arXiv:2603.05206v1 [math.FA] 5 Mar 2026

有限维赋范空间中拟凸函数的可延拓性

Carlo Alberto De Bernardi 和 Libor Veselý

摘要。设 X 是维数至少为二的赋范空间，$C \subsetneq X$ 是具有非空内部的闭凸集。我们关注如何将定义在 C 上的利普希茨拟凸函数延拓为定义在 X 上的拟凸函数。我们证明，与凸函数的情形不同，一般而言无法得到利普希茨延拓（平凡情形除外）。若只要求一致连续或连续延拓，则证明 C 的这类可延拓性可由 C 的某些几何性质刻画。

1. 引言

设 C 是实向量空间中的一个凸集。若函数 $f\colon C \to \mathbb{R}$ 满足其所有下水平集 $\{x \in C\colon f(x) \leq \alpha\}$ 都是凸集，则称其为拟凸函数（简称 QC 函数）；等价地，其所有严格下水平集 $\{x \in C\colon f(x) < \alpha\}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ 都是凸集。QC 函数是凸函数的一种自然推广，在《优化》、数学规划、数理经济学以及数学分析的许多其他领域中发挥着关键作用（参见 [1, 2, 12, 15] 及其中的参考文献）。

在本文及我们先前的两篇论文 [5, 6], 中，我们关注定义在维数至少为二维的实赋范空间 X 中凸体上的利普希茨函数或（统一）连续 QC 函数的可延拓性。所谓凸体，是指具有非空内部、可能无界的闭凸集，且不是整个空间。我们的动机源于以下对凸函数成立的著名延拓结果。（其不涉及任何凸性的度量空间版本归功于 E.J. McShane [11], ，而“凸版本”则属于数学界的传统共识。）

定理 1.1. 设 $C \subset X$ 是任意非空凸集，并设$f\colon C \to \mathbb{R}$ 是一个 L-利普希茨凸函数（即 *Lipschitz* 常数为 $L \geq 0$的利普希茨函数）。那么，公式 $F(x) = \inf_{u \in C}\{f(u) + L\|x-u\|\}$定义了一个 L-利普希茨凸延拓，将 f 延拓到整个 X。

2010 数学主题分类。主要分类 26B25，52A05；次要分类 46A55，52A99。关键词和短语。拟凸函数，延拓，一致凸集，赋范空间。

自然会问，拟凸函数是否也有类似的结果。事实证明，“拟凸”情形截然不同，并且高度依赖凸集 C的几何性质。这里我们主要考虑 C 是凸体的情形。在下面的定理中，我们汇总了此前发表于 [5, 6]的主要结果。关于 UR（一致严格凸）体和 LUR（局部一致严格凸）体的自然定义，可参见所引论文。

定理1.2。 设 X 是一个维数至少为二的实赋范空间。
(a) 存在一个定义在闭单位圆盘 $D \subset \mathbb{R}^2$上的利普希茨拟凸函数 f，它无法延拓为整个 $\mathbb{R}^2$ 上的利普希茨拟凸函数(见 [5,例4。2])。 因此，[1] X 包含一个凸体 C，使得某个定义在 C 上的利普希茨拟凸函数无法延拓为整个 X 上的利普希茨拟凸函数。*(b)* 若 X 是一个 *Banach*空间，且 $C \subset X$ 是一个非 *LUR* 凸体，则存在一个利普希茨拟凸函数 $f\colon\ C \to \mathbb{R}$，它无法连续延拓至整个 X (见 [5,定理3。3])。*(c)* 若 $C \subset X$ 是一致凸凸体，则每个一致连续拟凸函数 $f\colon\ C \to \mathbb{R}$ 都可以一致连续地延拓至 X (见 [6,定理5。5])。

凸体 C的一致凸性质是否也是每个一致连续 QC 函数都能从 C 延拓为整个 X上的一致连续 QC 函数的必要条件，仍是一个未解决问题 。换言之，对于 LUR 但非 UR 的凸体，我们尚不清楚会出现什么情况。

然而，在有限维情形下，我们根据 C的几何性质，得到了各种可延拓性的精确刻画。这些结果构成了本文的研究内容。

本文的组织结构如下。在简要介绍预备知识之后，第3节和第4节给出了三种（有限维）构造，构造出的利普希茨拟凸函数无法延拓为定义在整个空间上的足够良好的拟凸函数（定理 3.1、3.2 和 4.1）。第5节中，我们证明，在维数至少为 2 的任意赋范空间中，每个凸体上都存在一个利普希茨拟凸函数，它无法利普希茨拟凸延拓到整个空间（定理 5.3）。第6节包含一些关于没有渐近方向的凸体的技术性结果；这些结果将在第7节中用于证明定理 7.4，即关于保持连续性的拟凸函数可延拓性。接下来的第8节讨论上半连续拟凸函数的可延拓性。

[1]事实上，可以考虑形如直和 $X = \mathbb{R}^2 \oplus_\infty Y$的 X，并取$C = B_X$为这种 X的闭单位球。设 $f_1\colon\ B_{\mathbb{R}^2} \equiv D \to \mathbb{R}$是一个无法延拓为 $\mathbb{R}^2$上的 Lipschitz QC 函数的 Lipschitz拟凸函数。那么，由 $f(x) = f_1(Px)$ 给出的函数$f\colon\ C \to \mathbb{R}$，其中 P是从 X到 $\mathbb{R}^2$的典范投影，就是所需的例子。

最后，在第9节中，我们结合前几节的结果以及此前的一些结果，从凸体的几何性质出发，给出了关于拟凸函数从闭凸集可延拓性的若干完整（有限维）刻画。

2. 预备知识

令 $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$。本文中，除非另有说明， X表示一个有限维{style id='3'>}实赋范线性空间，其维数为 $d \geq 2$。我们分别用 B_X、 U_X 和 S_X 表示 X的闭单位球、开单位球和单位球面。对于 $x \in X$ 和 $r > 0$, 我们用 $B(x, r)$ 表示半径为 r 、以 x为中心的闭球。

给定两个集合 $A, B \subset X$，它们之间的距离是量 $d(A, B) = \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\}$，其中 $\inf \emptyset = +\infty$遵循通常的约定。点 $x \in X$ 到 A 的距离定义为 $d(x, A) := d(\{x\}, A)$。若 $A \subset B \subset X$，我们分别用 $\text{int}_B A$、 $\partial_B A$ 和 A^B 表示 A 在 B中的相对内部、 A在 B 中的相对边界，以及 A 在 B中的相对闭包。特别地，当 $B = X$时，下标或上标 X 将省略。除非另有说明， $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$)赋予欧几里得范数。

我们将使用以下关于凸集的标准事实。

事实 2.1。 设 C 是任意赋范空间 X 中具有非空内部的凸集。则 内部 $C =$ 内部 C , 且 $C =$ 内部 C。

此外，我们将使用以下简化记号。如果 f 是在集合 E 上（至少）有定义的实值函数，我们例如记作:

$$[f < \alpha]_E := \{x \in E : f(x) < \alpha\} \quad \text{for } \alpha \in \mathbb{R}.$$

在此记号下，如果集合 E 是凸集，则 f 是 E 上的拟凸函数 （简称 QC 函数）当且仅当所有这类集合都是凸集。

在 X 中，凸体 是指具有非空内部的闭凸真子集 $C \subset X$ （在无限维情形下也采用相同定义）。如果一个凸体的边界不包含非平凡线段，则称其为严格凸 （或严格凸的）；等价地， ∂C 中任意两个不同元素的中点（等价地， C 的中点）总是 C 的内部点。

非空凸集 $C \subset X$ 的衰退锥 是集合

$$\text{recc}(C) = \{v \in X : C + \mathbb{R}^+ v = C\} = \{v \in X : \ c + \mathbb{R}^+ v \subset C \text{ for some } c \in C\}.$$

对于非空闭凸集 C , 众所周知（见 [17]）：

- recc(C) 是一个顶点位于原点的闭凸锥;

当且仅当 recc(C) $= \{0\}$ 时， • C 有界;

- 若 C 具有非空内部，则 recc(C) $=$ recc(int C)。

定义 2.2. 设 $C \subsetneq X$ 为闭凸集，且 $v \in X \setminus \{0\}$。我们称 v 为 C 的一个渐近方向，如果存在 $x_0 \in X$ 使得

$$(x_0 + \mathbb{R}^+ v) \cap (\operatorname{int} C) = \emptyset \quad \text{and} \quad \lim_{t \to +\infty} d(x_0 + tv, C) = 0. \tag{1}$$

观察 2.3。 设 v 是一个（必然无界的）闭凸集 $C \subsetneq X$ 的渐近方向，并设 $x_0 \in X$ 如 (1) 中所述。则：
(a) $v \in \operatorname{recc}(C)$；***(b)*** $(x_0 + \mathbb{R}v) \cap (\operatorname{int} C) = \emptyset$；***(c)*** 要么 ∂C 包含形如 $c_0 + \mathbb{R}_+ v$ 的半直线，要么 $(x_0 + \mathbb{R}v) \cap C = \emptyset$。

证明。(b) 和 (c) 的简单证明从略。下面证明 (a)。对每个 $t > 0$，取 $c_t \in C$ 使得 $\|x_0 + tv - c_t\| = d(x_0 + tv, C)$。由于 $c_t = tv + x_0 + (c_t - x_0 - tv)$，我们有 $\frac{1}{t} c_t \to v$，因为 $t \to +\infty$。由 [17, 定理 8.2]，$v \in \operatorname{recc}(C)$。□

凸集 $A \subset X$ 若在其仿射包中是开集，则称其为相对开。

3. 两个初等的否定性结果

本节旨在给出两个不可延拓结果。这些结果相当初等。

定理 3.1. 设维数 $X = d \geq 2$，且 $C \subset X$ 是一个具有渐近方向的无界凸体。那么存在一个利普希茨拟凸函数 $f\colon C \to \mathbb{R}$，使得 f 不存在任何拟凸延拓（无论何种形式）到整个 X。

证明。我们可以（并且确实）假设 $0 \in \operatorname{int} C$。设 v 是 C 的一个渐近方向，因此存在 $x_0 \in X$，使得直线 $x_0 + \mathbb{R}v$ 不与 $\operatorname{int} C$ 相交，且 $d(x_0 + tv, C) \to 0$，当 $t \to +\infty$ 时。注意，x_0 与 v 线性无关。

根据 Hahn-Banach 定理，存在 $h \in X^* \setminus \{0\}$，使得 $\sup h(C) = \inf h(x_0 + \mathbb{R}v) \equiv h(x_0) = 1$。显然，$h(v) = 0$。设 $Z \subset X$ 是一个（必为 $(d-2)$ 维的）子空间，使得 $\operatorname{Ker}(h) = \mathbb{R}v \oplus Z$。因此，我们有

$$X = Y \oplus Z \quad \text{where} \quad Y = \operatorname{span}\{x_0, v\}.$$

借助于一个适当的线性同胚，其形式为

$$tv + sx_0 + z \mapsto (t, s, \zeta), \quad t, s \in \mathbb{R},\ z \in Z,\ \zeta \in \mathbb{R}^{d-2},$$

我们可以（并且确实如此）将 X 与欧几里得空间 $\mathbb{R}^d \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-2}$ 等同。作此等同后，我们有

$$C \subset \{(t, s, \zeta) : s \leq 1\}, \quad \mathbb{R}^+ v \subset \operatorname{int} C \quad \text{and} \quad d((t, 1, 0), C) \to 0 \text{ as } t \to +\infty.$$

令 $A = \{(t,\ s)\colon\ s < 1\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$。我们递归地定义实数$b_n > 0$ 和开凸集 $D_n \subset A$ （$n \geq 1$ 为整数）。建议读者画一幅示意图!

取一个递减序列 $\{\varepsilon_n\}_n \subset (0,\ +\infty)$，使得 $\varepsilon_n \to 0$。令 $b_1 = 1$并定义

$$B_1 = \left\{(t,s)\colon\ s<1,\ s<1-\tfrac{\varepsilon_1}{b_1}(t-b_1)\right\},$$

也就是说，这是 A 中位于连接点 $(0,\ 1+\varepsilon_1)$ 和 $(b_1,\ 1)$ 的直线下方的部分。现在，假设我们已经定义了 $b_n > 0$ 和一个开凸$B_n \subset A$。然后选取 $b_{n+1} > 0$，使得 $(b_{n+1},\ 0) \notin 2B_n$，并定义

$$B_{n+1} = \left\{(t,s)\colon\ s<1,\ s<1-\tfrac{\varepsilon_{n+1}}{b_{n+1}}(t-b_{n+1})\right\},$$

也就是说，这是 A 中位于连接点 $(0,\ 1+\varepsilon_{n+1})$ 和 $(b_{n+1},\ 1)$ 的直线下方的部分。

根据我们的构造，序列 $\{B_n\}_{n\geq 1}$ 是递增的；此外，

$$\bigcup_{n\geq 1} B_n = A,\ \text{and}\ A\cap 2B_n \subset B_{n+1}\ \text{for each}\ n\geq 1.$$

根据 [5, 引理 2。9], 存在一个无界递增序列 $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$和一个利普希茨拟凸函数 $g\colon\ A\to\mathbb{R}$，使得对每个n都有 $B_n = [g<\alpha_n]_A$。显然， g 可以唯一地延拓为定义在 $\overline{A}=\{(t,\ s)$ 上的利普希茨函数（必然也是拟凸函数）： $s\leq 1\}$；因此我们考虑定义在 $\overline{A}$ 上的 g。

考虑典范投影 $P\colon\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^2$，其定义如下：

$$P(t,s,\zeta) = (t,s),\quad t,s\in\mathbb{R},\ \zeta\in\mathbb{R}^{d-2}.$$

现在，公式

$$f(t,s,\zeta) := g(P(t,s,\zeta)),(t,s,\zeta)\in C,$$

给出了一个定义良好的利普希茨拟凸函数 $f\colon\ C\to\mathbb{R}$。我们断言， f 无法延拓为定义在整个 $\mathbb{R}^d$ 上的拟凸函数。

反设存在一个拟凸延拓 F，它将f 延拓到整个 $\mathbb{R}^d$。对每个 $n\geq 2$, $[F<\alpha_n]_{\mathbb{R}^d}\cap(\text{int}C) = [f<\alpha_n]_{\text{int}\,C} = P^{-1}([g<\alpha_n]_A)\cap(\text{int}\ C)$。由于最后一个集合的边界包含超平面 $\{(t,\ s,\ \zeta)\colon\ s = 1-\frac{\varepsilon_{n+1}}{b_{n+1}}(t-b_{n+1})\}$的一个相对开子集，根据凸性，集合 $[F<\alpha_n]_{\mathbb{R}^d}$ 必须包含于半空间 $\{(t,\ s,\ \zeta)\colon\ s<1-\frac{\varepsilon_{n+1}}{b_{n+1}}(t-b_{n+1})\}$ 中。但这意味着 $F(0,\ 1+\varepsilon_1,\ 0)\geq\alpha_n (n\geq 2)$。这显然不可能，因为 $\alpha_n\nearrow+\infty$。□

下一个结果可由我们在定理 1.2(b) 中描述的一般结果推出。这里我们简要勾勒一个简单的直接证明，其思路与定理 3.1 的证明相同。

定理 3.2. 设 $\dim(X) = d \geq 2$，且设 $C \subset X$ 是一个非严格凸体。那么存在一个利普希茨拟凸函数 $f\colon C \to \mathbb{R}$，它无法连续 *QC* 延拓至整个 X。

证明。假设 ∂C 包含一条非平凡线段 $[c, d]$。令 $0 \in \operatorname{int} C$ 且 $v = \frac{1}{2}(d-c)$。由 Hahn-Banach 定理，存在 $h \in X^* \setminus \{0\}$ 使得 $h(v) = 0$ 且 $h(c) \equiv \inf h([c, d]) = \sup h(C) = 1$。记 $\operatorname{Ker}(h) = \mathbb{R}v \oplus Z$，于是 $X = \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}c \oplus Z$。不妨设 $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-2} \equiv \mathbb{R}^d$，$C \subset \{(t, s, \zeta) : s \leq 1\}$ 且 ∂C 包含端点为 (0, 1, 0) 和 (2, 1, 0) 的线段。考虑满足 $b_1 = 1$ 的严格单调数列 $\varepsilon_n \searrow 0$ 和 $b_n \nearrow 2$。在 $A = \{(t, s) : s < 1\}$ 中，定义集合 B_n $(n \geq 1)$ 如下

$$B_n = \left\{(t, s) : s < 1,\ s < 1 - \tfrac{\varepsilon_n}{b_n}(t - b_n)\right\}$$

与前一个定理中的情况相同。也就是说，B_n 是位于连接 $(0, 1+\varepsilon_n)$ 和 $(b_n, 1)$ 的直线下方的 A 部分。于是，集合 B_n 构成一个递增序列，并且对每个 n，都存在 $\eta_{n+1} > 1$ 使得 $A \cap \eta_{n+1} B_n \subset B_{n+1}$。根据 [5,引理 2.9]，存在一个正实数递增序列 $\{\alpha_n\}_n$ 以及一个 Lipschitz QC $g\colon A \to \mathbb{R}$，使得对每个 n 都有 $[g < \alpha_n]_A = B_n$。容易看出，只要 $0 < s < 1$，就有 $g(0, s, 0) < \alpha_1$；并且 $g(0, 1, 0) \leq \alpha_1$。最后，定义 $f\colon C \to \mathbb{R}$ 为 $f = g \circ P$，其中 $P\colon (t, s, \zeta) \to (t, s)$，适用于 $(t, s, \zeta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-2}$。

假设存在一个连续拟凸延拓 $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ of f。根据定理 3.1 证明中的相同凸性论证，对每个固定的 $n \geq 1$，我们必须有 $F(0,\ 1+\varepsilon_n,\ 0) \geq \alpha_k$ 对每个 $k > n$ 都成立。现在，记 $\alpha_\infty = \sup_n \alpha_n$，我们得到 $F(0,\ 1 + \varepsilon_n,\ 0) \geq \alpha_\infty$ 对每个 n 都成立。另一方面，$F(0,\ 1,\ 0) = f(0,\ 1,\ 0) \leq \alpha_1 < \alpha_\infty$，这不可能，因为 F 应当是连续的。□

4. 不存在一致连续拟凸扩张

在我们的有限维情形中，[6] 定理 1.2(c) 中所述的结果意味着，若 $C \subset X$ 是一个有界的严格凸体，那么定义在 C 上的每个一致连续拟凸函数都可以连续拟凸延拓（且延拓是一致连续的）到整个 X。（事实上，由于紧致性，这样的 C 自动是一致严格凸的。）我们当前的定理 4.1 表明，有界性这一假设不能省略。证明相当技术性，但本质上具有很强的几何性。

定理 4.1. 设维数 $X = d \geq 2$，且 $C \subset X$ 是一个没有渐近方向的无界严格凸体。则存在一个 *Lipschitz QC* 函数 $f\colon C \to \mathbb{R}$，它无法延拓为整个 X 上的一致连续 *QC* 函数。

本节余下部分将用于证明。我们将分几个步骤进行。

定理 *4.1* 的证明。首先，我们可以（并且确实）假设 $0 \in \operatorname{int} C$。令$R > 0$ 满足

$$RB_X \subset C.$$

由于 C 无界，存在一个非零的 $v \in \operatorname{recc}(C)$；因此， $\mathbb{R}^+ v \subset \operatorname{int} C$。由于 C 不含直线（否则 ∂C 也会如此），直线 $\mathbb{R}v$ 与 ∂C 恰好交于一点，记为 c_0。设 $h \in S_{X^*}$ 满足 $m := h(c_0) = \min h(C) (< 0)$。取 v 的适当倍数后，我们可以（并且确实）假设 $h(v) = 1$。

断言 *1.* 对每个 $\alpha \geq m$，集合 $C_\alpha := [h \leq \alpha]_C$ 有界。
若非如此，则对某个 $\alpha \geq m$，有 $C_\alpha \subset [m \leq h \leq \alpha]_X$，且最后一个集合包含一条半直线。这迫使 h 在这条半直线上为常数，因此 ∂C 包含一条与前一条半直线平行且经过 c_0 的半直线。但这不可能，因为 C 是严格凸的。断言 1 得证。

现在，固定任意的 $u \in 核(h) \setminus \{0\}$，并定义 $Y = 张成空间\{u, v\}$。显然，维数$Y = 2$ 且 $c_0 \in Y$。设 $Z \subset 核(h)$ 为一个子空间，使得核$(h) = \mathbb{R}u \oplus Z$。因此， $X = \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v \oplus Z = Y \oplus Z$。设 P: $X \to Y$ 为沿 Z 的满射线性投影，即核$(P) = Z$。注意 $P(核(h)) = \mathbb{R}u$且 $h = h \circ P$（即每当 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, z \in Z$ 时， $h(\alpha u + \beta v + z) = \beta = h(\alpha u + \beta v)$）。

断言 *2.* 集合 $D := P(C)$ 是 Y 中的一个无界的严格凸体。D 显然是无界的，因为它包含 $\mathbb{R}^+ v$。由于 P 是开映射， D具有非空内部。此外， $D \subset [h \geq m]_Y$ 蕴含 $D \neq Y$。为证明 D 在 Y 中是闭的，只需证明每个集合 $D_\alpha := [h \leq \alpha]_D$ 是闭的，而这是显然的，因为 $D_\alpha = P(C_\alpha)$ 且 C_α 是紧的。最后，若 $y, y' \in \partial D$ 是两个不同点，则存在唯一的（不同的）点 $x, x' \in \partial C$，使得 $Px = y$且 $Px' = y'$。于是 $P(\frac{1}{2}(x + x')) = \frac{1}{2}(y + y') \in P(\operatorname{int} C) \subset \operatorname{int} D$。这表明 D 是严格凸的。断言 2 得证。

固定 $[h \geq 0]_{\partial D}$的两个连通分支之一，记为 Γ。由于 $\min h(D) = m < 0$ and $RB_Y \subset D$, Γ 可以看作定义在 $\mathbb{R}^+$上的递增、利普希茨且严格凹函数 g 的图像。因此，限制映射 $h|_\Gamma$给出了 Γ 与 $\mathbb{R}^+$之间的双利普希茨同胚。所以存在$\beta > 0$ 使得

$$\beta \|y - y'\| \leq |h(y) - h(y')| \leq \|y - y'\|, \quad y, y' \in \Gamma.$$

设 $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset \Gamma$ 为如下定义的序列：

$$0 = h(y_1) < h(y_2) < h(y_3) < \cdots \quad \text{and} \quad \|y_{n+1} - y_n\| = 1 \text{ for each } n.$$

对于 $k \in \mathbb{N}$，我们也记 $\alpha_k = h(y_k)$，并注意到，根据之前的观察，我们有 $\alpha_{k+1} - \alpha_k \geq \beta$。

断言*3.* $\|y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n\| \to 0.$

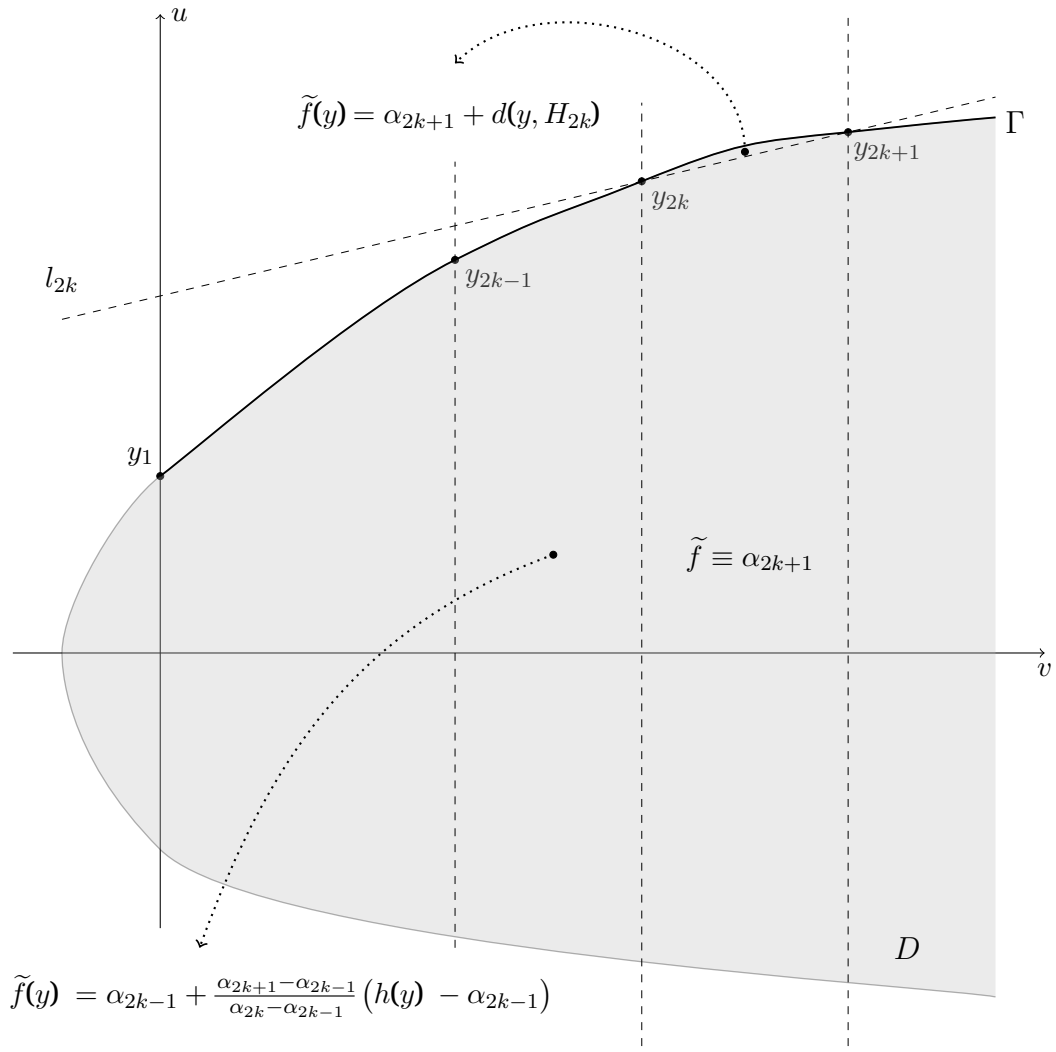


图1. 函数 $\widetilde{f}$ 的构造

序列 $\Delta_n := y_{n+1} - y_n$ 包含于半球 $[h > 0]_{S_Y}$中，或者更准确地说，包含于集合$[h > 0]_{S_Y} \setminus \{v/\|v\|\}$的两个连通分支之一（记作 γ）。由 g 的严格凹性（或 D 的严格凸性），序列$\{\Delta_n\}_n$ 在 γ 的两种自然次序（顺时针或逆时针）中的任意一种下都严格单调。由于 γ具有有限长度，对于每个固定的 $\varepsilon > 0$，满足 $\|\Delta_n - \Delta_{n-1}\| \geq \varepsilon$的指标 $n \geq 2$ 只能有有限多个。换言之，$\|\Delta_n - \Delta_{n-1}\| \to 0$，这就是我们的断言3。

$\widetilde{f}$的定义：$D \to \mathbb{R}$（见图*1*）。

对于 $k \in \mathbb{N}$，令 l_k 为 Y 中经过点 y_k 和 y_{k+1}的直线，并令 H_k 为 Y 中由 l_k确定且包含原点的闭半空间。注意，对于 $k \geq 2$，点 $2y_k - y_{k+1}$ 属于 l_k，因此根据断言3，有

$$d(y_{k-1}, l_k) \leq \|2y_k - y_{k+1} - y_{k-1}\| \to 0.$$

~我们先规定：只要 $h(y) < 0$，就令 $f(y) = 0$。若 $h(y) \geq 0$，则我们如下定义~f

$$\widetilde{f}(y) := \begin{cases} \alpha_{2k-1} + \frac{\alpha_{2k+1}-\alpha_{2k-1}}{\alpha_{2k}-\alpha_{2k-1}}\big(h(y) - \alpha_{2k-1}\big) & \text{if } \alpha_{2k-1} \leq h(y) < \alpha_{2k} \\ \alpha_{2k+1} & \text{if } \alpha_{2k} \leq h(y) < \alpha_{2k+1},\ y \in H_{2k} \\ \alpha_{2k+1} + d(y, H_{2k}) & \text{if } \alpha_{2k} \leq h(y) < \alpha_{2k+1},\ y \notin H_{2k} \end{cases}$$

~容易看出，函数 f 现在在 D上定义良好，且连续~并且拟凸；此外，f 是 $\frac{2}{\beta}$-利普希茨的（因为它是“分段 $\frac{2}{\beta}$-利普希茨的”）。 –

f的定义： $C \to \mathbb{R}$，以及证明的完成。

现在，我们只需按如下方式定义 f

$$f := \widetilde{f} \circ P,$$

其中，到 Y 的投影 P 已在上文定义。接下来要证明，f 无法延拓为一致连续 QC 函数 $F\colon X \to \mathbb{R}$。反设存在这样的 F。对每个 $n \geq 1$，取满足 $P(x_n) = y_n$的 $x_n \in \partial C$。对每个 $k \geq 1$，凸集$[F < \alpha_{2k+1}]_C = [f < \alpha_{2k+1}]_C$ 包含于半空间 $W_{2k} := P^{-1}(H_{2k})$ 中，该半空间的边界与 C 相交于边界的一个相对开子集。因此，由凸性可知，$[F < \alpha_{2k+1}]_X$ 也必包含于同一半空间。于是，结合我们的构造与断言3，得到

$$\begin{aligned} (2)\quad d\big([F < \alpha_{2k}]_X, [F \geq \alpha_{2k+1}]_X\big) &\leq d\big(x_{2k-1}, X \setminus W_{2k}\big) = d\big(y_{2k-1}, l_{2k}\big) \\ &\leq \|y_{2k+1} + y_{2k-1} - 2y_{2k}\| \to 0 \text{ as } k \to +\infty. \end{aligned}$$

由于 F 在 X上一致连续，因此它具有一个可逆的连续性模函数 $\omega\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，也就是说，这是 $\mathbb{R}^+$ 上的一个递增同胚，使得对于所有 x，$x' \in X$，均有$|F(x) - F(x')| \leq \omega(\|x - x'\|)$；参见 [6]。根据 [6, 命题 2.5]，我们必须有

$$d\big([F < \alpha_{2k}]_X, [F \geq \alpha_{2k+1}]_X\big) \geq \omega^{-1}(\alpha_{2k+1} - \alpha_{2k}) \geq \omega^{-1}(\beta) > 0$$

对每个 k 都成立。但由 (2) 可知这是不可能的。这个矛盾完成了定理 4.1 的证明。□

5. 利普希茨拟凸延拓的不存在性

本节旨在证明：对于任意赋范空间 X 中的任意凸体 C，只要其维数至少为 2，就存在一个定义在 C 上的利普希茨拟凸函数，它无法扩展为定义在整个 X 上的利普希茨拟凸函数。这是对我们先前定理1.2(a)结果的推广；该结果仅涉及一个特定的 C。

我们先给出两个引理，第一个相当标准，第二个则较为初等，但稍微有些技术性。

引理 5.1. 设 X、Y 为任意赋范空间，$E \subset X$ 为具有非空内部的凸集，且 $P\colon\ X \to Y$ 为连续线性开映射。则 $P($ 内 $_X E) =$ 内 $_Y P(E)$。

证明。由于 P(内$_X E$) 是非空开集，P(E) 具有非空内部，且 P(内$_X E$) $\subset$ 内$_Y P$(E)。现在，利用事实 2.1 和 P 的连续性，我们得到

$$P(E) \subset P\big(\overline{E}^X\big) = P\big(\overline{\operatorname{int}_X E}^X\big) \subset \overline{P(\operatorname{int}_X E)}^Y \subset \overline{\operatorname{int}_Y P(E)}^Y.$$

取内部后，我们有

$$\operatorname{int}_Y P(E) \subset \operatorname{int}_Y \Big[\overline{P(\operatorname{int}_X E)}^Y\Big] \subset \operatorname{int}_Y \Big[\overline{\operatorname{int}_Y P(E)}^Y\Big].$$

于是该结论成立，因为再次根据事实 2.1，第二个集合与 int$_Y$ [P(int$_X E$)] = P(int$_X E$) 重合，而第三个集合等于 int$_Y$ [int$_Y P$(E)] =int$_Y P$(E)。□

设 M 为赋范空间中的一个非空集合。回顾函数 $g\colon\ M \to \mathbb{R}$ 的最小连续模 是如下非减函数

$\omega_g\colon\ [0,+\infty) \to [0,+\infty],\quad \omega_g(t) := \sup\{|g(x) - g(y)|\colon\ x,\ y \in M,\ \ \|x-y\| \le t\}.$

显然 $\omega_g(0) = 0$，且 ω_g 在 0 处右连续当且仅当 g 一致连续。容易看出，g 是 K-利普希茨的当且仅当对每个 $t \ge 0$ 有 $\omega_g(t) \le Kt$ 。

引理5.2. 设 X 是维数至少为2的任意赋范空间，并设 $Y = \mathbb{R}^2$ （配备欧几里得范数）。设 $P\colon\ X \to Y$ 是一个有界线性算子，满足 $\theta B_Y \subset P(B_X)$，其中某个 $\theta > 0$。设 $\alpha < \beta$为实数。假设：

(i) $E \subset X$ 是一个凸体，使得 $C := P(\overline{E) \neq} Y$ （因而 C 是 Y中的凸体）；(ii) $f\colon\ C \to \mathbb{R}$ 是连续 *QC* 函数；(iii) 集合 $C_\alpha := [f \le \alpha]_C$ 与 $C_\beta := [f \le \beta]_C$ 均为凸体；(iv)存在一条直线 $L \subset Y$ 和一个开凸集 $U \subset C$，使得$U \cap \partial_Y C_\beta = U \cap L \neq \emptyset$;

(v) $F\colon E \to \mathbb{R}$ 是由 $F(x) = f\big(P(x)\big)$定义的连续 *QC* 函数。~设 $F\colon X \to \mathbb{R}$ 是 F的拟凸延拓，并设$\omega_{\widetilde{F}}$为其最小连续模。则：

(a) $P\big([\widetilde{F} \le \beta]_X\big) \subset H$其中， $H \subset Y$是由 L确定且包含 C_β的闭半平面；

(b) $\omega_{\widetilde{F}}\left(\frac{d(L,C_\alpha)}{\theta} + \eta\right) > \beta - \alpha$对每个 $\eta > 0$均成立。

证明。 由于 P 是一个开映射， C 是 Y 中的一个凸体，并且 $\operatorname{int}_Y C = \widetilde{}\operatorname{int}_Y P(E) = P(\operatorname{int}_X E)$（根据事实 2.1和引理 5.1）。凸集 $C_\beta := \widetilde{} P([F \le \beta]_X)$包含 C_β，且 $C_\beta \cap U = C_\beta \cap U$。由于直线 L在 U中的各点处支撑$\widetilde{}C_\beta$，根据一个简单的凸性论证可知， L 也支撑 C_β。这证明了(a)。

我们来证明 (b)。给定 $\eta > 0$，令 $y_0 \in \operatorname{int}_Y C_\alpha$ and $z_0 \in Y \setminus H$ 满足 $\|z_0 - y_0\| = d(L, C_\alpha) + \eta$。令 $v_0 \in \operatorname{int}_X E$ 满足 $y_0 = P(v_0)$，并且~注意到 $F(v_0) = f(y_0) \le \alpha$。注意，由于 $\theta B_Y \subset P(B_X)$，存在 $w_0 \in X$ 使得 $\|w_0 - v_0\| \le {}^{d(L,}_{C_\alpha)_\theta}{}^{+\eta}$且 $P(w_0) = z_0$。由 (a) 且~由于 $z_0 \in X \setminus H$，我们有 $F(w_0) > \beta$。因此，

$$\omega_{\widetilde{F}}\left(\frac{d(L, C_\alpha) + \eta}{\theta}\right) \ge \widetilde{F}(w_0) - \widetilde{F}(v_0) > \beta - \alpha.$$

□

定理 5.3。 设 X 是维数至少为 *2* 的任意赋范空间，且 $E \subset X$ 是一个凸体。则存在一个利普希茨拟凸函数$F\colon\ E \to \mathbb{R}$，它无法延拓为整个 X 上的任何 ***Lipschitz QC*** 函数。

证明。 令 $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ 为 E 的任意支撑泛函，并令 Z 为 $\ker(x^*)$ 中余维为 1 的闭子空间。令 Y 为商空间 X/Z，并令 $P\colon X \to Y$ 为相应的商映射。由于 Y 是二维的，因此可以将其视为欧几里得 $\mathbb{R}^2$。考虑凸集~~C~~ := $P(E)$，显然它不同于整个 $Y = \mathbb{R}^2$。因此， C 是 Y 中的凸体。不失一般性，我们可以假设：

$$(0,0) \in \partial C\,, \quad C \subset \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v \ge 0\}\,, \quad (0,1) \in \operatorname{int} C\,.$$

令 $\theta > 0$满足 $\theta B_Y \subset P(B_X)$。注意，存在 $\varepsilon \in (0,1)$，使得集合 $\partial C \cap \big([0,\varepsilon] \times [0,1]\big)$与凸连续非递减函数 $g\colon\ [0,\varepsilon] \to [0,1]$的图像重合，且 $g(0) = 0$。对于 $z \in [0,\varepsilon]$，注意 $\delta(z) := {}^{g(z)}_{2} - g\big(\frac{z}{2}\big) \equiv {}^{g(0)+g(z)}_{2} - g\big(\frac{0+z}{2}\big) \ge 0$。由于 $g(z) = 2\delta(z) + 2\bar{g}\big(\frac{z}{2}\big)$，~容易通过归纳得出，对于每个整数 $n \ge 0$，

$$g(\varepsilon) = 2\sum_{k=0}^{n} 2^k \delta\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right) + 2^{n+1} g\left(\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) \ge 2\sum_{k=0}^{n} 2^k \delta\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right).$$

因此，级数 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \delta\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right)$ 收敛，从而当 $k \to \infty$ 时 $2^k \delta\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right) \to 0$。现在，令 $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \subset (0,1)$ 为一个满足 $2^k \alpha_k \to 0$ 的序列，并定义

$$D_k = \left\{(u,v) \in C : \ u \geq \tfrac{3}{4}\tfrac{\varepsilon}{2^k}, \ v \geq \alpha_k + \tfrac{2^k}{\varepsilon}\left(g\left(\tfrac{\varepsilon}{2^k}\right) - \alpha_k\right) u\right\}, \quad \text{for } k \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

注意：

- $\left\{(u, \ v) \in C : \ u \geq \tfrac{\varepsilon}{2^k}\right\} \subset D_k \subset \left\{(u, \ v) \in C : \ u \geq \tfrac{3}{4}\tfrac{\varepsilon}{2^k}\right\}$；
- $D_k \subset D_{k+1}$ 以及 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k = \{(u, \ v) \in C : \ u > 0\}$；
- 如果我们考虑直线

$$l_k = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ v = \alpha_k + \tfrac{2^k}{\varepsilon}\left(g\left(\tfrac{\varepsilon}{2^k}\right) - \alpha_k\right) u\right\},$$

以及点 $P_k := \left(\frac{\varepsilon}{2^k}, \ g\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right)\right)$ 和

$$Q_k := \left(\tfrac{\varepsilon}{2^k}, 2g\left(\tfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) - \alpha_{k+1}\right) = \left(\tfrac{\varepsilon}{2^k}, g\left(\tfrac{\varepsilon}{2^k}\right) - 2\delta\left(\tfrac{\varepsilon}{2^k}\right) - \alpha_{k+1}\right),$$

则 $P_k \in D_k$，$Q_k \in l_{k+1}$ 且

$$d\big(l_{k+1}, D_k\big) \leq d\big(Q_k, P_k\big) = 2\delta\left(\tfrac{\varepsilon}{2^k}\right) + \alpha_{k+1}; \tag{3}$$

- $d\big(C \setminus D_{k+1}, D_k\big) \geq \frac{3}{4}\frac{\varepsilon}{2^k} - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$.

设 $f: \ C \to \mathbb{R}$ 由下式定义：

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in D_0, \\ \frac{\varepsilon}{4}\left(2 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) + d(x, D_k) & \text{if } k \geq 0, \ x \notin D_k, \ d(x, D_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, \\ \frac{\varepsilon}{4}\left(2 - \frac{1}{2^k}\right) & \text{if } k \geq 0, \ x \in D_{k+1}, \ d(x, D_k) > \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, \\ \frac{\varepsilon}{2} & \text{if } u \leq 0. \end{cases}$$

不难看出，f 是拟凸1-利普希茨函数，使得对于 $\beta_k = \frac{\varepsilon}{4}\left(2 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)$ $(k \geq 0)$ 有

$$[f \leq \beta_k]_C = D_k.$$

现在，设 $F: \ E \to \mathbb{R}$ 为由 $F(x) = f\big(P(x)\big)$ 定义的Lipschitz拟凸函数。余下要证明 F 不能延拓为Lipschitz拟凸函数 $\widetilde{F}: \ X \to \mathbb{R}$。通过矛盾进行论证，假设这样的 $\widetilde{F}$ 存在，并令 $K > 0$ 使得每当 $t \geq 0$ 时有 $\omega_{\widetilde{F}}(t) \leq Kt$。固定 $k \in \mathbb{N}$。应用引理5.2，其中

$$L = l_{k+1}, \quad \alpha = \beta_k, \quad \beta = \beta_{k+1}, \quad \eta = d\big(l_{k+1}, D_k\big)$$

得到

$$\omega_{\widetilde{F}}\left(\tfrac{2d(l_{k+1}, D_k)}{\theta}\right) \geq \tfrac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

由 (3) 可得

$$2K\tfrac{2\delta\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right) + \alpha_{k+1}}{\theta} \geq \omega_{\widetilde{F}}\left(2\tfrac{2\delta\left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right) + \alpha_{k+1}}{\theta}\right) \geq \tfrac{\varepsilon}{2^{k+2}},$$

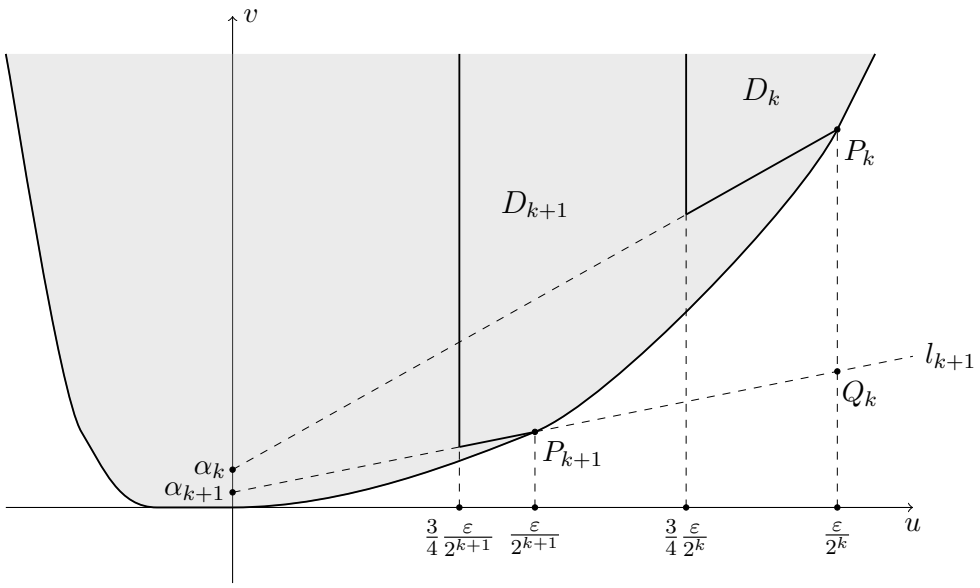


图2. 集合的构造 D_k

因此

$$2^k\left(2\delta\left(\tfrac{\varepsilon}{2^k}\right)+\alpha_{k+1}\right)\geq \tfrac{\theta\varepsilon}{8K}.$$

但这就产生了矛盾，因为左侧项在 $k\to\infty$ 时趋于 0。 □

6. 无渐近方向的凸体

本节给出关于不含渐近方向的凸体的结果，这些结果将用于证明我们关于拟凸函数可延拓性的正面结论。值得指出的是，D. Gale 和 V. Klee 曾以“连续凸体”之名研究过不含渐近方向的闭凸集 [9] 。他们采用这一术语，是因为这类凸集 $K\subset X$ 的特征在于，其支撑函数 $h\mapsto \sup h(K)$作为从 X 的对偶单位球面到 $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$的映射是连续的。此外，这类集合在有限代数和以及有限并集的凸包运算下封闭。

我们先来看一个初等引理。回顾一下，给定开区间 $I\subset\mathbb{R}$ 和凸函数 φ: $I\to\mathbb{R}$，其左导数和右导数 φ'_- 和 φ'_+ 在 I 上存在，并且满足 $\varphi'_-(t_1)\leq\varphi'_+(t_1)\leq\varphi'_-(t_2)$，只要 $t_1,\ t_2\in I$和 $t_1<t_2$。

引理 6.1。 设 $-\infty \le a < +\infty$，并设 $\varphi\colon (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ 是一个凸函数。则

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \lim_{t\to+\infty} \varphi'(t)\,, \tag{4}$$

其中 $\varphi'(t)$ 表示 $\partial\varphi(t) \equiv [\varphi'_-(t)\ \varphi'_+(t)]$ 中的任意元素。

证明。 由 φ的凸性， φ' 是非递减的，因此 (4) 中的第二个极限存在，且等于 $s := \sup_{t>a} \varphi'(t)$。此外，(4) 中的第一个极限也存在。为此，固定 $t_0 > a$。函数 $t \mapsto \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}$ 是非递减的，并且对于任意$t_1 > t_0$，其在 (t_0, t_1) 中的取值属于 $[\varphi'(t_0)\ \varphi'(t_1)]$。此外，

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\cdot\frac{t-t_0}{t} + \frac{\varphi(t_0)}{t}.$$

因此，(4) 中的第一个极限存在，并且

$$\varphi'(t_0) \le \lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} \le \lim_{t\to+\infty} \varphi'(t) = s.$$

由于这对每个 $t_0 > a$ 都成立，其余部分便可轻易得出。 □

推论 6.2。 设 $C \subset X$ 是一个无界凸体， $x_0 \in X \setminus (\operatorname{int} C)$，并设 $v \neq 0$ 满足： v 不是 C 的渐近方向，且 $(x_0 + \mathbb{R}_+ v) \cap (\operatorname{int} C) = \emptyset$。那么

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{d(x_0+tv, C)}{t} > 0\,.$$

证明。 函数 $\varphi(t) := d(x_0 + tv,\ C)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上连续且为凸函数，因此存在 $\ell := \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) \in [0,\ +\infty]$。（注意， ℓ 不可能为零，因为 v 不是 C 的渐近方向。）记 $\delta := \inf \varphi(\mathbb{R}_+) = \operatorname{dist}(x_0 + \mathbb{R}_+ v,\ C) \le \ell$。我们声称 $\delta < \ell$。

为证明这一点，假设结论不成立。存在一个序列 $t_n \to +\infty$，使得 $\varphi(t_n) \to \ell$。换言之，记 $y_n = x_0 + t_n v$，存在 $c_n \in C\ (n \in \mathbb{N})$，满足 $\|c_n - y_n\| \to \ell = \delta \in (0,\ +\infty)$。由紧致性可设（并确实设） $c_n - y_n \to w$。令 $x_1 = x_0 + w$。由于 $\|w\| = \delta$，$(x_1 + \mathbb{R}_+ v) \cap (\operatorname{int} C) = \emptyset$。此外，$\|x_1 + t_n v - c_n\| = \|w - (c_n - y_n)\| \to 0$。但这与 v 不是 C 的渐近方向相矛盾。

由于 $\delta < \ell$、 φ 必须在 $+\infty$ 的邻域内严格递增。根据引理 6.1，$\lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \sup_{t>0} \varphi'(t) > 0$。证毕。□

引理 6.3。 设 维数 $X = d \ge 2$，且 $C \subset X$ 是一个没有渐近方向的无界凸体。设非零泛函 $h \in X^*$ 在 C上有下界。那么：

(a) h在 C 上取得其下确界；***(b)*** 每个次水平集 $C_\alpha := [h \le \alpha]_C\ (\alpha \in \mathbb{R})$ 都是有界的。

证明。(a) 记 $m := \inf h(C)$ 以及 $L := h^{-1}(m)$。反证，假设 $C \subset [h > m]_X$。于是有 $C \cap L = \emptyset$ 以及 $d(C, L) = 0$。固定某个 $x_0 \in L$。存在序列 $\{v_n\}_n \in h^{-1}(0) \cap S_X$ 和 $\{t_n\}_n \subset (0, +\infty)$，使得 $d(x_0 + t_n v_n, C) \to 0$。现在必有 $t_n \to +\infty$，否则由一个简单的紧性论证可得 C 与 L 的公共点。取一个子序列后，我们可以（并且确实）假设 $v_n \to v \in h^{-1}(0) \cap S_X$。由于 v 不是渐近方向，必有 $(1/t_n)\, d(x_0 + t_n v, C) \to \beta > 0$。但于是我们得到

$$\frac{d(x_0 + t_n v_n, C)}{t_n} \geq \frac{d(x_0 + t_n v, C)}{t_n} - \|v_n - v\| \to \beta$$

这意味着 $d(x_0 + t_n v_n, C) \to +\infty$，这是一个矛盾。

(b) 我们沿用定理 4.1 证明第一部分中的方法。若 (b) 不成立，则存在 $\alpha > m$，使得 C_α 无界。于是 C_α 包含一条形如 $c + \mathbb{R}^+ v$ 的半直线。由于 $\mathbb{R}^+ h(v) = h(c + \mathbb{R}^+ v) - h(c) \subset [m - \alpha, \alpha - m]$，我们必有 $h(v) = 0$。但此时 C_m 包含一条形如 $d + \mathbb{R}^+ v$ 的半直线；然而这是一个矛盾，因为 $C_m \subset \partial C$ 且 v 不是 C 的渐近方向。□

记号 6.4。给定一个集合 $E \subset X$，我们定义 $\mathrm{cone}(E) = \mathbb{R}_+ E$（由 E 生成的锥）。对于 $x \in X$，我们记

$$c(x, E) = x + \mathrm{cone}(E - x),$$

由 E 生成、顶点为 x 的锥。注意，$c(0, E) = \mathrm{cone}(E)$。

引理 6.5。设 $\dim X = d \geq 2$，且设 $C \subset X$ 是没有渐近方向的无界凸体。那么对于每个 $z \in X \setminus C$，锥 $c(z, C)$ 是闭的，并且集合

$$\Gamma_C(z) = C \cap \partial[c(z, C)]$$

非空且有界。

证明。（a）通过平移，不妨设 $z = 0 \notin C$。假设存在一个范数为 1 的向量 $v \in \partial[\mathrm{cone}(C)] \setminus \mathrm{cone}(C)$。那么 $\mathbb{R}_+ v \cap C = \emptyset$，并且存在一个序列 $\{c_n\}_n \subset C$，满足 $\delta_n := \left\| \frac{c_n}{\|c_n\|} - v \right\| \to 0$。但是，由此 $0 = \lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left\| c_n - \|c_n\| v \right\|}{\|c_n\|} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{d(\|c_n\| v,\, C)}{\|c_n\|} \to +\infty$，由于 v 不是 C 的渐近方向，推论 6.2 蕴含 $\{c_n\}_n$ 有界。此外，由于 $0 \notin C$，我们有 $\inf_n \|c_n\| > 0$。取一个子序列，不妨设 $\|c_n\| \to \tau > 0$。但这意味着 $c_n \to \tau v$，从而 $\tau v \in C$，因此 $v \in \mathrm{cone}(C)$。这一矛盾证明了 $c(z, C)$ 是闭的。

(b) 集合 $\partial[c(z, C)]$ 包含于 $c(z, C)$，因此从 z 出发的每条半直线都与 C 相交。于是 $\Gamma_C(z)$ 非空。为证明它也是有界的，

假设结论不成立，即存在一个序列 $\{c_n\}_n \subset \Gamma_C(z)$，使得$\|c_n\| \to +\infty$。记 $u_n := \frac{c_n - z}{\|c_n - z\|}$，并注意到 $\|c_n - z\| \not\to +\infty$。取一个子序列后，我们可以（且确实如此）假设 $u_n \to \bar{u} \in S_X$。我们断言 $(z + \mathbb{R}_+\bar{u}) \cap (\text{int } C) = \emptyset$。（事实上，若不然，则存在 $\tau > 0$，使得$z + \tau\bar{u} \in \text{int } C$。于是，对每个充分大的 n，都有 $z + \tau u_n \in \text{int } C$。因此$c_n \in c(z, \text{int } C) = \text{int } c(z, C)$，这就导出了矛盾。）由于 $\bar{u}$ 不是渐近方向，根据推论 6.2，有 $\lim_{t\to+\infty} d(z+t\bar{u}, C)/t > 0$。另一方面，

$$\begin{aligned}\frac{d\big(z + \|c_n - z\|\bar{u}, C\big)}{\|c_n - z\|} &\le \frac{\big\|(z + \|c_n - z\|\bar{u}) - (z + \|c_n - z\|u_n)\big\|}{\|c_n - z\|} \\ &= \|\bar{u} - u_n\| \to 0.\end{aligned}$$

这个矛盾完成了证明。 □

定义 6.6. 给定凸体 $C \subset X$ 和 $x \in \partial C$，定义如下：

- $\Sigma_1(x, C) = \{g \in S_{X^*} : \sup g(C) = g(x)\}$（在 C 处的所有范数为 1 的支撑泛函所构成的集合）；
- $K(x, C) = \bigcap_{g\in\Sigma_1(x, C)} [g \le g(x)]_X$（所有包含 C 且边界为在 C 处的支撑超平面的半空间的交集）。

通过简单应用 Hahn-Banach 分离定理，很容易看出 $K(x, C) = c(x, C)$。不过，我们不需要这个事实。

引理 6.7. 设 $\dim X = d \ge 2$。设 $C \subset X$ 为凸体，并设 $x \in X \setminus C$ 使得锥 $c(x, C)$ 是闭的。记 $\Gamma_C(x) := \partial[c(x, C)] \cap C$。则

$$x \in K(y, C) \quad \textit{for each } y \in \partial C \setminus \operatorname{conv}[\Gamma_C(x) \cup \{x\}].$$

证明。通过平移，我们可以（并且确实）假设 $x = 0 \notin C$。于是我们有锥(C)是闭的，并考虑 $\Gamma_C(0) = \partial[\text{锥}(C)] \cap C$。设$y \in \partial C \setminus \text{conv}[\Gamma_C(0) \cup \{0\}]$ 以及 $g \in \Sigma_1(y, C)$，并记 $s := \sup g(C) = g(y)$。由于 $y \notin \Gamma_C(0)$，我们有 $y \in \text{int}[\text{锥}(C)] = \text{锥}(\text{int } C)$。因此存在$t > 0$ 使得 $ty \in \text{int } C$。显然，$t \ne 1$。

假设 $t > 1$。由于 $g(ty) < g(y)$，我们必有 $s \equiv g(y) < 0$。任取包含 y 的二维子空间 $Y \subset X$。边界$\partial_Y[\text{锥}(C \cap Y)] = \partial_Y[\text{锥}(C) \cap Y]$ 由两条半直线组成，记作 $\mathbb{R}^+u$ 和$\mathbb{R}^+v$，其中 $u, v \in C$。注意，这两条半直线不能重合（因为 Y与 $\text{int } C$ 相交），也不能互为反向（因为 $0 \notin C$）。显然，u, $v \in \Gamma_C(0)$。线段 $[u, v]$ 必须包含 y 的一个正倍数；也就是说，存在 $\tau > 0$ 和 $\lambda \in (0, 1)$，使得 $\tau y = (1 - \lambda)u + \lambda v$。应用 g，得到 $\tau s = (1 - \lambda)g(u) + \lambda g(v) \le s$，因此 $\tau \ge 1$。于是，$y = \frac{1-\lambda}{\tau}u + \frac{\lambda}{\tau}v + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)0 \in \text{conv}[\Gamma_C(0) \cup \{0\}]$。但这与我们的假设矛盾。

因此，我们必有 $t \in (0,1)$。由于 $g(ty) < g(y)$，我们有 $g(y) > 0$。因此 $0 \in [g \le g(y)]_X$。由于 $g \in \Sigma_1(y, C)$ 是任意的，我们得出 $0 \in K(y, C)$，如所需。□

扩张方法。
现在，我们将为给定的固定凸体 C 中包含的任意凸体 B指定其"延拓" $e(B) \subset X$；同时，我们也定义 $e(\emptyset)$。这种扩张方法实际上与我们在先前的论文 [6]中采用的方法相同。唯一实质性的区别在于，这里我们考虑的是闭凸集，而不是开集。我们还使用了不同的记号。

定义 6.8。设 C 是赋范空间 X 中的一个凸体，并设 $B \subset C$ 是满足 $B = \operatorname{int} B$ 的闭凸集（等价地， B 要么为空，要么是一个凸体）。若 $\emptyset \neq B \neq C$，我们定义

$$e(B) = \bigcap_{y \in \overline{(\operatorname{int} C) \cap \partial B}} K(y, B) = \bigcap_{y \in \partial_C B} K(y, B). \tag{5}$$

我们还定义 $e(\emptyset) = \emptyset$ 和 $e(C) = X$。

注 6.9. 关于 (5)，等式 $(\operatorname{int} C) \cap \partial B = \partial_C B$ 是一个简单的练习。注意， $e(B)$ 是一个闭凸集。此外，利用初等的哈恩–巴拿赫分离论证可推出 $e(B) \cap C = B$。

命题 6.10. 设 $\dim X = d \ge 2$，并设 $C \subset X$ 是一个没有渐近方向的（有界或无界）凸体。设 $\{B_n\}_n$ 是包含于 C 中的一个递增凸体序列，且 $C = \bigcup_n \operatorname{int}_C B_n$。那么 $X = \bigcup_n e(B_n)$。

证明。注意， $C = \bigcup_n B_n \subset \bigcup_n e(B_n)$。任取一个 $x \in X \backslash C$。设 Γ_C如引理 6.5 中所述。同一引理还表明， $K := \operatorname{conv}[\Gamma_C(x) \cup \{x\}] \cap C$是 C的一个紧子集。根据我们的假设，存在一个指标 m ，使得 $K \subset \operatorname{int}_C B_m$。因此， $\partial_C B_m \cap K = \emptyset$。此外，由于 $\Gamma_C(x)$ 包含于 $\operatorname{int}_C B_m$，我们必有 $\Gamma_{B_m}(x) = \Gamma_C(x)$。由于 $\partial_C B_m$与 $\operatorname{conv}[\Gamma_{B_m}(x) \cup \{x\}]$不相交，我们可以应用引理 6.7，得出$x \in \bigcap_{y \in \partial_C B_m} K(y, B_m) = e(B_m)$。证毕。□

观察 6.11. 设 C 是有限维赋范空间 X中的一个凸体，并设 $\{B_n\}_n$ 是包含于 C中的凸体递增序列。则 $C = \bigcup_n \operatorname{int}_C B_n$ 当且仅当

$(*)$ 对每个 $r > 0$ ，存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $C \cap rB_X \subset B_m$。

（事实上，必要性由紧致性得出；对于充分性，若 $x \in C$ ，只需考虑某个 $r > \|x\|$。 ）

引理 6.12. 设 维数 $X = d \geq 2$，且 $C \subset X$ 是一个没有渐近方向的凸体。设 $\{B_n\}_n$ 是包含于C 中的凸体序列，使得对每个 n，均有 $B_{n+1} \subset B_n$，且 $\bigcap_n B_n = \emptyset$。那么 $\bigcap_n e\left(B_n\right) = \emptyset$。

证明。注意到这些假设意味着 C 必须是无界的。取定 $h \in S_{X^*}$，使得 $m := \inf h(C) > -\infty$。由于每个次水平集 $[h \leq \alpha]_C$ 都是紧的（引理 6.3），$[h \leq \alpha]_C$ 只能与有限多个 B_n 相交。因此，$\alpha_n := \inf h(B_n) \to +\infty$。我们可以假设 $\alpha_1 > m$（从而对每个 n 都有 $\alpha_n > m$）。此外，由紧致性，对于每个 n，存在 $y_n \in B_n$ 使得 $h(y_n) = \alpha_n$。由此可得 $y_n \in \partial_C B_n$ 和 $-h \in \Sigma_1(B_n, y_n)$。因此，对每个 n，都有 $e(B_n) \subset [h \geq \alpha_n]_X$，这意味着 $\bigcap_n e(B_n) = \emptyset$。□

下面的引理是将 [6, 引理 5.3]推广到无界凸体的一个简单结果。

引理 6.13. 设在任意赋范空间中，C 是一个（有界或无界）凸体，且 C 不含直线。设 $B \subset C$ 是一个凸体，$x \in e(B) \setminus B \equiv e(B) \setminus C$ 且 $y \in C \setminus B$。那么 $[x, y] \cap B \neq \emptyset$。

证明。若 $y \in \operatorname{int} C$，令 y' 为交集 $[x, y] \cap \partial C$中的唯一点。若 $y' \in B$，则结论成立；否则，我们可以用 y' 代替 y。因此，我们可以（并且确实）假设 $y \in \partial C$。通过平移，我们可以（并且确实）假设 $0 \in \operatorname{int} B \setminus \operatorname{aff}\{x, y\}$。注意，子空间 $Y := \operatorname{span}\{x, y\}$ 是二维的。令 x' 为 $[0, x] \cap \partial B$中的唯一元素。由 [6, 引理 5.2]，$x' \in \operatorname{int}_{\partial C}(\partial B \cap \partial C)$。考虑凸体 $D := C \cap Y$，它位于 Y中。若 D 有界，则 $\partial_Y D$ 是闭简单弧，我们可以重复 [6, 引理 5.3]证明中的论证。D 无界时的情形也可用非常类似的方法证明。

设 D 无界。由于 D 包含一条半直线，但不包含任何直线，因此 ∂D 与实直线同胚。设 γ 为 ∂D 中以 x' 和y为端点的弧。注意，我们可以将 ∂C 写成三个互不相交集合的并

$$\partial C = (\partial C \setminus B) \cup \operatorname{int}_{\partial C}(\partial B \cap \partial C) \cup \partial_{\partial C}(\partial B \cap \partial C),$$

其中第一个和第二个在 ∂C 中是相对开的，并且它们分别包含 y 和 x'。由于 γ 是连通的，必定存在 $u \in \gamma \cap \partial_{\partial C}(\partial B \cap \partial C)$。设 u'为 $[x, y]$ 与半直线 $\mathbb{R}_+ u$的唯一公共点。存在 $t > 0$ 和 $\lambda \in (0, 1)$，使得 $tu = u' = (1 - \lambda)x + \lambda y$。由 [6, 引理 5.2(d)]，$u \in \operatorname{int} C \cap \partial B \equiv \partial_C B$。~~考虑~~ $g \in \Sigma_1(u, C)$，并注意到 $g(u) > 0$，以及 $g(x) \leq g(u)$，因为 $x \in e(B)$且 $g \in \Sigma_1(u, B)$。于是 $tg(u) = (1 - \lambda)g(x) + \lambda g(y) \leq g(u)$，从而 $t \leq 1$。因此，$u' \in [0, u] \cap [x, y] \subset B \cap [x, y]$。□

7. 从无界严格凸体延拓

本节的主要结果将是定理 7.4。在陈述它之前，我们需要做一些准备。

设 C 是赋范空间 X中的一个凸体。回顾一下，若 ∂C 不包含任何非平凡线段，则称 C 是严格凸的。

现在，我们定义 C 在点$x \in \partial C$处的局部一致严格凸模量 。设 $r > 0$ 是包含在 C中的闭球半径。对于 $\varepsilon \in [0, 2r)$，我们定义

$$\begin{aligned}\delta_C(x,\varepsilon) &:= \inf\big\{d(\tfrac{x+y}{2}, \partial C):\ y \in \partial C,\ \|x-y\| \geq \varepsilon\big\}\\ &= \inf\big\{d(\tfrac{x+y}{2}, \partial C):\ y \in \partial C,\ \|x-y\| = \varepsilon\big\}\\ &= \inf\big\{d(\tfrac{x+y}{2}, \partial C):\ y \in C,\ \|x-y\| \geq \varepsilon\big\}\\ &= \inf\big\{d(\tfrac{x+y}{2}, \partial C):\ y \in C,\ \|x-y\| = \varepsilon\big\}.\end{aligned} \tag{6}$$

模量 $\delta_C(x,\ \cdot)$ 是在 C 为 X 的单位球这一情形下所定义的经典局部一致严格凸模量的自然推广。对于一般的 C，式（6）中的等式并不显然；其证明以及 $\delta_C(x,\ \cdot)$ 的一些进一步性质可见 [8]（有关结果另见 [7]）。我们将使用以下显然事实：总有 $\delta_C(x,\ \varepsilon) \leq \varepsilon/2$。

注 7.1。

- 显然，函数 $\delta_C(x,\ \cdot)$ 在 $[0, 2r$ 上是非递减的，并且 $\delta_C(x,\ 0) = 0$。
- 在附加假设 X 为有限维时，利用一个简单的紧性论证可知，若 C 是严格凸的且 $E \subset \partial C$ 是有界集，则 $\inf_{x\in E} \delta_C(x,\ \varepsilon) > 0$对每个 $\varepsilon \in (0,\ 2r)$。特别地：(a) 如果 C 是严格凸的，那么它是局部一致严格凸的（即，对于所有 $x \in \partial C$ 和 $\varepsilon \in (0,\ 2r)$，$\delta_C(x,\ \varepsilon) > 0$）；(b) 如果 C 是严格凸且有界的，那么它是一致严格凸的（即，对于所有 $\varepsilon \in (0,\ 2r)$，$\inf_{x\in\partial C} \delta_C(x,\ \varepsilon) > 0$）。

引理 7.2. 设 $\dim X = d \geq 2$，设 $B \subsetneq C$ 为 X 中的两个凸体，且设 C 为严格凸。则

$$\operatorname{int}_C B \subset \operatorname{int} e(B).$$

证明。考虑任意的 $x \in \operatorname{int}_C B$。若 $x \in \operatorname{int} C$，显然有 $x \in \operatorname{int} e(B)$（因为 $x \in \operatorname{int} B$ 且 $B \subset e(B)$）。因此，设 $x \in \partial C$。设 C 包含一个半径为 $r > 0$ 的闭球。于是存在 $\varepsilon \in (0, 2r)$，使得 $B(x,\varepsilon) \cap C \subset B$，从而 $d(x, \partial_C B) > \varepsilon$。注意，$\delta := \delta_C(x,\varepsilon) = \delta_B(x,\varepsilon) > 0$。

现在，对每个 $y \in \partial_C B$ 以及每个 $g \in \Sigma_1(y, B)$，都有 $B(\frac{x+y}{2}, \delta) \subset B$，从而 $g(\frac{x+y}{2}) + \delta \leq \max g(B) = g(y)$。这很容易推出 $g(x) \leq g(y) - 2\delta$。因此，$B(x, 2\delta) \subset e(B)$。□

命题 7.3. 设维数 $X = d \geq 2$。设 $B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq C$ 是 X中的凸体，且体 C 是严格凸的、无界的，并且没有任何渐近方向。若 $B_1 \subset$ 内$_C B_2$，则

$$e(B_1) \subset \operatorname{int} e(B_2).$$

证明。考虑任意一个 $x_0 \in e(B_1)$。若 $x_0 \in B_1$，则 $x_0 \in$ 内$_C B_2 \subset$内$\, e(B_2)$（引理 7.2），于是结论成立。因此，假设

$$x_0 \in e(B_1) \setminus B_1 \equiv e(B_1) \setminus C.$$

由 Hahn-Banach 定理，存在 $h \in S_{X^*}$ 使得 $m := \inf h(C) > h(x_0)$。

由引理 6.5，集合 $\Gamma_C(x_0)$（在该引理中定义）是有界的。因此存在 $\gamma > m$ 使得 $\Gamma_C(x_0) \subset [h \leq \gamma]_C$。特别地，$\Gamma_C(x_0) \cup \{x_0\} \subset [h \leq \gamma]_X$。由引理 6.3，$[h \leq \gamma + 1]_C$ 是紧的。考虑半空间$H := [h \leq \gamma + 1]_X$。由于 $B_1 \cap H$是紧集，且与 $\partial_C B_2$不相交，我们有$d := \operatorname{dist}(B_1 \cap H,\ \partial_C B_2) > 0$。

任取 $y \in \partial_C B_2$。由于 $y \notin B_1$ 和 $x_0 \in e(B_1)$，引理 6.13 蕴含存在 $y' \in B_1 \cap (x_0,\ y)$。由于 C是严格凸的，且 $y,\ y' \in C$互不相同，因此存在 $y'' \in (y',\ y) \cap \operatorname{int} C$。因此，在从 x_0经过y的半直线上，各点按以下顺序排列：

$$x_0, \quad y', \quad y'', \quad y\,. \tag{7}$$

因此 $(x_0,\ y'') \cap \partial C = \{z_1\}$，其中 $z_1 \in (x_0,\ y']$。由于 $x_0,\ y' \in e(B_1)$，我们有 $z_1 \in e(B_1) \cap \partial C \equiv B_1 \cap \partial C$。由含有$z_1 \in (x_0,\ y'')$的次序关系 (7) 可知，$x_0$不可能属于锥 $K(z_1,\ C)$。根据引理 6.7，$z_1 \in \operatorname{conv}\big[\Gamma_C(x_0) \cup \{x_0\}\big]$。特别地，$h(z_1) \leq \gamma$。

固定某个 $0 < \varepsilon < \min\{d, 1\}$。由于 $\|y - z_1\| \geq d > \varepsilon$，存在唯一的$v \in (z_1, y)$，使得 $\|v - z_1\| = \varepsilon$。注意到 $h(v) \leq h(z_1) + \varepsilon < \gamma + 1$。由于$\delta_C(z_1, \varepsilon) \geq \bar{\delta} := \inf_{u \in \partial C \cap H} \delta_C(u, \varepsilon) > 0$，若定义$w = \frac{z_1+v}{2}$，则有$B(w, \delta) \subset C$。注意到

$$d(w, \partial_C B_2) \geq d(z_1, \partial_C B_2) - \|w - z_1\| > \varepsilon - (\varepsilon/2) = \varepsilon/2 \geq \bar{\delta}.$$

因此，$B(w, \delta) \cap \partial_C B_2 = \emptyset$。由于 $w \in B_2$，我们得到 $B(w, \delta) = B(w, \delta) \cap C \subset B_2$。由此可知，锥 $K(y, B_2)$包含锥 $c(y, B(w, \delta))$。由于 $w \in (x_0, y)$，我们得到 $K(y, B_2)$包含 $B(x_0, \delta)$。由于 δ 不依赖于 y，我们有 $e(B_2)$包含球 $B(x_0, \delta)$。证毕。□

定理 7.4. 设 $\dim X = d \geq 2$。设 $C \subset X$ 为无渐近方向的无界的严格凸体。则每个连续 *QC* 函数$f\colon C \to \mathbb{R}$ 都存在连续拟凸延拓 $F\colon X \to \mathbb{R}$。

证明. 对每个 $\alpha \in \mathbb{R}$，集合

$$A_\alpha := [f < \alpha]_C$$

在 C 中是凸且相对开。定义 $B_\alpha := A_{\alpha\circ}$ 于是

$$B_\alpha \subset \operatorname{int}_C B_\beta \quad \text{whenever } \alpha < \beta.$$

由命题 7.3,

$$e(B_\alpha) \subset \operatorname{int} e(B_\beta) \quad \text{whenever } \alpha < \beta.$$

由于显然 $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} \operatorname{int}_C B_\alpha = C$，对于每个充分大的 α，集合 B_α 都有非空内部（甚至在 X 中），因此我们可以应用命题 6.10 得出

$$X = \bigcup e(B_\alpha) = \bigcup \operatorname{int}[e(B_\alpha)].$$

此外，显然由于 $B_\alpha \subset [f \leq \alpha]_C$，我们有 $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} B_\alpha = \emptyset$。由引理 6.12 可得一个简单的应用 $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} e(B_\alpha) = \emptyset$。因此 $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} \operatorname{int}_X[e(B_\alpha)] = \emptyset$。

现在，我们定义 $F\colon\ X \to \mathbb{R}$ 如下

$$F(x) = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : x \notin \operatorname{int} e(B_\alpha)\}.$$

根据 [6, 命题 2.5]，F是 $f|_{\operatorname{int} C}$在整个空间上的连续 QC 延拓。由连续性，$F|_C = f$。□

8. 无连续性的延拓

命题 8.1. 设 维数 $X = d \geq 2$。设 $B_1 \subset B_2 \subset C$ 是X中的凸体，且 C 不含直线。那么 $e(B_1) \subset e(B_2)$。

证明。 反设存在 $x \in e(B_1) \setminus e(B_2)$。于是:

(i) $x \notin C$ （根据注 6.9）；(ii) 存在 $y \in \partial_C B_2$ 和 $f \in S_{X^*}$ 使得

$$\theta := \sup f(B_2) = f(y) < f(x).$$

我们断言 $y \notin B_{1\circ}$ 事实上，若 $y \in B_1$，则必有 $y \in \partial_C B_1$ 和$f \in K\,(y,\ B_1)$，从而 $x \notin e\,(B_1)$，这就导出了矛盾。现在，根据引理 6.13，存在 $z \in\ (x,\ y)\ \cap B_{1\circ}$ 特别地，我们有

$$f(z) > \theta = \sup f(B_2) \geq \sup f(B_1) \geq f(z),$$

这一矛盾完成了证明。 □

定理 8.2。 设 维数 $X = d \geq 2$。设 $C \subset X$ 为一个不含渐近方向的凸体。则每个连续 *QC* 函数 $f\colon\ C \to \mathbb{R}$ 都存在一个上半连续 *QC* 延拓 $F\colon\ X \to \mathbb{R}$。

证明。 对于每个 $\alpha \in \mathbb{R}$，集合

$$A_\alpha := [f < \alpha]_C$$

在 C 中是凸且相对开的。定义 $B_\alpha := A_\alpha$。于是

$$B_\alpha \subset \operatorname{int}_C B_\beta \quad \text{whenever } \alpha < \beta.$$

由命题 8.1，

$$e(B_\alpha) \subset e(B_\beta) \quad \text{whenever } \alpha < \beta.$$

由于显然 $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} \operatorname{int}_C B_\alpha = C$，对每个充分大的 α，集合 B_α 都有非空内部（即使在X中也是如此），因此我们可以应用命题 6.10 得出

$$X = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} e(B_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} \operatorname{int}[e(B_\alpha)].$$

定理 7.4 证明中的相同论证给出 $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} \operatorname{int}[e(B_\alpha)] = \emptyset$。现在，定义 $F\colon X \to \mathbb{R}$ 如下：

$$F(x) = \sup\bigl\{\alpha \in \mathbb{R} : x \notin \operatorname{int} e(B_\alpha)\bigr\}.$$

根据 [6, 命题 2.5] 的证明， F 是 f 在整个空间上的连续上半连续拟凸延拓。□

下面的命题表明，在前述结果中，我们不能把关于 f 的连续性假设放宽为仅要求其上半连续性。

命题 8.3。 设 $C = [0,1] \times [-1,1] \subset X := \mathbb{R}^2$，则存在一个拟凸上半连续函数 $f\colon C \to \mathbb{R}$，它不具有到整个 X 的拟凸上半连续延拓。

证明。 考虑定义在 C 上的函数 f，其定义为

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } (x,y) \in [0,1] \times [-1,0), \\ y & \text{if } (x,y) \in (0,1) \times [0,1], \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

显然，当 $\alpha \le 0$ 时， $[f < \alpha]_C$ 为空；而当 $\alpha > 1$ 时，它与 C 重合。对于 $\alpha \in (0,1]$，我们有 $[f < \alpha]_C = \bigl([0,1] \times [-1,0)\bigr) \cup \bigl((0,1) \times [0,\alpha)\bigr)$。因此， f 的所有严格下水平集都是凸的，且在C中相对开，这证明了 f 是拟凸且上半连续的。现在，反过来假设存在一个拟凸上半连续函数 $F\colon X \to \mathbb{R}$，使得 $F|_C = f$，并考虑开凸集 $U = [F < \frac{1}{2}]_X$。由于$F(0,-1) = f(0,-1) = 0$，我们有 $(0,-1) \in U$，因此存在 $\varepsilon > 0$，使得 $(0,-1) + \varepsilon B_X \subset U$。此外， U 包含相对开线段 $(0,1) \times \{\frac{1}{3}\}$。因此，根据 U的凸性，它也包含 $(0,0)$。但这与 $F(0,0) = f(0,0) = 1$ 矛盾。□

另一方面，下面的定理 8.5 讨论了如何将拟凸上半连续函数从开凸集延拓出去，其中该凸集的闭包没有渐近方向。证明中需要用到以下观察。

观察 8.4。 设 $\{D_n\}_n$ 是赋范空间 X中的开凸集序列。假设 $X = \bigcup_n D_n$，且对每个 n都有 $D_n \subset D_{n+1}$ 。则$X = \bigcup_n D_n$。

证明。 集合 $G := \bigcup_n D_n$ 是稠密开凸集。根据一个众所周知的一般事实，$G = \text{int}(G) = X$。□

定理 8.5。 设维数 $X = d \geq 2$。设 $A \subsetneq X$ 是一个非空开凸集，其闭包没有渐近方向。则每个在有界集上有界的上半连续 *QC* 函数 $f\colon A \to \mathbb{R}$ 都存在一个在有界集上有界的上半连续 *QC* 延拓 $F\colon X \to \mathbb{R}$ 。

证明。 我们以与定理 8.2 的证明类似的方式进行。对每个$\alpha \in \mathbb{R}$ 定义

$$A_\alpha := [f < \alpha]_A, \quad B_\alpha := \overline{A}_\alpha.$$

于是：当 $\alpha < \beta$ 时，$A_\alpha \subset A_\beta$；$\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} A_\alpha = A$；并且对于每个充分大的 α，$A_\alpha \neq \emptyset$ 。显然，对于每个固定的 α，$B_\alpha = \emptyset$ 或 B_α 是一个凸体。考虑凸体 $C := A_0$。

令 $r > 0$ 使得 rB_X 与 A 相交。由于 f 在有界集上有上界，因此对于每个充分大的 α，必有 $\text{int}(rB_X \cap C) \subset A_\alpha$。对于每个这样的 α，$rB_X \cap C = \text{int}(rB_X \cap C) \subset A_\alpha = B_\alpha$。因此，我们可以应用观察 6.11 和命题 6.10，得到 $X = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} e(B_\alpha)$。

由 $\alpha \mapsto B_\alpha$ 的单调性及命题 8.1 可知，当 $\alpha < \beta$ 时，$e(B_\alpha) \subset e(B_\beta)$。因此，根据观察 8.4，$X = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} \text{int}_X[e(B_\alpha)]$。

我们断言 $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} e(B_\alpha) = \emptyset$。为证明这一点，任取 $x \in C$ 及以 x 为中心的开球 U。由于 $\alpha := \inf f(U \cap A) \in \mathbb{R}$，因此有 $A_\alpha \sqcap U = \emptyset$。但此时也有 $B_\alpha \cap U = \emptyset$。于是 $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} B_\alpha = \emptyset$，由引理 6.12可得我们的断言。显然，$\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} \text{int}[e(B_\alpha)] = \emptyset$。

现在，我们定义 $F\colon X \to \mathbb{R}$ 如下：

$$F(x) = \sup\big\{\alpha \in \mathbb{R} : x \notin \text{int}\, e(B_\alpha)\big\}.$$

由 [6, 命题2.5]的证明，对每个 $\alpha \in \mathbb{R}$有 $[F < \alpha]_X \subset \text{int}\, e(B_\alpha)$，且$F$ 是 f 到全空间的上半连续 QC 延拓。这样的函数在每个紧集上自动上有界 $K \subset X$。此外，由于 $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} e(B_\alpha) = \emptyset$ 且集合 $e(B_\alpha)$是闭的，必有$e(B_\beta) \cap K = \emptyset$，对某个 $\beta \in \mathbb{R}$。由于由 [6, 命题2.5]，$[F < \beta] \subset e(B_\beta)$，从而$\inf F(K) \geq \beta$。证明完毕。□

9. 可延拓性的刻画

在本节中，我们给出拟凸函数从任意赋范空间中的有限维闭凸集出发的可延拓性的若干刻画。它们可由前几节的主要结果、我们在定理 1.2(c) 中的结果以及下面两个熟知事实结合起来而容易得出：

- 每个有限维凸集 C 都有非空相对内部，也就是说，C 在其仿射包 aff C中的内部非空；
- 赋范空间中的每个有限维子空间 Y都是可补的，也就是说，存在一个到 Y 上的有界线性投影。

我们先从两个显而易见的观察开始。

观察 9.1. ***(a)*** 设 $I \subsetneq \mathbb{R}$ 是一个（可能退化的）非空闭区间。设 $f\colon I \to \mathbb{R}$ 是一个函数，并设 $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 f 的延拓，该延拓在 $\mathbb{R} \setminus I$的各个（至多两个）连通分支的闭包上取常值。***(b)*** 设 Y 是赋范空间 X的一个有限维子空间，并设$P\colon X \to Y$是到 Y上的有界线性投影。设 $f\colon Y \to \mathbb{R}$，并考虑其到整个 X上的延拓 $F := f \circ P$。

在上述两种情形中的任意一种下，若 f 是拟凸函数，且具有“连续”“一致连续”或“利普希茨”中的某种性质，则 F 是拟凸函数，并具有相同的性质。

回顾一下，凸集的维数 定义为其仿射包的维数。

推论 9.2 (平凡情形)。 设 C 是任意赋范空间 X 中的有限维闭集，且 $f\colon C \to \mathbb{R}$ 是拟凸函数。若 C 是仿射集或维数至多为一，则存在拟凸延拓 $F\colon X \to \mathbb{R}$，并且该延拓具有 f 所具有的以下任意一种性质：“连续”“一致连续”或“利普希茨”。

证明。 若 C 是仿射集，设 C 是子空间，并应用观察 9.1(b)。若 C 的维数至多为一，先应用观察 9.1(a)，将 f 延拓到包含 C 的一条直线（一维仿射集）上，再应用观察 9.1(b)，进一步将其延拓到 X 上。□

为使表述简洁，我们采用以下术语。

定义 9.3。 设 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 是函数的两种连续性类性质。设 C 是赋范空间 X中的一个闭凸集。那么，断言

$$\text{“}\mathcal{P}_1 \ QC \ \textit{extends to} \ \mathcal{P}_2 \ QC\text{”}$$

意味着每个 $\mathcal{P}_1$ 拟凸函数 $f\colon C \to \mathbb{R}$ 都存在一个 $\mathcal{P}_2$ 拟凸延拓 $F\colon X \to \mathbb{R}$。

注 9.4（利普希茨拟凸延拓）。 设 X 是任意赋范空间， $C \subset X$ 是一个维数至少为二的（不一定有限维的）闭凸集。

（a）根据定理 5.3，如果 C 不是仿射集且相对内部非空，那么可延拓性“利普希茨拟凸延拓到利普希茨拟凸”对 C不成立。（事实上，我们可以假设 $0 \in C$；那么 C 是赋范空间 $Y = \operatorname{aff} C$中的一个凸体。）这意味着，定理 1.1 的“拟凸版本”以相当强的方式失效。（b）另一方面，如果 C 是仿射集，那么可延拓性“利普希茨拟凸延拓到利普希茨拟凸”对 C 成立，甚至可以保持 *Lipschitz* 常数不变。（事实上，我们可以假设 C 是一个 [不一定有补空间的] 子空间，然后应用我们之前的结果 [6,定理 3.4]。）

以下三个定理给出了有限维闭凸集的几何刻画：从这些集合出发，每个利普希茨拟凸函数都可以延拓为整个空间上的拟凸函数，并且具有某种弱于利普希茨连续性的性质。此外，事实证明，若在第一个定理中将“利普希茨”替换为“一致连续”，在第二和第三个定理中将其替换为“连续”，这些可延拓性性质仍然成立。当然，我们只考虑推论 9.2 未涵盖的情形。

我们称闭凸集 C 为相对严格凸，如果它在其仿射包中是严格凸的（也就是说，若 x、$y \in C$ 是两个不同点，则 $\frac{x+y}{2}$ 属于 C的相对内部）。

定理 9.5 (一致连续拟凸延拓)。 设 X 是任意赋范空间， $C \subset X$ 是一个维数至少为二的有限维闭凸非仿射集。对于从 C 到 X的可延拓性，以下断言等价。

(i)“一致连续 QC 可延拓为一致连续 QC”。(ii)“Lipschitz QC 可延拓为一致连续 QC”。(iii) C 有界且相对严格凸。

证明。首先，我们可以假设 C 包含原点；根据观察 9.1(b)，还可以假设 aff $C = X$ ，从而 C 是 X中的凸体。现在，(*i*) $\Rightarrow$ (*ii*)显然成立。我们来证明蕴含关系 (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*)。假设 (*iii*)不成立。如果 C 不是严格凸的，那么根据定理 3.2，(*ii*)不成立。如果C 是严格凸且无界的，那么根据定理 3.1 和 4.1，(*ii*)不成立。最后，如果 (*iii*)成立，那么 C 一致严格凸（注 7.1），因此根据定理 1.2(c)，(*i*)成立。□

定理9.6 (连续拟凹扩张)。 设 X 是任意赋范空间， $C \subset X$ 是维数至少为二的有限维闭凸非仿射集。对于从 C 到 X的可延拓性，下列断言等价。

(i) “连续拟凹函数可延拓为连续拟凹函数”。*(ii)* “*Lipschitz QC* 可延拓为连续拟凹函数”。*(iii)* C 是严格凸的，且没有渐近方向。

证明。 与前一个证明一样，我们可以假设 C 是 X中的一个凸体。现在，$(i) \Rightarrow (ii)$显然成立。我们来证明蕴含关系$(ii) \Rightarrow (iii)$。假设(iii)不成立。那么根据定理3.1和定理3.2，(ii)不成立。最后，由定理 7.4 可得蕴含关系$(iii) \Rightarrow (i)$成立。□

定理9.7 (上半连续拟凹扩张)。 设 X 是任意赋范空间， $C \subset X$ 是维数至少为二的有限维闭凸非仿射集。对于从 C 到 X的可延拓性，以下断言等价。

(i)“连续 *QC* 可延拓为（仅）*QC*”。*(ii)*“连续 *QC* 可延拓为上半连续 *QC*”。*(iii)*“*Lipschitz QC* 可延拓为（仅）*QC*”。*(iv)*“*Lipschitz QC* 可延拓为上半连续 *QC*”。*(v)* C 没有渐近方向。

证明。同样，我们可以假设 C 是 X 中的一个凸体。现在，蕴含关系 $(ii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iii)$ 和 $(ii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii)$ 显然成立。为证明 $(iii) \Rightarrow (v)$，假设 (v) 不成立，并应用定理 3.1。最后，由定理 8.2 可得蕴含关系 $(v) \Rightarrow (ii)$ 成立。□

最后，回顾一下，命题 8.3 表明，对于 $\mathbb{R}^2$ 中的矩形，延拓性质“上半连续 QC 可延拓为上半连续 QC”并不成立。

致谢。第一作者的研究得到INdAM–GNAMPA以及MICINN项目PID2020-112491GB-I00（西班牙）的支持。第二作者的研究得到INdAM–GNAMPA以及米兰大学2024年研究支持计划PSR 2024的支持。

参考文献

[1]K.J. Arrow 和 A.C. Enthoven, 《拟凹规划》, 《计量经济学》**29**(1961), 779–800.[2] M. Avriel、W.E. Diewert、S. Schaible 和 I. Zang, 《广义凹性》, 应用数学经典丛书第 63 卷，1988 年原版重印，工业与应用数学学会（SIAM），费城，2010。

[3] M.V. Balashov 和 D. Repovš，选择的分裂问题与一致凸性，《数学分析与应用杂志》360 (2009), 307–316.[4] C.A. De Bernardi 和 L. Veselý，子空间上连续拟凸函数的可延拓性，《数学分析与应用杂志》526 (2023)，论文编号 127277，共 12 页。[5] C.A. De Bernardi 和 L. Veselý，严格凸性性质与 Lipschitz 拟凸函数的不可延拓性，《凸分析杂志》30 (2023), 329–342.[6] C.A. De Bernardi 和 L. Veselý，关于一致连续拟凸函数的延拓，《美国数学会会刊》151 (2023), 1705–1716.[7] C.A. De Bernardi 和 L. Veselý，凸集的一致凸模量，《数学档案》123 (2024), 413–422.[8] C.A. De Bernardi 和 L. Veselý，凸体的局部一致严格凸模量，《加拿大数学通报》68 (2025), 1251–1261.[9] D. Gale 和 V. Klee，连续凸集，《斯堪的纳维亚数学》7 (1959), 379–391.[10] V. Klee，凸集的渐近线与投影，《斯堪的纳维亚数学》8 (1960), 356–362.[11] E.J. McShane，函数值域的延拓，《美国数学会通报》40 (1934), 837–842.[12] H. Greenberg 和 W. Pierskalla，拟凸函数综述，《运筹学》19 (1971), 1553–1570.[13] J. Lindenstrauss 和 L. Tzafriri，《经典巴拿赫空间 II：函数空间》，数学及其边界领域成果 [数学及相关领域成果], 97, 施普林格出版社，柏林—纽约，1979。[14] G. Nordlander，赋范线性空间中的凸性模量，《数学档案》4 (1960), 15–17。[15] J.-P. Penot，什么是拟凸分析？《优化》47 (2000), 35–110。[16] B.T. Polyak，带约束极值问题的存在性定理与极小化序列的收敛性，《苏联数学》7 (1966), 72–75。[17] T.R. Rockafellar，《凸分析》，普林斯顿数学丛书，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1970。

经济、金融与精算科学数学系，圣心天主教大学，20123 米兰，意大利电子邮件地址：carloalberto.debernardi@unicatt.it电子邮件地址：carloalberto.debernardi@gmail.com

数学系，米兰大学，Via C. Saldini 50，20133 米兰，意大利电子邮件地址：libor.vesely@unimi.it