arXiv:2603.05166v1 [math.FA] 5 Mar 2026

$\mathbb{K}$不变再生核的完全 Nevanlinna-Pick 性质

ˇMIROSLAV ENGLIS、Somnath Hazra 和 Paramita Pramanick

Abstract. 设 Ω 是一个嘉当域，$K = \sum_s a_s K_s$ 是 Ω 上的 $\mathbb{K}$不变核。本文首先在每个 a_s 非零且 K 非零的假设下，通过序列 $\{a_s\}_s$ 给出 K 具有完全 Nevanlinna-Pick 性质的一个必要条件。这推广了著名的 Kaluza 引理在 $\mathbb{K}$不变核情形下的结论。

经典 Sz.-Nagy–Foias 理论中的特征函数概念被推广到 $\frac{1}{K}$压缩算子的交换元组，其中 K 是一个不可约的 $\mathbb{K}$不变核。文中给出了 $\frac{1}{K}$ 压缩算子的特征函数的显式构造。通过与$\frac{1}{K}$压缩算子相关的特征函数的存在性，得到了具有完全 Nevanlinna-Pick 性质的 $\mathbb{K}$不变核的刻画。

1. Introduction

设 Ω 是 $\mathbb{C}^d$ 中秩为 r的嘉当域。这些域是单复变量情形下开单位圆盘以及多复变函数情形下开欧几里得单位球的自然推广。不可约嘉当域的完整分类由E. Cartan [9] 给出。数值不变量 (r, a, b) 唯一确定域 Ω，直至双全纯等价。维数 d 与数值不变量 (r, a, b) 的关系为 $\frac{d}{r} = 1 + \frac{a}{2}(r-1) + b$. 关于嘉当域的更多细节，参见 [14],[1]。设 G 是 Aut(Ω)（Ω 的全体双全纯自同构构成的群）中的单位元连通分支。设 $\mathbb{K} = \{g \in G: g(0) = 0\}$ 是 G的极大紧子群。每个秩为 r 的不可约嘉当域 Ω 都可以实现为嘉当因子 $Z = \mathbb{C}^d$. 的开单位球。解析多项式空间 $\mathcal{P}(Z)$ 在 Z 上具有群 $\mathbb{K}$ 的自然作用，该作用由复合给出，即 $(k \cdot p)(z) = p(k^{-1} \cdot z), k \in \mathbb{K}, p \in \mathcal{P}(Z)$。

由 r 个非负整数组成的元组 $s = (s_1, \ldots, s_r)$ 称为签名，当且仅当 $s_1 \geq \ldots \geq s_r \geq 0$。所有签名的集合记作 $\vec{\mathbb{N}}_0^r$，而 0 表示签名 $(0, \ldots, 0)$。若 $p = (p_1, \ldots, p_r)$ 和 $q = (q_1, \ldots, q_r)$ 是两个签名，则记号 $p \geq q$ 表示 $p_i \geq q_i$ 对每个 $1 \leq i \leq r$ 都成立，而记号 $p > q$ 表示存在 $1 \leq j \leq r$ 使得 $p_j > q_j$。令 $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r\}$ 表示$\mathbb{C}^r$ 的标准有序基。注意，在 $\mathbb{C}^r$ 的标准有序基的所有元素中，只有 ε_1 是签名。$\mathbb{K}$ 在 $\mathcal{P}(Z)$ 上的作用不是不可约的。事实上，$\mathcal{P}(Z)$ 可分解为若干两两 $\mathbb{K}$ 不等价的不可约子空间 $\mathcal{P}_s$，其中 s 是一个签名。$\mathcal{P}(Z)$ 的这种分解在 [17, 第 3] 节中称为 Peter-Weyl 分解（另见 [1, 第 21] 页）。

2020 数学主题分类。主要分类 47A13、47A45、46E22；次要分类 47B32、32A10。关键词与短语。Cartan 域、特征函数、完全 Nevanlinna-Pick 性质。ˇ第一作者获得了 GACR 项目资助（编号 25-18042S）以及 RVO 对 ICO 67985840 的资助。第三作者的研究工作获得了科学技术部（DST）的资助，资助形式为 Inspire 教师奖学金（参考编号：DST/INSPIRE/04/2023/001530）。

关于 Fischer-Fock 内积的空间 $\mathcal{P}_s$

$$\langle p, q\rangle_F := \frac{1}{\pi^d}\int_{\mathbb{C}^d} p(z)\overline{q(z)}e^{-|z|^2}dm(z)$$

是一个再生核希尔伯特空间，其中 $dm(z)$ 是勒贝格测度。 $\mathcal{P}_s$ 的再生核记为 K_s。令 $\mathcal{P}_s$ 对每个 $s \in \mathbb{N}_0^r$. 的维数为 d_s。本文中，我们固定 $\mathcal{P}_s$ 的一组正交归一基$\{\psi_\alpha^s(z)\}_{\alpha=1}^{d_s}$，其相对于 Fischer-Fock 内积定义。于是，再生核 K_s 可表示为

$$K_{\underline{s}}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{z})\overline{\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w})}. \tag{1.1}$$

若非负定核 $K : \Omega \times\Omega \to \mathbb{C}$ 对每个 $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in \Omega$ 和 $k \in \mathbb{K}$ 都满足 $K(k \cdot \boldsymbol{z}, k \cdot \boldsymbol{w}) = K(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})$，则称其为 $\mathbb{K}$-不变核。注意，对于每个签名 s， $\mathcal{P}_s$ 的再生核 K_s 是一个 $\mathbb{K}$-不变核。若 $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ 是一个 $\mathbb{K}$-不变核，且关于 $\boldsymbol{z}$ 和 $\bar{\boldsymbol{w}}$ 全纯，则存在一个非负实数序列 $\{a_s\}_{s\in\vec{\mathbb{N}}_0^r}$，使得

$$K(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = \sum_{\underline{s}\in\vec{\mathbb{N}}_0^r} a_{\underline{s}} K_{\underline{s}}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}),$$

对每个 $\boldsymbol{z}$， $\boldsymbol{w} \in \Omega$（参见 [1]）。本文中，我们考虑 Ω 上的非负定核 $\times\Omega$，它们关于 $\boldsymbol{z}$ 和 $\bar{\boldsymbol{w}}$是全纯的。特别地，若 Ω 是 $\mathbb{B}_d$中的欧几里得单位球 $\mathbb{C}^d$，且 $\mathbb{K}$ 是所有 $d \times d$ 酉矩阵 $\mathcal{U}(d)$ 构成的群，则

$$K(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}\rangle^n, \ \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{B}_d,$$

其中 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 是一个非负实数序列。过去几十年来， $\mathcal{U}(d)$-不变核和 $\mathbb{K}$-不变核得到了广泛研究（[1, 7, 10, 12]）。

若非负定核 $K : \Omega \times\Omega \to \mathbb{C}$ 满足：对每个 $z \in \Omega$， $K(z, z_0) = 1$，则称其在 Ω 中的点 z_0 处归一化。注意，若 $K(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = \sum_{s\in\vec{\mathbb{N}}_0^r} a_s K_s(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})$ $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in \Omega$是一个 $\mathbb{K}$-不变核，则对每个 $\boldsymbol{z} \in \Omega$， $K(\boldsymbol{z}, 0) = a_0$。因此，$\frac{1}{a_0}K$ 是一个在 $\mathbf{0} \in \Omega$ 处归一化的$\mathbb{K}$-不变核。本文中，我们始终讨论归一化的 $\mathbb{K}$-不变核，即定义在 Ω 上且满足 $a_0 = 1$的核 $K = \sum_{s\in\vec{\mathbb{N}}_0^r} a_s K_s$。我们还假设，对每个签名 s， $a_s > 0$ 均成立。

给定一个非负定核 $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$，Moore-Aronszajn 定理指出，存在一个希尔伯特空间 H_K，使得 K 是 H_K的再生核。本文中， H_K 表示再生核为 K的希尔伯特空间。</style}我们的目标是对具有完全 Nevanlinna-Pick 性质的 $\mathbb{K}$-不变核进行分类。下面回顾再生核的完全 Nevanlinna-Pick 性质的定义。

定义 1.1. 设 X 是 $\mathbb{C}^d$的一个子集。若再生核 $K : X \times X \to \mathbb{C}$ 具有 *Nevanlinna-Pick* 性质，则称其具有该性质；也就是说，只要 $\boldsymbol{z}_1$、……、 $\boldsymbol{z}_N \in X$和 W_1、……、 W_N是满足以下条件的 $p \times p$ 矩阵：

$$\left(\left((I - W_i W_j^*)K(\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{z}_j)\right)\right)_{i,j=1}^N,$$

是非负定的，则存在一个乘子 ϕ，属于乘子代数 $\mathcal{M}ult(H_K\otimes\mathbb{C}^p, H_K\otimes\mathbb{C}^p)$ 的闭单位球，使得 $\phi(\boldsymbol{z}_i) = W_i, i = 1, \ldots, N$. 如果核 K具有完全 *Nevanlinna-Pick* 性质，则称其具有 $M_{p\times p}$ *Nevanlinna-Pick*

性质，且对所有正整数 $p.$ 均成立。具有完全 *Nevanlinna-Pick* 性质的再生核称为完全 *Nevanlinna-Pick (CNP)* 核。

设 $K_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{w}) = \sum_{n\geq 0} a_n\langle \boldsymbol{z},\ \boldsymbol{w}\rangle^n$ 是定义在 $\mathbb{B}_d$ 上的非零 $\mathcal{U}(d)$-不变核，且 ˆ 每个 a_n 均为正数。那么，存在一个实数序列 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ 使得

$$\frac{1}{K_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})} = \sum_{n\geq 0} \hat{b}_n\langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\rangle^n, \tag{1.2}$$

对于每个 $\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{w}\in\mathbb{B}_d$。方程（1.2）是卡卢扎引理的主要组成部分之一，该引理给出了 $K_{\mathcal{U}}$ 为 CNP 的必要条件（参见 [5]）。卡卢扎引理以 Theodor Kaluza 命名，他曾用一个复变量的幂级数证明了该引理 [13]。

定理 1.2。设 $\{c_n\}_{n\geq 0}$ 是一个正实数序列，满足 $c_0 = 1$，且 M 是一个正实数。若实数序列 $\left\{\frac{c_n}{c_{n-1}}:\ \ n>0\right\}$ 单调不减且有上界 M，则 $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ 对所有 $z\in B(\mathbf{0},\ 1/M) := \{z\in\mathbb{C}:\ \ |z|<1/M\}$ 均收敛，并且存在一个非负实数序列 $\{q_n\}_{n>0}$使得

$$1-\frac{1}{f(z)} = \sum_{n\geq 1} q_n z^n,\ \ z\in B(0,1/M).$$

若对于任意两个不同的点 $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\in\Omega,\ \ K(\cdot,\boldsymbol{w}_1)$ 和 $K(\cdot,\boldsymbol{w}_2)$ 线性无关，且对于每个 $\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{w}\in\Omega,\ \ K(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\neq 0$，则称核 $K:\Omega\times\Omega\to\mathbb{C}$ 不可约。具有 CNP 性质的不可约核 $K:\Omega\times\Omega\to\mathbb{C}$ 的一个著名刻画是 $1-\frac{1}{K}$ 必须是非负定的（参见 [5, 定理 7.28]）。结合这一刻画与定理 1.2，我们得到具有 CNP 性质的 a $\mathcal{U}(d)$-不变核的以下必要条件（参见 [5,引理 7.38]）。

引理 1.3. 若不可约的 $\mathcal{U}(d)$-不变核 $K_{\mathcal{U}} = \sum_{n\geq 0} a_n\langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\rangle^n$ 定义在 $\mathbb{B}_d$ 上，且对每个 n 都满足 $a_n>0$，则该核具有 *CNP* 性质，当且仅当

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

对所有 $n\geq 1$ 都成立。

设 $K=\sum_{s\in\vec{\mathbb{N}}_0^r} a_s K_s$ 是 Ω 上一个 $\mathbb{K}$-不变核。在第 2 节中，我们首先得到一个实数序列 $\{b_s\}_{s\in\vec{\mathbb{N}}_0^r}$，使得

$$\frac{1}{K(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})} = \sum_{\underline{s}\in\vec{\mathbb{N}}_0^r} \hat{b}_{\underline{s}} K_{\underline{s}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) \tag{1.3}$$

对每个 $\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{w}\in\Omega$。假设 K 是一个不可约核，我们将引理 1.3 推广，以找到 K 成为 CNP 核的一个必要条件，该条件由系数 $a_s,\ \ s\in\mathbb{N}_0^r$ 给出。我们还给出了 $\mathbb{K}$- 不变 CNP 核的例子，使得相应希尔伯特空间上的坐标函数乘法算子有界。

给定希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的压缩算子 T，令 $D_T := (I-T^*T)^{\frac{1}{2}}$, $D_{T^*} := (I-TT^*)^{\frac{1}{2}}$，以及 $\mathcal{D}_T := \overline{\text{Ran}}\ D_T$, $\mathcal{D}_{T^*} := \overline{\text{Ran}}\ D_{T^*}$。算子 D_T, D_{T^*} 称为亏算子，空间 $\mathcal{D}_T, \mathcal{D}_{T^*}$ 称为 T 的亏空间。算子值全纯函数 $\theta_T:\ \mathbb{D}\to\mathcal{B}(\mathcal{D}_T,\ \mathcal{D}_{T^*})$，定义为

$$\theta_T(z) = \left(-T+zD_{T^*}(I-zT^*)^{-1}D_T\right)|_{\mathcal{D}_T},\ \ z\in\mathbb{D},$$

称为 T 的特征函数。经典 Sz.-Nagy–Foias 理论指出，两个完全非酉（cnu）压缩算子 T_1 和 T_2 酉等价，当且仅当特征函数 θ_{T_1} 和 θ_{T_2} 相同（即存在两个酉算子$u\colon \mathcal{D}_{T_1} \to \mathcal{D}_{T_2}$和 $v\colon \mathcal{D}_{T_1^*} \to \mathcal{D}_{T_2^*}$使得 $v\theta_{T_1}(z) = \theta_{T_2}(z)u, \quad z \in \mathbb{D}$）（参见[15,定理 3。4]）。

注意，当且仅当 $\frac{1}{\mathbb{S}}(T, T^*) := I - TT^*$是正算子时，$T$是压缩算子，其中 $\mathbb{S}\colon \mathbb{D}\times\mathbb{D} \to \mathbb{C}$是 Szeg˝o 核 $\mathbb{S}(z, w) = \frac{1}{1-z\bar{w}}$，$z, w \in \mathbb{D}$。令 $K_D\colon \mathbb{B}_d\times\mathbb{B}_d \to \mathbb{C}$由 $K_D(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = \frac{1}{1-\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}\rangle}$，$\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{B}_d$定义。核 K_D称为 Drury-Arveson 核。交换算子组 $\boldsymbol{T} = (T_1, \ldots, T_d)$ 是一个 $\frac{1}{K_D}$- 压缩算子，当且仅当 $\frac{1}{K_D}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^*) = I - \sum_{i=1}^d T_i T_i^*$ 是正算子。这样的算子组称为行压缩算子。对于交换行压缩算子 $\boldsymbol{T}$，其特征函数$\theta_{\boldsymbol{T}}\colon \mathbb{B}_d \to \mathcal{B}(\mathcal{D}_{\boldsymbol{T}}, \mathcal{D}_{\boldsymbol{T}^*})$的定义方式与单个压缩算子的经典特征函数类似，其中 $\mathcal{D}_{\boldsymbol{T}}$ 和 $\mathcal{D}_{\boldsymbol{T}^*}$ 是按通常方式引入的亏空间。纯交换行压缩算子 $\boldsymbol{T}$的特征函数决定了 $\boldsymbol{T}$ 的酉等价类（参见 [8]）。

给定定义在 $\mathbb{B}_d$ 上的非零 $\mathcal{U}(d)$-不变核 $K_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = \sum_{n\geq 0} a_n \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}\rangle^n$，以及希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的一个可交换算子 d-元组 $\boldsymbol{T} = (T_1, \ldots, T_d)$，$\boldsymbol{T}$ 的 $\frac{1}{K_{\mathcal{U}}}$-压缩性可按照类似于由方程 (1.2)（[7, 定义 1.1]）所定义的 $\frac{1}{K_D}$-压缩算子的方式来定义。通过考察[7]中 $\frac{1}{K_{\mathcal{U}}}$- 压缩算子的特征函数是否存在，得到了 $\mathbb{B}_d$ 上 $\mathcal{U}(d)$- 不变 CNP 核的刻画。特别地，如果 $K_{\mathcal{U}}$ 也具有 CNP 性质，那么在 [7] 的最后一节中给出了 $\frac{1}{K_{\mathcal{U}}}$-压缩算子的特征函数的一种显式构造，并证明了纯 $\frac{1}{K_{\mathcal{U}}}$-压缩算子的特征函数决定了其酉等价类，见 [7]。

设 $K = \sum_{s\in\mathbb{N}_0^r} a_s K_s$ 是 Ω 上的 $\mathbb{K}$-不变核。在第 3 节中，我们对希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的交换算子组 $\boldsymbol{T} \equiv (T_1, \ldots, T_d)$ 定义了类似的 $\frac{1}{K}$- 压缩性。本节的主要目标是根据 $\frac{1}{K}$ -压缩算子的特征函数是否存在，给出 Ω 上的 $\mathbb{K}$-不变核具有 CNP 性质的充要条件。在最后一节中，我们假设 K 也具有 CNP 性质。随后，我们为某些 $\mathbb{K}$-不变核显式构造 $\boldsymbol{T}$ 的 $\frac{1}{K}$ -压缩算子的特征函数。我们还证明，对于这类核，纯 $\frac{1}{K}$-压缩算子的酉等价类由其特征函数决定。

2。 A generalization of Kaluza lemma for $\mathbb{K}$-invariant kernels

本节将给出一个判据，说明如何通过序列 $\{a_s\}_{s\geq 0}$ 判断 Ω 上的非零 $\mathbb{K}$-不变核 $K = \sum_{\underline{s}} a_{\underline{s}} K_{\underline{s}}$ 是否具有 CNP 性质。本节首先给出一个收敛判据，用于判断定义在 $\Omega\times\Omega$ 上的 $\mathbb{K}$-不变函数是否收敛；该函数关于前 d 个变量全纯，关于后 d 个变量反全纯。

命题 2.1。设

$$F(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) := \sum_{\underline{s}} c_{\underline{s}} K_{\underline{s}}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}), \tag{2.4}$$

be Ω 上的一个 $\mathbb{K}$-不变函数，$\Omega\times\Omega$ 且 e 表示 Ω 的任意极大三重幂等元 .

(i) 如果 F 在 Ω 的闭包上绝对收敛 $\times\,\Omega$ 且模不超过 1，那么

$$\sum_{s} |c_s| K_s(e,e) \le 1. \tag{2.5}$$

反之，若 (2.5) 成立，则 F 在$\Omega\times\Omega$的闭包上一致绝对收敛，且其模在该处不超过 1 。

(ii) 若 F 在 $\Omega\times\Omega$ 上绝对收敛，则

$$S(t) := \sum_{s} |c_s| K_s(te,te) < \infty, \tag{2.6}$$

对所有 $t\in(0,1)$均成立。反之，若 (2.6) 成立，则 F 在$\Omega\times\Omega$的紧子集上一致绝对收敛。

*Pr*证明。 (i) 取 $z=w=e$ 可知，关于 (2.4) 的假设蕴含 (2.5).

对于逆向部分，回顾一下：在 Ω 上全纯且在其闭包上连续的函数会在希洛夫边界上取得其模的最大值，而 Ω 的希洛夫边界恰好是极大三重幂等元 $\{ke\colon\ k\in\mathbb{K}\}$ 的轨道 e (见 [1])。因此

$$|K_s(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})| \le |K_s(k_1e,k_2e)|$$

对所有 $\boldsymbol{z}$， $\boldsymbol{w}\in\overline{\Omega}$，以及某个 k_1， $k_2\in\mathbb{K}$。现在由柯西-施瓦茨不等式

$$|K_s(k_1e,k_2e)|^2 \le K_s(k_1e,k_1e)K_s(k_2e,k_2e) = K_s(e,e)^2$$

由于 K_s 的 $\mathbb{K}$-不变性。因此，

$$\sum_{s} |c_s K_s(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})| \le \sum_{s} |c_s| K_s(e,e)\ \forall \boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\in\overline{\Omega},$$

结论由此得证。

(ii) 设 $t\in(0,1)$。假设 $M_t>0$ 满足：对所有 $\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\in\Omega$， $|F(t\boldsymbol{z},t\boldsymbol{w})|\le M_t$。现在，将 (i) 应用于函数 $F(t\boldsymbol{z},t\boldsymbol{w})/M_t$。 □

下面的命题给出了 Ω 上关于 $\times\Omega$、在 $\boldsymbol{z},\bar{\boldsymbol{w}}$ 中全纯的 $\mathbb{K}$-不变函数的显式描述。证明仿照命题 [3, Proposition 2] 的证明。

命题 2.2。 若 $F(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})$ 是定义在 $\Omega\times\Omega$ 上的 $\mathbb{K}$-不变函数，且在 $(\boldsymbol{z},\bar{\boldsymbol{w}})$ 中全纯，则它有如下展开式

$$F(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) = \sum_{s} c_s K_s(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) \tag{2.7}$$

其中存在 c_s 满足 (2.6)。

证明。 首先假设 F连续延拓至$\Omega\times\Omega$的边界，并固定一个极大三重幂等元 e。全纯函数 $F(\boldsymbol{z},e) =: F_e(\boldsymbol{z})$有界，因而属于$\Omega$上通常的（无权）Bergman空间，对此 $\{\psi_\alpha^s/\sqrt{(p)_s}\}_{\alpha,s}$（$p$为$\Omega$的属）构成一个正交归一基。因此傅里叶分解

$$F_e = \sum_{s}\sum_{\alpha} \frac{\langle F_e,\psi_\alpha^s\rangle}{(p)_s}\psi_\alpha^s =: \sum_{s} f_s$$

在 $L^2(\Omega)$ 中收敛，并且根据再生核 [4], 的性质，在 Ω 的紧子集上一致且绝对收敛。若 $\mathbb{L}$ 表示 e 在 $\mathbb{K}$中的稳定子群，则对任意 $l\in\mathbb{L}$，由 $\mathbb{K}$-不变性可得， $F_e(l\boldsymbol{z}) = F(l\boldsymbol{z},e) = F(\boldsymbol{z},l^{-1}e) = F(\boldsymbol{z},e) = F_e(\boldsymbol{z})$；换言之， F_e ，因此每个 f_s 都是 $\mathbb{L}$-不变的。然而， $\mathcal{P}_s$中除相差常数倍外，唯一的$\mathbb{L}$-不变元素是 $K_s(\cdot,e)$ [11, 定理 2.1]。因此

$$F(\boldsymbol{z},e)=\sum_{\underline{s}} c_{\underline{s}}K_{\underline{s}}(\boldsymbol{z},e)\ \forall \boldsymbol{z}\in\Omega,$$

在紧子集上一致收敛。由于 F 和 K_s都具有 $\mathbb{K}$-不变性，此等式对 $F(\boldsymbol{z},ke)=F(k^{-1}\boldsymbol{z},e)$ 也仍然成立，且对 Ω 的紧子集中的 $\boldsymbol{z}$ 以及 $k\in\mathbb{K}$ 均一致。对于每个固定的 $\boldsymbol{z}$，关于 $\boldsymbol{w}$ 的反全纯函数 $F(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})$ 和 $K_s(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})$ 在希洛夫边界 $\{ke:\ k\in\mathbb{K}\}$ 上取得其最大模。因此，仿照命题 2.1 证明中的相同论证可知，(2.7) 成立，且当 $\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}$ 取遍 Ω 的紧子集时，收敛绝对且一致。（事实上，$\boldsymbol{w}$ 甚至可以取在 Ω 的闭包中。）由命题 2.1 的 (ii) 部分，结论得证。

对于一般的 F（即不一定连续延拓到边界），对每个 $t\in(0,1)$，将上述论证应用于 $F(t\boldsymbol{z},t\boldsymbol{w})$。□

特别地，上一个命题适用于任意 $\mathbb{K}$-不变核 K下的 $F=K$，也适用于具有任意此类 K 且另外无零点的 $F=1-1/K$。若 $K(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})=\sum_s a_sK_s(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})$ 是 $\Omega\times\Omega$ 上的- $\mathbb{K}$-不变核，则存在一个实数序列 $\{b_{\underline{s}}\}$，使得 $b_0=0$，且 $1-\frac{1}{K}=\sum_{s>0}b_sK_s$。

推论 2.3。任何与上一个命题相同类型的 F 都满足

$$F(t\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})=F(\boldsymbol{z},t\boldsymbol{w})\ \forall \boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\in\Omega$$

对任意 $0<t<1$ 均成立。特别地，对于每个 $\boldsymbol{w}\in\Omega$，$F(\cdot,\boldsymbol{w})$ 可延拓为一个在Ω的闭包的某个邻域内全纯的函数。

Proof. 对于每个 s 以及任意 $0<t<1$、$K_s(t\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})$、$=t^{|s|}K_s(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})$ 和 $=K_s(\boldsymbol{z},t\boldsymbol{w})$. □

现在，我们已经具备了所有必要工具，可以根据序列 $\{a_s\}_{s\geq0}$，为 Ω 上的一个非零 $\mathbb{K}$-不变核 $K=\sum_s a_sK_s$ 是否具有 CNP 性质制定判据。首先注意到，每个非零 $\mathbb{K}$-不变核都是不可约的。

引理 2.4。设 $K=\sum_s a_sK_s$ 是 Ω 上的一个非零 $\mathbb{K}$-不变核。则 K 是不可约的。

证明。注意，只需证明对于 Ω 中任意两个不同的点 $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\in$，$K(\cdot,\boldsymbol{w}_1)$ 和 $K(\cdot,\boldsymbol{w}_2)$是线性无关的。设 $\boldsymbol{w}_1$ 和 $\boldsymbol{w}_2$ 是 Ω 中两个不同的元素。假设 $\boldsymbol{w}_j(i)$，$j=1,2,\ 1\leq i\leq r,$ 表示点 $\boldsymbol{w}_j$的第 i 个分量。假设存在一个 $c\in\mathbb{C}$ 使得

$$K(\cdot,\boldsymbol{w}_1)=cK(\cdot,\boldsymbol{w}_2). \tag{2.8}$$

在方程（2.8）两边代入 $\mathbf{0}\in\Omega$，可得 $c=1$。将 $c=1$以及 K 的表达式代入方程（2.8），得到

$$\begin{aligned}0&=\sum_{\underline{s}\in\vec{\mathbb{N}}_0^r,|\underline{s}|\geq1}a_{\underline{s}}(K_{\underline{s}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w_1})-K_{\underline{s}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w_2}))\\&=a_{\varepsilon_1}\langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w_2}\rangle+\sum_{\underline{s}\in\vec{\mathbb{N}}_0^r,|\underline{s}|\geq2}a_{\underline{s}}\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{z})(\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w_1})-\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w_2})),\ \boldsymbol{z}\in\Omega.\end{aligned} \tag{2.9}$$

回忆 $a_{\varepsilon_1}\neq0$。因此，对方程（2.9）两边关于第 i个变量求导，然后在 $\boldsymbol{z}=\mathbf{0}$处取值，可得 $\boldsymbol{w}_1(i)=\boldsymbol{w}_2(i)$。这证明了 $\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{w}_2$。因此，$K$ 是不可约的。□

今后，我们只考虑 Ω 上非零的 $\mathbb{K}$-不变核。下面的推论直接由命题2.2 得出，该命题给出了一个判据，用以判断$\mathbb{K}$-不变核是否具有 CNP 性质。

推论 2.5。 非零的 $\mathbb{K}$-不变核 $K\colon \Omega\times\Omega\to\mathbb{C}$ 是 *CNP*，当且仅当存在一个非负实数序列 $\{b_s\}_{s>0}$ 使得

$$1-\frac{1}{K(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})}=\sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}}K_{\underline{s}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) \tag{2.10}$$

对每个 $\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\in\Omega$均成立。

证明。 若 K 是一个非零 $\mathbb{K}$-不变核，则由命题 $\{b_s\}_{s>0}$ 2.2 可知，实数序列的存在性 2.2。注意，由引理 K 可知，其是不可约的，2.4。根据 [5, 定理 7，28], 可知 K 是 CNP 核，当且仅当 $1-\frac{1}{K}$ 是非负定的。此外，注意到 $\sum_{s>0} b_sK_s$ 是非负定核，当且仅当每个 $b_s\geq 0$ （参见 [11]）。□

注 2.6。 最后一个推论甚至对一般的非零 $\mathbb{K}$-不变函数 K 也成立，即不必假设 K（$\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}$） 是非负定核——非负定性会自动成立。事实上，若 $1-1/K=:L$ 是非负定的，则

$$K=\frac{1}{1-L}=1+L+L^2+L^3+\dots$$

也必须是非负定的：由 [4, 第 I.8], 可知，任意次幂 $L^k, k=0,1,2,\dots$ 都是非负定核，因此这些次幂的任意有限和 [4, 第 I.6], 也是非负定核，最后，它们的递增极限 [4, 第 I.9.B 节] 也是如此。（对于最后一点，注意到 K 非零意味着，对于所有 $\boldsymbol{z}\in\Omega$， $0\leq L(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})<1$。）

注意，单位球 $\mathbb{B}_d$ 上的非零酉不变核 $K_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{w})=\sum_{n\geq 0}a_n\langle \boldsymbol{z},\ \boldsymbol{w}\rangle^n$ 具有 CNP 性质，当且仅当

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

对每个 $n\geq 1$都成立。这就是经典的卡卢扎引理 [5, 引理 7.38]。在下面的定理中，我们推广卡卢扎引理，给出一个判据，刻画 Ω 上的 $\mathbb{K}$-不变核 $K=\sum_{s\geq 0}a_sK_s$ 何时具有 CNP 性质，该判据以序列 $\{a_s\}_{s\geq 0}$为依据。

定理 2.7 （广义卡卢扎引理）。 设 $K=\sum a_sK_s$ 是一个 $\mathbb{K}$-不变核。若对于每个长度为 $k\geq 1$ 的签名 s_0，以下条件成立，则 K 是 *CNP* 核

$$\sum_{\tilde{\underline{s}}_0\in I(\underline{s}_0)}\sum_{|\underline{\tilde{p}}|=k-1-|\underline{q}|}\frac{a_{\underline{\tilde{p}}}}{a_{\tilde{\underline{s}}_0}}c^{\tilde{\underline{s}}_0}_{\underline{\tilde{p}},\underline{q}}\geq|I(\underline{s}_0)|\sum_{|\underline{p}|=k-|\underline{q}|}\frac{a_{\underline{p}}}{a_{\underline{s}_0}}c^{\underline{s}_0}_{\underline{p},\underline{q}}, \tag{2.11}$$

其中，$\underline{q}$ 是任意满足 $1\leq|q|\leq k-1$、$I(s_0)=\{s_0-\varepsilon_i\colon\ s_0-\varepsilon_i$ 是一个签名$\}$，而 $|I(s_0)|$是集合 $I(s_0)$ 的基数。

证明。 由 [5, 定理 7。28], K 是 CNP 核，当且仅当 $1-\frac{1}{K}$ 是非负定的。由命题 2.2 可知，存在一个实数序列$\{\hat{b}_s\}_{s\geq 0}$ 满足 $\hat{b}_0=1$，使得 $\frac{1}{K}=\sum\hat{b}_sK_s$。这意味着

$$1-\frac{1}{K}=-\sum_{\underline{s}>\underline{0}}\hat{b}_{\underline{s}}K_{\underline{s}}.$$

因此，如果每个 $\hat{}\, b_s$，$s > 0$ 都是非正实数，那么 $1 - \frac{1}{K}$ 是非负定的。$\hat{}$ 因此，存在一个非正实数序列 $\{b_s\}_{s>0}$ 使得 $\frac{1}{K} = 1 + \sum_{s>0} \hat{}\, b_s K_s$，这等价于 K 是 CNP 核这一事实。因此，要证明 $\hat{}\,\hat{}$ 该定理，我们必须证明，存在一个序列 $\{b_s\}_{s\geq 0}$ 满足 $b_0 = 1$ 且 $\hat{}\, b_s \leq 0$，$s > 0$，使得方程

$$\left(\sum_{s\geq 0} a_s K_s\right)\left(\sum_{s\geq 0} \hat{b}_s K_s\right) = 1 \tag{2.12}$$

成立。比较 K_{ε_1} 在方程（2.12）两边的系数，可得

$$\hat{b}_{\varepsilon_1} = -a_{\varepsilon_1}. \tag{2.13}$$

对于任意两个签名 s 和 $\tilde{s}$，注意到

$$K_s K_{\tilde{s}} = \sum_{|p|=|s|+|\tilde{s}|} c^p_{s,\tilde{s}} K_p, \tag{2.14}$$

其中系数 $c^p_{s,\tilde{s}} \geq 0$、$p \geq s$ 和 $p \geq \tilde{s}$（参见 [2, 方程 2.9]）。

令 $k \geq 1$。设 s_0 是长度为 k 的签名。比较 K_{s_0} 在方程（2.12）两边的系数，得到

$$\hat{b}_{s_0} a_\emptyset + \sum_{0<|q|<k} \left(\sum_{|p|=k-|q|} a_p c^{s_0}_{p,q}\right) \hat{b}_q + \hat{b}_\emptyset a_{s_0} = 0. \tag{2.15}$$

注意，对每个 $|\tilde{s}_0| = k-1$，$\tilde{s}_0 \in I(s_0)$。因此，对每个 $\tilde{s}_0 \in I(s_0)$，比较 $K_{\tilde{s}_0}$ 在方程（2.12）两边的系数，可得

$$\hat{b}_{\tilde{s}_0} a_\emptyset + \sum_{0<|q|<k-1} \left(\sum_{|\tilde{p}|=k-1-|q|} a_{\tilde{p}} c^{\tilde{s}_0}_{\tilde{p},q}\right) \hat{b}_q + \hat{b}_\emptyset a_{\tilde{s}_0} = 0. \tag{2.16}$$

将方程（2.16）乘以 $|I^{a_{s_0}}_{s_0}()|a_{\tilde{s}_0}$，对所有 $\tilde{s}_0 \in I(s_0)$ 求和，然后从方程（2.15）中减去，得到

$$\hat{b}_{s_0} a_\emptyset = \sum_{0<|q|\leq k-1} \left[\sum_{\tilde{s}_0 \in I(s_0)} \left(\sum_{|\tilde{p}|=k-1-|q|} \frac{a_{\tilde{p}} a_{s_0}}{|I(s_0)| a_{\tilde{s}_0}} c^{\tilde{s}_0}_{\tilde{p},q}\right) - \sum_{|p|=k-|q|} a_p c^{s_0}_{p,q}\right] \hat{b}_q. \tag{2.17}$$

因此，由方程（2.17）可知 $b_{s_0} \leq 0$，若方程（2.11）对每个签名 q 且满足 $1 \leq |q| \leq k-1$，则 □

注2.8。 暂记

$$A^s_q := \sum_p \frac{a_p}{a_s} c^s_{p,q}$$

（注意，$c^s_{p,-q}$ 仅在 $|s| = |p| + |q|$ 时非零，因此最后一个和自动为有限和），方程（2.11）可改写为

$$\frac{1}{I(s_0)} \sum_{\tilde{s}_0 \in I(s_0)} A^{s_0}_q \geq A^{s_0}_q, forall\ |q| \geq 1.$$

也就是说，$A^{s_0}_q$ 必须小于或等于相同量在 $I(s_0$ 上的平均值 ）.

当Ω 为球时，$\underline{I}(s_0)$ 变为单点集，A_q^s 则恰好变为 a_{s-q}/a_s，与通常的卡卢扎引理的联系便显而易见。

2.1. 例子。ΩA²Ω 上所有关于勒贝格测度 $dm(z)$ 可积的平方可积全纯函数所构成的空间称为 Ω 上的 Bergman 空间。它是一个再生核希尔伯特空间。$\mathbb{A}^2(\Omega)$ 的再生核（也称为伯格曼核）为 $B(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) = \Delta(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})^{-p}$，其中 $p = 2+a(r-1)+b$ 称为域 Ω 的属（参见 [19, 定理 2.9.8]）。这里，$\Delta(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})$ 是 Ω ×Ω 上的 $\mathbb{K}$-不变半解析多项式，称为约当三重行列式。

此外，对于 $\nu \in \mathcal{W}_\Omega := \{0,\ldots,\frac{a}{2}(r-1)\} \cup (\frac{a}{2}(r-1)\ \infty)$，由下式定义的半解析函数$K^{(\nu)}$: Ω ×Ω $\to \mathbb{C}$

$$K^{(\nu)}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) := \Delta(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})^{-\nu} = \sum_{\underline{s}} (\nu)_{\underline{s}} K_{\underline{s}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}), \quad \boldsymbol{z},\boldsymbol{w} \in \Omega, \tag{2.18}$$

是非负定的（见 [11, 推论 5.2] ）。这里，$(\nu)_s$ 表示广义波赫哈默符号

$$(\nu)_{\underline{s}} := \prod_{j=1}^{r}\left(\nu - \frac{a}{2}(j-1)\right)_{s_j} = \prod_{j=1}^{r}\prod_{l=1}^{s_j}\left(\nu - \frac{a}{2}(j-1) + l - 1\right).$$

因此，根据 Moore-Aronszajn 定理，$K^{(\nu)}$ 确定了一个希尔伯特空间 $\mathbb{A}^{(\nu)}(\Omega)$，称为加权伯格曼空间。如果 $\nu = \frac{d}{r}$ 且 $\nu = \frac{a}{2}(r-1) + \frac{d}{r} + 1$，那么加权伯格曼空间 $\mathbb{A}^{(\nu)}(\Omega)$ 分别与 Ω 的希洛夫边界上的哈代空间和经典伯格曼空间重合。

命题 2.9。设Ω 是秩为 $r > 1$ 的嘉当域。对于任意 $\nu \in \mathcal{W}_\Omega$，加权伯格曼核 $K^{(\nu)}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) := \Delta(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})^{-\nu}$ 是 *CNP* 核，当且仅当 $\nu = 0$。

证明。根据上文回顾的判据，$\Delta(\mathbf{z},\mathbf{w})^{-\nu}$ 是 CNP 核等价于$1 - \Delta(\mathbf{z},\mathbf{w})^{\nu}$ 是半正定核。根据 Faraut-Koranyi 二项式公式（2.18），这又等价于

$$(-\nu)_{\underline{s}} \le 0 \qquad \forall |\underline{s}| \ge 1.$$

对于 $\underline{s} = (1, 0, \ldots\ldots, 0)$ 和 $\underline{s} = (1, 1, 0, \ldots\ldots, 0)$，这变为

$$-\nu \le 0 \quad \text{and} \quad (-\nu)(-\nu - \tfrac{a}{2}) \le 0,$$

分别地。前者表示 $\nu \ge 0$，而后者表示 $-\frac{a}{2} \le \nu \le 0$（注意，特征重数 a 始终是非负整数）。因此，$\nu = 0$ 是唯一可能的解。□

因此，自然会问，在 Ω 上是否存在任何 $\mathbb{K}$-不变的 CNP 核。事实上，存在 $\mathbb{K}$-不变的 CNP 核。下面我们给出这类核的例子。

设 $\{\hat{b}_s\}_{s\ge 0}$ 是一个实数序列，满足 $\hat{b}_0 = 1$。假设级数 $L = \sum_{s\ge 0} b_s K_s$ 在 $\mathbb{B}_R \times \mathbb{B}_R$ 的紧子集上一致收敛，并且在 $\mathbb{B}_R \times \mathbb{B}_R$ 上处处非零，其中 $\mathbb{B}_R$ 是 $\mathbb{C}^d$中以 0 为中心、半径为 $R > 0$ 的开球。对于 $c = \frac{r}{R}$，函数 $L(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = \tilde{L}(c\boldsymbol{z}, c\boldsymbol{w})$，$\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{B}_R$，定义了一个在 $\boldsymbol{z}$ 上全纯、在 $\boldsymbol{w}$ 上反全纯的函数。另请注意，L

非零 在上处处为 $\mathbb{B}_r$。由方程（1.1）可知，对于每个签名s,

$$K_{\underline{s}} = \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}} \overline{\psi_\alpha^{\underline{s}}},$$

其中每个 ψ_α^s 都是次数为 $|s|$.的齐次多项式。因此可得

$$L(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = \sum_{\underline{s} \geq \underline{0}} \hat{b}_{\underline{s}} c^{2|\underline{s}|} K_{\underline{s}}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}), \ \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{B}_r.$$

利用数学归纳法与式（2.15），我们得到一列正实数 $\{a_s\}_{s\geq 0}$， $a_0 = 1$，使得式（2.12）成立。事实上，对每一个 $s_0 > 0$，式（2.15）都给出一个正实数a_{s_0}。因此，

$$K := \frac{1}{L} = \sum_{\underline{s} \geq \underline{0}} a_{\underline{s}} K_{\underline{s}}$$

是定义在 $\mathbb{B}_r$上的非负定核，特别是在Ω上。此外，由推论2.5可知 K 是CNP。

注 2.10. 事实上，所有在Ω 上的*CNP*核本质上都由上一例子中的构造产生。也就是说，设 $c_s \geq 0$ 满足

$$\sum_{|\underline{s}|>0} c_{\underline{s}} K_{\underline{s}}(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \leq 1$$

其中 $\mathbf{e}$是 Ω 的希洛夫边界上的任意元素（极大三重幂等元，见 [1]; $K_s(\mathbf{e},\mathbf{e})$ 的值与 $\mathbf{e}$ 的选取无关，并且有一个用签名 s 和域不变量 r, a 以及 b表示的显式公式，见 [11, 定理 3。4]）。令

$$L := \sum_{|\underline{s}|>0} c_{\underline{s}} K_{\underline{s}},$$

于是我们有 $0 \leq L(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) < 1$ 对所有 $\boldsymbol{z} \in \Omega$均成立。柯西-施瓦茨不等式$|K_s(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})|^2 \leq K_s(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) K_s(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})$ 由此表明，L 的级数在整个 $\Omega \times \Omega$上收敛，在此处模不超过 *1*，并定义了一个非负定核。由注 *2.6*,

$$K := \frac{1}{1 - L}$$

因此将是 *Ω* 上的 *CNP* 核。反向进行这一过程也表明，*Ω* 上的所有 *CNP* 核都以这种方式得到。

3. CNP property and Characteristic function

Ω 上的非零酉不变核 K 称为 $\mathbb{B}_d$ 上的容许核，如果由坐标函数构成的乘法算子元组 $\boldsymbol{M} = (M_{z_1}, \ldots, M_{z_d})$ 有界，且 $\boldsymbol{M}$ 是一个 $\frac{1}{K}$-压缩算子。在 [7], 中已证明，K 上的容许核 $\mathbb{B}_d$ 具有 CNP 性质，当且仅当每个纯 $\frac{1}{K}$-压缩算子都存在特征函数。本节中，给定 Ω 上的一个 $\mathbb{K}$-不变核，我们给出 $\frac{1}{K}$-压缩性的适当定义。本节的主要目标是根据每个纯 $\mathbb{K}$-压缩算子的特征函数是否存在，为 $\frac{1}{K}$-不变核具有 CNP 性质给出一个充要条件。

回顾一下，如果 $K = \sum_{s\geq 0} a_s K_s$ 是一个 $\mathbb{K}$-不变核，那么根据命题 2.2，存在一个实数序列 $\{b_s\}_{s>0}$ 使得 $1 - \frac{1}{K} = \sum_{s>0} b_s K_s$。除非

另有说明，下文中，对于 $\mathbb{K}$-不变核 $K=\sum_s a_s K_s$，$\{b_s\}_{s>0}$ 表示一个实数序列，使得 $1-\frac{1}{K}=\sum_{s>0} b_s K_s$。我们先给出几个必要的定义。

定义 3.1. *(i)* 设 $K=\sum_s a_s K_s$ 为一个非零的 $\mathbb{K}$-不变核。假设$\boldsymbol{T}$ 是一个由有界算子组成的交换 d-元组。假设级数

$$\sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})^*$$

强收敛。如果

$$I-\sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})^* \geq 0,$$

那么 $\boldsymbol{T}$ 称为 $\frac{1}{K}$-压缩算子。记

$$\Delta_{\boldsymbol{T}} := \left(I-\sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})^*\right)^{\frac{1}{2}},$$

$I-\sum_{s>0} b_s \sum_{\alpha=1}^{d_s} \psi_\alpha^s(\boldsymbol{T})\psi_\alpha^s(\boldsymbol{T})^*$的正平方根。

(ii) 若一个 $\frac{1}{K}$-压缩算子 $\boldsymbol{T}$满足 $\sum a_s \sum \psi_\alpha^s(\boldsymbol{T})\Delta_{\boldsymbol{T}}^2\psi_\alpha^s(\boldsymbol{T})^*$ 收敛到$_{s\geq 0}$ $_{\alpha=1}$

t恒等算子 I （按强算子拓扑）

定义 3.2。 若一个 $\mathbb{K}$-不变核 K 满足坐标函数 M_{z_i} 的乘法算子在 H_K 上是有界算子，其中 $i=1,\ldots,d$，且 d-元组 $\boldsymbol{M}=(M_{z_1},\ldots,M_{z_d})$ 是一个 $\frac{1}{K}$-压缩算子，则称其为可容许核。

在下面的引理中，我们给出一个关于 $\mathbb{K}$-不变 CNP 核的充分条件，使得相应希尔伯特空间上坐标函数的乘法算子有界。

引理 3.3。 设 K 是一个 $\mathbb{K}$-不变 *CNP* 核， H_K 是相应的希尔伯特空间。那么，坐标函数在 H_K 上的乘法算子 M_{z_i}, $1\leq i\leq d$ 有界。此外， K 是一个可容许核。

证明。 回顾一下，$a_{\underline{s}}>0$对每个签名 $s\in\vec{N}_0^r$。由公式（2.13），我们有 $b_{\varepsilon_1}=-b_{\varepsilon_1}=a_{\varepsilon_1}$ 因此， $b_{\varepsilon_1}>0$. 由推论 2.5， $b_s\geq 0$ 对所有 s 且

$$(1-\sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{z})\overline{\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w})})K(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})=1.$$

因此可得

$$(1-\sum_{|\underline{s}|=1}^{N} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{z})\overline{\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w})})K(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) \tag{3.19}$$

是非负定的。取 $N=1$我们看到，$(\frac{1}{b_{\varepsilon_1}}-\langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\rangle)K(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})$是非负定的。因此，根据 [6, 引理 3。1]可知乘法算子M_{z_i}, $1\leq i\leq d$是有界的。

坐标函数 $\boldsymbol{M}$ 在 H_K 上的乘法算子组是一个$\frac{1}{K}$-压缩算子，这一事实可通过类似于证明 [10, 引理 52]中的论证得到。□

下面给出一个技术引理。

引理 3.4。设 $K=\sum_{\underline{s}\geq 0}a_{\underline{s}}K_{\underline{s}}$ 是 Ω 上的一个 $\mathbb{K}$-不变核。若 $1-\frac{1}{K}=\sum_{s>0}b_sK_s$ 对某个实数序列 $\{b_s\}_{s>0}$ 成立，则对每个签名 $p>0$，有

$$a_{\underline{p}}=\sum_{\substack{\underline{s}\geq 0,\tilde{\underline{s}}>0,\\ |\underline{s}|+|\tilde{\underline{s}}|=|\underline{p}|}} a_{\underline{s}}b_{\tilde{\underline{s}}}c^{\underline{p}}_{\underline{s},\tilde{\underline{s}}}. \tag{3.20}$$

证明。存在一个实数序列 $\{b_s\}_{s>0}$ 使得 $1-\frac{1}{K}=\sum_{s>0}b_sK_s$由命题 2.2 可得。等式 $1-\frac{1}{K}=\sum_{s>0}b_sK_s$ 等价于以下等式

$$\sum_{\underline{s}\geq 0}a_{\underline{s}}K_s=1+\left(\sum_{\underline{s}\geq 0}a_{\underline{s}}K_s\right)\left(\sum_{\tilde{\underline{s}}>0}b_{\tilde{\underline{s}}}K_{\tilde{s}}\right).$$

利用等式 (2.14)，然后比较上述等式两边 K_p 的系数，我们得到

$$a_{\underline{p}}=\sum_{\substack{\underline{s}\geq 0,\tilde{\underline{s}}>0,\\ |\underline{s}|+|\tilde{\underline{s}}|=|\underline{p}|}} a_{\underline{s}}b_{\tilde{\underline{s}}}c^{\underline{p}}_{\underline{s},\tilde{\underline{s}}},$$

对每个签名 $p>0$. □

下面的命题证明，对于每个 $\frac{1}{K}$-压缩算子 $\boldsymbol{T}$，级数 $\sum_{\underline{s}\geq 0}a_{\underline{s}}\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}\psi^{\underline{s}}_{\alpha}(\boldsymbol{T})\Delta^2_{\boldsymbol{T}}\psi^{\underline{s}}_{\alpha}(\boldsymbol{T})^*$ 总是收敛的。

命题 3.5. 对于任意 $\frac{1}{K}$-压缩算子 $\boldsymbol{T}=(T_1,\dots,T_d)$，级数

$$\sum_{\underline{s}\geq 0}a_{\underline{s}}\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}\psi^{\underline{s}}_{\alpha}(\boldsymbol{T})\Delta^2_{\boldsymbol{T}}\psi^{\underline{s}}_{\alpha}(\boldsymbol{T})^*$$

强收敛到一个正压缩。

证明. 若证明了引理陈述中的级数收敛，则正性便立即可得。对于 $N\geq 1$，令

$$S_N=\sum_{|\underline{s}|=0}^{N}a_{\underline{s}}\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}\psi^{\underline{s}}_{\alpha}(\boldsymbol{T})\Delta^2_{\boldsymbol{T}}\psi^{\underline{s}}_{\alpha}(\boldsymbol{T})^*.$$

设 $h\in\mathcal{H}$。那么，

$$\begin{aligned}
&\langle S_Nh,h\rangle\\
&=\sum_{|\underline{s}|=0}^{N}a_{\underline{s}}\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}\left\langle\psi^{\underline{s}}_{\alpha}(\boldsymbol{T})\Delta^2_{\boldsymbol{T}}\psi^{\underline{s}}_{\alpha}(\boldsymbol{T})^*h,h\right\rangle\\
&=\sum_{|\underline{s}|=0}^{N}a_{\underline{s}}\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}\|\psi^{\underline{s}}_{\alpha}(\boldsymbol{T})^*h\|^2-\sum_{|\underline{s}|=0}^{N}a_{\underline{s}}\sum_{\tilde{\underline{s}}>0}\left\langle\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}\sum_{\tilde{\alpha}=1}^{d_{\tilde{\underline{s}}}}b_{\tilde{\underline{s}}}\psi^{\underline{s}}_{\alpha}(\boldsymbol{T})\psi^{\tilde{\underline{s}}}_{\tilde{\alpha}}(\boldsymbol{T})\psi^{\tilde{\underline{s}}}_{\tilde{\alpha}}(\boldsymbol{T})^*\psi^{\underline{s}}_{\alpha}(\boldsymbol{T})^*h,h\right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

注意到恒等式

$$\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}\sum_{\tilde{\alpha}=1}^{d_{\tilde{\underline{s}}}}\psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})\psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\underline{s}}}(\boldsymbol{T})\psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\underline{s}}}(\boldsymbol{T})^{*}\psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})^{*}=\sum_{|\underline{p}|=|\underline{s}|+|\tilde{\underline{s}}|}c_{\underline{s},\tilde{\underline{s}}}^{\underline{p}}\sum_{\beta}^{d_{\underline{p}}}\psi_{\beta}^{\underline{p}}(\boldsymbol{T})\psi_{\beta}^{\underline{p}}(\boldsymbol{T})^{*}$$

由.....得出 方程（2.14）。将上述恒等式代入方程（3.21），我们得到 in

$$\begin{aligned}\langle S_N h,h\rangle &= \sum_{|\underline{s}|=0}^{N}a_{\underline{s}}\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}\|\psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})^{*}h\|^{2}-\sum_{|\underline{s}|=0}^{N}\sum_{\tilde{\underline{s}}>\underline{0}}\sum_{|\underline{p}|=|\underline{s}|+|\tilde{\underline{s}}|}a_{\underline{s}}b_{\tilde{\underline{s}}}c_{\underline{s},\tilde{\underline{s}}}^{\underline{p}}\sum_{\beta=1}^{d_{\underline{p}}}\|\psi_{\beta}^{\underline{p}}(\boldsymbol{T})^{*}h\|^{2}\\ &\leq \sum_{|\underline{s}|=0}^{N}a_{\underline{s}}\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}\|\psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})^{*}h\|^{2}-\sum_{1\leq|\underline{p}|\leq N}\left(\sum_{\substack{0\leq|\underline{s}|\leq N\\ \tilde{\underline{s}}>\underline{0}\\ |\underline{s}|+|\tilde{\underline{s}}|=|\underline{p}|}}a_{\underline{s}}b_{\tilde{\underline{s}}}c_{\underline{s},\tilde{\underline{s}}}^{\underline{p}}\right)\sum_{\beta=1}^{d_{\underline{p}}}\|\psi_{\beta}^{\underline{p}}(\boldsymbol{T})^{*}h\|^{2}\\ &= \sum_{|\underline{s}|=0}^{N}a_{\underline{s}}\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}\|\psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})^{*}h\|^{2}-\sum_{1\leq|\underline{p}|\leq N}a_{\underline{p}}\sum_{\beta=1}^{d_{\underline{p}}}\|\psi_{\beta}^{\underline{p}}(\boldsymbol{T})^{*}h\|^{2}\\ &= \|h\|^{2}.\end{aligned}$$

倒数第二个等号由引理 3.4 得出。这证明算子序列 $\{S_N\}$ 强收敛于一个压缩算子。□

注 3.6。对于任意 $\frac{1}{K}$-压缩算子 $\boldsymbol{T}=(T_1,\ldots,T_d)$，命题 *3.5* 的证明表明

$$S_N=\sum_{|\underline{s}|=0}^{N}a_{\underline{s}}\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}\psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})\Delta_{\boldsymbol{T}}^{2}\psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})^{*}$$

对每个 $N\geq 1$ 都是压缩算子，因此 $\{\|S_N\|\}$ 的上界为 1。

下述推论中定义的算子 V_T 在 $\frac{1}{K}$-演算理论以及 $\frac{1}{K}$-压缩算子理论中都起着重要作用（参见 [2]）。以下推论是命题 3.5 和 [2,定理 **1**。3] 的直接推论。

推论 3.7. 若 $\boldsymbol{T}=(T_1,\ldots,T_d)$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的 $\frac{1}{K}$-压缩算子，则算子 $V_{\boldsymbol{T}}$: $\mathcal{H}\to H_K\otimes\overline{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}}$ 定义为

$$V_{\boldsymbol{T}}(h)=\sum_{\underline{s}\geq\underline{0}}a_{\underline{s}}\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}\psi_{\alpha}^{\underline{s}}\otimes\Delta_{\boldsymbol{T}}\psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})^{*}h,\ h\in\mathcal{H},\tag{3.22}$$

是压缩算子，并满足

$$V_{\boldsymbol{T}}^{*}\left(p(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{z}}\otimes I_{\overline{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}}})\right)=p(\boldsymbol{T})V_{\boldsymbol{T}}^{*},$$

对任意多项式 p。

令 E_0 表示再生核希尔伯特空间 H_K 到由常值函数组成的一维子空间上的正交投影。下面的引理断言，当 K 是可容许核时，H_K 上由坐标函数 $\boldsymbol{M}=(M_{z_1},\ldots,M_{z_d})$ 诱导的 d 元乘法算子组是纯的。

引理 3.8. 设 K 是可容许核。那么，作用在希尔伯特空间 H_K 上的 d 元乘法算子组 $\Delta_{\boldsymbol{M}} = E_0$ （由坐标函数 $\boldsymbol{M} = (M_{z_1}, \dots, M_{z_d})$ 诱导）是纯的。

证明。 设 $H_K^0 := \{\sum_{i=1}^n c_i K_{\boldsymbol{w}_i} : n \geq 1,\ c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n \in \Omega\}$. 空间 H_K^0 在 H_K 中稠密。任取 H_K^0 的任意元素 $\sum_{i=1}^n c_i K_{\boldsymbol{w}_i}$。直接计算可得

$$\Delta_{\boldsymbol{M}}^2 \left(\sum_{i=1}^n c_i K_{\boldsymbol{w}_i} \right) = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i K_{\boldsymbol{w}_i}, K_0 \right\rangle K_0.$$

由于 H_K^0 是 H 的稠密子集，因此 $\Delta_{\boldsymbol{M}}$ 是投影 E_0.

对于 $N \geq 1$，令 S_N 表示 $\sum_{|s| \leq N} a_s \sum_{\alpha=1}^{d_s} \psi_\alpha^s(\boldsymbol{M}) \Delta_{\boldsymbol{M}}^2 \psi_\alpha^s(\boldsymbol{M})^*$。设 $\boldsymbol{w} \in \Omega$ 为任意元素。由于部分和序列 $\{\sum_{|s| \leq N} a_s \sum_{\alpha=1}^{d_s} \psi_\alpha^s(\boldsymbol{w}) \overline{\psi_\alpha^s(\cdot)}\}_{N \geq 1}$ 在范数拓扑中收敛于 $K_{\boldsymbol{w}}$，给定 $\varepsilon > 0$，存在自然数 m 使得

$$\| K_{\boldsymbol{w}} - \sum_{|\underline{s}| \leq N} a_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \overline{\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w})} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\cdot) \| < \varepsilon \tag{3.23}$$

对每个 $N \geq m$ 都成立。直接计算可得

$$S_N K_{\boldsymbol{w}} = \sum_{|\underline{s}| \leq N} a_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \overline{\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w})} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\cdot). \tag{3.24}$$

结合方程（3.23）和（3.24），我们得到

$$\| K_{\boldsymbol{w}} - S_N K_{\boldsymbol{w}} \| < \varepsilon$$

对每个 $N \geq m$ 都成立。这意味着序列 $\{S_N K_{\boldsymbol{w}}\}$ 收敛到 $K_{\boldsymbol{w}}$。因此，对于每个 h 属于 H_K^0，序列 $\{S_N h\}$ 都收敛。结合 H_K^0 是 H_K 的稠密子集这一事实，以及序列 $\{\|S_N\|\}$ 有界——这是命题 3.5 的推论——我们得到 $\{S_N\}$ 在 H_K 的强算子拓扑下收敛到恒等算子。 □

以下定理由 Arazy 和 Engliˇs 提出。关于以下定理的证明，请参见 [2, 定理 1。3]。

定理 3.9。 令 $\boldsymbol{T} = (T_1, \dots, T_d)$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的交换算子组。若 $\boldsymbol{T}$ 是一个纯 $\frac{1}{K}$-压缩算子，则映射 V_T： $\mathcal{H} \to H_K \otimes \overline{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}}$，定义为

$$h \to \sum_{\underline{s} > \underline{0}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} a_{\underline{s}} \psi_\alpha^{\underline{s}} \otimes \Delta_{\boldsymbol{T}} \left(\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T}) \right)^* h,$$

是一个等距算子，满足

$$V_{\boldsymbol{T}}^* \left(p(\boldsymbol{M}) \otimes I_{\overline{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}}} \right) = p(\boldsymbol{T}) V_{\boldsymbol{T}}^*$$

对所有 $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_d]$。

我们回顾一下 [7, 定义 2.3] 中 $(K, \boldsymbol{T})$-可分解正算子的定义。设 K 是一个可容许核，且 $\boldsymbol{T} = (T_1, \dots, T_d)$ 是作用在 $\mathcal{H}$ 上的一个交换 d-元算子组。若正算子 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的值域是闭的，且存在一个希尔伯特空间 $\mathcal{L}$ 及有界线性变换 $\Theta : H_K \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{H}$，使得 $X = \Theta\Theta^*$，并且对每个 i， $\Theta(M_{z_i} \otimes I_{\mathcal{L}}) = T_i \Theta$ 成立，则称其为 $(K, \boldsymbol{T})$-可分解的。

以下命题是本节主定理的关键组成部分。该命题及其证明的思路均源自 [7,命题 2.4]。

命题 3.10。 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是$(K, \boldsymbol{T})$-可因式分解的，当且仅当

(1) *for all* $i, \|M_{z_i}\|^2 X - T_i X T_i^* \geq 0.$

(2) $P_{\boldsymbol{T}}(X) = \sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T}) X \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})^*$ *converges strongly such that* $X - P_{\boldsymbol{T}}(X) \geq 0.$

(3) $\sum_{\underline{s}\geq\underline{0}} a_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T}) \left(X - P_{\boldsymbol{T}}(X)\right) \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})^*$ *converges to* $X.$

证明。 设 X是 $(K, \boldsymbol{T})$-可因式分解的，也就是说，存在一个希尔伯特空间 $\mathcal{L}$及有界线性变换 $\Theta\colon H_K \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{H}$，使得对每个 i， $X = \Theta\Theta^*$和 $\Theta(M_{z_i} \otimes I_{\mathcal{L}}) = T_i\Theta$成立。于是

$$\begin{aligned}\|M_{z_i}\|^2 X - T_i X T_i^* &= \|M_{z_i}\|^2 \Theta\Theta^* - T_i \Theta\Theta^* T_i^* \\ &= \|M_{z_i}\|^2 \Theta\Theta^* - \Theta \left(M_{z_i} \otimes I_{\mathcal{L}}\right)\left(M_{z_i}^* \otimes I_{\mathcal{L}}\right)\Theta^* \\ &= \Theta\Big(\|M_{z_i}\|^2 I - \left(M_{z_i} \otimes I_{\mathcal{L}}\right)\left(M_{z_i}^* \otimes I_{\mathcal{L}}\right)\Big)\Theta^* \geq 0.\end{aligned}$$

这证明了 (1)。 下面的计算推出 (2):

$$\begin{aligned}X - P_{\boldsymbol{T}}(X) &= X - \sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T}) X \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})^* \\ &= \Theta\Big(I - \sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} (\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}) \otimes I_{\mathcal{L}})(\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})^* \otimes I_{\mathcal{L}})\Big)\Theta^* \geq 0.\end{aligned}$$

另外，注意到

$$\begin{aligned}&\sum_{|\underline{s}|=0}^{N} a_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})(X - P_{\boldsymbol{T}}(X))\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})^* \\ &= \sum_{|\underline{s}|=0}^{N} a_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})(\Theta\Theta^* - P_{\boldsymbol{T}}(\Theta\Theta^*))\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})^* \\ &= \Theta \Bigg[\sum_{|\underline{s}|=0}^{N} a_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} (\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M} \otimes I_{\mathcal{L}})\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M} \otimes I_{\mathcal{L}})^* - \sum_{|\underline{s}|=0}^{N} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} a_{\underline{s}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M} \otimes I_{\mathcal{L}}) \\ &\quad \left(\sum_{\tilde{\underline{s}}>\underline{0}} b_{\tilde{\underline{s}}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\tilde{\underline{s}}}} (\psi_\alpha^{\tilde{\underline{s}}}(\boldsymbol{M} \otimes I_{\mathcal{L}})\psi_\alpha^{\tilde{\underline{s}}}(\boldsymbol{M} \otimes I_{\mathcal{L}})^* \right) \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M} \otimes I)^* \Bigg] \Theta^*.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{M}$ 是纯$\frac{1}{K}$-压缩算子，因此

$$\left[\sum_{|\underline{s}|=0}^{N} a_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}\otimes I_{\mathcal{L}})\psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}\otimes I_{\mathcal{L}})^{*} - \sum_{|\underline{s}|=0}^{N}\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} a_{\underline{s}}\psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}\otimes I_{\mathcal{L}})\right.$$
$$\left.\left(\sum_{\tilde{\underline{s}}>\underline{0}} b_{\tilde{\underline{s}}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\tilde{\underline{s}}}} \psi_{\alpha}^{\tilde{\underline{s}}}(\boldsymbol{M}\otimes I_{\mathcal{L}})\psi_{\alpha}^{\tilde{\underline{s}}}(\boldsymbol{M}\otimes I_{\mathcal{L}})^{*}\right)\psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}\otimes I)^{*}\right]$$

co收敛到 $I_{H_K\otimes\mathcal{L}}$ （在强算子拓扑下），因此 (3) 成立 .

反过来，假设 (1)、(2) 和 (3)。 对每个 $i = 1, \ldots\ldots d$，在 X 的值域 Ran X 上定义算子A_i，使得 $A_i X^{1/2}h = X^{1/2}T_i^{*}h, \quad h \in \mathcal{H}$. 容易看出，$\boldsymbol{A} = (A_1, \ldots\ldots, A_d)$ 是一个由有界线性算子构成的交换元组。现在利用条件 (2)，得到

$$\left\langle \sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{A}^{*})\psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{A})X^{1/2}h, X^{1/2}h\right\rangle$$
$$= \left\langle \sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{T}^{*})X\psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})h, h\right\rangle \leq \left\langle Xh, h\right\rangle = \left\langle X^{1/2}h, X^{1/2}h\right\rangle.$$

因此， $\boldsymbol{A}^{*}$ 是 Ran X. 上的一个 $\frac{1}{K}$-压缩算子。此外，利用条件 (3) 作类似论证可知， $\boldsymbol{A}^{*}$ 是纯的：

$$\left\langle \sum_{\underline{s}\geq\underline{0}} a_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{A}^{*})\Delta_{\boldsymbol{A}^{*}}^{2}\psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{A})X^{1/2}h, X^{1/2}h\right\rangle$$
$$= \left\langle \sum_{\underline{s}\geq\underline{0}} a_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{T}^{*})\left(X - P_{\boldsymbol{T}(X)}\right)\psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})h, h\right\rangle = \left\langle Xh, h\right\rangle.$$

现在，定理 m 3.9 推出存在一个等距算子 V： Ran $X \to H_K \otimes$Ran $\overline{\Delta_{\boldsymbol{A}}}$使得 at

$$V^{*}\left(M_i \otimes I_{\overline{\text{Ran }\Delta_{\boldsymbol{A}}}}\right) = A_i V^{*}.$$

Fi最后，如果我们定义 $\Theta = X^{1/2}V^{*}$，则容易验证 $X = \Theta\Theta^{*}$，并且对每个 i

$$\Theta\left(M_i \otimes I_{\overline{\text{Ran }\Delta_{\boldsymbol{A}}}}\right) = A_i\Theta.$$

□

下面，我们给出一个 $\frac{1}{K}$-压缩算子的特征函数定义，遵循 [7, 定义 2。5]。一个 $\frac{1}{K}$-压缩算子$\boldsymbol{T}$ 在 [7, 定义 2。5] 中的特征函数定义，是在假定 $\boldsymbol{T}$ 为纯的条件下给出的。在我们的语境中，我们对任意 $\frac{1}{K}$-压缩算子给出特征函数的定义。

定义 3.11。 设 $\boldsymbol{T} = (T_1, \ldots, T_d)$ 是一个 $\frac{1}{K}$-压缩算子。若存在一个希尔伯特空间 $\mathcal{E}$ 和一个解析函数$\Theta_{\boldsymbol{T}}: \Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{E}, \boldsymbol{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}})$，使得相应的乘法算子 $M_{\Theta_{\boldsymbol{T}}}$: $H_K \otimes \mathcal{E} \to H_K \otimes \boldsymbol{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}}$ 满足以下恒等式，则称元组 $\boldsymbol{T}$ 具有特征函数

$$I - V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^{*} = M_{\Theta_{\boldsymbol{T}}}M_{\Theta_{\boldsymbol{T}}}^{*}.$$

若 K 是一个容许核，则由定理 3.9 可知，$\ker V_{\boldsymbol{T}}^*$是每个 $M_{z_i}\otimes I_{\operatorname{Ran}\Delta_{\boldsymbol{T}}}$, $1\le i\le d$ 的不变子空间。

定义 3.12。 对于纯 $\frac{1}{K}$-压缩算子 $\boldsymbol{T}=(T_1,\ \ldots,\ T_d)$，与之对应的交换算子 d-组 $B_{\boldsymbol{T}}$ 定义为

$$B_{\boldsymbol{T}}:=\Big((M_{z_1}\otimes I_{\overline{Ran}\,\Delta_{\boldsymbol{T}}})|_{\ker V_{\boldsymbol{T}}^*},\ldots,(M_{z_d}\otimes I_{\overline{Ran}\,\Delta_{\boldsymbol{T}}})|_{\ker V_{\boldsymbol{T}}^*}\Big). \tag{3.25}$$

下面的定理是本节的重要定理之一。它给出了纯$\frac{1}{K}$-压缩算子的特征函数存在的充要条件。

定理 3.13。 设 K 是嘉当域Ω上的一个可容许 $\mathbb{K}$-不变核。希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的纯 $\frac{1}{K}$-压缩算子 $\boldsymbol{T}=(T_1,\ \ldots,\ T_d)$ 存在特征函数，当且仅当 $B_{\boldsymbol{T}}$ 是一个 $\frac{1}{K}$-压缩算子。

证明。 设 $\boldsymbol{T}$存在特征函数。则存在一个取值于 $B(\mathcal{L},\ \operatorname{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}})$– 的有界解析函数 $\theta_{\boldsymbol{T}}$，定义在 Ω 上，使得

$$I-V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*=M_{\theta_{\boldsymbol{T}}}M_{\theta_{\boldsymbol{T}}}^*.$$

因此，对于任意 $N\ge 1$,

$$\begin{aligned}&(I-V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*)-\Big(\sum_{|\underline{s}|=1}^{N}b_{\underline{s}}\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}(\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})\otimes I)(I-V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*)(\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})^*\otimes I)\Big)\\&\quad=M_{\theta_{\boldsymbol{T}}}\Big(I-\sum_{|\underline{s}|=1}^{N}b_{\underline{s}}\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}(\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})\otimes I)(\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})^*\otimes I)\Big)M_{\theta_{\boldsymbol{T}}}^*.\end{aligned} \tag{3.26}$$

由于 K 是一个可容许核，因此乘法算子组 $\boldsymbol{M}$ 是$d_s\frac{1}{K}$-压缩算子，从而级数 $\sum b_s\sum($ $\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})\otimes I)(\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})^*\otimes I)\Big)$ 强收敛$s>0$ $\alpha=1d_s$，并且 $\Big(I-\sum b_s\sum(\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})\otimes I)(\psi_\alpha^{\underline{s}}($ $\boldsymbol{M})^*\otimes I)\Big)\ge 0.$。结合（3.26）可推出$\underline{s}>\underline{0}$ $\alpha=1$ $B_{\boldsymbol{T}}$ 是一个 $\frac{1}{K}$-压缩算子。

反过来，假设 $B_{\boldsymbol{T}}$ 是一个 $\frac{1}{K}$-压缩算子。设 $c_i=\|M_{z_i}\|^2.$。假设 $P_{\ker V_{\boldsymbol{T}}^*}:=I-V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*$ 是从 $H_K\otimes\operatorname{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}}$ 到 $\ker\ V_{\boldsymbol{T}}^*.$ 的投影。对于每个 i，定义一个线性算子 R_i: $=M_{z_i}\otimes I|_{\ker V_{\boldsymbol{T}}^*}.$。那么 $\|R_i\|^2\le c_i.$。换句话说， $c_iI\ge R_iR_i^*$，也就是说，

$$c_i(I-V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*)-(M_{z_i}\otimes I)(I-V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*)(M_{z_i}\otimes I)^*\ge 0.$$

这证明了命题 3.10 的条件 (1)。由于 $\boldsymbol{M}$ 是一个 $\frac{1}{K}$-压缩算子，因此级数

$$\begin{aligned}&\sum_{\underline{s}>\underline{0}}b_{\underline{s}}\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}\otimes I|_{\ker V_T^*})\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}\otimes I|_{\ker V_T^*})^*\\&\qquad=\sum_{\underline{s}>\underline{0}}b_{\underline{s}}\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}\otimes I)(I-V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*)\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}\otimes I)^*\end{aligned}$$

强收敛，并且

$$(I - V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*) - \sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}\otimes I)(I - V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*)\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}\otimes I)^* \\ = (I - V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*) - P_{\boldsymbol{M}\otimes I}(I - V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*) \geq 0,$$

其中映射 $P_{\boldsymbol{M}\otimes I}$ 定义于命题 3.10 (2) 中。这证明了命题 3.10 的条件 (2)。

设 $N \geq 1$ 为一个自然数。假设

$$S_N = \sum_{|\underline{s}|=0}^{N} a_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}\otimes I)\Big((I - V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*) - P_{\boldsymbol{M}\otimes I}(I - V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*)\Big)\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}\otimes I)^*.$$

我们证明， S_N强收敛到（$I - V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*$）。 考虑一个元素 $\sum_{i=1}^n (K_{w_i}\otimes x_i) \in H_K \otimes \text{Ran } \Delta_{\boldsymbol{T}}$. 然后

$$\Big\langle S_N \sum_{i=1}^n (K_{\boldsymbol{w}_i}\otimes x_i), \sum_{i=1}^n (K_{\boldsymbol{w}_i}\otimes x_i)\Big\rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \Big[\Big\langle \sum_{|\underline{s}|\leq N} a_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}\otimes I)\Big((I - V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*)\Big)\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}\otimes I)^* K_{\boldsymbol{w}_i}\otimes x_i, K_{\boldsymbol{w}_j}\otimes x_j\Big\rangle$$

$$- \Big\langle \sum_{|\underline{s}|\leq N} a_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}\otimes I)\Big(P_{\boldsymbol{M}\otimes I}(I - V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*)\Big)\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}\otimes I)^* K_{\boldsymbol{w}_i}\otimes x_i, K_{\boldsymbol{w}_j}\otimes x_j\Big\rangle\Big]$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \Big[\Big\langle \sum_{\underline{s}\leq N} a_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \overline{\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w}_i)}\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}\otimes I)\Big((I - V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*)\Big) K_{\boldsymbol{w}_i}\otimes x_i, K_{\boldsymbol{w}_j}\otimes x_j\Big\rangle$$

$$- \Big\langle \sum_{|\underline{s}|\leq N} a_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \overline{\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w}_i)}\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}\otimes I) \sum_{\tilde{\underline{s}}\geq\underline{0}} b_{\tilde{\underline{s}}} \sum_{\tilde{\alpha}=1}^{d_{\tilde{\underline{s}}}} \overline{\psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\underline{s}}}(\boldsymbol{w}_i)}\psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\underline{s}}}(\boldsymbol{M}\otimes I)(I - V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*)\Big) K_{\boldsymbol{w}_j}\otimes x_j, \\ K_{\boldsymbol{w}_j}\otimes x_j\Big\rangle\Big]$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \Big[\sum_{|\underline{s}|=0}^N a_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \overline{\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w}_i)}\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w}_j)\Big\langle\Big((I - V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*)\Big) K_{\boldsymbol{w}_i}\otimes x_i, K_{\boldsymbol{w}_j}\otimes x_j\Big\rangle$$

$$- \sum_{|\underline{s}|=0}^N a_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \overline{\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w}_i)}\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w}_j) \sum_{\tilde{\underline{s}}\geq\underline{0}} b_{\tilde{\underline{s}}} \sum_{\tilde{\alpha}=1}^{d_{\tilde{\underline{s}}}} \overline{\psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\underline{s}}}(\boldsymbol{w}_i)}\psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\underline{s}}}(\boldsymbol{w}_j)\Big\langle(I - V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*)\Big) K_{\boldsymbol{w}_i}\otimes x_i, K_{\boldsymbol{w}_j}\otimes x_j\Big\rangle\Big]$$

$$= \sum_{|\underline{s}|=0}^N a_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \overline{\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w}_i)}\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w}_j)\Big[1 - \sum_{\tilde{\underline{s}}\geq\underline{0}} b_{\tilde{\underline{s}}} \sum_{\tilde{\alpha}=1}^{d_{\tilde{\underline{s}}}} \overline{\psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\underline{s}}}(\boldsymbol{w}_i)}\psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\underline{s}}}(\boldsymbol{w}_j)\Big]\Big\langle(I - V_{\boldsymbol{T}}V_{\boldsymbol{T}}^*)\Big) \sum_{i=1}^n K_{\boldsymbol{w}_i}\otimes x_i, \\ \sum_{i=1}^n K_{\boldsymbol{w}_i}\otimes x_i\Big\rangle.$$

Th上面的方程意味着 $S_N \leq (I - V_{\boldsymbol{T}} V_{\boldsymbol{T}}^*)$。此外，请注意，该级数 s

$$\sum_{|\underline{s}|=0}^{N} a_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \overline{\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w}_i)} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w}_j) \Big[1 - \sum_{\underline{\tilde{s}} \geq \underline{0}} b_{\underline{\tilde{s}}} \sum_{\tilde{\alpha}=1}^{d_{\underline{\tilde{s}}}} \overline{\psi_{\tilde{\alpha}}^{\underline{\tilde{s}}}(\boldsymbol{w}_i)} \psi_{\tilde{\alpha}}^{\underline{\tilde{s}}}(\boldsymbol{w}_j) \Big]$$

当 $N \to \infty$ 时收敛到 1，这意味着对于集合 $(H_K \otimes \text{Ran } \Delta_{\boldsymbol{T}})_0 := \{\sum_{i=1}^n K_{\boldsymbol{w}_i} \otimes x_i : n \geq 1, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in \Omega, x_1, \ldots, x_n \in \text{Ran } \Delta_{\boldsymbol{T}}\}$ 中的每个元素，$\{S_N\}$ 都收敛到 $(I - V_{\boldsymbol{T}} V_{\boldsymbol{T}}^*)$。由于 $(H_K \otimes \text{Ran } \Delta_{\boldsymbol{T}})_0$ 是 $H_K \otimes \text{Ran } \Delta_{\boldsymbol{T}}$ 的稠密子集，且 $\{S_N\}$ 有上界 $(I - V_{\boldsymbol{T}} V_{\boldsymbol{T}}^*)$，因此 S_N 在强算子拓扑下收敛到 $(I - V_{\boldsymbol{T}} V_{\boldsymbol{T}}^*)$。这证明了命题 3.10 的条件 (3)。因此，$(I - V_{\boldsymbol{T}} V_{\boldsymbol{T}}^*)$ 是 $(K, \boldsymbol{M} \otimes I)$- 可因子分解的。换言之，$\boldsymbol{T}$ 有一个特征函数。□

回顾 [7]，若容许核 K 对每个纯 $\frac{1}{K}$-压缩算子都存在特征函数，则称其具有特征函数。下述定理给出了 $\mathbb{K}$-不变核具有 CNP 性质的一个充分条件。

定理 3.14. 若 K 是一个 $\mathbb{K}$-不变的 *CNP* 核，则 K 具有特征函数。

证明。设 $\boldsymbol{T}$ 是一个纯 $\frac{1}{K}$-压缩算子。为证明 $\boldsymbol{T}$ 具有特征函数，只需证明 $B_{\boldsymbol{T}}$ 是一个 $\frac{1}{K}$-压缩算子（见定理 3.13）。由于 K 是一个容许核，$\boldsymbol{M}$ 在 H_K 上是一个 $\frac{1}{K}$-压缩算子。因此 $\boldsymbol{M} \otimes I$ 在 $H_K \otimes \text{Ran } \Delta_{\boldsymbol{T}}$ 上也是 $\frac{1}{K}$-压缩算子。对于任意 $N \geq 1$，

$$\begin{aligned}
\sum_{|\underline{s}|=1}^{N} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(B_{\boldsymbol{T}}) \psi_\alpha^{\underline{s}}(B_{\boldsymbol{T}})^* &= \sum_{|\underline{s}|=1}^{N} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} P_{\ker V_{\boldsymbol{T}}^*} (\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}) \otimes I) P_{\ker V_{\boldsymbol{T}}^*} (\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})^* \otimes I)|_{\ker V_{\boldsymbol{T}}^*} \\
&\leq \sum_{\underline{s} > \underline{0}} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} P_{\ker V_{\boldsymbol{T}}^*} (\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}) \otimes I) (\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})^* \otimes I)|_{\ker V_{\boldsymbol{T}}^*} \\
&\leq I_{\ker V_{\boldsymbol{T}}^*}.
\end{aligned}$$

因此，$B_{\boldsymbol{T}}$ 是一个 $\frac{1}{K}$-压缩算子。 □

现在，我们已经具备证明本节主定理所需的全部要素。该定理指出，嘉当域上容许核的 CNP 性质可由如下条件刻画：每个纯 $\frac{1}{K}$-压缩算子都存在特征函数。关于单位球上酉不变核的类似刻画，见 [7, 定理 3.4]。

定理 3.15. 设 K 是嘉当域Ω上的容许核。则核 K 为 *CNP* 当且仅当任一纯 $\frac{1}{K}$-压缩算子都具有特征函数。

证明。正向的证明由定理 3.14 得出。因此，我们证明反向。假设任一纯 $\frac{1}{K}$-压缩算子都具有特征函数。设 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间。易验证 d-元组 $\boldsymbol{T} = (0, \ldots, 0)$ 在 $\mathcal{H}$ 上的零算子是纯 $\frac{1}{K}$-压缩算子，且 $\Delta_{\boldsymbol{T}} = I_{\mathcal{H}}$。因此，我们有 $\text{Ran } \Delta_{\boldsymbol{T}} = \mathcal{H}$。由定理 3.9 可知，算子 $V_{\boldsymbol{T}} : \mathcal{H} \to H_K \otimes \text{Ran } \Delta_{\boldsymbol{T}}$ 由下式给出

$$V_{\boldsymbol{T}}(h) = 1 \otimes h, \ h \in \mathcal{H},$$

其中 1 表示 H_K 中的常值函数，它将 Ω 中的每个元素映射为 1 .

令 H_K^c 表示 H_K 中所有常值函数组成的集合，并令 $E_0^\perp$ 表示将 H_K 正交投影到 $(H_K^c)^\perp$ 上的投影。直接计算可验证，$\ker(I - V_{\boldsymbol{T}}) = (H_K^c)^\perp \otimes \mathcal{H}$。根据定理 3.14，可知 $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{T}}$（定义见方程 (3.25)）是一个 $\frac{1}{K}$-压缩算子。直接计算可得，$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{T}}$ 是一个 $\frac{1}{K}$-压缩算子，当且仅当

$$E_0^\perp - \sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}) E_0^\perp \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})^* \geq 0, \tag{3.27}$$

其中序列 $\{b_s\}_{s>0}$ 的实数由推论 2.5给出。为证明 K 是 CNP 核，只需证明 $b_s \geq 0$ 对每个签名 $s > 0$成立，这得益于推论2.5。

设 $N \geq 1$ 为任意自然数，s' 为长度为 $N+1$ 的签名，且 $\psi_{\alpha'}^{s'}$ 为 $\mathcal{P}_{s'}$的正交归一基中的任意元素。由 [19, 命题 4.11。36],可得

$$\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})^* \psi_{\alpha'}^{\underline{s}'} = \begin{cases} 0, & \text{if } |\underline{s}'| < |\underline{s}| \\ \displaystyle\sum_{|\tilde{\underline{s}}|=|\underline{s}'|-|\underline{s}|} \frac{a_{\tilde{\underline{s}}'}}{a_{\underline{s}'}} \left(\psi_\alpha^{\underline{s}}(\partial)\psi_{\alpha'}^{\underline{s}'}\right)_{\tilde{\underline{s}}}, & \text{if } |\underline{s}'| \geq |\underline{s}| \end{cases} \tag{3.28}$$

其中求和取遍所有签名 $\tilde{s}$ 使得 $|\tilde{s}| = |s'| - |s|$，∂ 表示偏微分元组 $(\partial_{z_1}, \ldots, \partial_{z_d})$，且 $\left(\psi_\alpha^s(\partial)\psi_{\alpha'}^{s'}\right)_{\tilde{s}}$ 表示 $\psi_\alpha^s(\partial)\psi_{\alpha'}^{s'}$ 在 $\mathcal{P}_{\tilde{s}}$ 中的分量（另见 [18, 引理 15]）。设 $\boldsymbol{w}$ 为 Ω 的任意元素。因此，由方程（3.28），我们有

$$\sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}) E_0^\perp \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})^* K_{\underline{s}'}(\cdot, \boldsymbol{w}) = \sum_{|\underline{s}|\leq N} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}) \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})^* K_{\underline{s}'}(\cdot, \boldsymbol{w}).$$

由 [18,第 5], 页可知，存在一个标量 $\gamma(s')$，使得

$$\sum_{|\underline{s}|\leq N} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}) \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})^* K_{\underline{s}'}(\cdot, \boldsymbol{w}) = \gamma(\underline{s}') K_{\underline{s}'}(\cdot, \boldsymbol{w}). \tag{3.29}$$

为了确定 $\gamma(s')$ 的值，对等式两边与 $K(\cdot, \boldsymbol{w})$ 取内积，并注意到等式 (3.29) 可得

$$\begin{aligned} \gamma(\underline{s}') K_{\underline{s}'}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) &= \left\langle \sum_{|\underline{s}|\leq N} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}) \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})^* K_{\underline{s}'}(\cdot, \boldsymbol{w}), K(\cdot, \boldsymbol{w}) \right\rangle \\ &= \sum_{|\underline{s}|\leq N} b_{\underline{s}} \left\langle K_{\underline{s}'}(\cdot, \boldsymbol{w}), \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M}) \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})^* K(\cdot, \boldsymbol{w}) \right\rangle \\ &= \sum_{|\underline{s}|\leq N} b_{\underline{s}} \left\langle K_{\underline{s}'}(\cdot, \boldsymbol{w}), K_{\underline{s}}(\cdot, \boldsymbol{w}) K(\cdot, \boldsymbol{w}) \right\rangle \\ &= \sum_{|\underline{s}|\leq N} b_{\underline{s}} \left\langle K_{\underline{s}'}(\cdot, \boldsymbol{w}), K_{\underline{s}}(\cdot, \boldsymbol{w}) \sum_{\tilde{\underline{s}}\geq \underline{0}} a_{\tilde{\underline{s}}} K_{\tilde{s}}(\cdot, \boldsymbol{w}) \right\rangle \end{aligned}$$

$$= \sum_{|\underline{s}|\le N} b_{\underline{s}} \left\langle K_{\underline{s}'}(\cdot,\boldsymbol{w}), \sum_{\tilde{\underline{s}}\ge \underline{0}} a_{\tilde{\underline{s}}} \sum_{|\underline{p}|=|\underline{s}|+|\tilde{\underline{s}}|} c^{\underline{p}}_{\underline{s},\tilde{\underline{s}}} K_{\underline{p}}(\cdot,\boldsymbol{w}) \right\rangle$$

$$= \left(\sum_{\substack{|\underline{s}|\le N, \tilde{\underline{s}}\ge \underline{0},\\ |\underline{s}|+|\tilde{\underline{s}}|=|\underline{s}'|}} a_{\tilde{\underline{s}}} b_{\underline{s}} c^{\underline{s}'}_{\underline{s},\tilde{\underline{s}}} \right) \frac{K_{\underline{s}'}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})}{a_{\underline{s}'}}.$$

这里，第五个等号成立是因为等式 (2.14)。因此，我们有

$$\gamma(\underline{s}') = \frac{1}{a_{\underline{s}'}} \left(\sum_{\substack{|\underline{s}|\le N, \tilde{\underline{s}}\ge \underline{0},\\ |\underline{s}|+|\tilde{\underline{s}}|=|\underline{s}'|}} a_{\tilde{\underline{s}}} b_{\underline{s}} c^{\underline{s}'}_{\underline{s},\tilde{\underline{s}}} \right). \tag{3.30}$$

最后，对方程（3.27）的左端在 $K_{s'}(\cdot,\ \boldsymbol{w})$ 处取值，然后与 $K_{\underline{s}'}(\cdot,\ \boldsymbol{w})$ 取内积，得到

$$\begin{aligned}
0 &\le \left\langle E_0^{\perp} K_{\underline{s}'}(\cdot,\boldsymbol{w}) - \sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi^{\underline{s}}_{\alpha}(\boldsymbol{M}) E_0^{\perp} \psi^{\underline{s}}_{\alpha}(\boldsymbol{M})^* K_{\underline{s}'}(\cdot,\boldsymbol{w}), K_{\underline{s}'}(\cdot,\boldsymbol{w}) \right\rangle \\
&= \left\langle K_{\underline{s}'}(\cdot,\boldsymbol{w}) - \sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi^{\underline{s}}_{\alpha}(\boldsymbol{M}) E_0^{\perp} \psi^{\underline{s}}_{\alpha}(\boldsymbol{M})^* K_{\underline{s}'}(\cdot,\boldsymbol{w}), K_{\underline{s}'}(\cdot,\boldsymbol{w}) \right\rangle \\
&= \|K_{\underline{s}'}(\cdot,\boldsymbol{w})\|^2 \left(1-\gamma(\underline{s}')\right) \\
&= \frac{\|K_{\underline{s}'}(\cdot,\boldsymbol{w})\|^2}{a_{\underline{s}'}} \left(a_{\underline{s}'} - \sum_{\substack{|\underline{s}|\le N, \tilde{\underline{s}}\ge \underline{0},\\ |\underline{s}|+|\tilde{\underline{s}}|=|\underline{s}'|}} a_{\tilde{\underline{s}}} b_{\underline{s}} c^{\underline{s}'}_{\underline{s},\tilde{\underline{s}}} \right) \\
&= \frac{\|K_{\underline{s}'}(\cdot,\boldsymbol{w})\|^2}{a_{\underline{s}'}} \left(\sum_{\substack{\underline{s},\tilde{\underline{s}}\ge \underline{0},\\ |\underline{s}|+|\tilde{\underline{s}}|=|\underline{s}'|}} a_{\tilde{\underline{s}}} b_{\underline{s}} c^{\underline{s}'}_{\underline{s},\tilde{\underline{s}}} - \sum_{\substack{|\underline{s}|\le N, \tilde{\underline{s}}\ge \underline{0},\\ |\underline{s}|+|\tilde{\underline{s}}|=|\underline{s}'|}} a_{\tilde{\underline{s}}} b_{\underline{s}} c^{\underline{s}'}_{\underline{s},\tilde{\underline{s}}} \right) \\
&= \frac{\|K_{\underline{s}'}(\cdot,\boldsymbol{w})\|^2}{a_{\underline{s}'}} b_{\underline{s}'} c^{\underline{s}'}_{\underline{s}',\underline{0}}.
\end{aligned}$$

这意味着 $b_{s'} \ge 0$。注意，在上述等式级数中，第三个等号成立是因为方程（3.30），第四个等号成立则是由于方程（3.20）。这证明了 K 是一个 CNP 核。□

注记 3.16。设 Ω 是一个秩为 $r>1$ 的嘉当域，并且对于 $\nu \in \mathcal{W}_\Omega$，令 $K^{(\nu)}$ 表示 Ω 上的加权伯格曼核Ω。命题 *2.9* 和定理*3.15* 的直接推论表明，存在一个 $\frac{1}{K^{(\nu)}}$-压缩算子 $\boldsymbol{T} = (T_1, \ldots\ldots, T_d)$，使得 $\overline{\boldsymbol{T}}$不具有特征函数。

对于 $\nu > \frac{d}{r}$，加权伯格曼空间$\mathbb{A}^{(\nu)}$(Ω) 上的乘法算子组 $\boldsymbol{M}^{(\nu)}$ 是一个 $\frac{1}{K^{(\nu)}}$-压缩算子，[2, 定理 3。3]引理 *3.8*表明 $\boldsymbol{M}^{(\nu)}$ 是纯的，且 $\Delta_{\boldsymbol{M}^{(\nu)}} = E_0$。回忆一下，$\{\psi^{\alpha}_s : s \ge 0, 1 \le \alpha \le d_s\}$ 是 $\mathbb{A}^{(\nu)}$(Ω)的完备正交集。对于任意 $N \ge 0$，令 $\mathcal{M}_N$ 为 $\mathbb{A}^{(\nu)}$(Ω) 中由集合 $\{\psi^{\alpha}_s : |s| \le N, 1 \le \alpha \le d_s\}$ 和 $\boldsymbol{T}_N := P_N \boldsymbol{M}_{(\nu)}|_{\mathcal{M}_N}$ 张成的闭子空间，其中 P_N 是正交

投影 $\mathbb{A}^{(\nu)}(\Omega)$ 到 $\mathcal{M}_N$上。容易验证， $\boldsymbol{T}_N$是一个纯 $\frac{1}{K^{(\nu)}}$-压缩算子，且$\Delta_{\boldsymbol{T}_N} = E_0$。此外，对 [7, 命题 3。3] 证明的改写表明， $\boldsymbol{T}_N$ 不存在关于 $\nu \geq \frac{d}{r} + 1$的特征函数。

4. Characteristic Function: Construction

本节将针对某些 $\mathbb{K}$-不变核 K，显式构造 d元 $\frac{1}{K}$-压缩算子的特征函数。设 $K = \sum_{s\geq 0} a_s K_s$ 是 Ω 上的 $\mathbb{K}$-不变核，且 $\boldsymbol{T} = (T_1, \ldots\ldots, T_d)$ 是一个 $\frac{1}{K}$-压缩算子。回顾一下，该级数

$$\sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})^*$$

在强算子拓扑下收敛，并且

$$\sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})^* \leq I.$$

$I - \sum_{d_s} b_s \sum \psi_\alpha^s(\boldsymbol{T})\psi_\alpha^s(\boldsymbol{T})^*$ 的正平方根记为 $\Delta_{\boldsymbol{T}}$。此外，回顾一下，若存在一个希尔伯特空间 $\mathcal{E}$ 和一个解析函数 $\Theta_{\boldsymbol{T}}: \Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{E}, \overline{\text{Ran}}\Delta_{\boldsymbol{T}})$，使得相应的乘法算子 $M_{\Theta_{\boldsymbol{T}}}: H_K \otimes \mathcal{E} \to H_K \otimes \overline{\text{Ran}}\,\Delta_{\boldsymbol{T}}$ 满足$I - V_{\boldsymbol{T}} V_{\boldsymbol{T}}^* = M_{\Theta_{\boldsymbol{T}}} M_{\Theta_{\boldsymbol{T}}}^*$，则称 $\frac{1}{K}$-压缩算子 $\boldsymbol{T} = (T_1, \ldots\ldots, T_d)$具有特征函数。

4.1. 泛函演算。 为了明确计算希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的 $\frac{1}{K}$-压缩算子 $\boldsymbol{T} = (T_1, \ldots, T_d)$ 的特征函数，我们需要对每个 $\boldsymbol{w} \in \Omega$ 存在泛函演算 $K(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{w})$。为了对每个 $\boldsymbol{w} \in \Omega$ 定义算子 $K(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{w})$，我们作如下假设。

(A) 对每个 $\boldsymbol{w} \in \Omega$， $\sum_s a_s K_s(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{w})$ 和 $\sum_{s>0} b_s K_s(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{w})$ 在强算子拓扑下收敛。

(B) 对某个 $c > 0$， $\sum_{s\geq 0} a_s \sum_\alpha^{d_s} \psi_\alpha^s(\boldsymbol{T})\Delta_{\boldsymbol{T}}^2 \psi_\alpha^s(\boldsymbol{T})^* \geq cI$。

本节余下部分，我们假设条件 (A) 和 (B)。注意，如果 $\boldsymbol{T}$ 是纯$\frac{1}{K}$-压缩算子，那么 $\boldsymbol{T}$ 满足条件 *(B)*。

我们注意到，如果 H_K 是某个 L^2 空间中由全纯函数组成的子空间，那么条件 (A) 自动成立。

引理 4.1。 如果 H_K 是某个 L^2 空间中由全纯函数组成的子空间（赋予继承范数），那么 Ω 上的任意有界全纯函数 f 都是 H_K 的有界乘子，相应的乘法算子 M_f 满足 $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$。

证明。 由 $\|M_f u\|^2 = \int |fu|^2 \leq \|f\|_\infty^2 \int |u|^2 = \|f\|_\infty^2 \|u\|^2$ 立即可得。

□

推论 4.2。 在引理*4.1*的假设下，对于命题 *F 2.2* 中的任意 $\boldsymbol{w} \in \Omega$， $F(\cdot, \boldsymbol{w})$ 是 H_K上的有界乘子。特别地， $K(\cdot, \boldsymbol{w})$ 是有界乘子；如果 K 无零点，那么 $1/K(\cdot, \boldsymbol{w})$也无零点。

证明。 这直接由推论2.3得出。 □

推论 4.3。 再次在引理 *4.1*的假设下，对于任意 F 如命题*2.2* 中所述，且 $\boldsymbol{w}\in\Omega$，级数

$$\sum_{\underline{s}} c_{\underline{s}} K_{\underline{s}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{w}),$$

其中， $\boldsymbol{M}$ 表示由坐标函数的乘法算子组成的交换元组，它在算子范数下收敛到 $\mathcal{H}_K$ 上由 $F(\cdot,\boldsymbol{w})$ 给出的乘法算子。特别地，这对 $F=K$成立；若 K 无零点，则对 $F=1/K$也成立。

证明。 由引理 4.1， $\|f_m-f\|_\infty\to 0$推出 $\|M_{f_m}-M_f\|\to 0$。取 $f_m:=\sum_{|\underline{s}|\le m} c_{\underline{s}}K_{\underline{s}}(\cdot,\boldsymbol{w})$，并使用命题 2.2。 □

上述推论证明，若再生核希尔伯特空间H_K 的范数由积分给出，则条件 (A) 总是成立。现在，我们给出几个必要的引理。

引理 4.4。 算子 $V_{\boldsymbol{T}}:\ \mathcal{H}\to H_K\otimes Ran\ \Delta_{\boldsymbol{T}}$由方程 (3.22)给出，且有界下方。

证明。 设 h 是 $\mathcal{H}$中的一个元素。于是，我们有

$$\langle V_{\boldsymbol{T}}h,V_{\boldsymbol{T}}h\rangle=\left\langle\sum_{\underline{s}\ge\underline{0}} a_{\underline{s}}\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})\Delta_{\boldsymbol{T}}^2\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})^*h,h\right\rangle\ge c\langle h,h\rangle.$$

这表明 $\|V_{\boldsymbol{T}}h\|\ge\sqrt{c}\|h\|$ 对每个 $h\in\mathcal{H}$都成立。因此， $V_{\boldsymbol{T}}$ 有界下方。□

注 4.5. 特别地， $V_{\boldsymbol{T}}$ 具有闭值域，因此（根据巴拿赫闭值域定理） $V_{\boldsymbol{T}}^*$也具有闭值域；于是 $Ran\ V_{\boldsymbol{T}}^*$是 $\mathcal{H}$的全体。

引理 4.6. 对于每个 $\boldsymbol{w}\in\Omega$，以下两个级数

$$\sum_{\underline{s}\ge\underline{0}} a_{\underline{s}}\sum_{\alpha=0}^{d_{\underline{s}}}\overline{\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w})}\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})\ \ and\ \sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}}\sum_{\alpha=0}^{d_{\underline{s}}}\overline{\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w})}\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})$$

在强算子拓扑下收敛。

证明。 条件 (A)意味着级数 $\sum_{s\ge 0}a_s\sum_{\alpha=0}^{d_s}\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w})\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})\otimes I_{\overline{\mathrm{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}}}}$在强算子拓扑下收敛。设 $\varepsilon>0$且 $f\in H_K\otimes\overline{\mathrm{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}}}$。那么存在$N\ge 1$ 使得——

$$\|\sum_{|\underline{s}|=N_1}^{N_2} a_{\underline{s}}\sum_{\alpha=0}^{d_{\underline{s}}}\overline{\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w})}\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})\otimes I_{\overline{\mathrm{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}}}}f\|<\varepsilon$$

对每个 $N_1,\ N_2\ge N$ 都成立。这意味着

$$\begin{aligned}&\|\sum_{|\underline{s}|=N_1}^{N_2} a_{\underline{s}}\sum_{\alpha=0}^{d_{\underline{s}}}\overline{\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w})}\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})V_{\boldsymbol{T}}^*f\|\\&=\|V_{\boldsymbol{T}}^*\sum_{|\underline{s}|=N_1}^{N_2} a_{\underline{s}}\sum_{\alpha=0}^{d_{\underline{s}}}\overline{\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w})}\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})\otimes I_{\overline{\mathrm{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}}}}f\|\\&\le\|\sum_{|\underline{s}|=N_1}^{N_2} a_{\underline{s}}\sum_{\alpha=0}^{d_{\underline{s}}}\overline{\psi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{w})}\varphi_\alpha^{\underline{s}}(\boldsymbol{M})\otimes I_{\overline{\mathrm{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}}}}f\|<\varepsilon,\ N_1,N_2\ge N.\end{aligned}$$

这里，第一个不等式成立是因为 $V_{\boldsymbol{T}}$ 是一个压缩算子。这证明级数$\sum_{s\geq 0} a_s \sum_{\alpha=0}^{d_s} \psi_\alpha^s(\boldsymbol{w})\psi_\alpha^s(\boldsymbol{T})$ 在 Ran$V_{\boldsymbol{T}}^*$上按强算子拓扑收敛。注4.5 表明 Ran $V_{\boldsymbol{T}}^*$是 $\mathcal{H}$。这证明 $\sum_{s\geq 0} a_s \sum_{\alpha=0}^{d_s} \psi_\alpha^s(\boldsymbol{w})\psi_\alpha^s(\boldsymbol{T})$ 在 $\mathcal{H}$上按强算子拓扑收敛。

类似的论证表明，级数 $\sum_{s>0} b_s \sum_{\alpha=0}^{d_s} \psi_\alpha^s(\boldsymbol{w})\psi_\alpha^s(\boldsymbol{T})$在强算子拓扑下收敛。□

回顾一下，若 K 是一个 $\mathbb{K}$-不变核，则存在一个实数序列 $\{b_s\}$ ，使得 $1-\frac{1}{K}=\sum_{s>0} b_s K_s$ 成立。这意味着

$$\left(\sum_{s\geq 0} a_s \sum_{\alpha=0}^{d_s} \overline{\psi_\alpha^s(\boldsymbol{w})}\psi_\alpha^s(\boldsymbol{T})\right)\left(I-\sum_{s>0} b_s \sum_{\alpha=0}^{d_s} \overline{\psi_\alpha^s(\boldsymbol{w})}\psi_\alpha^s(\boldsymbol{T})\right)=I. \tag{4.31}$$

对于任意 $\boldsymbol{w}\in\Omega$，令

$$K_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{T})=\sum_{s\geq 0} a_s \sum_{\alpha}^{d_s} \overline{\psi_\alpha^s(\boldsymbol{w})}\psi_\alpha^s(\boldsymbol{T}).$$

那么，对于任意 $\boldsymbol{z}\in\Omega$，我们有

$$K_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{T})^*=\sum_{s\geq 0} a_s \sum_{\alpha}^{d_s} \psi_\alpha^s(\boldsymbol{z})\psi_\alpha^s(\boldsymbol{T})^*.$$

方程（4.31）意味着

$$K_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{T})^*=\left(I-\sum_{s>0} b_s \sum_{\alpha=0}^{d_s} \psi_\alpha^s(\boldsymbol{z})\psi_\alpha^s(\boldsymbol{T})^*\right)^{-1}.$$

4.2. 特征函数。在本小节中，我们假设 K 是一个 CNP 核，并给出 $\boldsymbol{T}$ 的特征函数的一种显式构造。 K 的 CNP 性质意味着每个b_s 都必须是非负实数。令 $\tilde{\mathcal{H}}=\bigoplus_{s>0}\bigoplus_{\alpha}^{d_s}\mathcal{H}$。注意， $\tilde{\mathcal{H}}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$的可数多个副本的直和。每个 $\boldsymbol{z}\in\Omega$都会导出一个算子

$$\boldsymbol{Z}=\left(\sqrt{b_s}\psi_\alpha^{d_s}(\boldsymbol{z})I\right)_{s>0,\alpha=1}^{d_s}:\tilde{\mathcal{H}}\to\mathcal{H}, \tag{4.32}$$

将映射 $(h_\alpha^s)_{s>0,\alpha=1}^{d_s}$ 到 $\sum_{s>0}\sqrt{b_s}\sum_{\alpha=1}^{d_s}\psi_\alpha^s(\boldsymbol{z})h_\alpha^s$ 和

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{Z}\,(h_\alpha^s)_{s>0,\alpha=1}^{d_s}\|^2&=\|\sum_{s>0}\sqrt{b_s}\sum_{\alpha=1}^{d_s}\psi_\alpha^s(\boldsymbol{z})h_\alpha^s\|^2\\&\leq\left(\sum_{s>0}\sum_{\alpha=1}^{d_s} b_s|\psi_\alpha^s(\boldsymbol{z})|^2\right)\left(\sum_{s>0}\sum_{\alpha=1}^{d_s}\|h_\alpha^s\|^2\right)\\&=\left(1-\frac{1}{K(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})}\right)\left(\sum_{s>0}\sum_{\alpha=1}^{d_s}\|h_\alpha^s\|^2\right).\end{aligned}$$

这证明了 $\|\boldsymbol{Z}\| \leq \left(1 - \frac{1}{K}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})\right)^{1/2} < 1$。考虑算子

$$\tilde{\boldsymbol{T}} := \left(\sqrt{b_{\underline{s}}}\psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})\right)_{\underline{s}>\underline{0},\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} : \tilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H},$$

定义为，

$$\tilde{\boldsymbol{T}}\left((h_{\alpha}^{\underline{s}})_{\underline{s}>\underline{0},\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}\right) = \sum_{\underline{s}>\underline{0}}\sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}}\sqrt{b_{\underline{s}}}\psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})h_{\alpha}^{\underline{s}}.$$

那么，很容易验证 $\tilde{\boldsymbol{T}}^*$：$\mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}$ 由 $\tilde{\boldsymbol{T}}^* h = \left(\sqrt{b_s}\psi_{\alpha}^{s}(\boldsymbol{T})^* h\right)_{s>0,\ \alpha=1}^{d_s}, h \in \mathcal{H}$ 给出。利用 $\boldsymbol{T}$ 是一个 $\frac{1}{K}$-压缩算子这一事实，可以直接验证 $\tilde{\boldsymbol{T}}^*$ 是一个压缩算子。此外，我们有 $\Delta_{\boldsymbol{T}}^2 = I_{\mathcal{H}} - \tilde{\boldsymbol{T}}\tilde{\boldsymbol{T}}^*$. 令 $D_{\tilde{\boldsymbol{T}}} := \left(I_{\tilde{\mathcal{H}}} - \tilde{\boldsymbol{T}}^*\tilde{\boldsymbol{T}}\right)^2$ 且 $\mathcal{D}_{\tilde{\boldsymbol{T}}} := \mathrm{Ran} D_{\tilde{\boldsymbol{T}}}$。恒等式

$$\tilde{\boldsymbol{T}} D_{\tilde{\boldsymbol{T}}} = \Delta_{\boldsymbol{T}}\tilde{\boldsymbol{T}} \tag{4.33}$$

可由直接计算得出。对于每个 $\boldsymbol{z} \in \Omega$，由方程（4.32）定义的算子 $\boldsymbol{Z}$，是严格压缩算子，因此算子 $I_{\mathcal{H}} - \boldsymbol{Z}\tilde{\boldsymbol{T}}^*$ 可逆。现在，我们准备给出 $\boldsymbol{T}$ 的特征函数的定义。

定义 4.7。 $\theta_{\boldsymbol{T}}$：$\Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{D}_{\tilde{\boldsymbol{T}}}, \mathrm{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}})$ 的特征函数 $\boldsymbol{T}$ 定义为

$$\theta_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{z}) := \left(-\tilde{\boldsymbol{T}} + \Delta_{\boldsymbol{T}}(I_{\mathcal{H}} - \boldsymbol{Z}\tilde{\boldsymbol{T}}^*)^{-1}\boldsymbol{Z}D_{\tilde{\boldsymbol{T}}}\right)|_{\mathcal{D}_{\tilde{\boldsymbol{T}}}},\ \boldsymbol{z} \in \Omega, \tag{4.34}$$

其中，对每个 $\boldsymbol{z}$ 属于 Ω 的点，算子 $\boldsymbol{Z}$ 由方程 (4.32) 给出。

关系 $\boldsymbol{T}D_{\tilde{\boldsymbol{T}}} = \Delta_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{T}$ 蕴含 $\theta_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{z}) \in \mathcal{B}(\mathcal{D}_{\tilde{\boldsymbol{T}}}, \mathrm{Ran}\Delta_{\boldsymbol{T}})$，对每个 $\boldsymbol{z} \in \Omega$ 均成立。因此，$\boldsymbol{T}$ 的特征函数 $\theta_{\boldsymbol{T}}$ 是定义在 Ω 上的、取值于 $\mathcal{B}(\mathcal{D}_{\tilde{\boldsymbol{T}}}, \mathrm{Ran}\Delta_{\boldsymbol{T}})$ 的解析函数。另请注意，若 $\boldsymbol{z} \in \Omega$，则

$$\boldsymbol{Z}\tilde{\boldsymbol{T}}^* = \sum_{\underline{s}>\underline{0}} b_{\underline{s}} \sum_{\alpha=1}^{d_{\underline{s}}} \psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{z})\psi_{\alpha}^{\underline{s}}(\boldsymbol{T})^*$$

因此，我们有

$$\left(I_{\mathcal{H}} - \boldsymbol{Z}\tilde{\boldsymbol{T}}^*\right)^{-1} = K_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{T})^*.$$

以下引理的证明只需直接计算即可，因此从略。

引理 4.8。 对于任意 $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in \Omega$，有以下恒等式

$$I - \theta_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{z})\theta_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{w})^* = \frac{1}{K(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})}\Delta_{\boldsymbol{T}}\left(K_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{T})\right)^* K_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{T})\Delta_{\boldsymbol{T}}.$$

引理 4.9. 对任意 $\boldsymbol{w} \in \Omega$ 和 $\xi \in \mathrm{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}}$，我们有

$$V_{\boldsymbol{T}}^*\left(K_{\boldsymbol{w}} \otimes \xi\right) = K_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{T})\Delta_{\boldsymbol{T}}\xi,$$

其中算子 $V_{\boldsymbol{T}}$ 由方程 (3.22) 给出。

下面推论的证明可直接由引理 4.8 和引理4.9得到。

推论 4.10。 对于任意的 $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in \Omega$ 和 $\xi, \eta \in \mathrm{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}}$，我们有

$$\left\langle V_{\boldsymbol{T}}^*(K_{\boldsymbol{w}} \otimes \xi), V_{\boldsymbol{T}}^*(K_{\boldsymbol{z}} \otimes \eta)\right\rangle = K(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\left\langle\left(I - \theta_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{z})\theta_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{w})^*\right)\xi, \eta\right\rangle.$$

特征函数 $\theta_{\boldsymbol{T}}$ 的 $\boldsymbol{T}$ 导出乘法算子 $M_{\theta_{\boldsymbol{T}}}$: $H_K \otimes \mathcal{D}_{\tilde{\boldsymbol{T}}} \to H_K \otimes \mathrm{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}}$。以下定理表明，特征函数$\theta_{\boldsymbol{T}}$的 $\boldsymbol{T}$，通过定义 4.7 定义，满足定义 3.11中的恒等式。

定理 4.11. 乘法算子 $M_{\theta_{\boldsymbol{T}}}$: $H_K \otimes \mathcal{D}_{\tilde{\boldsymbol{T}}} \to H_K \otimes \boldsymbol{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}}$对应于特征函数 $\theta_{\boldsymbol{T}}$ *of* $\boldsymbol{T}$，满足以下恒等式

$$I - V_{\boldsymbol{T}} V_{\boldsymbol{T}}^* = M_{\theta_{\boldsymbol{T}}} M_{\theta_{\boldsymbol{T}}}^*.$$

证明. 证明与 [7, 定理 4.11] 的证明类似。因此，定理的证明从略。 □

作为上述定理的直接推论，我们得到以下推论。

推论 4.12. 特征函数 $\theta_{\boldsymbol{T}}$ *of* $\boldsymbol{T}$ 是Ω上的有界解析函数。特别地，$\sup_{\boldsymbol{z}\in\Omega} \|\theta_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{z})\| \leq 1$.

定义 4.13. 设 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 是分别定义在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 和$\mathcal{K}$上的两个 $\frac{1}{K}$-压缩算子。若存在酉算子 τ: $\mathcal{D}_{\tilde{\boldsymbol{T}}} \to \mathcal{D}_{\tilde{\boldsymbol{R}}}$和 τ_*:$\boldsymbol{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}} \to \boldsymbol{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{R}}$，使得 $\theta_{\boldsymbol{T}}$和 $\theta_{\boldsymbol{R}}$ 分别对应于 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{R}$的特征函数，且满足

$$\tau_* \theta_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{z}) = \theta_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{z})\tau$$

对每个 $\boldsymbol{z} \in \Omega$ 都成立。

定理 4.14。 若 $\boldsymbol{T}$ 是纯的 $\frac{1}{K}$ -压缩算子，则元组 $\boldsymbol{T}$ 与元组 $\left(P_{\mathbb{H}_{\boldsymbol{T}}}\left(M_{z_1} \otimes I_{Ran\,\Delta_{\boldsymbol{T}}}\right)|_{\mathbb{H}_{\boldsymbol{T}}}, \ldots, P_{\mathbb{H}_{\boldsymbol{T}}}\left(M_{z_d} \otimes I_{Ran\,\Delta_{\boldsymbol{T}}}\right)|_{\mathbb{H}_{\boldsymbol{T}}}\right)$ 酉等价，其中 $\mathbb{H}_{\boldsymbol{T}} := \left(H_K \otimes \boldsymbol{Ran}\,\Delta_{\boldsymbol{T}}\right) \ominus M_{\theta_{\boldsymbol{T}}}(H_K \otimes \mathcal{D}_{\tilde{\boldsymbol{T}}})$，而 $P_{\mathbb{H}_{\boldsymbol{T}}}$表示从 $H_K \otimes \boldsymbol{Ran}\ \Delta_{\boldsymbol{T}}$到 $\mathbb{H}_{\boldsymbol{T}}$的正交投影。

证明。证明与 [8, 定理 3.7] 的证明类似，因此略去 d. □

本节的主要结果如下定理，它指出，对于某些$\mathbb{K}$-不变核 K，纯的 $\frac{1}{K}$-压缩算子 $\boldsymbol{T}$ 的特征函数决定了 $\boldsymbol{T}$的酉等价类。证明思路与 [8,定理 4.4]的证明相同，因此略去证明。

定理 4.15。 设 K 是满足条件 *(A)* 的 $\mathbb{K}$-不变核。两个纯 $\frac{1}{K}$-压缩算子酉等价，当且仅当它们的特征函数相同。

References

1. J. Arazy, 《有界对称域上解析函数不变希尔伯特空间综述》, 《当代数学》, 185（1995）, 7-65。1, 2, 5, 10 2. J. Arazy, M. Engli˘s, 《嘉当域上可交换算子元组的解析模型》, 《美国数学会汇刊》355(2)（2002）837–864。8, 13, 14, 21 3. 有界对称域上的 Q_p-空间, 《函数空间及其应用》6（2008）, 205–240。5 4. N. Aronszajn：再生核理论, 《美国数学会汇刊》68（1950）, 337–404。5, 7 5. J. Agler 和 J. McCarthy, 《Pick 插值与希尔伯特函数空间》, 《数学研究生教程》44。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2002。3, 7 6. B. Bagchi 和 G. Misra, 《扭曲 Bergman 空间上乘法算子的齐次元组》, 《函数分析杂志》136（1996）, 第1期，171–213。11 7. T. Bhattacharyya，A. Jindal, 《完全 Nevanlinna-Pick 核与特征函数》, 《数学进展》426（2023）。2, 4, 10, 14, 15, 16, 19, 22, 26 8. T. Bhattacharyya，J. Eschmeier，J. Sarkar, 《纯可交换压缩元组的特征函数》, 《积分方程与算子理论》53（2005）23–32。4, 26

´9. E. Cartan, 《关于 n 个复变量空间中的有界齐次域》, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg., 11（1935）, 116-162。1 10. R. Clouˆatre, M. Hartz, 《完备 Nevanlinna-Pick 空间的乘子代数: 膨胀、边界表示与超刚性》, 《函数分析杂志》274（2018）, 1690-1738。2, 12 11. J. Faraut 和 A. Kor´anyi, 《嘉当域上的函数空间与再生核》, 《函数分析杂志》88（1990）, 64-89。5, 7, 9, 10 12. S. Ghara, S. Kumar 和 P. Pramanick, 《嘉当域上的 $\mathbb{K}$-齐次算子元组》, Israel J. Math., 247（2022）, 331-360。2¨13. T. Kaluza, 《关于互反幂级数的系数》, Math. Z., 28（1928）, 161-170。3 14. O. Loos, 《嘉当域与 Jordan 对》, 加利福尼亚大学欧文分校, 1977。1 15. B. Sz.-Nagy, C. Foias, H. Bercovici 和 L. K´erchy, 《希尔伯特空间上算子的调和分析》, 第二版, Universitext。Springer, 纽约, 2010。4 16. H. Upmeier, 《嘉当域上的 Toeplitz 算子》, 《美国数学会汇刊》280（1983）, 221-237。17. , 《对称空间上的 Jordan 代数与调和分析》, Amer. J. Math., 108（1986）, 1-25。1 18. , 《嘉当域上 K-不变 Toeplitz 算子的特征值》, 《积分方程与算子理论》93（2021）, 第27号文章。20 19. , 《多复变函数中的 Toeplitz 算子与指标理论》, Operator Theory Advances and Applications, 81, Birkh¨auser, 1996。9, 20 (M. Engliˇs)

Mathematical Institute in Opava, Silesian University in Opava, Na Rybníčku626/1, 74601, Opava, Czech Republic and Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences, Žitná 25, 11567 Prague 1, Czech Republic电子邮箱: englis@math.cas.cz（S. Hazra） Institute for Advancing Intelligence, TCG Centres for Research and Education in Science and Technology, Kolkata, India电子邮箱: somnath.hazra@tcgcrest.org（P. Pramanick） Statistics and Mathematics Unit, Indian Statistical Institute, Kolkata700108, India电子邮箱: paramitapramanick@gmail.com