量子“孪生峰”或未来光锥中的路径积分。

Vladimir V. Belokurov[*a]、Vsevolod V.Chistiakov[†a]、Klavdiia A. Lursmanashvili[‡a]和 Evgeniy T. Shavgulidze[§a]

[a]莫斯科国立罗蒙诺索夫大学。

arXiv:2603.05173v1 [math-ph] 5 Mar 2026

摘要

类比于欧几里得平面上的维纳测度（该测度在旋转群作用下保持不变，并在微分同胚群作用下拟不变），我们构造了一种在洛伦兹群作用下保持不变、在微分同胚群作用下拟不变的路径积分测度。

建立了闵可夫斯基平面未来锥中的路径与欧几里得平面覆盖空间中的路径之间的对应关系。

1 引言

在量子场论和引力理论中，存在一个问题：为了恰当地定义相应的路径积分，需要对时空度规进行解析延拓 [1],[2]。考虑如下形式的路径积分

$$K(x,y,T)=\int \delta(\xi(0)-x)\,\delta(\xi(T)-y)\,\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T d\tau\ \left[(\dot{\xi}^0)^2-(\dot{\xi}^1)^2\right]\right)\,d\xi \qquad (1)$$

它出现在描述相对论性粒子从时空中的一点 x 传播到另一点 y 的过程中。形式上，由于存在一个在无穷远处增长的因子 $\sim\exp\left(+\frac{1}{2}\int d\tau(\dot{\xi}^1)^2\right)$，形式为 (1) 的积分并不存在。标准方法是考虑如下形式的积分

$$K_\alpha(x,y,T)=\int \delta(\xi(0)-x)\,\delta(\xi(T)-y)\,\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T d\tau\ \left[(\dot{\xi}^0)^2+\alpha(\dot{\xi}^1)^2\right]\right)\,d\xi\,, \qquad (2)$$

该积分依赖于复参数 α。对于正实数 α，积分 (2) 表示关于维纳测度 [4]的积分。形式为 (1) 的积分被假定为：先取在 $\alpha>0$处求值的积分 (2)，再将其解析延拓至 $\alpha=-1$。

本文利用维纳测度在微分同胚群 [6]-[8] 的轨道上的分解，构造了定义在位于

*vvbelokurov@yandex.ru
†vsevolod.chistyakov@gmail.com
‡klavo4ka2001@gmail.com§shavgulidze@bk.ru

闵可夫斯基平面的未来锥内的轨迹空间上的测度。该测度在洛伦兹变换下不变，并在微分同胚群作用下准不变。

在第 2—3 节中，我们回顾一维和二维欧几里得空间中轨迹的维纳测度的一些已知性质。在第 4 节中，我们构造未来锥内轨迹的测度。在第 5 节中，我们讨论圆锥与欧几里得平面的无限层覆盖之间的等距映射。在第 6 节中，我们讨论所得结果及其一些可能的应用。附录 A 给出了用于表述因果性性质的映射的显式表达式。附录 B 证明了所得测度在笛卡尔坐标和分解坐标下的形式等价。

2 位于 $\mathbb{R}$ 上的轨迹的维纳测度

考虑连续函数空间 $C([0,T])$ 上的维纳测度

$$w_\sigma(d\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\int_0^T \dot{\xi}^2(\tau)\,d\tau\right) d\xi\,. \tag{3}$$

我们假设随机过程 $\xi(\tau)$ 的左端点不固定。

空间 $C([0,T])$ 上的维纳测度可直接转化为空间 $C([t_0,t_0+T])$ 上的测度。具体而言，设 X' 是 $C([t_0,t_0+T])$ 的一个博雷尔子集， w'_σ 是 $C([t_0,t_0+T])$ 上的维纳测度。我们将自变量平移变换 $\mathcal{T}_{t_0}\colon\ C([t_0,t_0+T]) \to C([0,T])$ 定义为

$$(\mathcal{T}_{t_0}\xi)(\tau) \equiv \xi(\tau+t_0). \tag{4}$$

对每个元素 $\xi \in X'$ 应用这一变换，我们得到集合

$$\mathcal{T}_{t_0}X' \equiv \{\mathcal{T}_{t_0}\xi\,;\,\xi\in X'\}\,, \qquad \mathcal{T}_{t_0}X' \subset C([0,T]). \tag{5}$$

任意博雷尔子集的维纳测度在自变量平移下保持不变

$$w'_\sigma(X') = w_\sigma(\mathcal{T}_{t_0}X')\,. \tag{6}$$

在随机过程理论中， [4], 已证明，对于任意 $t^*\in[0,T]$，维纳过程 $\xi(\tau)$ 在区间 $[t^*,T]$ 上的取值与同一过程在区间 $[0,t^*)$ 上的取值相互独立，并且只取决于 $\xi^*=\xi(t^*)$。

考虑形如 $\mathcal{X}\subset C([0,t^*])\times C([t^*,T])$ 的集合

$$\mathcal{X} = \{(\xi_1,\xi_2)\in C([0,t^*])\times C([t^*,T])\,;\,\xi_1(t^*)=\xi_2(t^*)\}\,. \tag{7}$$

我们如下构造一一对应关系 $\Xi\colon\ \mathcal{X}\to C([0,T])$

$$\xi = \Xi(\xi_1,\xi_2) \equiv \begin{cases} \xi_1(\tau) & \tau\in[0,t^*] \\ \xi_2(\tau) & \tau\in[t^*,T]\,. \end{cases} \tag{8}$$

换言之，我们将区间上的过程 $\xi(\tau)$ 分解为分别定义在区间 $[0,t^*]$ 和 $[t^*,T]$ 上的两个子过程。

设定空间 $C([0,T])$ 上的任意泛函 $F(\xi)$。我们按如下方式在空间 $C([0,t^*])\times C([t^*,T])$ 上构造泛函 $\tilde{F}(\xi_1,\xi_2)$。如果 $(\xi_1,\xi_2)\in\mathcal{X}$，则定义

$$\tilde{F}(\xi_1,\xi_2) = F(\Xi(\xi_1,\xi_2))\,. \tag{9}$$

我们将 $\tilde{F}$ 扩展到空间 $C([0,t^*])\times C([t^*,T])$，并要求该泛函在第二个自变量平移一个常数时保持不变

$$\tilde{F}(\xi_1,\xi_2+c) = \tilde{F}(\xi_1,\xi_2)\,. \tag{10}$$

令 w_σ^1 为 $C([0,t^*])$上的维纳测度，并令 w_σ^2 为 $C([t^*,T])$上的维纳测度。于是

$$\int F(\xi)\, w_\sigma(d\xi) = \int \tilde{F}(\xi_1,\xi_2)\, \delta(\xi_1(t^*) - \xi_2(t^*))\, w_\sigma^1(d\xi_1)\, w_\sigma^2(d\xi_2)\,. \tag{11}$$

关于微分同胚群的拟不变性。
设微分同胚群 $Diff_+^1[0,T]$ 在空间 $C([0,T])$ 上的群作用由[1]给出

$$(\varphi\xi)(\tau) = \frac{\xi(\varphi^{-1}(\tau))}{\sqrt{\dot{\varphi}^{-1}(\tau)}}\,, \qquad \varphi \in Diff_+^1[0,T]\,. \tag{12}$$

维纳测度在群 $Diff_+^1([0,T])$ 的作用下是拟不变的。即 [5]

$$w_\sigma(d(\varphi\xi)) = \mathcal{P}_\varphi(\xi) w_\sigma(d\xi)\,. \tag{13}$$

这里，

$$\mathcal{P}_\varphi(\xi) = \sqrt[4]{\dot{\varphi}(0)\dot{\varphi}(T)}\, \exp\left(\frac{1}{4}\left[(\xi(T))^2\frac{\ddot{\varphi}(T)}{\dot{\varphi}(T)} - (\xi(0))^2\frac{\ddot{\varphi}(0)}{\dot{\varphi}(0)}\right]\right) \exp\left(\frac{1}{4}\int_0^T d\tau\ (\xi(\tau))^2 \mathcal{S}ch\{\varphi,\tau\}\right) \tag{14}$$

是拉东-尼科迪姆导数，并且

$$\mathcal{S}ch\{\varphi,\tau\} \equiv \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}\right)^2 \tag{15}$$

是施瓦西导数。

维纳测度在以下对象的轨道上的分解： $Diff_+^1([0,T])$ 令 $C_+([0,T]) \subset C([0,T])$ 表示区间 $[0,T]$ 上连续正函数构成的空间。$C_+([0,T])$ 分解为群 $Diff_+^1([0,T])$ [6], [7],[8] 的作用 (12) 所生成的轨道，并具有确定的群不变量值

$$\frac{1}{\rho^2} \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \frac{d\tau}{\xi^2(\tau)}\,. \tag{16}$$

利用空间 $C_+[0,T]$ 按群$Diff_+^1([0,T])$作用的轨道进行分解，我们将函数 $\xi(\tau) \in C_+([0,T])$ 表示如下。在每个具有确定 ρ值的轨道上，我们考虑常函数 $\xi_\rho(\tau) = \rho$。轨道中的所有其他元素均可通过微分同胚群对 ξ_ρ 施加作用 (12) 得到。因此，任意元素$\xi(\tau) \in C_+[0,T]$ 都可以表示为 [7]

$$\xi(\tau) = (\varphi\tilde{\xi}_\rho)(\tau) = \rho\frac{1}{\sqrt{\dot{\varphi}^{-1}(\tau)}}\,. \tag{17}$$

对于每个元素 $\xi \in C_+([0,T])$，我们都唯一地关联一对分解坐标 (ρ,φ)，其中 $\rho \in \mathbb{R}^+$，$\varphi \in Diff_+^1([0,T])$ 按照以下规则

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{d\tau_1}{\xi^2(\tau_1)}\,, \qquad \varphi^{-1}(\tau) = \frac{\int_0^\tau \frac{d\tau_1}{\xi^2(\tau_1)}}{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{d\tau_1}{\xi^2(\tau_1)}}\,. \tag{18}$$

空间 $C_+[0,T]$ 上的维纳测度可以表示为关于群 $Diff_+^1([0,T])$作用轨道的分解 [7]

$$w_\sigma(d\xi) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4\rho^2}\right)\ (\dot{\varphi}(0)\dot{\varphi}(T))^{3/4}\, \mu_{\frac{2\sigma}{\rho}}(d\varphi)\, d\rho\,, \tag{19}$$

[1]这里 $\dot{\varphi}^{-1}(\tau) \equiv \frac{d}{d\tau}\varphi^{-1}(\tau)$

其中 μ 是微分同胚群 [9], [10上的准不变测度]

$$\mu_\sigma(d\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\dot\varphi(0)\dot\varphi(T)}} \exp\left\{\frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{\ddot\varphi(0)}{\dot\varphi(0)} - \frac{\ddot\varphi(T)}{\dot\varphi(T)}\right]\right\} \exp\left\{\frac{1}{\sigma^2}\int_0^T \mathcal{S}ch\{\varphi,\tau\}\, d\tau\right\} d\varphi\,. \tag{20}$$

这里的符号 $d\varphi$表示群 $Diff_+^1([0,T])$ 上的广义哈尔测度

$$d\varphi \equiv \prod_{\tau_i\in[0,T]} \frac{d\varphi(\tau_i)}{\dot\varphi(\tau_i)}\,. \tag{21}$$

让我们用分解坐标重写 (11)。与公式 (11) 中一样，我们将区间 $[0,T]$ 上的随机过程拆分为分别定义在区间 $[0,t^*]$ 和 $[t^*,T]$ 上的两个子过程。我们用分解坐标表示每个子过程

$$\xi_1(\tau) = \rho_1 \frac{1}{\sqrt{\dot\varphi_1^{-1}(\tau)}}\,, \qquad \xi_2(\tau) = \rho_2 \frac{1}{\sqrt{\dot\varphi_2^{-1}(\tau)}}\,, \tag{22}$$

其中 $\varphi_1 \in Diff_+^1([0,t^*])$, $\varphi_2 \in Diff_+^1([t^*,T])$。

分解坐标 (ρ_1,φ_1) 和 (ρ_2,φ_2)，通过一一映射，表示为原始过程 $\xi(\tau)$ 的分解坐标 (ρ,φ) 的函数

$$(\rho,\varphi) = \Omega(\rho_1,\varphi_1,\rho_2,\varphi_2)\,. \tag{23}$$

映射 Ω 及其逆映射 Ω^{-1} 的显式形式见附录 A。

设 $\Phi(\rho,\varphi)$ 是定义在 $\mathbb{R}^+ \times Diff_+^1$ 上的泛函。我们构造 $\mathbb{R}^+ \times Diff_+^1([0,t^*]) \times \mathbb{R}^+ \times Diff_+^1([t^*,T])$ 上的泛函 $\tilde\Phi$，根据规则

$$\tilde\Phi(\rho_1,\varphi_1,\rho_2,\varphi_2) = \Phi(\Omega(\rho_1,\varphi_2,\rho_2,\varphi_2)). \tag{24}$$

设 μ_σ^1为群 $Diff([0,t^*])$上的准不变测度 (20)， μ_σ^2为群 $Diff_+^1([t^*,T])$上的准不变测度。以下等式成立

$$\int \Phi(\rho,\varphi)\, \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4\rho^2}\right)\, (\dot\varphi(0)\dot\varphi(T))^{3/4}\, \mu_{\frac{2\sigma}{\rho}}(d\varphi)\, d\rho = \tag{25}$$

$$= \int \tilde\Phi(\rho_1,\varphi_1,\rho_2,\varphi_2)\, \delta\left(\rho_1\sqrt{\dot\varphi_1(t^*)} - \rho_2\sqrt{\dot\varphi_2(t^*)}\right)\, \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4\rho_1^2} - \frac{\sigma^2}{4\rho_2^2}\right)$$
$$(\dot\varphi_1(0)\dot\varphi_1(t^*)\dot\varphi_2(t^*)\dot\varphi_2(T))^{3/4}\, \mu^1_{\frac{2\sigma}{\rho_1}}(d\varphi_1)\, \mu^2_{\frac{2\sigma}{\rho_2}}(d\varphi_2)\, d\rho_1\, d\rho_2\,.$$

3 欧几里得平面上轨迹的维纳测度

现在考虑连续函数 $\xi(\tau) = (\xi^0(\tau)\ \xi^1(\tau))$构成的空间 $C([0,T],\ \mathbb{R}^2)$，这些函数定义在 $[0,T]$上，取值于 $\mathbb{R}^2$。在这个空间上，维纳测度定义如下

$$w_\sigma(d\xi) = w_\sigma(d\xi^0)\, w_\sigma(d\xi^1) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\int_0^T d\tau\, \left[(\dot\xi^0(\tau))^2 + (\dot\xi^1(\tau))^2\right]\right) d\xi^0\, d\xi^1\,. \tag{26}$$

测度 (26) 在群 $SO(2)$ 下是不变量

$$w_\sigma(d(R_\gamma\xi)) = w_\sigma(d\xi)\,, \tag{27}$$

其中

$$R_\gamma \in SO(2)\,, \qquad R_\gamma \xi(\tau) \equiv \left(\xi^0(\tau)\cos\gamma - \xi^1(\tau)\sin\gamma,\, \xi^0(\tau)\sin\gamma + \xi^1(\tau)\cos\gamma\right)\,. \tag{28}$$

与 $C([0,T])$ 上的维纳测度类似，测度 (26) 具有因果性，并且对于群 $Diff_+^1([0,T])$ 的群作用具有拟不变性。要定义微分同胚群 $Diff_+^1([0,T])$ 在 $C([0,T],\ \mathbb{R}^2)$ 上的群作用，使用由下式定义的极坐标会比较方便:

$$\xi^0(\tau) = r(\tau)\cos\theta(\tau)\,, \qquad \xi^1(\tau) = r(\tau)\sin\theta(\tau)\,. \tag{29}$$

群 $Diff_+^1([0,T])$ 的作用为

$$(\varphi\xi)(\tau) = \left(\frac{r(\varphi^{-1}(\tau))}{\sqrt{\dot\varphi^{-1}(\tau)}}\cos\theta(\varphi^{-1}(\tau)), \frac{r(\varphi^{-1}(\tau))}{\sqrt{\dot\varphi^{-1}(\tau)}}\sin\theta(\varphi^{-1}(\tau))\right)\,. \tag{30}$$

注意，由 (30) 定义的群 $Diff_+^1([0,T])$ 的作用与旋转群的作用可交换

$$R_\gamma\varphi\xi = \varphi R_\gamma\xi \tag{31}$$

微分同胚群 (30) 的群作用的不变量具有如下形式

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{d\tau}{(\xi^0(\tau))^2 + (\xi^1(\tau))^2}\,. \tag{32}$$

对于每个轨道，考虑群 $Diff_+^1([0,T])$ 的群作用轨道中的一个形如 [8 的元素]

$$\tilde\xi_{\rho,\psi,\alpha}(\tau) = \left(\rho\cos\left[\psi(\tau)+\alpha\right], \rho\sin\left[\psi(\tau)+\alpha\right]\right)\,, \tag{33}$$

其中 $\psi(\tau) \in C_0([0,T]),\ \ \alpha \in S^1$。这里，$C_0([t_0,t_0+T])$ 是左端点固定为 $\xi(t_0) = 0$ 的连续函数空间，而 $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 是圆。

任意函数 $\xi \in C([0,T],\ \mathbb{R}^2)$ 都可以通过公式 (30) 由形如 (33) 的函数得到

$$\xi = (\varphi\tilde\xi_{\rho,\psi,\alpha})(\tau) = \left(\frac{\rho}{\sqrt{\dot\varphi^{-1}(\tau)}}\cos\left[\psi(\varphi^{-1}(\tau))+\alpha\right]\,, \frac{\rho}{\sqrt{\dot\varphi^{-1}(\tau)}}\sin\left[\psi(\varphi^{-1}(\tau))+\alpha\right]\right)\,. \tag{34}$$

因此，存在一一对应关系

$$\xi \longleftrightarrow (\rho,\psi,\varphi,\alpha)\,, \tag{35}$$

其中 $\xi(\tau) \in C([0,T],\ \mathbb{R}^2),\ \ \rho\in\mathbb{R}^+,\ \ \psi\in C_0([0,T]),\ \ \varphi\in Diff_+^1([0,T]),\ \ \alpha\in S^1$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{d\tau_1}{(\xi^0(\tau_1))^2 + (\xi^1(\tau_1))^2}\,, \qquad \varphi^{-1}(\tau) = \frac{\int_0^\tau \frac{d\tau_1}{(\xi^0(\tau_1))^2+(\xi^1(\tau_1))^2}}{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{d\tau_1}{(\xi^0(\tau_1))^2+(\xi^1(\tau_1))^2}}\,, \tag{36}$$

$$\psi(s) = \arg z(\varphi(s)) - \arg z(0)\,, \qquad \alpha = \mathrm{Arg}\, z(0)\,, \tag{37}$$

其中

$$z(\tau) = \xi^0(\tau) + i\xi^1(\tau)\,. \tag{38}$$

群 $Diff_+^1([0,T])$ (30) 的群作用轨道上的维纳测度分解形式为 [8]

$$w_\sigma(d\xi) = \rho\exp\left(-\frac{\sigma^2}{4\rho^2}\right)\,\dot\varphi(0)\dot\varphi(T)\,\mu_{\frac{2\sigma}{\rho}}(d\varphi)\,w^0_{\frac{\sigma}{\rho}}(d\psi)\,d\rho\,d\alpha\,. \tag{39}$$

这里， w_σ^0 是空间 $C_0([0,T])$ 上的维纳测度。

群 $SO(2)$ 在分解坐标上的作用如下

$$R_\gamma(\rho,\psi,\varphi,\alpha) \longleftrightarrow (\rho,\psi,\varphi,\alpha+\gamma)\,. \tag{40}$$

测度 (39) 的不变性显而易见。

在二维情形中，存在一个与 (25) 类似的恒等式。我们将随机过程 $\xi \in C([0,T],\ \mathbb{R}^2)$ 分成两个子过程：令 $\xi_1(\tau)$ 在区间$[0,t^*]$上与 $\xi(\tau)$ 重合，并令 $\xi_2(\tau)$ 在区间 $[t^*,T]$ 上与 $\xi(\tau)$ 重合。我们为每个子过程关联一组分解坐标

$$\xi_1 \longleftrightarrow (\rho_1,\psi_1,\varphi_1,\alpha_1)\,, \qquad \xi_2 \longleftrightarrow (\rho_2,\psi_2,\varphi_2,\alpha_2) \tag{41}$$

坐标 $(\rho_1,\ \psi_1,\ \varphi_1,\ \alpha_1)$ 和 $(\rho_2,\ \psi_2,\ \varphi_2,\ \alpha_2)$ 可唯一地用原始过程的坐标 $(\rho,\ \psi,\ \varphi,\ \alpha)$ 表示

$$(\rho,\psi,\varphi,\alpha) = \Omega^{\mathbb{R}^2}(\rho_1,\psi_1,\varphi_1,\alpha_1,\rho_2,\psi_2,\varphi_2,\alpha_2) \tag{42}$$

$\Omega^{\mathbb{R}^2}$ 的显式形式见附录 A。设 $\Phi(\rho,\ \psi,\ \varphi,\ \alpha)$ 是定义在$\mathbb{R}^+ \times C_0([0,T]) \times Diff_+^1([0,T]) \times S^1$ 上的任意泛函。我们按如下方式构造泛函 $\tilde{\Phi}(\rho_1,\ \psi_1,\ \varphi_1,\ \alpha_1,\ \rho_2,\ \psi_2,\ \varphi_2,\ \alpha_2)$

$$\tilde{\Phi}(\rho_1,\psi_1,\varphi_1,\alpha_1,\rho_2,\psi_2,\varphi_2,\alpha_2) = \Phi(\Omega^{\mathbb{R}^2}(\rho_1,\psi_1,\varphi_1,\alpha_1,\rho_2,\psi_2,\varphi_2,\alpha_2))\,. \tag{43}$$

令 μ_σ^1为 $Diff_+^1([0,t^*])$ 上的准不变测度， μ_σ^2为 $Diff_+^1([t^*,T])$ 上的准不变测度， w_σ^{01}为 $C_0([0,t^*])$ 上的维纳测度， w_σ^{02}为$C_0([t^*,T])$ 上的维纳测度。以下等式成立

$$\int \Phi(\rho,\varphi,\psi,\alpha)\ \rho\ \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4\rho^2}\right)\ \dot\varphi(0)\dot\varphi(T)\,\mu_{\frac{2\sigma}{\rho}}(d\varphi)\,w^0_{\frac{\sigma}{\rho}}(d\psi)\,d\rho\,d\alpha = \tag{44}$$

$$= \int \tilde\Phi(\rho_1,\varphi_1,\psi_1,\alpha_1,\rho_2,\varphi_2,\psi_2,\alpha_2)\frac{\delta\left(\rho_1\sqrt{\dot\varphi_1(t^*)}-\rho_2\sqrt{\dot\varphi_2(t^*)}\right)}{\rho_1\sqrt{\dot\varphi_1(t^*)}}\sum_n \delta\left(\alpha_2-\psi_1(t^*)-\alpha_1-2\pi n\right)$$

$$\rho_1\rho_2\ \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4\rho_1^2}-\frac{\sigma^2}{4\rho_2^2}\right)\ \dot\varphi_1(0)\dot\varphi_1(t^*)\dot\varphi_2(t^*)\dot\varphi_2(T)$$

$$\mu^1_{\frac{2\sigma}{\rho_1}}(d\varphi_1)\mu^2_{\frac{2\sigma}{\rho_2}}(d\varphi_2)\,w^{01}_{\frac{\sigma}{\rho_1}}(d\psi_1)\,w^{02}_{\frac{\sigma}{\rho_2}}(d\psi_2)\,d\rho_1\,d\rho_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,.$$

4 未来锥中轨迹上的测度

我们如下定义平面中的未来锥

$$\mathrm{Cone} = \{(x^0,x^1)\in\mathbb{R}^2\,,\ x^0>0, |x^1|<x^0\}\,, \qquad \mathrm{Cone}\subset\mathbb{R}^2\,. \tag{45}$$

令 $C([0,T],\ \mathrm{Cone})$ 为以 Cone 为取值的连续函数 $\xi(\tau)$ 的空间。与我们考察 $SO(2)$ 在二维欧几里得平面上的群作用的方式类似，我们考察群 $SO(1,\ 1)$（洛伦兹群）在 Cone 上的群作用

$$L_\gamma\xi(\tau) = (\,\xi^0(\tau)\,\cosh\gamma + \xi^1(\tau)\,\sinh\gamma,\,\xi^0(\tau)\,\sinh\gamma + \xi^1(\tau)\,\cosh\gamma) \tag{46}$$

我们通过以下关系定义闵可夫斯基坐标 r,θ

$$\xi^0 = r(\tau)\cosh(\theta(\tau))\,, \qquad \xi^1 = r(\tau)\sinh(\theta(\tau))\,. \tag{47}$$

在sp上 ace $C([0,T],$圆锥$)$，我们将微分同胚群的群作用定义如下

$$(\varphi\xi)(\tau)=\left(\frac{r(\varphi^{-1}(\tau))}{\sqrt{\dot{\varphi}^{-1}(\tau)}}\cosh\theta(\varphi^{-1}(\tau)),\ \frac{r(\varphi^{-1}(\tau))}{\sqrt{\dot{\varphi}^{-1}(\tau)}}\sinh\theta(\varphi^{-1}(\tau))\right). \tag{48}$$

它与洛伦兹变换（46）对易

现在，该积分

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{d\tau}{(\xi^0(\tau))^2-(\xi^1(\tau))^2} \tag{49}$$

在变换（48）下是不变的。在群 $Diff_+^1([0,T])$ 的群作用的每条轨道上，我们选取一个形如

$$\tilde{\xi}_{\rho,\psi}=(\rho\cosh\psi(\tau),\rho\sinh\psi(\tau)), \tag{50}$$

其中 $\psi\in C([0,T])$。任意元素 $\xi\in C([0,T],$圆锥$)$ 都可通过变换（48）由形如（50）的元素得到。

$$\xi(\tau)=(\varphi\tilde{\xi}_{\rho,\psi})(\tau)=\left(\frac{\rho}{\sqrt{\dot{\varphi}^{-1}(\tau)}}\cosh\psi(\varphi^{-1}(\tau)),\ \frac{\rho}{\sqrt{\dot{\varphi}^{-1}(\tau)}}\sinh\psi(\varphi^{-1}(\tau))\right) \tag{51}$$

因此，每个元素 $\xi\in C([0,T],$圆锥$)$ 对应于一个三元组 (ρ,ψ,φ)，其中 $\rho>0$, $\psi(\tau)\in C([0,T])$，$\varphi\in Diff_+^1([0,T])$

$$\xi\longleftrightarrow(\rho,\psi,\varphi). \tag{52}$$

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{d\tau_1}{(\xi^0(\tau_1))^2-(\xi^1(\tau_1))^2},\qquad \varphi^{-1}(\tau)=\frac{\int_0^\tau\frac{d\tau_1}{(\xi^0(\tau_1))^2-(\xi^1(\tau_1))^2}}{\frac{1}{T}\int_0^T\frac{d\tau_1}{(\xi^0(\tau_1))^2-(\xi^1(\tau_1))^2}}, \tag{53}$$

$$\psi(s)=\operatorname{arctanh}\left(\frac{\xi^1(\varphi(s))}{\xi^0(\varphi(s))}\right).$$

很容易验证该关系的有效性

$$L_\gamma(\rho,\psi,\varphi)\longleftrightarrow(\rho,\psi+\gamma,\varphi). \tag{54}$$

类比于 $C([0,T],\mathbb{R}^2)$ 上的维纳测度，这一对应关系使我们能够通过对微分同胚群的轨道进行分解，在 $C([0,T],$圆锥$)$ 上定义一个测度

$$\tilde{w}_\sigma(d\xi)=\rho\exp\left(-\frac{\sigma^2}{4\rho^2}\right)\dot{\varphi}(0)\dot{\varphi}(T)\mu_{\frac{2\sigma}{\rho}}(d\varphi)w_{\frac{\sigma}{\rho}}(d\psi)d\rho \tag{55}$$

现在，根据式 (54)，测度 $\tilde{w}_\sigma$ (55) 在变换 (46) 下的不变性显而易见。

在笛卡尔坐标 $\xi^0(\tau)$、$\xi^1(\tau)$ 中，测度 $\tilde{w}_\sigma$ 具有如下形式（见附录 B）

$$\tilde{w}_\sigma(d\xi)=\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\int_0^T\langle\dot{\xi},\dot{\xi}\rangle\ d\tau\right)d\xi, \tag{56}$$

其中

$$\langle\dot{\xi},\dot{\xi}\rangle\equiv(\dot{\xi}^0)^2-(\dot{\xi}^1)^2+2\frac{(\xi^0\dot{\xi}^1-\xi^1\dot{\xi}^0)^2}{(\xi^0)^2-(\xi^1)^2}. \tag{57}$$

对于构造的测度 $\tilde{w}_\sigma$，存在一个类似于 (25)、(44) 的等式。我们将随机过程 $\xi\in C([0,T],\mathbb{R}^2)$ 分成两个子过程：令 $\xi_1(\tau)$ 在区间 $[0,t^*]$ 上与 $\xi(\tau)$ 重合，并令 $\xi_2(\tau)$ 在区间 $[t^*,T]$ 上与 $\xi(\tau)$ 重合。我们为每个子过程关联如下分解坐标集

$$\xi_1\longleftrightarrow(\rho_1,\psi_1,\varphi_1),\qquad \xi_2\longleftrightarrow(\rho_2,\psi_2,\varphi_2). \tag{58}$$

坐标 $(\rho_1, \psi_1, \varphi_1)$ 和 $(\rho_2, \psi_2, \varphi_2)$ 可唯一地表示为原始过程的坐标 (ρ, ψ, φ) 的函数

$$(\rho, \psi, \varphi) = \Omega^{\mathrm{Cone}}(\rho_1, \psi_1, \varphi_1, \rho_2, \psi_2, \varphi_2) \tag{59}$$

（Ω^{Cone} 的显式形式见附录 A）。设 $\Phi(\rho,\ \psi,\ \varphi)$ 是定义在$\mathbb{R}^+ \times C([0,T]) \times Diff_+^1([0,T])$上的任意泛函。我们构造泛函 $\tilde{\Phi}(\rho_1,\ \psi_1,\ \varphi_1,\ \rho_2,\ \psi_2,\ \varphi_2)$ 如下

$$\tilde{\Phi}(\rho_1, \psi_1, \varphi_1, \rho_2, \psi_2, \varphi_2) = \Phi(\Omega^{\mathrm{Cone}}(\rho_1, \psi_1, \varphi_1, \rho_2, \psi_2, \varphi_2))\,. \tag{60}$$

设 μ_σ^1 是 $Diff_+^1([0,t^*])$上的准不变测度，μ_σ^2是$Diff_+^1([t^*,T])$上的准不变测度，w_σ^1是 $C([0,t^*])$上的维纳测度，w_σ^2是 $C([t^*,T])$上的维纳测度。则下列等式成立

$$\int \Phi(\rho,\varphi,\psi)\ \rho \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4\rho^2}\right)\ \dot\varphi(0)\dot\varphi(T)\,\mu_{\frac{2\sigma}{\rho}}(d\varphi)\,w_{\frac{\sigma}{\rho}}(d\psi)\,d\rho = \tag{61}$$

$$= \int \tilde\Phi(\rho_1,\varphi_1,\psi_1,\rho_2,\varphi_2,\psi_2)\frac{\delta\left(\rho_1\sqrt{\dot\varphi_1(t^*)}-\rho_2\sqrt{\dot\varphi_2(t^*)}\right)}{\rho_1\sqrt{\dot\varphi_1(t^*)}}\delta\left(\psi_2(t^*)-\psi_1(t^*)\right)$$

$$\rho_1\rho_2\ \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4\rho_1^2}-\frac{\sigma^2}{4\rho_2^2}\right)\ \dot\varphi_1(0)\dot\varphi_1(t^*)\dot\varphi_2(t^*)\dot\varphi_2(T)$$

$$\mu^1_{\frac{2\sigma}{\rho_1}}(d\varphi_1)\,\mu^2_{\frac{2\sigma}{\rho_2}}(d\varphi_2)\,w^1_{\frac{\sigma}{\rho_1}}(d\psi_1)\,w^2_{\frac{\sigma}{\rho_2}}(d\psi_2)\,d\rho_1\,d\rho_2\,.$$

5 平面的无限层覆盖上的随机过程

5.1 圆锥上的度量及其性质

二次型（57）在圆锥上定义了一个度量。下面描述这个度量的性质。线元的形式为[2]

$$ds^2 \equiv \langle dx, dx\rangle = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 + 2\frac{(x^0dx^1 - x^1dx^0)^2}{(x^0)^2-(x^1)^2}\ = \tag{62}$$

$$= \frac{(x^0)^2+(x^1)^2}{(x^0)^2-(x^1)^2}\left((dx^0)^2+(dx^1)^2\right) - 4\frac{x^0x^1}{(x^0)^2-(x^1)^2}dx^0dx^1\ =$$

$$= x^+x^-\left(\left(\frac{dx^+}{x^+}\right)^2+\left(\frac{dx^-}{x^-}\right)^2\right) =$$

$$= e^{l^+ + l^-}\left((dl^+)^2+(dl^-)^2\right),$$

其中

$$x^\pm = \frac{x^0 \pm x^1}{\sqrt{2}} \tag{63}$$

and

$$l^\pm = \ln x^\pm\,. \tag{64}$$

在闵可夫斯基坐标 $(r,\ \theta)$ 中

$$x^0 = r\cosh\theta\,, \qquad x^1 = r\sinh\theta\,. \tag{65}$$

度量 (62) 看起来像 $\mathbb{R}^2$ 上的欧几里得度量

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2\,. \tag{66}$$

注意，在方程 (65)、(66) 中，“角”坐标 θ 是实数值 ($\theta \in \mathbb{R}$)。

[2]这里我们定义 将圆锥上的坐标记为（x^0，x^1）。字母 ξ 用于表示 Co 上的一个随机过程 ne

5.2 圆锥到平面的无限层覆盖的等距映射

赋予度量（62）的圆锥空间可以双射等距映射到平面的无限层覆盖上。具体而言，考虑一组平面

$$\Pi_n = \{(r,\theta)|r>0, \theta\in[0,2\pi)\}\,, \tag{67}$$

其中，平面 Π_n 上的每个点由一对极坐标给出：到原点 r 的距离和极角 θ。在每个平面 Π_n上，都定义了形式为 (66) 的欧几里得度量。在所有平面 Π_n上，我们沿方向 $\theta=0$ 开一道切口，并沿这些切口将各平面粘合起来，使得平面 Π_n上的一个点绕原点逆时针旋转一整周后，落在平面 Π_{n+1}上。换言之，我们令

$$\lim_{\theta\to 2\pi}(r,\theta)_n = (r,0)_{n+1}\,. \tag{68}$$

以这种方式粘合在一起的平面集合记作 Cover，称为平面的无限层覆盖。Cover 中的每个点都可以用三元组 (r,θ,n) 表示，其中 r,θ 是平面 Π_n之一上的极坐标，且 $\theta\in[0,2\pi)$，而 n 是平面编号。另一种表示方法是用一对 (r,θ) 来指定一个点，其中 $\theta\in\mathbb{R}$，并约定，如果 $2\pi n\le\theta<2\pi(n+1)$，则该点属于 Π_n，且其在Π_n 上的极角为 $\theta-2\pi n$。

因此，覆盖空间中的每个点都由两个坐标 $r\in\mathbb{R}^+$、$\theta\in\mathbb{R}$ 确定。覆盖空间上的度量继承自各个平面 Π_n，因此具有形式 (66)。容易看出，圆锥与覆盖空间之间存在一一对应关系，这种对应关系是通过逐坐标匹配各点建立的

$$(r,\theta)\in\text{Cone}\longleftrightarrow(r,\theta)\in\text{Cover}\,. \tag{69}$$

这种对应关系是等距的，因为圆锥 (66) 上的度量与覆盖空间 (66) 上的度量一致。在此映射下，每个平面 Π_n 都对应圆锥上的一个扇形（即图 1 中红色虚线之间围成的扇形）。

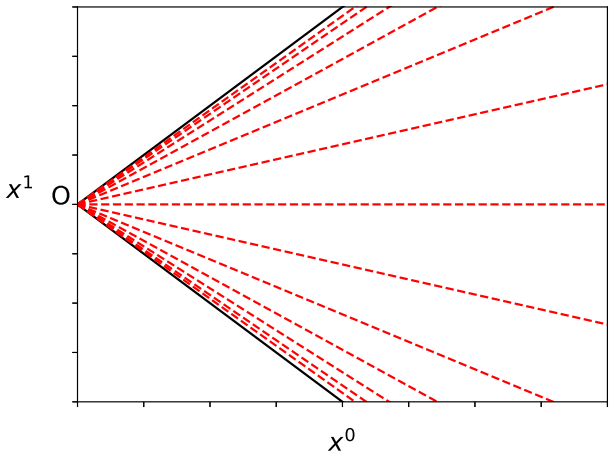


图1

5.3 圆锥上的测地线

考虑 关于测度 $\tilde{w}_\sigma$ 对如下形式的泛函积分

$$K(A,B)=\int \delta(\xi(0)-A)\delta(\xi(T)-B)\tilde{w}_\sigma(d\xi)\,, \tag{70}$$

其中 A、 B 是圆锥上的两个固定点。此类积分在量子场论中经常出现，并描述粒子从点 A 到点 B的传播。当 $\sigma\to 0$（它类似于半经典近似）时，众所周知，形如(70)的积分的主要贡献由度量(62)的测地线给出。因此，考虑以下问题。设圆锥上给定两点：具有伪极坐标(r_A,θ_A)的 A，以及具有伪极坐标(r_B,θ_B)的 B。经过这两点的测地线是什么样子？结果表明，测地线会随角距离 $|\theta_A-\theta_B|$而呈现定性不同的形式。让我们考虑三种情形。

情形1： $|\theta_A-\theta_B|\le\pi$

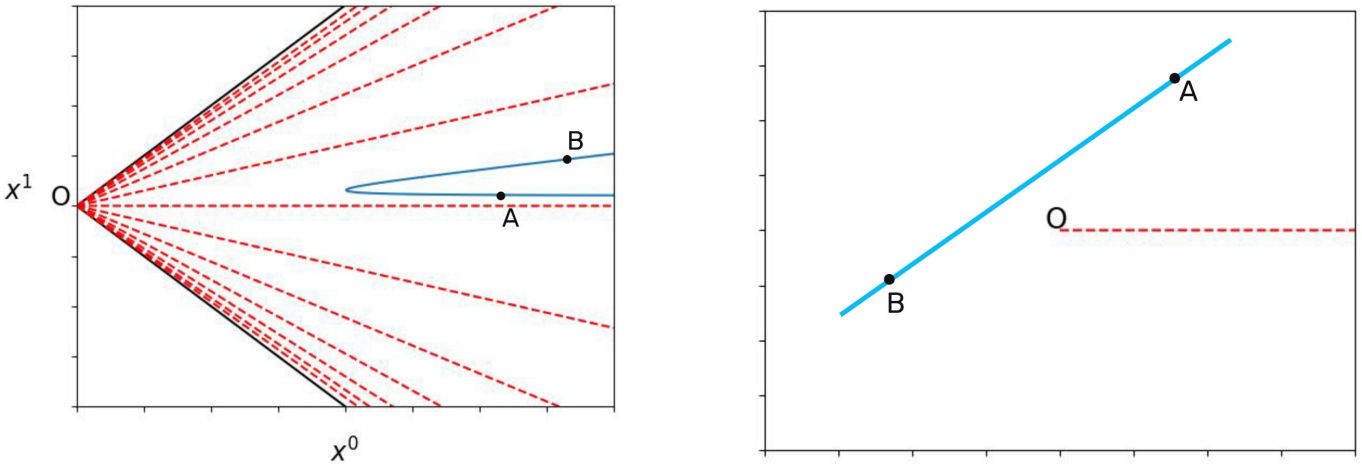
由于以伪极坐标(65)写出的度量(62)具有形式(66)，而该形式与欧几里得平面的度量一致，因此坐标 r,θ中的测地线方程与平面上直线在极坐标下的方程一致

$$r\cos(\theta-\theta_0)=r_0\,. \tag{71}$$

在此方程中，坐标 θ 取值

$$\theta\in\left[-\frac{\pi}{2}+\theta_0,\frac{\pi}{2}+\theta_0\right]\,. \tag{72}$$

由此可见， $A,B\in$ 圆锥上的两点仅当它们之间的角距离不超过 π： $|\theta_A-\theta_B|\le\pi$ 时，才能由形如 (71) 的光滑测地线相连。注意，在上文所构造的从圆锥到 Cov$_\infty$ 的映射下，两点 A、B 落在覆盖的同一叶上，而形如 (71) 的测地线则映射为一条直线（图 2）。

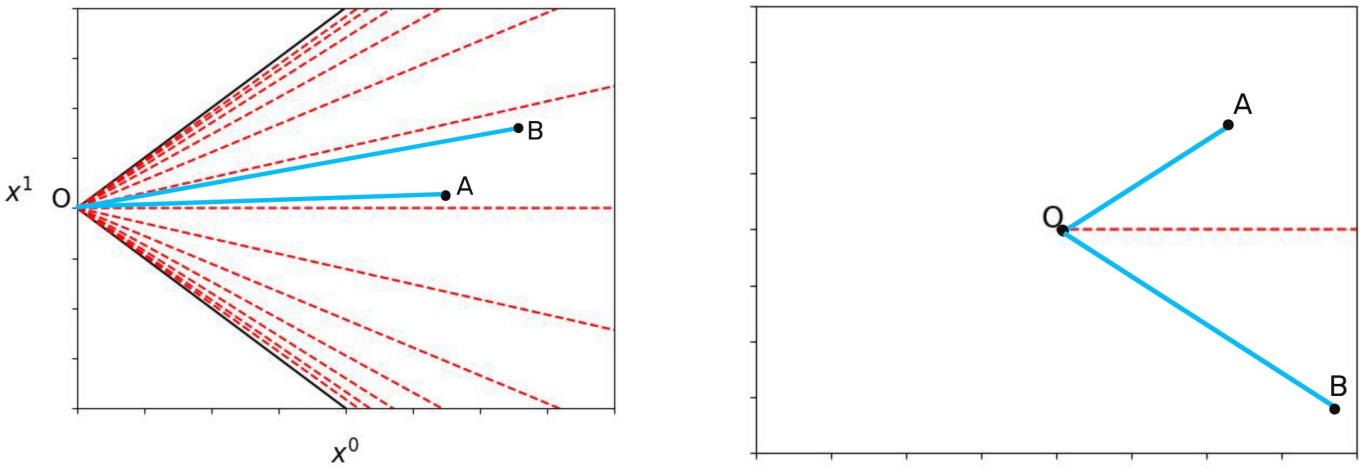


(a) (b)

图 2：在两点 A 与 B 之间的角距离小于 π 的情况下，穿过这两点的测地线。图（a）显示圆锥上的测地线，图（b）显示其映射到平面的无限层覆盖后的像。

情况 2： $\pi < |\theta_A - \theta_B| < 2\pi$

同时考虑点 A，$B \in$ Cone 及其在覆盖空间上的像是方便的。当$|\theta_A - \theta_B| > \pi$时，两个点 A，B 落在覆盖的同一叶上。在这一叶上，可以很容易地构造一条测地线。由于覆盖叶上存在切口，直线AB 不是测地线，因为它会与切口相交。任何不与切口相交的线段，在所有连接其端点的曲线中长度最短。因此，连接点 A 和 B 的最短曲线是一条折线，由两条线段组成，它们分别连接点 A 和 B 与原点 O （图 3）。

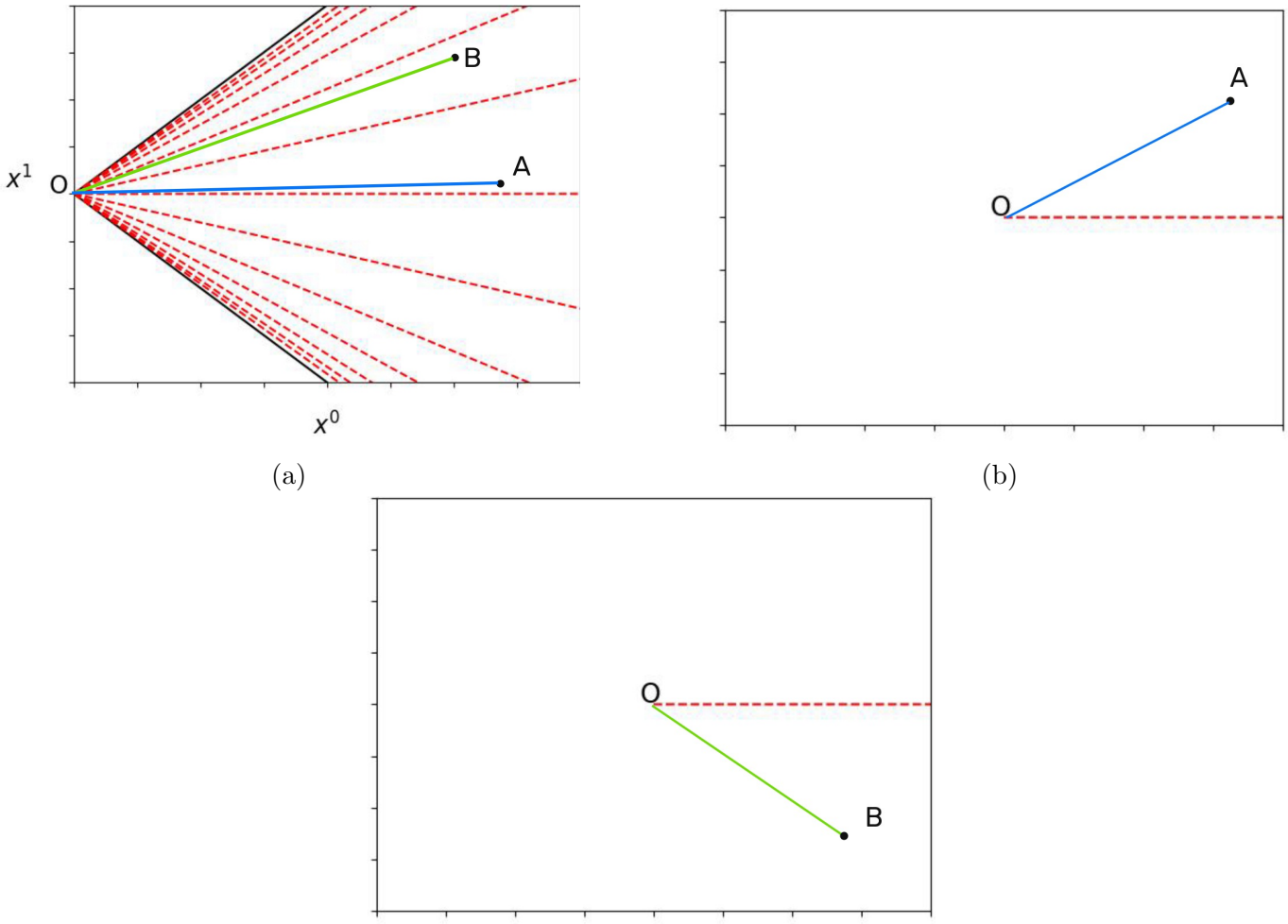


(a) (b)

图 3：当点 A 和 B 之间的角距离大于 π 但小于 2π时，经过这两点的测地线。图（a）显示圆锥上的测地线，图（b）显示其映射到平面的无限层覆盖后的像。点 A和 B 的像位于覆盖空间的同一叶上。

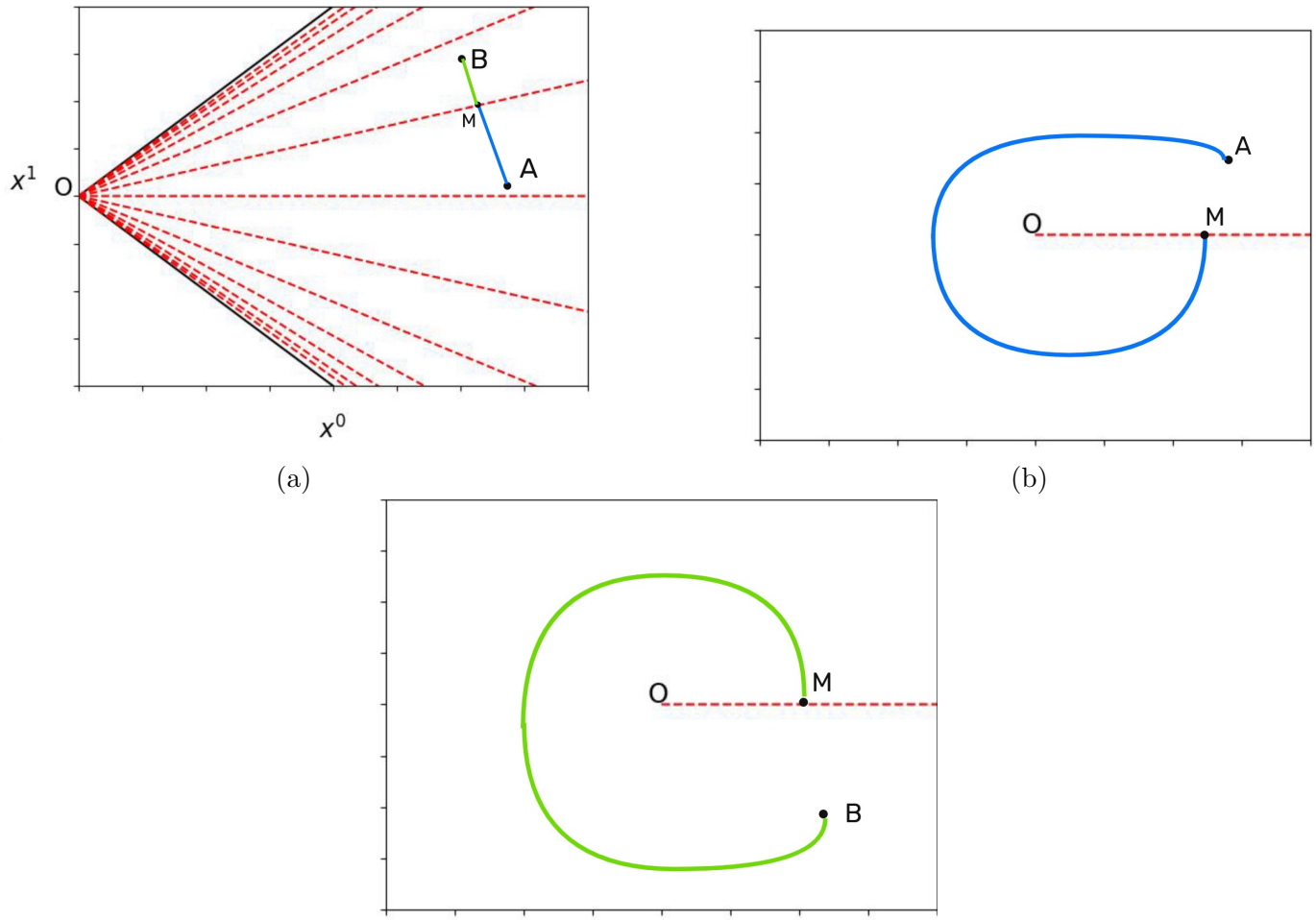
情况3： $|\theta_A - \theta_B| > 2\pi$

在这种情况下，点 A，B 落在覆盖的不同叶上，而测地线与前一种情况一样，是一条折线，由两条线段 OA 和 OB组成。事实上，任何连接点 A 和 B 的其他曲线（图 4 (a)），映射到覆盖空间上后，都会表示为位于覆盖不同叶上的两段弧，它们绕过分支点 O （图 4 (b) (c)）。显然， $AO + OB < AM + MB$。



(a) (b) (c)

图4：当点 A 和 B 之间的角距离大于 2π时，经过这两点的测地线。图（a）显示圆锥上的测地线，图（b）和图（c）显示其映射到平面的无限层覆盖后的像。点 A和 B 的像位于覆盖空间的不同叶上。



(a) (b) (c)

图5：连接点 A 和 B 的曲线示例，其角距离超过 2π。图（a）显示了圆锥上的曲线，图（b）和图（c）显示了它在无限层覆盖上的像。点 A 和 B 的像位于覆盖空间的不同叶上。

对应关系（69）使我们能够将构造的测度（55）视为C（$[0,T]$，覆盖空间）上的测度。这样，我们就获得了一种描述量子粒子在平面的无限层覆盖上的运动的工具。在计算形式为（70）的积分时，这些积分描述了粒子从位于覆盖空间同一叶上的点 A 传播到点 B 的过程；穿过切口并进入覆盖空间其他叶的轨迹也会对积分产生贡献（图6）[3]。

[3]看起来像是三维的 David Lynch 著名电影的季，并解释了本文的标题。

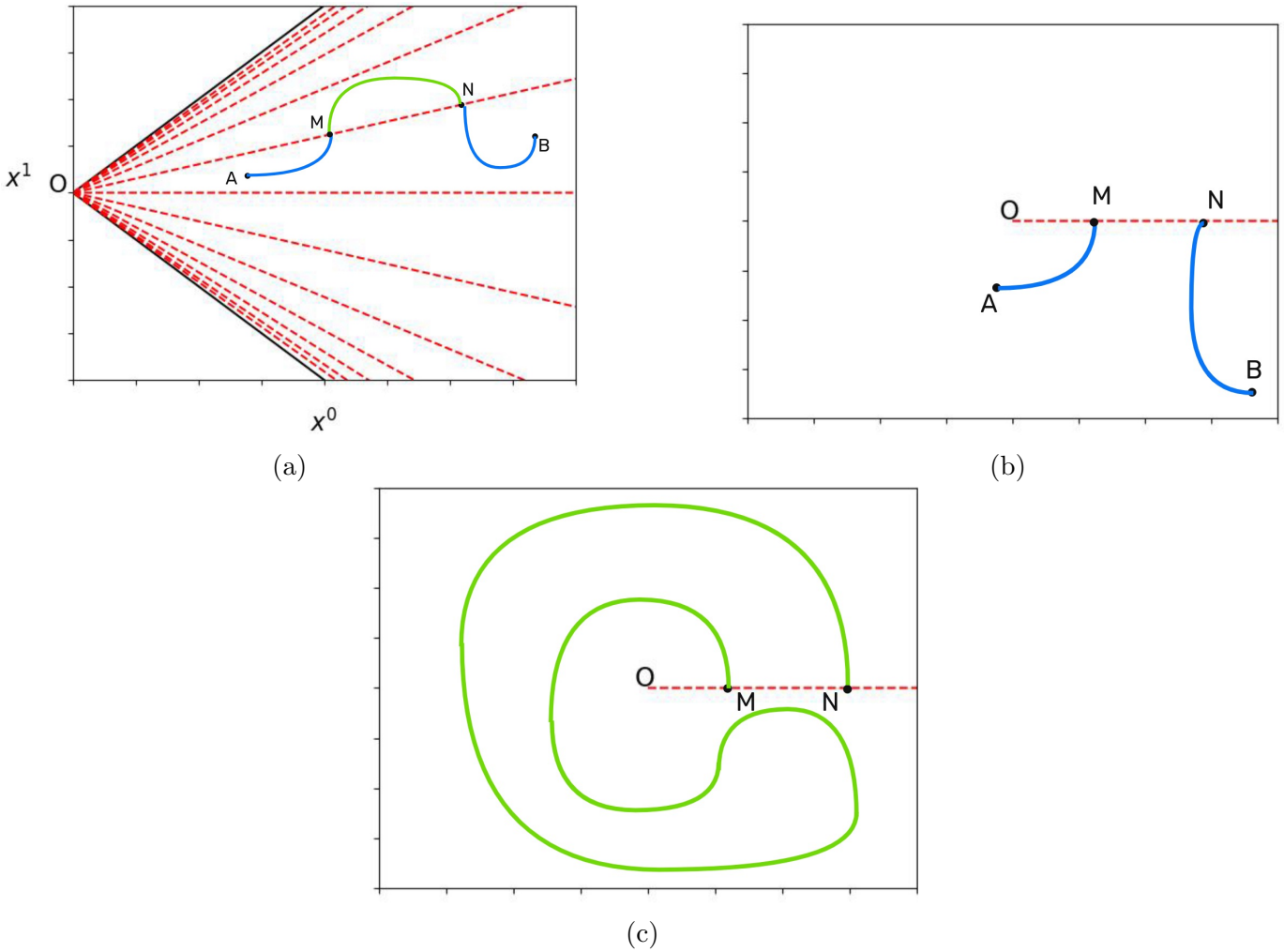


图6：连接覆盖同一叶上两点、但位于不同叶上的轨迹示例。圆锥上的轨迹如图(a)所示，其在覆盖上的像如图(b)、(c)所示。

6 结论

本文构建了位于圆锥内部的轨迹上的测度

$$\tilde{w}_\sigma(d\xi) = \rho \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4\rho^2}\right) \dot{\varphi}(0)\dot{\varphi}(T)\, \mu_{\frac{2\sigma}{\rho}}(d\varphi)\, w_{\frac{\sigma}{\rho}}(d\psi)\, d\rho = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\int_0^T d\tau\ \langle \dot{\xi}, \dot{\xi}\rangle\right) d\xi\,, \quad (73)$$

其中 $\langle \dot{\xi}, \dot{\xi}\rangle$ 由公式(57)给出。该测度是洛伦兹变换(46)下的不变量，并在微分同胚群(48)的群作用下具有拟不变性。所构造的测度还具有因果性(61)，从而允许人们在区间 $[t^*, T]$ 上对随机过程的取值求某个泛函 $F(\xi)$的平均，而与该过程在区间 $[0, t^*$上的取值无关）。

业已表明，其上定义了度量(57)的圆锥空间允许一一等距映射到平面的无限层覆盖覆盖空间。这些空间上的测地线已予描述；其邻域中的轨迹在 $\sigma \to 0$时对路径积分给出主要贡献。

所构造的测度将使我们能够计算具有非平凡度量的空间中的欧几里得量子场论传播子（57） [14]–[18] 。这项计算将

在后续论文中呈现。我们先在此概述其主要思路。传播子满足以下形式的方程 [12]

$$(\Delta - m^2)G(x,y) = \delta(x-y)\,, \tag{74}$$

其中，Δ 是由相应度量$g_{\mu\nu}$构造的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。传播子 $G(x,\ y)$可通过热型方程 [3],[11] 的解唯一表示

$$G(x,y) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y,\tau)e^{-m^2\tau}d\tau\,, \tag{75}$$

$$\frac{\partial K(x,y,\tau)}{\partial \tau} = \Delta K + \delta(x-y)\,. \tag{76}$$

$K(x,\ y,\ \tau)$可表示为如下形式的路径积分[4]

$$K(x,y,\tau) = \int \delta(\xi(0)-x)\delta(\xi(\tau)-y)\nu(d\xi)\,, \tag{77}$$

其中，ν 是在度量为$g_{\mu\nu}$ 的空间中的轨迹上定义的积分测度（在欧几里得空间的情况下，它与维纳测度一致）。

所得结果可用于研究黑洞的热辐射问题。黑洞视界附近施瓦西度量的径向部分可表示为 [14], [15]

$$ds^2 = -r^2dt^2 + dr^2 \tag{78}$$

（林德勒度量）。在后续论文中，我们将利用测度的分解式 (26)、(55) 定义并计算此类理论中的路径积分。

本研究是在莫斯科国立罗蒙诺索夫大学国家任务框架内开展的。V. Chistiakov 的工作得到“Basis”基金会的资助。

7 附录 A

我们给出式 (23)、(42)、(59) 中所引入映射的显式形式。映射 $(\rho_1,\ \varphi_1,\ \rho_2,\ \varphi_2) = \Omega^{-1}(\rho,\ \varphi)$ 的形式为

$$\rho_1 = \rho\sqrt{\frac{t^*}{\varphi^{-1}(t^*)}}\,, \qquad \rho_2 = \rho\sqrt{\frac{T-t^*}{T-\varphi^{-1}(t^*)}}\,. \tag{79}$$

$$\varphi_1^{-1}(\tau) = \frac{t^*}{\varphi^{-1}(t^*)}\varphi^{-1}(\tau)\,, \qquad \varphi_2^{-1}(\tau) = \frac{T-t^*}{T-\varphi^{-1}(t^*)}(\varphi^{-1}(\tau)-\varphi^{-1}(t^*)) + t^*\,. \tag{80}$$

反过来，给定 $(\rho_1,\ \varphi_1,\ \rho_2,\ \varphi_2)$，可以唯一地重构分解坐标 $(\rho,\ \varphi)$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{t^*}{T}\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{T-t^*}{T}\frac{1}{\rho_2^2}\,, \qquad \varphi^{-1}(\tau) = \begin{cases} T\frac{\rho_2^2\varphi_1^{-1}(\tau)}{t^*\rho_2^2+(T-t^*)\rho_1^2}\,, & \tau\in[0,t^*] \\ T\frac{\rho_2^2 t^*+\rho_1^2(\varphi_2^{-1}(\tau)-t^*)}{t^*\rho_2^2+(T-t^*)\rho_1^2}\,, & \tau\in[t^*,T]\,. \end{cases} \tag{81}$$

对于二维平面上的一个过程，映射 $\Omega^{\mathbb{R}^2}$ 及其逆映射具有以下形式。坐标 $\rho_1,\varphi_1,\rho_2,\varphi_2$ 与 $\rho,\ \varphi$ 之间的关系由式 (79)-(81) 给出。角坐标 ψ_1, ψ_2, α_1, α_2 可用 ψ, α 表示为

$$\alpha_1 = \alpha\,, \qquad \alpha_2 = \alpha_1 + \psi(t^*)\,, \tag{82}$$

[4]请注意，积分并非在依赖于 d 变量的场空间 $\phi(x)$上进行，而是在依赖于单个变量的粒子轨迹空间 $\xi(\tau)$上进行。关于场空间积分与相应粒子之间的联系， [11]中已有详细讨论。

$$\psi_1(\tau) = \psi(\tau)\,, \quad \tau \in [0, t^*]\,, \tag{83}$$
$$\psi_2(\tau) = \psi(\tau) - \psi(t^*)\,, \qquad \tau \in [t^*, T]\,.$$

反过来，给定 $\psi_1, \psi_2, \alpha_1, \alpha_2$，便可唯一地重构 ψ, α

$$\alpha = \alpha_1\,, \qquad \psi(\tau) = \begin{cases} \psi_1(\tau) & \tau \in [0, t^*] \\ \psi_2(\tau) + \alpha_2 - \alpha_1 & \tau \in [t^*, T]\,. \end{cases} \tag{84}$$

对于锥面上的轨迹，坐标 ρ_1，φ_1，ρ_2，φ_2 与 ρ，φ 之间的关系由公式 (79)-(81) 给出。角坐标 ψ，ψ_1，ψ_2 之间的关系为

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \psi_1(\tau), & \tau \in [0, t^*] \\ \psi_2(\tau), & \tau \in [t^*, T]\,, \end{cases} \tag{85}$$

由此定义了 Ω^{Cone}。

8 附录 B

我们证明公式 (55) 和 (56) 相等。利用微分同胚群上的准不变测度的表达式 (20) 以及维纳测度的表达式 (3)，我们将 $\tilde{w}_\sigma$ 表示为

$$\tilde{w}_\sigma(d\xi) = \rho \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4\rho^2}\right) \sqrt{\dot\varphi(0)\dot\varphi(T)} \times \tag{86}$$
$$\exp\left(\frac{\rho^2}{4\sigma^2}\left[\frac{\ddot\varphi(0)}{\dot\varphi(0)} - \frac{\ddot\varphi(T)}{\dot\varphi(T)}\right] + \frac{\rho^2}{4\sigma^2}\int_0^T ds \left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{\ddot\varphi(s)}{\dot\varphi(s)}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot\varphi(s)}{\dot\varphi(s)}\right)^2\right\}\right) \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\int_0^T ds\,(\dot\psi(s))^2\right) d\varphi\, d\psi\, d\rho\,.$$

化简指数中的表达式后，我们得到

$$= \rho\sqrt{\varphi'(0)\varphi'(T)} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4\rho^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\int_0^T ds \left\{\frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\ddot\varphi(s)}{\dot\varphi(s)}\right)^2 + \rho^2(\dot\psi(s))^2\right\}\right)\,. \tag{87}$$

我们将积分变量 s 换成变量 τ

$$s = \varphi^{-1}(\tau)\,. \tag{88}$$

对于导数，我们有

$$\dot\varphi(s) = \frac{1}{\dot\varphi^{-1}(\tau)}\,, \qquad \ddot\varphi(s) = \frac{1}{\dot\varphi^{-1}(\tau)}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\dot\varphi^{-1}(\tau)}\right) = -\frac{\ddot\varphi^{-1}(\tau)}{(\dot\varphi^{-1}(\tau))^3}\,. \tag{89}$$

对于（87）中的积分，我们得到以下等式

$$\int_0^T ds \left\{\frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\ddot\varphi(s)}{\dot\varphi(s)}\right)^2 + \rho^2(\dot\psi(s))^2\right\} = \int_0^T d\tau \left\{\frac{\rho^2}{4}\frac{(\ddot\varphi^{-1}(\tau))^2}{(\dot\varphi^{-1}(\tau))^3} + \rho^2\dot\varphi^{-1}(\tau)(\dot\psi(\varphi^{-1}(\tau)))^2\right\} \tag{90}$$

我们利用 (53)，将 ρ, φ 表示为 ξ^0, ξ^1

$$\dot\varphi^{-1}(\tau) = \rho^2\frac{1}{(\xi^0(\tau))^2 - (\xi^1(\tau))^2}\,, \qquad \ddot\varphi^{-1}(\tau) = -2\rho^2\frac{\xi^0(\tau)\dot\xi^0(\tau) - \xi^1(\tau)\dot\xi^1(\tau)}{((\xi^0(\tau))^2 - (\xi^1(\tau))^2)^2}\,. \tag{91}$$

对于 (90) 右侧的第一项，我们有

$$\frac{\rho^2}{4}\frac{(\ddot{\varphi}^{-1}(\tau))^2}{(\dot{\varphi}^{-1}(\tau))^3}=\frac{(\xi^0(\tau)\dot{\xi}^0(\tau)-\xi^1(\tau)\dot{\xi}^1(\tau))^2}{(\xi^0(\tau))^2-(\xi^1(\tau))^2}\,. \tag{92}$$

由 (53) 可得 $\psi(s)$

$$\dot{\psi}(s)=\frac{d}{ds}\left(\operatorname{arctanh}\left(\frac{\xi^1(\varphi(s))}{\xi^0(\varphi(s))}\right)\right)=\frac{\dot{\xi}^1(\varphi(s))\xi^0(\varphi(s))-\dot{\xi}^0(\varphi(s))\xi^1(\varphi(s))}{(\xi^0(\varphi(s)))^2-(\xi^1(\varphi(s)))^2}\dot{\varphi}(s)\,, \tag{93}$$

$$\dot{\psi}(\varphi^{-1}(\tau))=\frac{\dot{\xi}^1(\tau)\xi^0(\tau)-\dot{\xi}^0(\tau)\xi^1(\tau)}{(\xi^0(\tau))^2-(\xi^1(\tau))^2}\frac{1}{\dot{\varphi}^{-1}(\tau)}\,. \tag{94}$$

(90) 中的第二项形式为

$$\rho^2\dot{\varphi}^{-1}(\tau)(\dot{\psi}(\varphi^{-1}(\tau)))^2=\frac{(\dot{\xi}^1(\tau)\xi^0(\tau)-\dot{\xi}^0(\tau)\xi^1(\tau))^2}{(\xi^0(\tau))^2-(\xi^1(\tau))^2}\,. \tag{95}$$

结合 (92) 和 (95)，得到

$$\int_0^T d\tau\left\{\frac{\rho^2}{4}\frac{(\ddot{\varphi}^{-1}(\tau))^2}{(\dot{\varphi}^{-1}(\tau))^3}+\rho^2\dot{\varphi}^{-1}(\tau)(\dot{\psi}(\varphi^{-1}(\tau)))^2\right\}= \tag{96}$$

$$=\int_0^T d\tau\left\{\frac{(\xi^0(\tau)\dot{\xi}^0(\tau)-\xi^1(\tau)\dot{\xi}^1(\tau))^2}{(\xi^0(\tau))^2-(\xi^1(\tau))^2}+\frac{(\dot{\xi}^1(\tau)\xi^0(\tau)-\dot{\xi}^0(\tau)\xi^1(\tau))^2}{(\xi^0(\tau))^2-(\xi^1(\tau))^2}\right\}=$$

$$=\int_0^T d\tau\left\{(\dot{\xi}^0)^2-(\dot{\xi}^1)^2+2\frac{(\xi^0\dot{\xi}^1-\xi^1\dot{\xi}^0)^2}{(\xi^0)^2-(\xi^1)^2}\right\}.$$

参考文献

[1] M. Kontsevich 和 G. Segal, 《量子场论中的 Wick 旋转与能量正定性》, Quart. J. Math. 72 (2021) 673, [arXiv:2105.10161].[2] E. Witten, 《关于复时空度规的注记》, [arXiv:2111.06514][3] Kaku M., 《超弦与 M理论导论》。– Springer Science & Business Media, 2012.[4] A. N. Shiryaev, 《布朗运动与维纳测度》, MCCE v.1 (2023), v.2 (2025)（俄语）。[5] L.A. Shepp, 《高斯测度的 Radon-Nikodym 导数》, Ann. Math. Statistics. 37 (1966) P. 321-354.[6] V. V. Belokurov 和 E. T. Shavgulidze, 《Schwarzian理论的另一种视角》, Mod. Phys. Lett. A 33 (2018) 1850221, [arXiv:1806.05605].[7]V. V. Belokurov 和 E. T. Shavgulidze, 《维纳测度的极分解：Schwarzian理论与共形量子力学》, Theor. Math. Phys. 200(3) (2019)1324, [arXiv:1812.04039].[8] V. V. Belokurov、E.T. Shavgulidze 和 N. E. Shavgulidze, 《维纳测度极分解的证明》, arXiv:2502.17201.[9] E. T. Shavgulidze, 《圆上微分同胚群准不变测度的若干性质》, Russ. J. Math. Phys. 7 (2000) 464.[10] V. V. Belokurov 和 E. T. Shavgulidze, 《Schwarzian泛函积分演算》, J. Phys. A: Math. Theor 53 (2020) 485201 , [arXiv:1908.10387].

[11] Padmanabhan, T., 《相对论性粒子与谐振子的路径积分》。Foundations of Physics 24.11 (1994): 1543-1562.[12] Buchbinder, I. L., Shapiro, I.《量子场论导论及其在量子引力中的应用》。– Oxford University Press, 2021.[13] Rindler, W., 《Kruskal 时空与匀加速参考系》。American Journal of Physics 34.12 (1966): 1174-1178.[14] Gibbons G., Hawking S.《量子引力中的群作用积分与配分函数》。Physical Review D 15.10 (1977): 2752.[15] Boulware, D.《Schwarzschild 时空与 Rindler 时空中的量子场论》。Physical Review D 11.6 (1975): 1404.[16] Maldacena, J.《反德西特空间中的永恒黑洞》。Journal of High Energy Physics 2003.04 (2003): 021-021.[17] Witten, E.《反德西特空间与全息》, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 253 (1998)[hep-th/9802150].[18] Witten, E.《反德西特空间、热相变与规范理论中的禁闭》。arXiv preprint hep-th/9803131 (1998).