\
&= 48\frac{\Delta_n^2}{n^2}\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=0}^{n-1}\rho((k_1-k_2)\Delta_n)\rho((k_3-k_4)\Delta_n)\rho((k_1-k_3))\Delta_n)\rho(\mathbf{(}k_2-k_4\mathbf{))}\Delta_n\mathbf{)}。
\end{aligned}$$

此外，作变量替换 $k_1-k_2=j_1$，$k_2-k_4=j_2$ 和 $k_3-k_4=j_3$，然后应用引理 3.1，得到

$$\begin{aligned}
|k_4(V_n(Z))| &\leq 48\frac{\Delta_n^2}{n}\sum_{\substack{|j_i|<n\\ i=1,2,3}}\left|\rho\left(j_1\Delta_n\right)\rho\left(j_2\Delta_n\right)\rho\left(j_3\Delta_n\right)\rho\left((j_1+j_2-j_3)\Delta_n\right)\right| \\
&\leq C\frac{\Delta_n^2}{n}\left(\sum_{|k|<n}|\rho(k\Delta_n)|^{\frac{4}{3}}\right)^3. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

此外，采用与证明（3.30）类似的论证，对于每个满足 $n>1$ 的 $T_n>m_0$，可得

$$\begin{aligned}
\sum_{|k|<n}|\rho(k\Delta_n)|^{\frac{4}{3}} &\leq C\left(\frac{1}{\Delta_n}+\frac{1}{\Delta_n}\sum_{j=1}^{\lfloor n\Delta_n\rfloor}j^{-\frac{4}{3}\gamma}\right) \\
&\leq C\begin{cases}\frac{1}{\Delta_n} & \text{if } \gamma>\frac{3}{4},\\ \frac{\log(T_n)}{\Delta_n} & \text{if } \gamma=\frac{3}{4},\\ \frac{T_n^{1-\frac{4}{3}\gamma}}{\Delta_n} & \text{if } \frac{1}{2}<\gamma<\frac{3}{4}.\end{cases}. \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

因此，由（3.31）和（3.32），可得估计（3.25）。

引理 3.5。定义 $M_T:=F_T+G_T$, $T>0$，其中，对于任意 $T>0$, F_T 和 G_T 属于 $\mathcal{H}_2$, $\mathbb{E}(F_T^2)\to c>0$ 和 $\mathbb{E}(G_T^2)\to 0$，记为 $T\to\infty$。那么，存在一个常数 $C>0$，与 T 无关，使得当 T 充分大时，

$$d_{Kol}\left(\frac{M_T}{\sqrt{\mathbb{E}M_T^2}},\mathcal{N}(0,1)\right)\leq Cd_{Kol}\left(\frac{F_T}{\sqrt{\mathbb{E}F_T^2}},\mathcal{N}(0,1)\right)+C\|G_T\|_{L^2(\Omega)}. \qquad (3.33)$$

证明。 利用二项式展开和（2.4），经简单计算可得，当 T充分大时，

$$\begin{aligned}\left|\kappa_4\left(\frac{M_T}{\sqrt{\mathbb{E}M_T^2}}\right)\right| &\leq C\left|\mathbb{E}(M_T^4)-3(\mathbb{E}(M_T^2))^2\right| \\ &\leq C\left|\mathbb{E}(F_T^4)-3(\mathbb{E}(F_T^2))^2\right|+C\|G_T\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left|\kappa_4\left(F_T\right)\right|+C\|G_T\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

同样，对于 T 充分大的情况，我们有，

$$\left|\kappa_3\left(\frac{M_T}{\sqrt{\mathbb{E}M_T^2}}\right)\right| \leq \left|\kappa_3\left(F_T\right)\right|+C\|G_T\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.35}$$

因此，结合（2.8）、（2.7）、（3.34）和（3.35），可得（3.33）。

定理 3.6。记

$$\psi_n := \Delta_n + \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T_n}} & if\ \gamma \geq \frac{3}{4}, \\ T_n^{1-2\gamma} & if\ \frac{1}{2}<\gamma<\frac{3}{4}. \end{cases} \tag{3.36}$$

假设条件（$\mathcal{A}$）成立。那么，存在一个仅依赖于 θ和 ρ（0）的 $C>0$，使得对于较大的 $n\geq 1$,

$$d_{TV}\left(\frac{1}{\sigma}V_n(X),\mathcal{N}(0,1)\right) \leq \frac{C}{T_n^{\frac{1}{4}}}+C\psi_n, \tag{3.37}$$

$$d_{Kol}\left(\frac{1}{\sigma}V_n(X),\mathcal{N}(0,1)\right) \leq \frac{C}{\sqrt{T_n}}+C\psi_n, \tag{3.38}$$

and

$$d_{W}\left(\frac{1}{\sigma}V_n(X),\mathcal{N}(0,1)\right) \leq \frac{C}{\sqrt{T_n}}+C\psi_n. \tag{3.39}$$

证明。首先，我们证明（3.37）。根据 [15, 定理 3.5]，，存在一个正的常数$C>0$，使得对于所有二阶重积分 F 和 G，

$$d_{TV}\left(F,G\right)\leq C\left(\frac{\mathbb{E}[(F-G)^2]}{\mathbb{E}[F^2]}\right)^{1/4}.$$

将此结果与（3.16）和（3.17）结合，可得

$$\begin{aligned} d_{TV}\left(\frac{1}{\sigma}V_n(X),\mathcal{N}(0,1)\right) &\leq d_{TV}\left(\frac{1}{\sigma}V_n(Z),\mathcal{N}(0,1)\right)+\frac{1}{\sqrt{\sigma}[\mathbb{E}\left(V_n^2(Z)\right)]^{\frac{1}{4}}}\left\|V_n(X)-V_n(Z)\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq d_{TV}\left(\frac{1}{\sigma}V_n(Z),\mathcal{N}(0,1)\right)+\frac{C}{T_n^{\frac{1}{4}}}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

现在，我们回顾以下技术结果 [8, 引理 5.1]：令 $\mu\in\mathbb{R}$ 和 $\sigma>0$。那么，对于任意可积实值随机变量 F,

$$d_{TV}\left(\mu+\sigma F,\mathcal{N}\right)\leq d_{TV}\left(F,\mathcal{N}\right)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}|\mu|+2\left|1-\frac{1}{\sigma^2}\right|. \tag{3.41}$$

由（3.41），可得

$$d_{TV}\left(\frac{1}{\sigma}V_n(Z),\mathcal{N}(0,1)\right)\leq d_{TV}\left(\frac{V_n(Z)}{\sqrt{\mathbb{E}V_n^2(Z)}},\mathcal{N}(0,1)\right)+2\left|1-\frac{\sigma^2}{\mathbb{E}V_n^2(Z)}\right|. \tag{3.42}$$

另一方面，利用（2.8）和（3.26），我们得到

$$\begin{aligned} d_{TV}\left(\frac{V_n(Z)}{\sqrt{\mathbb{E}V_n^2(Z)}},\mathcal{N}(0,1)\right) &\leq C\max\left\{|k_3(V_n(Z))|,|k_4(V_n(Z))|\right\} \\ &\leq C\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T_n}} & \text{if } \gamma>\frac{2}{3}, \\ \frac{\log^2(T_n)}{\sqrt{T_n}} & \text{if } \gamma=\frac{2}{3}, \\ T_n^{\frac{3}{2}-3\gamma} & \text{if } \frac{1}{2}<\gamma<\frac{2}{3}. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.43}$$

因此，结合（3.17）、（3.40）、（3.42）和（3.43），便得到所需结果（3.37）。现在我们来证明（3.38）。利用（3.12），我们可以写出

$$R_n:=V_n(X)-V_n(Z)=\frac{\sqrt{T_n}}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(e^{-2\theta t_i}Z_0^2-2e^{-\theta t_i}Z_0Z_{t_i}\right).$$

将此与（2.3）和（3.16）相结合，我们可以推出，对每一个 $n\geq 1$,

$$R_n-\mathbb{E}R_n\in\mathcal{H}_2,\ \text{ and }\ \|R_n-\mathbb{E}R_n\|_{L^2(\Omega)}\leq\frac{C}{\sqrt{T_n}}. \tag{3.44}$$

接下来，我们回顾：通过直接计算，对每一个 $\mu\in\mathbb{R}$ 和 $\sigma>0$以及每一个可积实值随机变量 F，我们有

$$d_{Kol}\left(\mu+F,\mathcal{N}(0,1)\right)\leq d_{Kol}\left(F,\mathcal{N}(0,1)\right)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|\mu|. \tag{3.45}$$

利用（3.44）和（3.45），并应用引理3.5 于 $M_n=V_n(X)$、$F_n=V_n(Z)$ 和$G_n=R_n$，我们得到

$$\begin{aligned} d_{Kol}\left(\frac{1}{\sigma}V_n(X),\mathcal{N}(0,1)\right) &\leq d_{Kol}\left(\frac{1}{\sigma}(V_n(Z)+R_n-\mathbb{E}R_n),\mathcal{N}(0,1)\right)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}|\mathbb{E}R_n| \\ &\leq Cd_{Kol}\left(\frac{1}{\sigma}V_n(Z),\mathcal{N}(0,1)\right)+C\|R_n-\mathbb{E}R_n\|_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}|\mathbb{E}R_n| \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{T_n}}+C\psi_n, \end{aligned}$$

其中我们用到了（2.8）、（2.7）和（3.26）。至此，（3.38）的证明即告完成。对于（3.39），我们有

$$d_W\left(\frac{1}{\sigma}V_n(X),\mathcal{N}(0,1)\right)\leq\frac{1}{\sigma}\mathbb{E}\left|V_n(X)-V_n(Z)\right|+d_W\left(\frac{1}{\sigma}V_n(Z),\mathcal{N}(0,1)\right). \tag{3.46}$$

结合 (3.46) 和 (2.9)，并采用与上文类似的论证，我们得到

$$d_W\left(\frac{1}{\sigma}V_n(X),\mathcal{N}(0,1)\right)\leq C\left(\max\left(|k_3(V_n(Z))|,|k_4(V_n(Z))|\right)+\left|\mathbb{E}\left(V_n^2(Z)\right)-\sigma^2\right|+\frac{1}{\sqrt{T_n}}\right).$$

将此结果与 (3.17) 和 (3.26) 结合起来，可推出估计式 (3.39) .

3.2. 针对 f(𝔼(Z$_0^2$)) 的估计量的 Berry-Esseen界。这里，我们通过 Kolmogorov 度量和 Wasserstein度量研究估计量 $f(v_n(X))$ 的中心极限定理收敛速度。

我们先回顾一下，经过直接计算可得，对所有 u， $v \in \mathbb{R}$ 和$uv \geq 0$,

$$\left|\mathbb{P}\left\{\mathcal{N}(0,\sigma^2) \leq u\right\} - \mathbb{P}\left\{\mathcal{N}(0,\sigma^2) \leq v\right\}\right| \leq \frac{|u-v|}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\min(u^2,v^2)}{2\sigma^2}}, \tag{3.47}$$

$$\sup_{\{x>0\}} |x| e^{-x^2} < \infty, \qquad \sup_{\{x>0\}} x^2 e^{-x^2} < \infty, \tag{3.48}$$

对每个 $x > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\mathcal{N}(0,\sigma^2) \leq -x\right\} = \mathbb{P}\left\{\mathcal{N}(0,\sigma^2) \geq x\right\} &= \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ &\leq e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}} dy \leq C e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

本节需要以下一个有用的引理。

引理 *3.7.* 记 $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$。固定 $T > 0$和 $\theta > 0$。设 F为一个随机变量，使得 $F > 0$ 几乎处处成立，且 $\mathbb{E}F < \infty$；再设 f 和 g 为定义在 $(0, \infty)$ 上的两个函数，使得 $f(F) > 0$几乎处处成立， $g(x) = f^{-1}(x)$， $g'(x) < 0$， $g''(x) > 0$， $g'''(x) < 0$。那么，存在一个与 T 和 F 无关的常数 $C > 0$ ，使得

$$d_{Kol}\left(\sqrt{T}\left(f(F) - \theta\right), N\right) \leq C\left[d_{Kol}\left(\frac{\sqrt{T}}{|g'(\theta)|}(F - \mathbb{E}F), N\right) + \sqrt{T}\left|\mathbb{E}F - g(\theta)\right| + \frac{1}{\sqrt{T}}\right]. \tag{3.50}$$

证明。 </style}这个估计的证明受到证明[21,定理 3.2]中相关计算的启发。定义

$$A(z) := \mathbb{P}\left\{\sqrt{T}\left(f(F) - \theta\right) \leq z\right\} - \phi(z), \quad \text{with } \phi(z) := \mathbb{P}\left\{N \leq z\right\}.$$

假设 $z \leq -\sqrt{T}\theta$, 因此， $\theta + \frac{z}{\sqrt{T}} \leq 0$。由于 $f(F) > 0$，我们有

$$\mathbb{P}\left\{\sqrt{T}\left(f(F) - \theta\right) \leq z\right\} = \mathbb{P}\left\{f(F) \leq \theta + \frac{z}{\sqrt{T}}\right\} = 0.$$

因此，考虑到（3.49），

$$|A(z)| = \phi(z) \leq \phi(-\sqrt{T}\theta) \leq C e^{-\frac{T\theta^2}{4}} \leq \frac{C}{\sqrt{T}}.$$

现在假设 $z > -\sqrt{T}\theta$, 因此，$\theta + \frac{z}{\sqrt{T}} > 0$。利用 g 递减这一性质，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\sqrt{T}\left(f(F)-\theta\right) \le z\right\} &= \mathbb{P}\left\{f(F) \le \theta + \frac{z}{\sqrt{T}}\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{\frac{\sqrt{T}}{|g'(\theta)|}\left(F - g(\theta)\right) \ge \frac{\sqrt{T}}{|g'(\theta)|}\left(g\left(\theta+\frac{z}{\sqrt{T}}\right) - g(\theta)\right)\right\}.\end{aligned}$$

记

$$\nu := \frac{\sqrt{T}}{|g'(\theta)|}\left(g\left(\theta+\frac{z}{\sqrt{T}}\right) - g(\theta)\right), \qquad \mu := \nu - \frac{\sqrt{T}}{|g'(\theta)|}\left(\mathbb{E}F - g(\theta)\right).$$

因此，由（3.47），可得:

$$\begin{aligned}|A(z)| &= \left|\mathbb{P}\left\{\frac{\sqrt{T}}{|g'(\theta)|}\left(F-\mathbb{E}F\right) \ge \mu\right\} - \phi(z)\right| \\ &\le \left|\mathbb{P}\left\{\frac{\sqrt{T}}{|g'(\theta)|}\left(F-\mathbb{E}F\right) \ge \mu\right\} - \mathbb{P}\left\{N \ge \mu\right\}\right| \\ &\quad + \left|\mathbb{P}\left\{N \ge \mu\right\} - \mathbb{P}\left\{N \ge \nu\right\}\right| + \left|\mathbb{P}\left\{N \ge \nu\right\} - \phi(z)\right| \\ &\le d_{Kol}\left(\frac{\sqrt{T}}{|g'(\theta)|}(F-\mathbb{E}F), N\right) + \frac{\sqrt{T}}{|g'(\theta)|}\left|\mathbb{E}F - g(\theta)\right| + \left|\mathbb{P}\left\{N \ge \nu\right\} - \phi(z)\right|.\end{aligned}$$

因此，要得到（3.50），还需证明，对每个 $z > -\sqrt{T}\theta$,

$$\left|\mathbb{P}\left\{N \ge \nu\right\} - \phi(z)\right| \le \frac{C}{\sqrt{T}}. \tag{3.51}$$

利用中值定理和 $|g'(\theta)| = -g'(\theta)$，可得，对每个 z，存在 $\eta \in (0,1)$，使得

$$\nu = \frac{z}{|g'(\theta)|}g'\left(\theta + \frac{\eta z}{\sqrt{T}}\right) = \frac{-z}{g'(\theta)}g'\left(\theta + \frac{\eta z}{\sqrt{T}}\right).$$

这意味着，对每个 z,

$$\left|\mathbb{P}\left\{N \ge \nu\right\} - \phi(z)\right| = \left|\phi\left(\frac{z}{g'(\theta)}g'\left(\theta + \frac{\eta z}{\sqrt{T}}\right)\right) - \phi(z)\right|. \tag{3.52}$$

此外，由中值定理，对每个 z，都存在 $\delta \in (0,1)$，使得

$$\frac{g'\left(\theta + \frac{\eta z}{\sqrt{T}}\right)}{g'(\theta)} - 1 = \frac{\eta z}{\sqrt{T}g'(\theta)}g''\left(\theta + \frac{\eta\delta z}{\sqrt{T}}\right). \tag{3.53}$$

若 $-\sqrt{T}\theta < z < -\frac{\sqrt{T}\theta}{2}$，则，$0 < \theta + \frac{\eta z}{\sqrt{T}} < \theta$，因为 $-\theta < \frac{z}{\sqrt{T}} < \frac{\eta z}{\sqrt{T}}$。因此，$\frac{g'\left(\theta+\frac{\eta z}{\sqrt{T}}\right)}{g'\ \theta}() > 1$。将其与 (3.49) 和 (3.52) 结合可得

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{P}\left\{N \geq \nu\right\} - \phi(z)\right| &= \phi(z) - \phi\left(z\frac{g'\left(\theta+\frac{\eta z}{\sqrt{T}}\right)}{g'(\theta)}\right) \\
&\leq \phi(z) \\
&\leq \phi\left(-\frac{\sqrt{T}\theta}{2}\right) \leq Ce^{-\frac{T\theta^2}{16}} \leq \frac{C}{\sqrt{T}}.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

如果 $-\frac{\sqrt{T}\theta}{2} < z < 0$，那么 $0 < \theta + \frac{\eta z}{\sqrt{T}} < \theta$，因为 $-\theta < \frac{z}{\sqrt{T}} < \frac{\eta z}{\sqrt{T}}$。此时，利用 (3.47)、(3.52) 和 $\frac{g'\left(\theta+\frac{\eta z}{\sqrt{T}}\right)}{g'\ \theta}() > 1$，可得

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{P}\left\{N \geq \nu\right\} - \phi(z)\right| &= \left|\phi\left(\frac{z}{g'(\theta)}g'\left(\theta+\frac{\eta z}{\sqrt{T}}\right)\right) - \phi(z)\right| \\
&\leq \frac{|z|}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{g'\left(\theta+\frac{\eta z}{\sqrt{T}}\right)}{g'(\theta)} - 1\right)e^{-\frac{z^2}{2}}.
\end{aligned}$$

此外，鉴于 (3.53)、(3.48)，$\theta + \frac{\eta\delta z}{\sqrt{T}} \geq \frac{\theta}{2}$ 且 g'' 是递减的，

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{P}\left\{N \geq \nu\right\} - \phi(z)\right| &\leq \frac{|z|e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\eta z}{\sqrt{T}g'(\theta)}g''\left(\theta+\frac{\eta\delta z}{\sqrt{T}}\right) \\
&= \frac{z^2e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\eta}{\sqrt{T}|g'(\theta)|}g''\left(\theta+\frac{\eta\delta z}{\sqrt{T}}\right) \\
&\leq \frac{z^2e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\eta}{\sqrt{T}|g'(\theta)|}g''\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{T}}.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

若 $0 \leq z \leq \sqrt{T}\theta$，则 $\theta \leq \theta + \frac{\eta z}{\sqrt{T}} \leq 2\theta$，因此 $0 < \frac{g'(2\theta)}{g'(\theta)} \leq \frac{g'\left(\theta+\frac{\eta z}{\sqrt{T}}\right)}{g'\ \theta}() \leq 1$。在这种情况下，利用 (3.47) 和 (3.52)，可得

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{P}\left\{N \geq \nu\right\} - \phi(z)\right| &= \left|\phi\left(z\frac{g'\left(\theta+\frac{\eta z}{\sqrt{T}}\right)}{g'(\theta)}\right) - \phi(z)\right| \\
&\leq \frac{|z|}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{g'\left(\theta+\frac{\eta z}{\sqrt{T}}\right)}{g'(\theta)} - 1\right|e^{-\frac{z^2}{2}\left(\frac{g'\left(\theta+\frac{\eta z}{\sqrt{T}}\right)}{g'(\theta)}\right)^2} \\
&\leq \frac{|z|}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{g'\left(\theta+\frac{\eta z}{\sqrt{T}}\right)}{g'(\theta)} - 1\right|e^{-\frac{z^2}{2}\left(\frac{g'(2\theta)}{g'(\theta)}\right)^2}.
\end{aligned}$$

将其与 (3.53)、(3.48) 结合， $\theta \leq \theta + \frac{\eta z}{\sqrt{T}} \leq 2\theta$ 且 g'' 递减，

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}\{N \geq \nu\} - \phi(z)| &\leq \frac{|z| e^{-\frac{z^2}{2}\left(\frac{g'(2\theta)}{g'(\theta)}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\eta z}{\sqrt{T}|g'(\theta)|} g''\left(\theta + \frac{\eta \delta z}{\sqrt{T}}\right) \\
&= \frac{z^2 e^{-\frac{z^2}{2}\left(\frac{g'(2\theta)}{g'(\theta)}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\eta}{\sqrt{T}|g'(\theta)|} g''\left(\theta + \frac{\eta \delta z}{\sqrt{T}}\right) \\
&\leq \frac{z^2 e^{-\frac{z^2}{2}\left(\frac{g'(2\theta)}{g'(\theta)}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\eta}{\sqrt{T}|g'(\theta)|} g''(2\theta) \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{T}}.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

若 $z > \sqrt{T}\theta$，则 $\theta + \frac{z}{\sqrt{T}} > 2\theta > \theta$，且 $-z < -\sqrt{T}\theta$。此外，由于 g 是递减的，

$$\nu = \frac{\sqrt{T}}{|g'(\theta)|}\left(g\left(\theta + \frac{z}{\sqrt{T}}\right) - g(\theta)\right) \leq -\frac{\sqrt{T}}{|g'(\theta)|}\left(g(\theta) - g(2\theta)\right) < 0.$$

将这些事实与（3.49）相结合，我们得到

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}\{N \geq \nu\} - \phi(z)| &= |\phi(\nu) - \phi(-z)| \\
&\leq \phi(\nu) + \phi(-z) \\
&\leq \phi\left(-\frac{\sqrt{T}}{|g'(\theta)|}\left(g(\theta) - g(2\theta)\right)\right) + \phi\left(-\sqrt{T}\theta\right) \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{T}}.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

因此，结合（3.54）−（3.57），我们得到（3.51）。于是引理 3.7的证明即告完成。

注 3.8. 当函数 f 在引理 *3.7* 中具有形式 $f(x) = Cx^{-\frac{1}{\alpha}}$ 且 $0 < \alpha < 2$ 时的情形已在 [5]

定理 *3.9.* 假设条件（*A*）成立。设 f 与 g 为定义在 $(0, \infty)$ 上的两个函数，使得对每一个 $n \geq 1$，$f(v_n(X)) > 0$ 几乎处处，$g(x) = f^{-1}(x)$，$g'(x) < 0$，$g''(x) > 0$，$g'''(x) < 0$。则存在 $C > 0$，其仅依赖于 θ 与 $\rho(0)$，使得对所有 $n \geq 1$，

$$d_{Kol}\left(\frac{\sqrt{T_n}\left(f(v_n(X)) - f\left(\mathbb{E}(Z_0^2)\right)\right)}{\sigma|f'\left(\mathbb{E}(Z_0^2)\right)|}, \mathcal{N}(0,1)\right) \leq \frac{C}{\sqrt{T_n}} + C\psi_n,$$

其中 ψ_n 由(3.36)给出。

证明。利用 引理 3.7 以及事实 $g'\left[f(\mathbb{E}(Z_0^2))\right] = 1/f'(\mathbb{E}(Z_0^2))$，我们可以写成

$$\begin{aligned}
&d_{Kol}\left(\frac{\sqrt{T_n}}{\sigma|f'\left(\mathbb{E}(Z_0^2)\right)|}\left(f(v_n(X)) - f\left(\mathbb{E}(Z_0^2)\right)\right), \mathcal{N}(0,1)\right) \\
&\leq C\left[d_{Kol}\left(\frac{\sqrt{T_n}}{\sigma}\left(v_n(X) - \mathbb{E}v_n(X)\right), \mathcal{N}(0,1)\right) + \sqrt{T}\left|\mathbb{E}v_n(X) - \mathbb{E}(Z_0^2)\right| + \frac{1}{\sqrt{T_n}}\right] \\
&\leq C\left[d_{Kol}\left(\frac{1}{\sigma}V_n(X), \mathcal{N}(0,1)\right) + \sqrt{T}\left|\mathbb{E}v_n(X) - \mathbb{E}(Z_0^2)\right| + \frac{1}{\sqrt{T_n}}\right], \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

其中，后一个不等式来自（3.45）。
接下来，结合（3.16）、（3.38）和（3.58），可得估计（3.58）。

定理 3.10。假设条件（$\mathcal{A}$）成立。设 f： $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 是一个可逆的微分同胚函数，且二阶连续可微。那么，存在仅依赖于 θ 和 ρ（0）的 $C > 0$，使得当 $n \geq 1$足够大时，

$$d_W\left(\frac{\sqrt{T_n}\left(f(v_n(X)) - f\left(\mathbb{E}(Z_0^2)\right)\right)}{\sigma|f'\left(\mathbb{E}(Z_0^2)\right)|}, \mathcal{N}(0,1)\right) \leq C\left[\frac{\|f''(\zeta_n)\|_{L^2(\Omega)}}{\sqrt{T_n}} + \frac{1}{\sqrt{T_n}} + \psi_n\right], \qquad (3.59)$$

其中， ψ_n 由（3.36）给出，且 ζ_n 是介于 v_n（X）与 $\mathbb{E}$（Z_0^2）之间的随机变量。

证明。对于每个 $n \geq 1$，我们有：

$$f(v_n(X)) - f\left(\mathbb{E}(Z_0^2)\right) = f'\left(\mathbb{E}(Z_0^2)\right)\left(v_n(X) - \mathbb{E}(Z_0^2)\right) + \frac{1}{2}f''(\zeta_n)\left(v_n(X) - \mathbb{E}(Z_0^2)\right)^2$$

对于某个介于 $v_n(X)$ 和 $\mathbb{E}(Z_0^2)$ 之间的随机点 ζ_n。因此

$$\begin{aligned}
&d_W\left(\frac{\sqrt{T_n}}{\sigma|f'\left(\mathbb{E}(Z_0^2)\right)|}\left(f(v_n(X)) - f\left(\mathbb{E}(Z_0^2)\right)\right), \mathcal{N}(0,1)\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\frac{\sqrt{T_n}}{\sigma|f'\left(\mathbb{E}(Z_0^2)\right)|}\mathbb{E}\left|f''(\zeta_n)\left(v_n(X) - \mathbb{E}(Z_0^2)\right)^2\right| + d_W\left(\frac{1}{\sigma}V_n(X), \mathcal{N}(0,1)\right). \qquad (3.60)
\end{aligned}$$

该不等式中的最后一项由（3.39）给出界。结合霍¨尔德不等式、超收缩性质（2.4）、（3.16）和（3.17），我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|f''(\zeta_n)\left(v_n(X) - \mathbb{E}(Z_0^2)\right)^2\right| &\leq \left(\mathbb{E}|f''(\zeta_n)|^2\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}\left|v_n(X) - \mathbb{E}(Z_0^2)\right|^4\right)^{1/2} \\
&\leq C\left(\mathbb{E}|f''(\zeta_n)|^2\right)^{1/2}\mathbb{E}\left|v_n(X) - \mathbb{E}(Z_0^2)\right|^2 \\
&\leq \frac{C\|f''(\zeta_n)\|_{L^2(\Omega)}}{T_n}\mathbb{E}\left[V_n(X)^2\right] \\
&\leq \frac{C\|f''(\zeta_n)\|_{L^2(\Omega)}}{T_n}. \qquad (3.61)
\end{aligned}$$

因此，由（3.39）、（3.60）和（3.61），可得界（3.59）。

4. 高斯Ornstein-Uhlenbeck过程的应用

在本节中，我们将第3节的一般方法应用于具体例子，我们考虑第一类和第二类分数阶Ornstein-Uhlenbeck过程。

4.1. **第一类分数阶 Ornstein-Uhlenbeck 过程**。 这里我们考虑第一类分数阶 Ornstein-Uhlenbeck 过程 $X^\theta := \left\{X_t^\theta, t \geq 0\right\}$，它定义为如下线性随机微分方程的解

$$X_0^\theta = 0; \quad dX_t^\theta = -\theta X_t^\theta dt + dB_t^H, \quad t \geq 0, \tag{4.62}$$

其中 $\theta > 0$ 是一个未知参数，我们希望对其进行估计；而 $\left\{B_t^H, t \geq 0\right\}$是 Hurst 指数为 $H \in (0,1)$ 的分数布朗运动。众所周知，方程（4.62）有显式解：

$$X_t^\theta = \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dB_s^H. \tag{4.63}$$

此外，

$$Z_t^\theta = \int_{-\infty}^t e^{-\theta(t-s)} dB_s^H. \tag{4.64}$$

是一个平稳高斯过程，参见 [6, 12]。
以下定理给出了估计量 $f_H\left(v_n\left(X^\theta\right)\right)$ 关于 θ的 Kolmogorov 距离和 Wasserstein距离的 Berry-Esseen 界，其中

$$v_n\left(X^\theta\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[X_{t_i}^\theta\right]^2, \text{ and } f_H(x) = \left(\frac{H\Gamma(2H)}{x}\right)^{\frac{1}{2H}}, \ x > 0. \tag{4.65}$$

定理 4.1. 设 $H \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$。记 $\sigma_H^2 := 4\int_{\mathbb{R}} \rho_{Z^\theta}^2(r)dr$，其中 $\rho_{Z^\theta}(r) = \mathbb{E}\left[Z_r^\theta Z_0^\theta\right]$，$r > 0$。则存在一个仅依赖于 θ 和 H 的 $C > 0$，使得当 $n \geq 1$充分大时，

$$d_{Kol}\left(\frac{2H^2\Gamma(2H)\sqrt{T_n}\left(f_H\left(v_n\left(X^\theta\right)\right) - \theta\right)}{\sigma_H\theta^{2H+1}}, \mathcal{N}(0,1)\right) \leq C\begin{cases} \Delta_n + \frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}} & if\ 0 < H \leq \frac{5}{8}, \\ \Delta_n + \frac{1}{(n\Delta_n)^{3-4H}} & if\ \frac{5}{8} < H < \frac{3}{4}, \end{cases} \tag{4.66}$$

and

$$d_W\left(\frac{2H^2\Gamma(2H)\sqrt{T_n}\left(f_H\left(v_n\left(X^\theta\right)\right) - \theta\right)}{\sigma_H\theta^{2H+1}}, \mathcal{N}(0,1)\right) \leq C\begin{cases} \Delta_n + \frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}} & if\ 0 < H \leq \frac{5}{8}, \\ \Delta_n + \frac{1}{(n\Delta_n)^{3-4H}} & if\ \frac{5}{8} < H < \frac{3}{4}, \end{cases} \tag{4.67}$$

其中 $v_n\left(X^\theta\right)$ 与 f_H 见 (4.65)。

证明。 根据 [2, 引理3.1], ，假设（$\mathcal{A}$）在取 $Z = Z^\theta$ 与 γ =$2 - 2H$时成立。此外，在此情形下，我们有

$$\rho(0) = \rho_{Z^\theta}(0) = \theta^{-2H}H\Gamma(2H) = f_H^{-1}(\theta), \quad \psi_n = \psi_n^\theta := \Delta_n + \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T_n}} & \text{if } 0 < H \leq \frac{5}{8}, \\ T_n^{4H-3} & \text{if } \frac{5}{8} < H < \frac{3}{4}, \end{cases} \tag{4.68}$$

其中 ψ_n 见（3.36），并取 $\gamma = 2 - 2H$。
现在，利用 T 定理 3.9结合 $f(x) = f_H(x)$，以及（4.68），并利用以下事实：

$\left(\mathbb{E}[\left(Z_0^\theta\right)^2]\right)=\theta$和 $\left|f'\left(\mathbb{E}[\left(Z_0^\theta\right)^2]\right)\right|=\frac{\theta^{2H+1}}{2H^2\Gamma(2H)}$，对于较大的 $n\geq 1$，我们得到 f_H：

$$d_{Kol}\left(\frac{2H^2\Gamma(2H)\sqrt{T_n}\left(f_H(v_n\left(X^\theta\right))-\theta\right)}{\sigma\theta^{2H+1}},\mathcal{N}(0,1)\right)\leq\frac{C}{\sqrt{T_n}}+C\psi_n^\theta$$
$$\leq C\begin{cases}\Delta_n+\frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}} & \text{if } 0<H\leq\frac{5}{8},\\ \Delta_n+\frac{1}{(n\Delta_n)^{3-4H}} & \text{if } \frac{5}{8}<H<\frac{3}{4},\end{cases}$$

这意味着（4.66）。

同理，使用 定理 3.10 以及 $f(x)=f_H(x)$，并结合（4.68），对于足够大的 $n\geq 1$，

$$d_W\left(\frac{2H^2\Gamma(2H)\sqrt{T_n}\left(f_H(v_n\left(X^\theta\right))-\theta\right)}{\sigma\theta^{2H+1}},\mathcal{N}(0,1)\right)\leq C\left[\frac{\|f_H''(\zeta_n)\|_{L^2(\Omega)}}{\sqrt{T_n}}+\frac{1}{\sqrt{T_n}}+\psi_n\right].$$

此外，由于$|f_H''|$是递减的，且在此情形下，ζ_n是介于$v_n\left(X^\theta\right)$和 $\mathbb{E}$[之间的随机变量（Z_0^θ）^{2}]，因此我们有 $\|f_H''\left(\zeta_n\right)\|_{L^2(\Omega)}\leq C\left[1+\|f_H''\left(v_n\left(X^\theta\right)\right)\|_{L^2(\Omega)}\right]$。此外，根据 [7, 定理 5.4], $\sup_{n\geq n_0}\|f_H''\left(v_n\left(X^\theta\right)\right)\|_{L^2(\Omega)}<\infty$（其中 $n_0\geq 1$）。因此，对于足够大的 $n\geq 1$,

$$d_W\left(\frac{2H^2\Gamma(2H)\sqrt{T_n}\left(f_H(v_n\left(X^\theta\right))-\theta\right)}{\sigma\theta^{2H+1}},\mathcal{N}(0,1)\right)\leq C\begin{cases}\Delta_n+\frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}} & \text{if } 0<H\leq\frac{5}{8},\\ \Delta_n+\frac{1}{(n\Delta_n)^{3-4H}} & \text{if } \frac{5}{8}<H<\frac{3}{4}.\end{cases}$$

因此（4.67）成立。

注 4.2. 值得注意的是，（4.66）中的上界严格比下述

$$\left[n\Delta_n^{2H+1}\right]^{1/2}+\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}} & if\ 0<H\leq\frac{5}{8},\\ \frac{1}{(n\Delta_n)^{3-4H}} & if\ \frac{5}{8}<H<\frac{3}{4},\end{cases}$$

在 [7, 定理 5.4.], 中得到的结果更紧，这是因为对每一个 $H\in(0,1)$，$\Delta_n^{2-2H}<n\Delta_n$，当 $n\to\infty$时。然而，估计（4.67）已在 [2, 定理 3.7]中得到。

4.2. 第二类分数奥恩斯坦-乌伦贝克过程。 在本节中，我们考虑所谓的第二类分数奥恩斯坦-乌伦贝克过程，其定义如下

$$S_0^\mu=0,\text{ and }dS_t^\mu=-\mu S_t^\mu dt+dY_t^{(1)},\quad t>0,\tag{4.69}$$

其中 $Y^{(1)}=\int_0^t e^{-s}dB_{a_s}^H$，且$a_s=He^{\frac{s}{H}}$，而$\{B_t^H,t\geq 0\}$是赫斯特参数为 $H\in\left(\frac{1}{2},1\right)$的分数布朗运动，而 $\mu>0$是未知参数。根据[14,方程 3.9]，，方程（4.69）具有显式解：

$$S_t^\mu=e^{-\mu t}\int_0^t e^{\mu s}dY_s^{(1)}=e^{-\mu t}\int_0^t e^{(\mu-1)s}dB_{a_s}^H=H^{(1-\mu)H}e^{-\mu t}\int_{a_0}^{a_t}r^{(\mu-1)H}dB_r^H.$$

因此，我们也可以写成

$$S_t^\mu=Z_t^\mu-e^{-\mu t}Z_0^\mu,$$

其中

$$Z_t^\mu=e^{-\mu t}\int_{-\infty}^t e^{(\mu-1)s}dB_{a_s}^H=H^{(1-\mu)H}e^{-\mu t}\int_0^{a_t}r^{(\mu-1)H}dB_r^H.$$

此外， $\{Z_t^\mu, t \geq 0\}$ 是一个中心化平稳高斯过程，参见例如 [9,定理 3。8]此外，由 [12, 引理 37]可知，对于每个 $H \in (\frac{1}{2}, 1)$,

$$\rho_{Z^\mu}(0) := E\left[(Z_0^\mu)^2\right] = \frac{(2H-1)H^{2H}}{\mu}\mathcal{B}(1-H+\mu H, 2H-1) =: f_\mu^{-1}(\mu), \tag{4.70}$$

其中 $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ 是通常的贝塔函数。

我们需要以下引理。

引理 4.3. 设 $H \in (0, 1)\setminus\{\frac{1}{2}\}$。则存在一个常数 $C > 0$，它仅依赖于θ 和 H，使得当 $t > 2$ 足够大时，

$$\max\left(|\rho_{Z^\mu}(t)|, |\rho'_{Z^\mu}(t)|\right) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\min\left(\mu, \frac{1}{H}-1\right)t}. \tag{4.71}$$

证明。 根据 [14], ，存在 c, $C > 0$，使得对所有足够大的 $t > 2$ ，

$$|\rho_{Z^\mu}(t)| = |\mathbb{E}\left[Z_0^\mu Z_t^\mu\right]| \leq Ce^{-c|t|}.$$

因此，剩下的工作是研究 $|\rho'_{Z^\mu}(t)|$。根据 [9, 定理 3.1], ，当 $t \geq 0$ 足够大时，我们有，

$$\begin{aligned}\rho_{Z^\mu}(t) &= e^{-\mu t}\rho_{Z^\mu}(0) + (2H-1)H^{2H-1}\frac{e^{-\mu t}}{2}\int_0^t\int_{-\infty}^0 e^{\mu u}e^{\mu v}\left(e^{\frac{v-u}{2H}} - e^{-\frac{v-u}{2H}}\right)^{2H-2}dudv \\ &=: e^{-\mu t}\rho_{Z^\mu}(0) + \frac{1}{2}(2H-1)H^{2H-1}h(t).\end{aligned} \tag{4.72}$$

由 t 引理 2 的证明：对于每个 $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ 和 $t > 2$ ，

$$\begin{aligned}h(t) &= e^{-\mu t}\int_0^t\int_{-\infty}^0 e^{\mu x}e^{\mu y}\left(e^{\frac{y-x}{2H}} - e^{-\frac{y-x}{2H}}\right)^{2H-2}dxdy \\ &= \frac{e^{-\mu t}}{2\mu}\int_0^t e^{-\mu u}\left(e^{\frac{u}{2H}} - e^{-\frac{u}{2H}}\right)^{2H-2}\left(e^{2\mu u}-1\right)du + \frac{e^{\mu t}}{2\mu}\int_t^\infty e^{-\mu u}\left(e^{\frac{u}{2H}} - e^{-\frac{u}{2H}}\right)^{2H-2}du \\ &\quad -\frac{e^{-\mu t}}{2\mu}\int_t^\infty e^{-\mu u}\left(e^{\frac{u}{2H}} - e^{-\frac{u}{2H}}\right)^{2H-2}du \\ &=: m(t) + l(t) - k(t).\end{aligned}$$

此外，存在一个仅依赖于 μ 和 H 的常数 $C > 0$，使得当 $t > 2$ 足够大时，

$$\max\left(|m(t)|, |l(t)|, |k(t)|\right) \leq Ce^{-\frac{1}{2}\min\left(\mu, \frac{1}{H}-1\right)t}. \tag{4.73}$$

另一方面，对于每个 $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ 和 $t > 2$,

$$\begin{aligned}h'(t) &= -\mu m(t) + \frac{1}{2\mu}\left(e^{\frac{t}{2H}} - e^{-\frac{t}{2H}}\right)^{2H-2}\left(1-e^{-2\mu t}\right) + \mu l(t) - \frac{1}{2\mu}\left(e^{\frac{t}{2H}} - e^{-\frac{t}{2H}}\right)^{2H-2} \\ &\quad +\mu k(t) + \frac{e^{-2\mu t}}{2\mu}\left(e^{\frac{t}{2H}} - e^{-\frac{t}{2H}}\right)^{2H-2}.\end{aligned}$$

将此结果与（4.73）以及 $\left(e^{\frac{t}{2H}} - e^{-\frac{t}{2H}}\right)^{2H-2} \sim e^{-\left(\frac{1}{H}-1\right)t}$，当 $t \to \infty$ 时，存在一个 $C > 0$ 仅依赖于 μ 和 H 的常数，使得当 $t > 2$ 足够大时，

$$|h'(t)| \leq Ce^{-\frac{1}{2}\min\left(\mu, \frac{1}{H}-1\right)t}. \tag{4.74}$$

因此，利用（4.72）和（4.74）， （4.71）的证明就完成了。

现在，我们可以为估计量 $f_\mu\left(v_n\left(S^\mu\right)\right)$ μ 推导 Kolmogorov 距离和 Wasserstein距离下的 Berry-Esseen 界，其中 f_μ 由（4.70）给出，并且

$$v_n\left(S^\mu\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[S_{t_i}^\mu\right]^2.$$

定理4.4. 记作 $\sigma_\mu^2:=4\int_{\mathbb{R}}\rho_{Z^\mu}^2(r)dr$，其中 $\rho_{Z^\mu}(r)=\mathbb{E}(Z_r^\mu Z_0^\mu)$。若 $H\in(1_2,1)$，则存在仅依赖于 μ 和 H 的 $C>0$，使得当 $n\geq 1$ 足够大时，

$$d_{Kol}\left(\frac{\sqrt{T_n}\left(f_\mu\left(v_n\left(S^\mu\right)\right)-\mu\right)}{\sigma_\mu\left|f_\mu'\left(\rho_{Z^\mu}(0)\right)\right|},\mathcal{N}(0,1)\right)\leq C\left(\Delta_n+\frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}}\right),\tag{4.75}$$

and

$$d_W\left(\frac{\sqrt{T_n}\left(f_\mu\left(v_n\left(S^\mu\right)\right)-\mu\right)}{\sigma_\mu\left|f_\mu'\left(\rho_{Z^\mu}(0)\right)\right|},\mathcal{N}(0,1)\right)\leq C\left(\Delta_n+\frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}}\right),\tag{4.76}$$

其中 f_μ 由 (4.70)给出。

证明。 根据引理4.3依据 [2, 引理3。1], 假设 $(\mathcal{A})$ 成立，其中 $Z=Z^\mu$，且对每个 $\gamma>0$ 均成立。在这种情况下，利用 (4.70)，可得

$$\rho(0)=\rho_{Z^\mu}(0)=f_\mu^{-1}(\mu)=:g_\mu(\mu).\tag{4.77}$$

此外，假设 $(\mathcal{A})$ 对每个 $\gamma>0$ 均成立，我们可以取 $\gamma>\frac{3}{4}$，于是，由 (3.36)-定义的函数 ψ_n 变为

$$\psi_n=\psi_n^\mu:=\Delta_n+\frac{1}{\sqrt{T_n}}.\tag{4.78}$$

另一方面，经过直接计算可知，函数 $g_\mu(x)$ 对所有$x>0$ 都满足，

$$g_\mu'(x)<0,\ g_\mu''(x)>0,\ g_\mu'''(x)<0.\tag{4.79}$$

接下来，应用定理3.9 及 $f(x)=f_\mu(x)$，并利用 $f_\mu\left(\mathbb{E}[(Z_0^\mu)^2]\right)=\mu$，（4.78）和（4.79），我们可推得，当 $n\geq 1$足够大时，

$$\begin{aligned}d_{Kol}\left(\frac{\sqrt{T_n}\left(f_\mu\left(v_n\left(S^\mu\right)\right)-\mu\right)}{\sigma_\mu\left|f_\mu'\left(\rho_{Z^\mu}(0)\right)\right|},\mathcal{N}(0,1)\right)&\leq\frac{C}{\sqrt{T_n}}+C\psi_n^\mu\\&\leq C\left(\Delta_n+\frac{1}{\sqrt{n\Delta_n}}\right),\end{aligned}$$

这就证明了（4.75）。
同样，应用定理3.10 并取 $f(x)=f_\mu(x)$，当 $n\geq 1$足够大时，有:

$$\begin{aligned}d_W\left(\frac{\sqrt{T_n}\left(f_\mu\left(v_n\left(S^\mu\right)\right)-\mu\right)}{\sigma_\mu\left|f_\mu'\left(\rho_{Z^\mu}(0)\right)\right|},\mathcal{N}(0,1)\right)&\leq C\left[\frac{\|f_\mu''(\zeta_n)\|_{L^2(\Omega)}}{\sqrt{T_n}}+\frac{1}{\sqrt{T_n}}+\psi_n^\mu\right]\\&\leq C\left[\frac{\|f_\mu''(\zeta_n)\|_{L^2(\Omega)}}{\sqrt{T_n}}+\Delta_n+\frac{1}{\sqrt{T_n}}\right],\end{aligned}$$

其中，在这种情况下， ζ_n 是一个介于 $v_n(S^\mu)$和 $\mathbb{E}[($ $Z_0^\mu)^2]$。
要证明（4.76），只需证明对某个 $n_0 \geq 1$,

$$\sup_{n\geq n_0} \|f_\mu''(\zeta_n)\|_{L^2(\Omega)} < \infty. \tag{4.80}$$

由（4.70）和（4.77），可知对所有 $x > 0$,

$$g_\mu(x) = \frac{(2H-1)H^{2H}}{x} \int_0^1 t^{xH-H}(1-t)^{2H-2}dt,$$

$$g_\mu'(x) = (2H-1)H^{2H} \int_0^1 \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{H\log(t)}{x}\right) t^{xH-H}(1-t)^{2H-2}dt,$$

and

$$g_\mu''(x) = (2H-1)H^{2H} \int_0^1 \left(\frac{2}{x^3} - \frac{2H\log(t)}{x^2} + \frac{H^2\log^2(t)}{x}\right) t^{xH-H}(1-t)^{2H-2}dt.$$

注意，对所有 $x > 0$,

$$g_\mu(x) > 0, \quad g_\mu'(x) < 0, \quad g_\mu''(x) > 0, \quad |g_\mu'(x)| \geq \frac{|g_\mu(x)|}{x}. \tag{4.81}$$

此外，存在一个常数 $C > 0$，仅依赖于 H，使得对所有 $x > 0$,

$$g_\mu(x) \leq \frac{C}{x}, \quad f_\mu(x) \leq \frac{C}{x}, \quad |g_\mu''(x)| \leq C\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right). \tag{4.82}$$

结合（4.81）、（4.82）以及以下事实

$$f_\mu''(x) = -\frac{g_\mu''(f_\mu(x))}{\left(g_\mu'(f_\mu(x))\right)^3},$$

我们推导出

$$\begin{aligned}
|f_\mu''(\zeta_n)| = \frac{|g_\mu''(f_\mu(\zeta_n))|}{|g_\mu'(f_\mu(\zeta_n))|^3} &\leq C\left(\frac{1}{|f_\mu(\zeta_n)|^3} + \frac{1}{|f_\mu(\zeta_n)|^2} + \frac{1}{|f_\mu(\zeta_n)|}\right)\frac{|f_\mu(\zeta_n)|^3}{|\zeta_n|^3} \\
&= C\left(1 + |f_\mu(\zeta_n)| + |f_\mu(\zeta_n)|^2\right)\frac{1}{|\zeta_n|^3} \\
&\leq C\left(\frac{1}{|\zeta_n|^3} + \frac{1}{|\zeta_n|^4} + \frac{1}{|\zeta_n|^5}\right) \\
&\leq C\left(1 + \frac{1}{|v_n(S^\mu)|^3} + \frac{1}{|v_n(S^\mu)|^4} + \frac{1}{|v_n(S^\mu)|^5}\right).
\end{aligned}$$

另一方面，根据 [7, 定理 5.5], 的证明，对于每个 $p > 0$，存在 $n_0 \geq 1$ 使得

$$\sup_{n\geq n_0} \| (v_n(S^\mu))^{-p} \|_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

因此，得到了估计（4.80），从而完成了（4.76）的证明。

备注 **k4.5.** 在 [7, 定理 5。5], 中证明了以下结果：对于 $H \in (12, 1)$,

$$d_W\left(\frac{\sqrt{T_n}\left(f_\mu\left(v_n\left(S^\mu\right)\right) - \mu\right)}{\sigma_\mu\left|f_\mu'\left(\rho_{Z^\mu}(0)\right)\right|}, \mathcal{N}(0,1)\right) \leq C\left(\left[n\Delta_n^{2H+1}\right]^{1/2} + \tfrac{1}{\sqrt{n\Delta_n}}\right). \tag{4.83}$$

在这种情况下，我们注意到，我们在 (4.75) 和(4.76) 中给出的界所提供的收敛速率优于迄今为止最好的估计，该估计见 (4.83)，因为 $\Delta_n^{2-2H} < n\Delta_n$，因为$n \to \infty$。

声明

利益冲突
作者声明不存在利益冲突。

Aut作者贡献所有作者均已阅读并批准最终稿 .

经费
Y. Chen 获得国家自然科学基金（12461029）和保山学院博士科研启动基金的资助。

数据和材料的可用性不适用。

References

[1] Alsenafi A、Alazemi F、Es-Sebaiy K。离散采样随机偏微分方程的最大似然漂移估计的柯尔莫哥洛夫界。《连续与离散模型进展》2024，52（2024）。[2] Alazemi F、Es-Sebaiy K、Al-Foraih M。高频观测分数阶奥恩斯坦-乌伦贝克过程的参数估计的改进 Berry-Esseen界。《连续与离散模型进展》2026，26（2026）。[3] Al-Foraih M、Es-Sebaiy K。 α-布朗桥的近似最大似然估计量的改进柯尔莫哥洛夫界。《不等式及其应用杂志》2025，130（2025）。[4] Bierm´e H、Bonami A、Nourdin I、Peccati G。Wiener 空间上的最优 Berry-Ess´een 速率：三阶与四阶累积量的障碍。ALEA：拉丁美洲概率与数理统计杂志 2012；9（2）：473-500。[5] Chen Y、Zhou H。一般高斯噪声驱动的奥恩斯坦-乌伦贝克过程的参数估计。《数学学报》（英文版）2021，41B（2），573–595。[6] Cheridito P、Kawaguchi H、Maejima M。分数阶奥恩斯坦-乌伦贝克过程。《电子概率杂志》2003，8，1-14。[7] Douissi S、Es-Sebaiy K、Kerchev G、Nourdin N。高频观测高斯过程的二阶矩估计量的Berry-Esseen界。《电子统计学杂志》2022；16（1）：636-670。[8] Douissi S、Es-Sebaiy K、Viens F。一般高斯过程参数估计的 Berry-Esseen界。ALEA：拉丁美洲概率与数理统计杂志。2019；16：633-664。[9] Es-Sebaiy K。高斯与埃尔米特奥恩斯坦–乌伦贝克过程。《随机分析与应用》2022，41（2），394–423。[10] Es-Sebaiy K、Alazemi F。随机比率的中心极限定理中的新柯尔莫哥洛夫界及其应用。《混沌、孤子与分形》2024；181：114686。[11] Es-Sebaiy K、Alazemi F、Al-Foraih M。高频观测奥恩斯坦-乌伦贝克过程的漂移参数的近似矩条件估计量和最大似然估计量的中心极限定理中的瓦瑟斯坦界。《不等式及其应用杂志》2023；62（2023）。[12] Es-Sebaiy K、Viens F。平稳高斯过程参数估计的最优速率。《随机过程及其应用》2019；129（9）：3018-3054。[13] Hu Y、Nualart D、Zhou H。一般赫斯特参数的分数阶奥恩斯坦–乌伦贝克过程的参数估计。《统计推断与随机过程》2019；22：111–142。[14] Kaarakka T、Salminen P。关于分数阶奥恩斯坦-乌伦贝克过程。《随机分析通讯》2011，5，121-133。

[15]Kosov E。通过 L2 范数估计对数凹随机向量中多项式的全变差距离。《国际数学研究通知》rnz278，2019。https://doi.org/10.1093/imrn/rnz278[16] Nourdin I、Peccati G。借助 Malliavin 微积分进行正态逼近：从 Stein 方法到普适性。剑桥数学专著丛书，第192卷，剑桥：剑桥大学出版社；2012。[17] Nourdin I、Peccati G。Wiener 空间上的累积量。《泛函分析杂志》2010，258（11），3775-3791。[18] Nourdin I、Peccati G。最优四阶矩定理。《美国数学会会刊》2025，143，3123-3133。[19] Nualart D、Zhou H。Breuer-Major 定理中的全变差估计。《亨利·庞加莱研究所年鉴：概率与统计》2021，57（2），740-777。[20] Nualart D。Malliavin 微积分及相关主题。柏林：施普林格出版社；2006。[21] Sottinen T、Viitasaari L。带有平稳增量高斯噪声的朗之万方程的参数估计。《统计推断与随机过程》2018；21：569–601。