arXiv:2603.05246v1 [math.DG] 5 Mar 2026

索博列夫映射的超极限与德恩函数的稳定性

TONI IKONEN 和 STEFAN WENGER

摘要。我们证明，取值于带基点度量空间中的有界 Lipschitz 映射序列的超极限，可以自然地推广到 p-有界的 Sobolev 映射序列，并且 Sobolev 映射的这一超极限具有良好的性质。我们利用这一结果证明，Dehn 函数在带基点长度空间的超收敛下具有稳定性，从而解决了该领域多位研究者提出的问题。作为应用，我们为 Stadler–Wenger 最近的一项结果给出更简洁的证明；该结果此前仅在局部紧情形下由 Lytchak–Wenger 证明，其特征是：空间的曲率不高于 κ，当且仅当曲线满足某个等周不等式。

1. 引言与主要结果

1.1. 背景。度量空间及映射的极限在几何与分析的许多领域都很重要。对于空间，Gromov 引入的（带基点）Gromov–Hausdorff 收敛 [Gro81]，具有广泛应用，例如在几何群论、里奇极限空间理论、合成曲率下界理论、黎曼/次黎曼几何与度量几何以及几何分析中 [Pan83, Pet90, GPW90, CC97, CC00a, CC00b, Stu06a, Stu06b, Gro07, Wen08, LV09, BNS22, Bat22, BPS25]。然而，对于几何群论、亚历山德罗夫意义下曲率有上界的空间，以及直径与体积有界的闭黎曼流形序列等应用所需的一般情形，往往无法满足其必要假设。更灵活的收敛概念是相对于某个非主超滤子 ω，取带基点度量空间序列 $\mathrm{X}_m = (\mathrm{X}_m, \mathrm{d}_m, \mathrm{p}_m)$ 的超极限 X_ω。这一概念最初由 van den Dries 和 Wilkie 引入 [vdDW84]，，在几何群论和曲率上界理论中发挥了关键作用，尤其是在群和空间的渐近锥研究中 [Gro93, KL95, KL97, KKL98, Dru02, KSTT05, DS05]。超极限的定义参见第2.4节。

在映射 φ_m 的情形下，也希望具有类似的灵活性：$(X_m, d_m, p_m) \to (Y_m, d_m, q_m)$。在利普希茨情形下，可按如下方式实现这一点。若$(\varphi_m)$满足以下条件，则称其为*Lipschitz* 有界

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \left(d_m(q_m, \varphi_m(p_m)) + \mathrm{LIP}(\varphi_m)\right) < \infty, \tag{1.1}$$

其中 $\mathrm{LIP}(\varphi)$ 是利普希茨常数。任何这样的序列都有一个逐点超极限

$$\varphi_\omega \colon X_\omega \to Y_\omega, \quad \text{where } \varphi_\omega(\lim_\omega x_m) = \lim_\omega \varphi_m(x_m),$$

2020 数学主题分类。 主要分类号 53C23；次要分类号 46E35、46E36、49Q05。关键词和短语。索博列夫映射、超极限、德恩函数、稳定性、上曲率界、普拉托问题、调和映射、格罗莫夫紧性定理。两位作者均获得瑞士国家科学基金会资助项目212867的资助。T.I. 还获得芬兰研究理事会项目编号332671的资助。

它仍然是利普希茨的；参见第2.5节。这种灵活性在常值序列 $X_m = X$ 的情形下已经很有用，此时我们得到一个逐点超极限 $X \to Y_\omega$，方法是将 φ_ω 与 X 到超完备化 X_ω的典范等距嵌入复合。

在变分法和几何群论的许多问题中，利普希茨映射这一类映射过于僵化。因此，我们希望将超极限构造扩展到更一般的映射类，例如索博列夫映射。事实上，在欧几里得区域或更一般的度量空间上，已有完善的度量值索伯列夫理论；参见例如 [KS93, Haj96, Res97, HKST01, HKST15]。这类理论已在多个领域中占据重要地位，包括度量空间上的分析、度量几何和几何群论 [GS92, Jos94, SW01, DMV11, LW17a, LW17b, Raj17,LW18a,LW18b,LW20,DM21,NR22,NR23, MW25]。

我们关注 $W^{1,p}$-索博列夫映射 $(u_m\colon \Omega \to X_m)$，其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界 Lipschitz 区域，$p \in (1,\infty)$，且 (X_m) 是带基点度量空间的一个序列。我们称一列 $W^{1,p}$-索博列夫映射 $(u_m\colon \Omega \to X_m)$ 为p-有界，如果

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\int_\Omega d_m^p(p_m, u_m(z))\, dz + E_+^p(u_m) \right) < \infty, \tag{1.2}$$

其中 $E_+^p(u)$ 是 u的能量；关于 Sobolev 映射的定义和记号，参见第 3 节。

在本文中，我们为每个 p-有界序列构造了一个超极限。我们证明该超极限具有许多自然性质，并利用它建立了 Dehn 函数在超极限下的稳定性。粗略地说，Dehn 函数衡量用圆盘填充给定长度的闭利普希茨曲线有多困难。它们与环境空间的等周不等式密切相关，并且在许多不同的情形下得到了广泛研究；例如参见 [Res68、Gro93、GHR03、You13、LW18b、Sta21、SW25]。关于 Dehn 函数稳定性的问题，仅在若干特殊情形下得到过探讨，见 [Wen11b、Wen19、LWY20、SW25]。我们还给出了进一步的应用。

1.2. **Sobolev 映射的超极限**。我们的第一个定理表明，可以将超极限构造推广到 Sobolev 情形。为陈述该定理，设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个有界 Lipschitz 区域，且 $p \in (1,\infty)$。设 ω 为 $\mathbb{N}$上的一个非主超滤子。

定理 1.1。存在唯一映射，将一个 p-有界序列 $(u_m\colon \Omega \to X_m)$ 映射为一个 *Sobolev* 映射 $u_\omega \in W^{1,p}(\Omega, X_\omega)$，并具有以下性质：

(1) 如果序列 (u_m) 是 *Lipschitz* 有界的，那么 u_ω 几乎处处与 (u_m) 的逐点超极限一致。*(2)* 如果 $(\phi_m\colon X_m \to Y_m)$ 是 *Lipschitz* 有界的，且 $\phi_\omega\colon X_\omega \to Y_\omega$ 是逐点超极限，那么序列 $(v_m = \phi_m \circ u_m)$ 是 p-有界的，并且 $v_\omega = \phi_\omega \circ u_\omega$ 几乎处处。*(3)* 对于 p-有界的 $(u_m\colon \Omega \to X_m)$ 和 $(v_m\colon \Omega \to X_m)$，有 $\|d_\omega(u_\omega, v_\omega)\|_{L^p(\Omega)} = \lim_\omega \|d_m(u_m, v_m)\|_{L^p(\Omega)}$。

定理 1.1 中的唯一性是指：若另一个赋值$(u_m) \mapsto \tilde{u}_\omega$ 满足公理 (1)-(3)，则对于每个p-有界(u_m)，$u_\omega = \tilde{u}_\omega$ 几乎处处成立。这使我们可以讨论超极限（关于 ω），此外，它还具有以下适用于变分法的理想性质。

定理 1.2。 定理 1.1 中的超极限满足以下性质。

(4) 对每一个 p-有界(u_m) 以及每一个下半连续能量，均成立

$$\lim_\omega E^p(u_m) \geq E^p(u_\omega).$$

(5) 对每一个满足 $p \geq n$ 的 p-有界(u_m) 以及每一个下半连续体积

$$\lim_\omega \mathrm{Vol}(u_m) \geq \mathrm{Vol}(u_\omega).$$

(6) p-有界序列$(u_m\colon \Omega \to X_m)$,$(v_m\colon \Omega \to X_m)$ 的迹满足

$$\|d_\omega(\mathrm{tr}(u_\omega), \mathrm{tr}(v_\omega))\|_{L^p(\partial\Omega)} = \lim_\omega \|d_m(\mathrm{tr}(u_m), \mathrm{tr}(v_m))\|_{L^p(\partial\Omega)}.$$

(7) 若迹$\mathrm{tr}(u_m)\colon \partial\Omega \to X_m$ 具有等度连续且一致有界的连续代表(γ_m)，则逐点超极限 γ_ω 是 u_ω 的迹的一个连续代表。

在论文 [GW20], 中，Guo 与第二作者能够对取自给定 p-有界序列的一个适当子序列定义超极限。然而，取子序列往往会带来问题，因为所得映射取值于子序列所含空间的超极限，而不是完整序列 所含空间的超极限。

我们对超极限构造的主要兴趣，源于 Dehn 函数在超极限下的稳定性。

1.3. **Dehn 函数的稳定性**。 为了陈述我们的稳定性结果，我们定义利普希茨曲线 $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to X$ 的 Sobolev 填充面积如下：

$$\mathrm{FillArea}_X(\gamma) := \inf\{\mathrm{Area}(v)\colon v \in W^{1,2}(\mathbb{D}, X),\ \mathrm{tr}(v) = \gamma\},$$

其中， $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ 是欧几里得单位圆盘， $\mathbb{S}^1$ 是其边界。参数化豪斯多夫面积 $\mathrm{Area}(v)$的定义见第 3.5 节。这里仅指出，若v 是内射且利普希茨的，则 $\mathrm{Area}(v)$ 等于其像的二维豪斯多夫测度。此外，若$v \in W^{1,2}(\mathbb{D},X)$ 且X 是黎曼流形，则 $\mathrm{Area}(v)$ 可通过对v的弱微分的雅可比行列式积分得到。X 的（Sobolev–）Dehn 函数为

$$\delta_X(r) = \sup\{\mathrm{FillArea}_X(\gamma)\colon\ \gamma\colon \mathbb{S}^1 \to X \text{ is Lipschitz and } \ell(\gamma) \leq r\}$$

对于$r > 0$，其中 $\ell(\gamma)$ 表示 γ的长度。

Lytchak、第二作者和 Young 最近在一篇论文中证明了[LWY20]： 对于由适当长度空间构成的序列，局部二次等周不等式在超极限下保持稳定。随后，Stadler 和第二作者提出了一个问题：这一结论在非适当情形以及一般 Dehn 函数下是否仍然成立；参见 [SW25，问题 1]。下面的定理给出了肯定的答案。

定理 1.3。 设 $r_0 \in (0,\infty]$ 且令 $\delta\colon (0,r_0) \to (0,\infty)$ 为右连续函数。若 (X_m,d_m,p_m) 是由完备带基点长度空间构成的序列，且

$$\delta_{X_m}(r) \leq \delta(r) \quad \textit{for every } r \in (0,r_0),$$

则其超极限 X_ω 满足

$$\delta_{X_\omega}(r) \leq \delta(r) \quad \textit{for every } r \in (0,r_0).$$

粗略版 的定理 1.3 将在定理 7.2.

还有一种类似的定义，即使用利普希茨映射而非索博列夫映射来定义利普希茨–Dehn 函数。然而，我们无法期待利普希茨–Dehn 函数具有稳定性，因为增长的界并不能控制填充的利普希茨常数。

接下来，我们重点介绍稳定性的重要应用。

1.4. 应用。我们对 Dehn 函数的研究，部分源于近期对 CAT(κ) 空间的解析刻画——即按照亚历山德罗夫的意义，曲率上界为 κ 的完备度量空间。设 M^2_κ 为截面曲率恒定且等于 κ 的完备单连通曲面，D_κ 为其直径；当 $\kappa \neq 0$ 时，M^2_κ 等距于缩放后的球面或双曲平面。设 δ_κ 为 M^2_κ 的 Dehn 函数，精确公式见 [SW25，第4节。1] 。当 $\kappa = 0$ 时，有 $\delta_0(r) = r^2/4\pi$，其中 $r > 0$；但始终有 $\lim_{r\to 0^+} \delta_\kappa(r)/r^2 = 1/(4\pi)$。回顾一下，若 X 是 CAT($\kappa$) 空间，则根据列谢特尼亚克主导原理 [Res68]，X 的 Dehn 函数有上界 δ_κ。对于适当长度空间，由 Lytchak 和第二作者的一项定理已知其逆命题成立 [LW18b]。最近，Stadler 和第二作者 [SW25] 将这一结果推广到了非适当情形，具体如下。

定理1.4 ([SW25，定理 A])。 设 $\kappa \in \mathbb{R}$，且 $r_0 \in (0, 2D_\kappa]$。设 X 是完备长度空间，并假设 $\delta_X(r) \leq \delta_\kappa(r)$ 对 $r \in (0, r_0)$成立。则 X 中半径为 $r_0/4$的每个闭球都是测地的，且为CAT(κ)空间。此外，若 $r_0 = 2D_\kappa$，则 X 是CAT(κ)空间。

SW 的总体策略 [SW25] 与 [LW18b]类似。然而，该策略需要对 X 的超完备化中的 Plateau 问题解的内在结构进行细致分析。利用稳定性结果定理 1.3，我们可以直接采用 [LW18b]的策略，给出一个大为简化的证明。

我们的第二个应用涉及 Gromov 双曲空间。在 [Gro87], 中，Gromov 著名地证明了，满足次二次等周不等式的空间是 Gromov 双曲的，因此也满足线性等周不等式。事实上，只需满足常数足够小的二次等周不等式即可。第二作者在 [Wen08]中利用积分流理论证明了 Gromov 结果的一个精确版本。我们利用稳定性结果建立以下版本。

定理1.5。 假设 X 是一个完备测地度量空间，且满足

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\delta_X(r)}{r^2} < \frac{1}{4\pi}.$$

那么 X 是 *Gromov*双曲的。

对于适当测地度量空间，定理 1.5 的证明见 [LWY20]。我们的证明与该证明类似，此外还依赖于 Dehn 函数的稳定性，即定理 1.3，或者说其粗略版本——定理 7.2。

1.5. 证明概要及补充结果。我们首先概述超极限定理证明中的一些思路。在这一背景下，我们引入并研究的核心概念是 Lusin–Lipschitz 可容许序列，参见第5节。粗略地说，这是一列从 Ω 到度量空间 X 的 Lipschitz 映射 f^k，它们在 Ω中越来越大的子集上相互一致，最终在测度意义下覆盖整个 Ω。Lusin–Lipschitz 可容许序列有自然的极限，因为根据定义，对于几乎处处的 $z \in \Omega$，$(f^k(z))$ 最终为常值。现在，设 (u_m) 是一列 p-有界的 Sobolev 映射 $u_m\colon \Omega \to X_m$，如定理 1.1 所述。我们首先将 X_m 等距地嵌入一个更大的空间 $X'm$，该空间具有适当的 Lipschitz 延拓性质。这使我们能够证明，每个 u_m 都是一列 Lusin–Lipschitz 可容许映射 (u^k_m) 的极限，其中 $u^k_m\colon \Omega \to X'm$，并且对每个 k，序列 (u^k_m) 都是 Lipschitz 有界的。特别地，对每个 k，逐点超极限 u^k_ω 是一个映射到

超极限 X'_ω 带基点序列 $(X'm)$的。我们在第 6 节证明并使用的关键事实是，序列 (u^k_ω) 仍是 Lusin–Lipschitz 可容许序列，并且对每个 $k \in \mathbb{N}$，u^k_ω 将 Ω 的一个大子集映入 $X\omega$。这使我们能够定义其极限 $u\omega$，并证明 $u\omega$ 的像包含在 X'_ω的子集 $X\omega$ 中，必要时可在一个可忽略子集上修改 $u\omega$。映射 $u\omega$ 是我们为这列 p-有界序列 p-有界 (um)选取的超极限候选。

为了证明$u\omega$ 是 Sobolev 映射，并具有定理1.1 和1.2中所述的性质，我们使用超极限的几何实现。具体而言，我们证明以下类似于 Gromov 嵌入定理的定理 [Gro81，第 6]节。

定理 1.6。设$(Y^k)_{k\in I}$ 是一族可数的可分度量空间，且(X_m, d_m, p_m) 是一列完备基点度量空间。设 $f^k_m\colon Y^k \to X_m$ 是连续映射，其中 $m \in \mathbb{N}$ 且 $k \in I$，并假设对每个 $k \in I$，序列 (fkm) 等度连续且一致有界。那么：

(1) 存在一个完备度量空间 Z、一个子序列(m_l)以及等距嵌入 $\iota_l\colon X_{m_l} \to Z$，使得对每个 $k \in I$，序列$(\iota_l \circ fkm_l)$ 处处逐点收敛到连续映射 $f^k_\infty\colon Y^k \to Z$，并且在紧集上一致收敛；*(2)* 存在等距嵌入 $\eta\colon C \to X\omega$，其中 $C = \bigcup_{k\in I} f^k_\infty(Y^k)$，使得

$$f^k_\omega = \eta \circ f^k_\infty$$

对每个 $k \in I$。

此外，给定满足 $\mathbb{N} \supset \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \ldots$ 的子集，使得 $\omega(\mathcal{F}_m) = 1$ 对所有 m 均成立，可以选取子序列 (m_l)，使得对于严格递增序列 (N_l)，$m_l \in \mathcal{F}_{N_l}$。

这一结果所提供的灵活性，使得我们可以独立研究定理 1.1 和 1.2中所述的性质。

接下来，我们提出一个关于 Dehn 函数稳定性的基础定理；该定理可以理解为填充面积在超极限下的下半连续性。

定理 1.7。设 (X_m, d_m, p_m) 是一列完备带基点长度空间，且 $X\omega$ 为其超极限。若 $(\gamma_m\colon \mathbb{S}^1 \to X_m)$ 是一个 *Lipschitz*有界序列，满足 $\gamma = \lim_\omega \gamma_m$ 且 $\lim_\omega \mathrm{FillArea}^{X_m}(\gamma_m) < \infty$，则存在 $u \in W^{1,2}(\mathbb{D}, X\omega)$，使得

$$\mathrm{tr}(u) = \gamma \quad \textit{and} \quad \mathrm{Area}(u) \le \lim_\omega \mathrm{FillArea}_{X_m}(\gamma_m).$$

该定理尤其意味着

$$\mathrm{FillArea}_{X_\omega}(\gamma) \le \lim_\omega \mathrm{FillArea}_{X_m}(\gamma_m).$$

证明建立在 Sobolev 映射的超极限构造之上，此外还采用了一种类似于 [Sta21、Cre22] 的映射柱构造。我们利用的一个关键点是，映射柱构造在取超极限时具有鲁棒性。

1.6. **最后评注与论文结构**。在凸几何中，二维赋范空间中的面积有若干种自然定义 μ，其中包括 Holmes–Thompson 面积 μ^{ht}、Benson 面积或 Gromov 质量* 面积 μ^*、伊万诺夫内接黎曼面积 μ^i，以及豪斯多夫面积或 Benson–豪斯多夫面积 μ^{bh}；参见 [APT04]以及下文第3.6 节。每一种面积定义 μ 都为取值于度量空间的 Sobolev 映射导出一种参数化面积 $\mathrm{Area}^\mu(u)$，而上述小节中使用的参数化豪斯多夫面积 $\mathrm{Area}(u)$，对应于 Benson–豪斯多夫定义 μ^{bh}。

为简便起见，我们对参数化豪斯多夫面积陈述了定理1.3至1.5和1.7，但它们同样可以推广到其他面积定义。事实上，定理1.3和1.7对任意下半连续面积都成立；参见定理7.1和7.2。定理1.4可推广至 μ^* 和 μ^i。事实上，对于等周常数为 $1/(4\pi)$ 且只有内积空间能够实现该等周常数的任意下半连续面积，该结论都成立。后一假设是必要的，因为对于 Holmes–Thompson 面积，即使在赋范平面中以及 $\kappa = 0$，该定理的结论也不成立。最后，我们还针对所有下半连续面积 μ表述了定理1.5的一个版本，参见定理8.1；其中常数 $1/(4\pi)$ 需要替换为该 μ 面积的等周常数；参见(8.1)。

最后，我们概述本文的结构。第2节建立记号并回顾一些基本概念。在第3节中，我们回顾索博列夫理论中的若干必要内容，包括 Hajłasz 梯度以及各种面积概念。嵌入定理，即定理1.6，在第4节中得到证明。我们在第5 节中建立 Lusin–Lipschitz 可容许序列的重要性质，并在第6 节中利用它们证明我们的超极限定理，即定理1.1 和1.2。第7节包含定理1.3 和1.7的证明；事实上，我们建立了这些结果的若干更为一般的版本。最后，相关应用在第8节中得到证明。

1.7. **致谢**。 两位作者均得到瑞士国家科学基金会资助项目212867的支持。T.I. 还得到芬兰研究理事会项目编号332671的支持。作者感谢 Stephan Stadler 富有成效的讨论。

2. 预备知识

我们简要概述一下基本记号。我们需要带基点度量空间这一概念，它是一个三元组 (X, d_X, p_X)，满足 $d_X\colon X \times X \to [0,\infty)$ 是 X 上的距离，且 $p_X \in X$ 是一个点。以 $y \in X$ 为中心、半径为 $r > 0$ 的开、闭度量球分别记为 $B_X(y,r)$ 和 $B_X(y,r)$。通常，根据上下文可以清楚地知道度量球所在的空间，在这种情况下我们省略下标 X。对于距离，我们也采用相同的约定。我们将主要使用完备度量空间。给定度量空间中的非空集合 $A \subset X$，$\overline{A}$ 表示 A 的闭包。

度量空间之间的利普希茨映射对我们而言发挥着重要作用，因此我们回顾其定义。给定一对度量空间 X 和Y，映射 $f\colon X \to Y$ 是利普希茨 的，当且仅当

$$\sup_{x\neq x'} \frac{d(f(x),f(x'))}{d(x,x')} < \infty.$$

上确界就是利普希茨常数，记作f的 $\operatorname{LIP}(f)$。如果f是L-利普希茨的，即 $\operatorname{LIP}(f) \le L$，我们就称$f$为$L$-双利普希茨 映射，如果

$$L^{-1}d(x,y) \le d(f(x),f(y)) \le Ld(x,y) \quad \text{for every } x,y \in X.$$

如果 $L = 1$，则称 f 是 等距的，或称其为 等距嵌入。

2.1. **曲线和长度距离**。 曲线 是一个连续映射 $\gamma\colon I \to X$，其中I 是一个区间或单位圆 S^1。若I 是一个区间，则 γ 的长度定义为

$$\ell(\gamma) = \sup\left\{\sum_{i=0}^{k-1} d(\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1}))\colon t_i \in I \text{ and } t_0 < t_1 < \cdots < t_k\right\}$$

在$I = \mathbb{S}^1$的情形下，也有类似的定义。若尔当曲线 Γ 是拓扑嵌入 $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to X$的像。曲线 $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to X$是 Γ 的弱单调参数化，如果它是一列同胚 $\mathbb{S}^1 \to \Gamma$的一致极限。

度量空间X 是长度空间，如果对每个x、$y \in X$,

$$d(x,y) = \inf\{\ell(\gamma)\colon \gamma\colon [a,b] \to X, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}.$$

曲线 $\gamma\colon [a, b] \to X$是测地线，如果$d(\gamma(a), \gamma(b)) = \ell(\gamma)$；度量空间$X$是测地空间，如果每对$x$、$y \in X$ 都可以用一条测地线连接。

2.2. **豪斯多夫测度**。我们考虑度量空间X上的n维豪斯多夫测度。回顾一下，对于集合 $A \subset X$，有

$$\mathcal{H}^n(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^n_\delta(A),$$

其中

$$\mathcal{H}^n_\delta(A) = \frac{\omega_n}{2^n} \inf\left\{\sum_i \operatorname{diam}(E_i)^n\colon\ A \subset \bigcup E_i \text{ and } \operatorname{diam} E_i < \delta \text{ for } i \in \mathbb{N}\right\}.$$

这里，ω_n 是n维欧几里得单位球的勒贝格测度。特别是，这种归一化保证了 $\mathcal{H}^n$ 与n维欧几里得空间$\mathbb{n}$中的n维勒贝格测度 $\mathscr{L}^n$ 相一致。

2.3. **非主超滤子**。我们回顾与非主超滤子 ω 在 $\mathbb{N}$上的相关标准定义。首先，回忆一下，非主超滤子是一种有限可加测度 $\omega\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}$，定义在自然数集 $\mathbb{N}$的幂集 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 上，它对有限集赋予零测度，对 $\mathbb{N}$赋予测度一。

给定一个实数有界序列 (r_m)，若超极限 为 $t \in \mathbb{R}$，则

$$\omega\left(\{m \in \mathbb{N}\colon |r_m - t| < \varepsilon\}\right) = 1 \quad \text{for every } \varepsilon > 0.$$

有界序列的超极限总是存在且唯一，因此可以使用记号 $\lim_\omega r_m$。对于 $\mathbb{R}^n$ 中的有界序列，我们也可以逐分量取超极限。这样，当 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界时，我们便可以对由 Ω 的非空子集构成的序列 (E_m) 取超极限。记

$$E_\omega = \{\lim_\omega x_m \in \mathbb{R}^n\colon x_m \in E_m \text{ for every } m \in \mathbb{N}\}$$

并称 E_ω 为(E_m)的超极限。

稍后我们将用到以下关于超极限下测度半连续性的结果。

引理 2.1。设 (E_m) 是有界开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 的一列非空可测子集。则超极限 E_ω 是 Ω 的非空紧子集，并且满足

$$\mathscr{L}^n(\Omega \cap E_\omega) \geq \lim_\omega \mathscr{L}^n(E_m).$$

证明。显然，E_ω 是 Ω 的非空紧子集，因此只需证明 $\Omega \cap E_\omega$ 的测度下界。注意到示性函数序列 $g_m = \chi_{E_m}$ 在 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中构成有界序列，并且由于 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是 $L^1($ $\mathbb{R}^n)$的对偶空间，存在 $g_\omega \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} h g_\omega \, dz = \lim_\omega \int_{\mathbb{R}^n} h g_m \, dz \quad \text{for every } h \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

特别地，若将此等式应用于非负的 h，便可立即得出 $0 \leq g_\omega \leq 1$ 几乎处处成立。由此我们得到

$$\mathscr{L}^n(\Omega \cap \{g_\omega > 0\}) \geq \lim_\omega \int_\Omega g_m \, dz = \lim_\omega \mathscr{L}^n(E_m).$$

若 $x \in \Omega \cap \{g_\omega > 0\}$ 是一个勒贝格密度点，事实上我们断言 $x \in E_\omega$。这就完成了证明。令

$$\mathcal{G}_k = \{m \in \mathbb{N} \colon \mathscr{L}^n(E_m \cap B(x, k^{-1})) > 0\} \cap [k, \infty).$$

根据构造，对于 $k \in \mathbb{N}$，有 $\mathcal{G}_k \supset \mathcal{G}_{k+1}$ 和 $\omega(\mathcal{G}_k) = 1$。最后，令 $x_m \in E_m$（对于 $m \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{G}_1$）且 $x_m \in E_m \cap B(x, k^{-1})$（若 $m \in \mathcal{G}_k \setminus \mathcal{G}_{k+1}$）。由于 $x = \lim_\omega x_m$，证明完成。□

2.4. 空间的超极限。 本小节中，我们考虑一列带基点度量空间 (X_m, d_m, p_m)。若序列 (x_m) 中 $x_m \in X_m$，则称该序列有界，如果

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} d_m(x_m, p_m) < \infty.$$

我们称两个有界序列 (x_m) 和 (y_m) 等价，如果

$$\lim_\omega d_m(x_m, y_m) = 0.$$

有界序列 (x_m) 的等价类记作 $[x_m]$，所有此类等价类的集合记作 X_ω。我们将 $[x_m]$ 称为有界序列 (x_m) 的超极限。有时我们也使用记号 $\lim_\omega x_m$ 来指代 $[x_m]$。

注意到

$$d_\omega([x_m], [y_m]) := \lim_\omega d_m(x_m, y_m)$$

在 X_ω 上定义了一个距离函数。我们也记 $p_\omega := [p_m]$。我们称三元组 $(X_\omega, d_\omega, p_\omega)$ 为带基点度量空间 (X_m, d_m, p_m) 的 ω-超极限，或称超极限。我们常用简写记号 X_ω 来表示 $(X_\omega, d_\omega, p_\omega)$。注意，$X_\omega$ 总是完备的。此外，如果 (X_m, d_m, p_m) 是长度空间，那么 X_ω 是测地空间。当我们考虑常值序列 (X, d, p) 时，超极限 X_ω 称为 X 的超完备化。在这种情况下，我们有典范等距嵌入 $X \hookrightarrow X_\omega$，其中 $x \mapsto [x]$。

若 $(X_m, d_m, p_m) = (X, \lambda_m d, p_m)$ 满足 $\lambda_m \to 0^+$，则超极限 X_ω 称为 X 的渐近锥 X。若 $p_m = p$ 且 $\lambda_m \to \infty$，则 X_ω 是 X 的切锥 X（在点 p 处）。

我们注意到，若带基点度量空间 (X_m, d_m, p_m) 收敛到一个完备的 (Z, d, p)，且收敛发生在带基点的 Gromov–Hausdorff 拓扑中，那么超极限 X_ω 与 (Z, d, p) 等距，参见 [AKP24，定理 5。16]。

2.5. 映射的超极限。 我们也考虑映射的超极限。考虑带基点度量空间序列 (X_m, d_m, p_m) 和 (Y_m, d_m, q_m)。

(1) 若对每个 $R > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得只要 $x, y \in B^{X_m}(p_m, R)$ 且 $m \in \mathbb{N}$，$d_m(x, y) < \delta$，就有 $d_m(f_m(x), f_m(y)) < \varepsilon$，则序列 $(f_m \colon (X_m, d_m, p_m) \to (Y_m, d_m, q_m))$ 在有界集上一致连续。如果可以取 $R = \infty$，则该序列等度连续。(2) 若对每个 $R > 0$，都存在 $\lambda > 0$，使得对每个 $m \in \mathbb{N}$，$f_m(B^{X_m}(p_m, R)) \subset B^{Y_m}(q_m, \lambda)$，则序列 $(f_m \colon (X_m, d_m, p_m) \to (Y_m, d_m, q_m))$ 在有界集上一致有界。如果可以取 $R = \infty$，则该序列一致有界。

现在，若序列 $(f_m \colon (X_m, d_m, p_m) \to (Y_m, d_m, q_m))$ 等度连续且在有界集上一致有界，则存在逐点超极限 $f_\omega \colon X_\omega \to Y_\omega$，定义为 $f_\omega(\lim_\omega x_m) = \lim_\omega f_m(x_m)$（等价地，$f_\omega([x_m]) = [f_m(x_m)]$）。$f_\omega$ 的构造意味着 f_ω 将有界集映射为有界集，且其连续模与 (f_m) 相同。此外，若 $(X_m, d_m, p_m) = (X, d, p)$，则在由 $x \mapsto [x]$ 给出的典范识别 $X \subset X_\omega$ 下，对 $x \in X$，有 $f_\omega(x) = [f_m(x)]$。

2.6. 内射度量空间。下文将用到内射度量空间。回忆一下，若对于度量空间 E ⊂ Z 的任意子集，任意 1-利普希茨映射 E → Y 都能延拓为 1-利普希茨映射 Z → Y，则称度量空间 Y 是内射的。特别地，每个内射度量空间都是完备的。还要回忆，借助 Kuratowski 嵌入，每个度量空间 X 都等距嵌入内射 Banach空间 $\ell^\infty(X)$；这里 $\ell^\infty(X)$ 是由有界函数组成的空间，其定义域为 X → ℝ，并配备上确界范数。利用逐分量 McShane延拓，很容易看出 $\ell^\infty(X)$ 的内射性。回忆一下，λ-利普希茨映射 f : Z → ℝ 的 λ-利普希茨 McShane延拓 $\hat{f} : Z \to \mathbb{R}$ 定义为 $\hat{f}(z) = \inf\{f(y) + \lambda d(y,z) : y \in E\}$。接着，截断McShane延拓 $\bar{f} : Z \to \mathbb{R}$，其中 $\bar{f}(z) = \max\{\sup_{y\in E} |f(y)|, \hat{f}(z)\}$，给出一个 λ-利普希茨延拓 $\bar{f} : Z \to \mathbb{R}$，满足 $\sup_{z\in Z} |\bar{f}(z)| = \sup_{z\in E} |f(z)| \in [0,\infty]$。这就推出了一个标准事实：任意内射空间中的任意闭球都是内射的。

一个内射包 Y（度量空间X 的）是一个内射度量空间，并配备等距嵌入e: $X \to Y$，它在包含X的内射空间中于适当意义下是极小的。内射包由 Isbell 在[Isb64]中构造。

3. 度量值Sobolev映射

我们简要回顾欧氏空间中区域上的度量值索伯列夫理论。存在若干等价定义，详情参见专著 [HKST15] 以及近期文稿 [LW17a、CE24] 。另见[KS93、Haj96、Sha00、HKST01]。我们将采用 Reshetnyak[Res97]基于与 Lipschitz函数后复合的方法。

3.1. **Reshetnyak 意义下的 Sobolev 空间**。设 X 为完备度量空间，$p \in (1,\infty)$，并设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集。我们用 $L^p(\Omega, X)$ 表示可测且本质可分值的 u: $\Omega \to X$ 的集合，使得 $d(u, p_X) \in L^p(\Omega)$ 对某个（从而对任意）$p_X \in X$成立，后者为 p-可积函数的经典 Lebesgue空间。$L^p(\Omega,X)$ 上的距离定义为

$$\|d(u,v)\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega (d(u,v))^p \, dz\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{for } u, v \in L^p(\Omega, X).$$

由于X 是完备的，空间$L^p(\Omega,X)$ 成为一个完备度量空间。

映射 u ∈ $L^p(\Omega, X)$ 属于 Sobolev空间 u ∈ $W^{1,p}(\Omega, X)$，若存在一个 $L^p(\Omega)$-可积的 ρ: Ω → ℝ，使得对每个 1-利普希茨映射 φ: X → ℝ，函数 x ↦ φ ∘ u(x) 按经典意义属于 $W^{1,p}(\Omega)$，且其分布梯度几乎处处满足 $|\nabla(\varphi \circ u)| \le \rho$。u ∈ $W^{1,p}(\Omega, X)$ 的 Reshetnyak p-能量定义为

$$E^p_+(u) = \inf\left\{ \|\rho\|^p_{L^p(\Omega)} : \rho \text{ is as above} \right\}.$$

p-能量扩展为 ∞，使其定义在整个$L^p(\Omega, X)$ 上。此后E^p_+: $L^p(\Omega, X) \to [0,\infty]$ 关于 $L^p(\Omega, X)$-收敛下半连续。若$E^p_+(u) < \infty$，标准论证表明，上述下确界是最小值，且极小化元几乎处处唯一。我们将该极小化元记为$|\nabla u|$。对于实值函数，$|\nabla u|$ 是弱微分的模。

3.2. **下半连续能量**。接下来，我们考虑下半连续能量。我们称能量泛函 E^p 是下半连续的

如果对于每个完备度量空间 X 和有界 Lipschitz 区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，任意$p$-有界的($u_m\colon \Omega \to X$) 满足 $\lim_{m\to\infty} \|d(u_m,u)\|_{L^p(\Omega)} = 0$，则有

$$\liminf_{m\to\infty} E^p(u_m) \geq E^p(u).$$

标准能量，例如 Korevaar–Schoen 能量、Reshetnyak 能量和 Hajłasz 能量，在此意义下都是下半连续的，参见 [LW17a，第 5] 节。我们还要指出，Newton–Sobolev 能量在所有区域上都与 Reshetnyak 能量一致 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，并且对于有界 Lipschitz 区域，所有这些方法定义的能量彼此可比 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，参见 [HKST15，定理 6.1.17 和 7.1.20 以及第 10] 节。

3.3. **Hajłasz 梯度**。当 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界 Lipschitz 区域时，上文 Reshetnyak 对 Sobolev 映射的定义等价于 Hajłasz–Sobolev 映射的定义（参见 [Haj96] 或 [HKST15，第 10] 节）；因此，对于每个 $u \in W^{1,p}(\Omega,X)$，都存在一个非负函数 $g \in L^p(\Omega)$ 以及一个零测集$N \subset \Omega$，使得

$$d(u(x),u(y)) \leq (g(x)+g(y))d(x,y) \quad \text{for every } x,y \in \Omega \setminus N. \tag{3.1}$$

我们称g 为u的*Hajłasz* 梯度 。为方便起见，我们假设在不满足（3.1）的集合上，Hajłasz 梯度取无穷大。因此（3.1）对每一对$x,y \in \Omega$都成立。对于$u \in W^{1,p}(\Omega, X)$，存在一个u 的 Hajłasz 梯度g，满足

$$\|g\|^p_{L^p(\Omega)} \leq CE^p_+(u) \quad \text{for every } u \in W^{1,p}(\Omega,X) \tag{3.2}$$

其中常数C 仅取决于 Ω 和p。

3.4. **迹理论**。当 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界 Lipschitz 区域时，$u \in W^{1,p}(\Omega, X)$ 的迹 是一个映射$h \in L^p(\partial\Omega,X)$；$L^p(\partial\Omega,X)$ 的定义与上文$L^p(\Omega,X)$ 的定义类似，并且满足

$$\limsup_{r\to 0^+} \fint_{B(x,r)\cap\Omega} d(u(z),h(x))\,dz = 0 \quad \text{for } \mathcal{H}^{n-1}\text{-a.e. } x \in \partial\Omega,$$

其中 $\int$ E h dz 表示集合 E 上的积分平均值。显然，若 h 存在，则它是唯一的，因此我们用记号 tr(u) = h。上述迹等价于 Korevaar–Schoen 定义 [KS93, 第 1 节。12], 参见 [GHWX22, 第 3] 节。下面陈述迹的一些基本性质。我们注意到，唯一性蕴含复合规则：对几乎处处的 x $\in \partial\Omega$，若 u, v $\in W^{1,p}(\Omega, X)$，且 Lipschitz$\Phi\colon X \to Y$，则 tr(u)(x) = tr($\Phi \circ$ u)(x)，并且 d(tr(u)(x), tr(v)(x)) = tr(d(u, v))(x)。对于 X = (X, d, p_X)，迹 tr : $W^{1,p}(\Omega, X) \to L^p(\partial\Omega, X)$ 是有界的，即

$$\|d(\mathrm{tr}(u),p_X)\|_{L^p(\Omega)} \leq C\left(\|d(u,p_X)\|^p_{L^p(\Omega)} + E^p_+(u)\right)^{1/p}$$

对某个 $C = C(p,\Omega)$。最后，

$$\lim_{m\to\infty} \|d_m(\mathrm{tr}(u_m),\mathrm{tr}(v_m))\|_{L^p(\partial\Omega)} = 0$$

若 $\lim_{m\to\infty} \|$dm(um, vm)$\|_{L^p(\Omega)} =$ 0 且 (um : $\Omega \to$ Xm) 和 (vm : $\Omega \to$ Xm) 都是 p-有界的。这由 (d(um, vm)) 的 p-有界性以及 tr: $W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ 的弱连续性可得。

3.5. **豪斯多夫体积与面积公式**。 接下来，我们为索об列夫映射定义参数化豪斯多夫体积的概念。为此，设 $u \in W^{1,p}(\Omega, X)$ 对于 $p \in (1,\infty)$。这样的 u 几乎处处都有 近似度量导数 z 点，$z \in \Omega$ 其含义如下；参见 [Kar07, LW17a]。存在唯一的半范数，属于 $\mathbb{R}^n$，记为 $\mathrm{md}_z(u)$，使得

$$\operatorname{ap}\lim_{z'\to z} \frac{d(u(z),u(z')) - \mathrm{md}_z(u)(z'-z)}{|z'-z|} = 0$$

其中 $|\cdot|$ 表示欧几里得范数，ap lim 表示近似极限；参见[Fed69，2.9。11]。

定义 3.1。 当 $p \in [n, \infty)$ 且 $u \in W^{1,p}(\Omega, X)$时，映射 $u \in W^{1,p}(\Omega, X)$ 的参数化豪斯多夫体积为

$$\mathrm{Vol}(u) = \int_\Omega \mathbf{J}(\mathrm{md}_z(u))\, dz,$$

其中，半范数 s 的雅可比行列式$\mathbf{J}(s)$ 是 $\mathbb{R}^n$,s) 中欧几里得单位立方体的 n 维豪斯多夫测度（若 s 是范数）；否则为零。当环境维数 n 为二时，我们改用记号 $\mathrm{Area}(u)$，并称之为参数化豪斯多夫面积。

回顾一下，n维豪斯多夫测度经过归一化，使得标准欧几里得范数下的n维豪斯多夫测度与勒贝格测度一致。因此，雅可比行列式的一个等价定义为 $\omega_n/\mathscr{L}^n(\{s \le 1\})$，其中 ω_n 是勒贝格测度下的n维球的测度，而 $\{s \le 1\}$ 是由范数s定义的单位球。

若 $u \in W^{1,p}(\Omega, X)$ 满足卢津性质（N），例如当 $p > n$ [Vod00],时，从而将勒贝格零测集映为豪斯多夫 n维零测集，则

$$\mathrm{Vol}(u) = \int_X \sharp(\{z : u(z) = x\})\, d\mathcal{H}^n(x)$$

由面积公式 [Kar07，定理 3.2]。若 u 还是内射的，则有 Vol（u） $= \mathcal{H}^n$（u（Ω））。然而，即使 $p = n$，仍存在集合 $N \subset \Omega$ 为勒贝格零测集，使得 $u|_{\Omega\setminus N}$ 满足卢津条件（N）且

$$\int_E \mathbf{J}(\mathrm{md}_z(u))\, dz = \int_{X\setminus u(N)} \sharp(\{z \in E : u(z) = x\})\, d\mathcal{H}^n(x) \tag{3.3}$$

对勒贝格可测的 $E \subset \Omega$。由（3.3）可知，$u|_{\{\mathbf{J}(\mathrm{md}(u))>0\}\setminus N}$ 满足卢津条件 （N）与 （N^{-1}）。

3.6. 下半连续体积。体积的重要例子出现在凸几何 [APT04]中：体积是一个函数 μ，它为每个 n 维赋范空间 V 指定范数 μ_V，该范数作用于外幂 Λ^nV，使得当 V 为欧氏空间时 μ_V 由勒贝格测度诱导，并且对 n 维赋范空间之间的每个线性 1-Lipschitz 映射 T : V $\to$ W，诱导映射 T_*: $\Lambda^n V \to \Lambda^n W$ 均为 1-利普希茨的。按照 [LW17a]，，我们把半范数 s 的雅可比行列式 J^μ （s 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上）定义为

$$\mathbf{J}_n^\mu(s) = \begin{cases} \mu_{(\mathbb{R}^n,s)}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n), & \text{if } s \text{ is a norm} \\ 0, & \text{if } s \text{ is a seminorm,} \end{cases}$$

其中，e_1,. . . ,e_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中的标准基。Sobolev 映射 $u \in W^{1,p}$(Ω,X)所对应的参数化体积，当 $p \ge n$时，为

$$\mathrm{Vol}^\mu(u) := \int_\Omega \mathbf{J}_n^\mu(\mathrm{md}_z(u))\, dz.$$

当 $n = 2$ 时，我们改记为面积$\mu(u)$ 和 $\mathbf{J}^\mu$。

若体积泛函 Vol 满足下述条件，我们称其为下半连续：对于$p \in [n,\infty]$以及每个完备度量空间X、任意有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$和任意$p$-有界序列$(u_m\colon \Omega \to X)$，若 $\lim_{m\to\infty} \|d(u_m,u)\|_{L^p(\Omega)} = 0$，则有

$$\liminf_{m\to\infty} \mathrm{Vol}(u_m) \geq \mathrm{Vol}(u).$$

注意，对于$p > n$，下半连续性可由$p = n$情形下的下半连续性推出。

参数化体积 Vol^μ 是下半连续的，当且仅当 μ 诱导出拟凸 n-体积密度；参见 [LW17a，定义 2.6 和推论 5。8]。若 Vol μ 是下半连续的，我们就称其μ 在上述意义下下半连续。若 $n = 2$，则改用术语 面积。特别地，根据 [BI12，定理 1]，参数化豪斯多夫面积是下半连续的。

我们对各种面积作进一步说明，并请参阅 [LW17b，第2节。4] 以了解更多讨论。稍后我们还需要另一种面积概念，称为黎曼内接面积（由伊万诺夫提出 [Iva08]）：范数 μ^i的-雅可比行列式 $\mathbb{R}^2$ 满足

$$\mathbf{J}^{\mu^i}(s) = \frac{\pi}{\mathscr{L}^2(L)}$$

其中 $\mathscr{L}^2(L)$ 是包含在单位球 $\{s \leq 1\}$内的最大面积椭圆的勒贝格测度。也就是说，它是约翰椭圆的勒贝格面积，其中$\{s \leq 1\}$。我们注意到

$$\frac{\pi}{4}\mathbf{J}^{\mu^i}(s) \leq \mathbf{J}(s) \leq \mathbf{J}^{\mu^i}(s) \quad \text{for every seminorm in } s.$$

事实上，当且仅当s 不是范数，或它由内积诱导时，右侧才取等号。

除 μ^i 外，其他重要的下半连续面积还包括霍姆斯–汤普森面积 μ^{ht}、本森面积 μ^*（也称为 Gromov 质量*）以及 Busemann–Hausdorff面积 μ^{bh}。后者定义的雅可比行列式与参数化豪斯多夫面积定义的雅可比行列式相同。主要的不等式为 $\mu^{bh} \geq \mu^{ht}$ 和$\mu^* \geq \mu^{ht}$，在内积空间之外均为严格不等式。我们指出，每种面积概念对应的雅可比行列式 μ 均满足 $2^{-1}\mathbf{J}^{\mu^i} \leq \mathbf{J}^\mu \leq \mathbf{J}^{\mu^i}$。

4. 定理 1.6

我们回顾嵌入定理的陈述。下文中，ω 表示 $\mathbb{N}$上的非主超滤子。

定理 1.6。设 $(Y^k)_{k\in I}$ 是一个可数的可分度量空间族，且(X_m, d_m, p_m) 是一个完备带基点度量空间序列。设 $f_m^k\colon Y^k \to X_m$ 是连续映射（$m \in \mathbb{N}$，$k \in I$），并假设对每个 $k \in I$，序列 $(f^k m)$ 等度连续且一致有界。那么：

(1) 存在一个完备度量空间 Z、一个子序列 (m_l)以及等距嵌入 $\iota_l\colon X_{m_l} \to Z$，使得对每个 $k \in I$，序列 $(\iota_l \circ f^k m_l)$ 逐点处处收敛于连续映射 $f_\infty^k\colon Y^k \to Z$，并且在紧集上一致收敛；*(2)* 存在一个等距嵌入 $\eta\colon C \to X_\omega$，其中 $C = \bigcup_{k\in I} f_\infty^k(Y^k)$，使得

$$f_\omega^k = \eta \circ f_\infty^k$$

对每个 $k \in I$。

此外，给定满足 $\omega(\mathcal{F}_m) = 1$ 的子集 $\mathbb{N} \supset \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \ldots$（对所有 m），可以选取子序列 (m_l)，使得对于严格递增的序列 (N_l)，$m_l \in \mathcal{F}_{N_l}$。

在继续证明之前，我们先固定记号。不失一般性，设 $\mathrm{I} = \mathbb{N}$。令 (ε_N) 为一个递减的正数列，满足 $\sum \varepsilon_N < \infty$；令 $\mathrm{D}^k = \{\mathrm{y}_j^k : \mathrm{j} \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Y}^k$ 为 $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$ 的可数稠密集。再令 X_ω 为 $(\mathrm{X}_m, \mathrm{d}_m, \mathrm{p}_m)$ 的超极限，并令 $\mathrm{f}_\omega^k : \mathrm{Y}^k \to \mathrm{X}_\omega$ 为当 $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$ 时 $(\mathrm{f\,km} : \mathrm{Y}^k \to \mathrm{X}_m)$ 的超极限。

空间 Z 的构造在相关紧致性定理的背景下相当标准；例如参见 [Wen11a，命题 5.2]。然而，为了确保与超极限相容，还需要更加谨慎。为开始证明，我们将考虑一族递减的集合 $\mathcal{G}_N$，满足 $\omega(\mathcal{G}_N) = 1$，其中 $N \geq 1$，并具有以下要求：当且仅当 $m \in \mathcal{G}_N$

(1) 对 $1 \leq j$、j'、k、$k' \leq N$，成立

$$|d_m(f_m^k(y_j^k), f_m^{k'}(y_{j'}^{k'})) - d_\omega(f_\omega^k(y_j^k), f_\omega^{k'}(y_{j'}^{k'}))| < \varepsilon_N.$$

（2）N ≤米。

对$N \in \mathbb{N}$ 以及$\bigcap \mathcal{G}_N = \emptyset$，我们有 $\mathcal{G}_{N+1} \subset \mathcal{G}_N$。此外，由于 $\mathcal{G}_N$ 可表示为有限个全 ω-测度集的交，故对$N \geq 1$有 $\omega(\mathcal{G}_N) = 1$。

现在我们着手构造序列(m_l)。为此，对每个$\mathrm{m} \in \mathcal{G}_1$，令$\mathrm{N} = \mathrm{N}(\mathrm{m})$为使得 $\mathrm{m} \in \mathcal{G}_N$的最大整数。接下来，令$\mathrm{m}_1$为 $\mathcal{G}_1$ 中的一个元素，并令$\mathrm{N}_1 := \mathrm{N}(\mathrm{m}_1)$。假设对某个$\mathrm{l} \geq 2$ 已定义了m_{l-1} 与N_{l-1}，然后考虑任意元素$\mathrm{m}_l \in \mathcal{G}_{m_{l-1}+1}$，并记 $\mathrm{N}_l = \mathrm{N}(\mathrm{m}_l)$。由此可知，$(\mathrm{N}_l)$与$(\mathrm{m}_l)$严格递增，且$\mathrm{N}_l \leq \mathrm{m}_l$。

我们现在可以通过直接极限构造来构造空间 Z。为此，令 $\mathrm{Z}^1 = \mathrm{X}^{m_1}$，并令 $\mathrm{d}^1 := \mathrm{d}^{m_1}$。假设对于某个 $\mathrm{l} \geq 2$，Z^{l-1} 和 d^{l-1} 已经定义。接下来，考虑不交并 $\mathrm{Z}^l = \mathrm{Z}^{l-1} \coprod \mathrm{X}^{m_l}$，并如下定义距离 d^l。在 Z^{l-1}中，距离限制为 d^{l-1}；而在 X^{m_l}上，距离限制为 d^{m_l}。对于点 $(\mathrm{x}, \mathrm{x}') \in \mathrm{Z}^{l-1} \times \mathrm{X}^{m_l}$，我们定义

$$d^l(x', x) := d^l(x, x') := \min\left\{d^{l-1}(x, f_{m_{l-1}}^k(y_j^k)) + (\varepsilon_{N_{l-1}} + \varepsilon_{N_l}) + d_{m_l}(f_{m_l}^k(y_j^k), x')\right\},$$

其中最小值取遍 $1 \leq j$、$k \leq N_{l-1}$。关于三角不等式，分别对 m_l 和 m_{l-1} 应用 (1)，我们得到

$$|d_{m_l}(f_{m_l}^k(y_j^k), f_{m_l}(y_{j'}^{k'})) - d_{m_{l-1}}(f_{m_{l-1}}^k(y_j^k), f_{m_{l-1}}(y_{j'}^{k'}))| < (\varepsilon_{N_{l-1}} + \varepsilon_{N_l})$$

当 $1 \leq j$、j'、k、$k' \leq N_{l-1}$时。这一点以及关于 d^{l-1} 的递归假设，很容易推出 d^l 满足三角不等式。因此，d^l 是 Z^l 上具有所需性质的实际距离。接下来，我们将空间 Z 定义为这些空间 $(Z^l、d^l)$ 的直接极限的完备化，并为简便起见，仍用 d 表示 Z 上的距离。我们也省略等距嵌入 $X_{m_l} \hookrightarrow Z$的记号。

设 $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$。我们断言，对于 $\mathrm{y} \in \mathrm{Y}^k$，数列 $(\mathrm{f\,km}_l(\mathrm{y}))$ 是柯西数列，其极限记为 $\mathrm{f}_\infty^k(\mathrm{y})$。这隐式地定义了一个映射 $\mathrm{f\,k}_\infty : \mathrm{Y}^k \to \mathrm{Z}$。我们先考虑 $\mathrm{y} = \mathrm{y}_j^k$ 对于某个 $\mathrm{j} \in \mathbb{N}$ 的情形。为此，取 $\mathrm{l}_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $1 \leq \mathrm{j}, \mathrm{k} \leq \mathrm{N}_{l_0-1}$。当 $\mathrm{l} \geq \mathrm{l}_0$，时，我们有

$$d(f_{m_l}^k(y_j^k), f_{m_{l+1}}^k(y_j^k)) = (\varepsilon_{N_l} + \varepsilon_{N_{l+1}})$$

so

$$\sum_{l=l_1}^{l_2} d(f_{m_l}^k(y_j^k), f_{m_{l+1}}^k(y_j^k)) \leq 2 \sum_{l=N_{l_1}}^{\infty} \varepsilon_l \quad \text{for } l_2 \geq l_1 \geq l_0.$$

右端在 $l_1, l_2 \to \infty$ 时趋于零，因此 $(f_{kml}(y))$ 是柯西数列。一般情形由等度连续性以及$D^k \subset Y^k$的稠密性可得。

接下来，给定 j，j',k,$k' \in \mathbb{N}$，构造中的性质 (1) 保证

$$d(f_\infty^k(y_j^k), f_\infty^{k'}(y_{j'}^{k'})) = \lim_{l\to\infty} d(f_{m_l}^k(y_j^k), f_{m_l}^{k'}(y_{j'}^{k'})) = d_\omega(f_\omega^k(y_j^k), f_\omega^{k'}(y_{j'}^{k'})).$$

由等度连续性可知，这很容易推广为

$$d(f_\infty^k(y), f_\infty^{k'}(y')) = d_\omega(f_\omega^k(y), f_\omega^{k'}(y')) \quad \text{for } (y,y') \in Y^k \times Y^{k'} \text{ and } k,k' \in \mathbb{N}.$$

我们得出结论，存在唯一确定的等距嵌入 $\eta\colon C \to X_\omega$，使得 $\eta \circ f_\infty^k = f_{k\omega}$，对 $k \geq 1$成立。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，(f_{km}) 的等度连续性意味着，$(f_{kml}\colon Y^k \to X^{m_l})$ 到 $f_{k\infty}\colon Y^k \to Z$ 的逐点收敛可提升为紧集上一致收敛。因此，断言陈述中的 (1) 和 (2) 成立。

最后，我们讨论断言中的灵活性部分。若 $(\mathcal{F}_N)_{N\geq 1}$ 如定理陈述所述，且 $(\mathcal{G}_N)_{N\geq 1}$ 如上所述，则在构造序列 (N_l) 和 (m_l) 时，可以用 $\mathcal{G}_N$ 替换为$\mathcal{G}'_N = \mathcal{G}_N \cap \mathcal{F}_N$，其余证明过程不变。定理 1.6 的证明至此完成。

5. Lusin–Lipschitz 可容许序列

在本节中，我们研究如下定义的定量 Lusin–Lipschitz 可容许序列。它们将是超极限定理证明中的关键要素。设 X 为完备度量空间，且 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界 Lipschitz 区域。

定义 5.1. *Lipschitz* 映射序列 $f^k\colon \Omega \to X$ 称为 *Lusin–Lipschitz* 可容许的，如果存在非空可测子集 $E^1 \subset E^2 \subset \cdots \subset \Omega$，使得$\mathscr{L}^n(\Omega \setminus E^k) \to 0$ 当 k 趋于无穷时成立，且对每个 k 有 $f^{k+1}|_{E^k} = f^k|_{E^k}$。

如果 λ_k、$c_k > 0$ 满足 $c_k \to 0$，使得 f^k 是 λ_k-利普希茨的，且对每个 k 有 $\mathscr{L}^n(\Omega \setminus E^k) \leq c_k$，则称 λ_k 与 c_k 为 Lusin–Lipschitz 可容许序列 (f_k) 的参数。显然，对几乎每个 $z \in \Omega$，序列 $(f_k(z))$ 最终为常数；特别地，逐点极限 $f(z) = \lim_{k\to\infty} f^k(z)$ 是从 Ω 到 X 的几乎处处有定义的可测且本质可分值映射。这一观察将构成超极限构造的基础。

以下命题表明，Lusin–Lipschitz 可容许序列(f_k) 收敛到逐点极限f，且在L^p 中关于参数 λ_k和c_k具有定量估计。

命题 5.2. 给定 $C, p > 1$，存在 $C', \delta > 0$，使其满足以下性质。对于任意由映射 $f^k\colon \Omega \to X$ 组成的 *Lusin–Lipschitz* 可容许序列，其参数为 $\lambda_k = C \cdot 2^k$ 和 $c_k = \mathscr{L}^n(\Omega) \cdot 2^{-kp}$，极限映射为 f，实值函数 $h_k = d(f, f^k)$满足

$$\|h_k\|_{L^p(\Omega)} \leq 2^{-k\delta} C'$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$。

证明将表明，δ 取决于p 和n，而C' 取决于p、n、C以及Ω。

证明。设 C、$p > 1$，并对 $k \in \mathbb{N}$ 设定 $\lambda_k = C \cdot 2^k$ 和 $c_k = \mathscr{L}^n(\Omega) \cdot 2^{-kp}$。假设 (f^k) 是映射 $f^k\colon \Omega \to X$ 的一个 Lusin–Lipschitz 可容许序列，其参数为 λ_k 和 c_k。也就是说，f^k 是 λ_k-利普希茨映射，并且存在非空可测子集 $E^1 \subset E^2 \subset \cdots \subset \Omega$，使得 $\mathscr{L}^n(\Omega \setminus E^k) \leq c_k$，且对每个 k 都有 $f^{k+1}|_{E^k} = f^k|_{E^k}$。序列 (f^k) 的极限 f 满足对每个 k 都有 $f|_{E^k} = f^k|_{E^k}$。

固定 $k \in \mathbb{N}$，并将 $h = h_k$ 简记为。我们声称 $h \in W^{1,q}(\Omega)$ 具有 Sobolev范数

$$\|h\|_{W^{1,q}(\Omega)} \le 2^{\left(1-\frac{p}{q}\right)k} D$$

对每个 $1 < q < p$，其中 D 取决于p、q、C、n和 $\operatorname{diam}(\Omega)$。为此，首先注意到 $h|_{E^k} = 0$，并且对于$i > k$，有

$$h|_{E^i} = d(f^i, f^k)|_{E^i} \le (\lambda_i + \lambda_k) \cdot \operatorname{diam}(\Omega) \le 2^{i+1} C \cdot \operatorname{diam}(\Omega).$$

由此可推得

$$\begin{aligned}\int_\Omega h^q(z)\,dz &= \sum_{i=k+1}^{\infty} \int_{E^i \setminus E^{i-1}} h^q(z)\,dz \\ &\le (2C \operatorname{diam}(\Omega))^q \cdot \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{qi} \cdot \mathscr{L}^n(\Omega \setminus E^{i-1}) \\ &\le 2^{(q-p)k} C_0\end{aligned}$$

对于某个常数C_0，它仅取决于p、q、C、n和 $\operatorname{diam}(\Omega)$。现在，对于$l \ge k$，考虑 Lipschitz函数$g_l = d(f_l, f_k)$。由于

$$|g_l - h_k| = |d(f^l, f^k) - d(f^k, f)| \le h_l,$$

由上文可知，g_l 在L^q中收敛到h_k。注意，对于每个$i \ge l$，$g_l|_{E^k} = 0$ 和g_l在E^i 上都是 $2\lambda_i$-利普希茨的。特别地，$|\nabla g_l| = 0$ 在E^k 上几乎处处成立，且 $|\nabla g_l| \le 2\lambda_i$ 在 E^i上几乎处处成立。因此，我们几乎可以像上文那样得到

$$\int_\Omega |\nabla g_l|^q\,dz \le (2C)^q \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{qi} \mathscr{L}^n(\Omega \setminus E^{i-1}) \le 2^{(q-p)k} C_1$$

对于某个常数C_1，它仅取决于p、q、n和C。因此，L^q-范数$g_l|$ 不依赖于l，且由于 g_l 在L^q 中收敛到h，可知$h \in W^{1,q}(\Omega)$ 并且

$$\int_\Omega |\nabla h|^q\,dz \le 2^{(q-p)k} C_1.$$

由此得证。

最后，考虑 $1 < q < \min\{p,n\}$ 使得 $\frac{qn}{n-q} > p$。根据 Sobolev 嵌入定理和 Hölder不等式，存在常数 D'，它仅依赖于 p,q,n 和 Ω，使得

$$\|h\|_{L^p(\Omega)} \le D' \|h\|_{W^{1,q}(\Omega)} \le 2^{\left(1-\frac{p}{q}\right)k} D' D.$$

这就完成了关于 $\delta = \frac{p}{q} - 1$ 和 $C' = D'D$ 的证明。 □

命题 5.3. 给定 $p > 1$ 和 $M \ge 1$，存在 $C \ge 1$，它仅依赖于 M,Ω 和 p，并具有以下性质。设 X 是一个内射度量空间，$p_X \in X$，且令 $f \in W^{1,p}(\Omega,X)$ 满足

$$\int_\Omega d^p(f(z), p_X)\,dz + E_+^p(f) \le M.$$

那么，f 是一个 *Lusin–Lipschitz* 可容许序列(fk) 的极限，其参数为 $\lambda_k = C \cdot 2^k$ 和 $c_k = \mathscr{L}n(\Omega) \cdot 2^{-}kp$，而且还满足 $f^k(\Omega) \subset B_X(p_X, \lambda_k)$，对每个 k 均成立。

要求 X 为内射度量空间的条件可以减弱。只需假设 X 是利普希茨 $(n-1)$-连通的；有关延拓构造参见例如 [LS05] 或 [HS14]。此时，常数 C 还依赖于利普希茨连通性的数据。

证明。 设 p_X 与 f 如命题所述。考虑一个 Hajłasz 梯度 g（f 的），满足

$$\|g\|^p_{L^p(\Omega)} \le C' E^p_+(g).$$

回顾一下，我们可以选择 $C' \ge 1$ 使其仅依赖于 Ω 和 p，由（3.2）确定。考虑子水平集

$$A_k = \left\{ g \le 2^k \right\} \quad \text{and} \quad B_k = \left\{ d(f, p_X) \le 2^k \right\}$$

对于 $k \ge 1$。由切比雪夫不等式可得

$$\mathscr{L}^n(\Omega \setminus A_k) \le C' \frac{E^p_+(u)}{2^{kp}} \quad \text{and} \quad \mathscr{L}^n(\Omega \setminus B_k) \le \frac{\|d(f, p_X)\|^p_{L^p(\Omega)}}{2^{kp}}.$$

取 $k_0 \in \mathbb{N}$ 足够大，使得 $C'M/2^{k_0 p} < \mathscr{L}^n(\Omega)$。那么，对于 $k \ge 1$，集合 $E^k = A_{k+k_0} \cap B^{k+k_0}$ 满足

$$\mathscr{L}^n(\Omega \setminus E^k) \le \frac{C'M}{2^{k_0 p}} \frac{1}{2^{kp}} < \frac{\mathscr{L}^n(\Omega)}{2^{kp}}$$

特别地，E^k 非空。此外，根据（3.1），限制映射 $f|_{E^k}$ 是 $C2^k$-利普希茨的，其中 $C = 2^{k_0+1}$，且 $f(E^k) \subset B_X(p_X, C2^k)$。

现在，由于 X 是内射的，我们可以将 $B_X(p_X, C2^k)$ 的内射性应用于得到一个 λ_k-利普希茨延拓 f^k，它是 $f|_{E^k}$ 的延拓，并满足 $f_k(\Omega) \subset B_X(p_X, \overline{C2^k})$。序列 (f_k) 具有所需的性质。□

6. 定理 1.1 和 1.2

下文中，ω 表示 $\mathbb{N}$ 上的非主超滤子。对每个 $m \in \mathbb{N}$，令 $X_m = (X_m, d_m, p_m)$ 为带基点的完备度量空间，并考虑一个 p-有界序列 $(u_m \colon \Omega \to X_m)$。也就是说，$u_m \in W^{1,p}(\Omega, X_m)$ 并且

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \left(\int_\Omega d^p(u_m(z), p_m)\, dz + E^p_+(u_m) \right) < \infty.$$

将 $\mathrm{X}'\mathrm{m}$ 记为 X_m 的内射包；见第2节6。我们将 X_m 视为 $\mathrm{X}'\mathrm{m}$ 的子集，并将 u_m 视为 $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega, \mathrm{X}'\mathrm{m})$ 中的元素。再次用 d_m 表示 $\mathrm{X}'\mathrm{m}$ 上的度量。分别将序列 $(\mathrm{X}_m, \mathrm{d}_m, \mathrm{p}_m)$ 和 $(\mathrm{X}'\mathrm{m}, \mathrm{d}_m, \mathrm{p}_m)$ 的超极限记为 X_ω 和 X'_ω。

根据定理5.3，存在 C，使得每个映射 u_m 都是映射 $u^k_m \colon \Omega \to X'_m$ 的一个卢辛–利普希茨可容许序列 (u^k_m) 的极限，其参数为 $\lambda_k = C2^k$ 和 $c_k = \mathscr{L}^n(\Omega) 2^{-pk}$，此外

$$u^k_m(\Omega) \subset \overline{B}_{X'_m}(p_m, \lambda_k).$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$，用 u^k_ω 表示序列 (u^k_m) 的逐点超极限。

引理 6.1. 序列 (u^k_ω) 是具有参数 λ_k 和 c_k 的 *Lusin–Lipschitz* 可容许序列。此外，在可能将极限 u_ω 在一个零测集上重新定义之后，u_ω 的像包含于 X_ω。

证明。 首先注意，对每个 k，u^k_ω 都是 λ_k-利普希茨的。现在，对每个 m，令

$$E^1_m \subset E^2_m \subset \cdots \subset \Omega$$

是非空可测集，使得 $\mathscr{L}^n(\Omega \setminus E^k_m) \le c_k$ 且

$$u^{k+1}_m|_{E^k_m} = u^k_m|_{E^k_m}$$

对于每个k。令E_ω^k为（E_m^k）的超极限；参见第2.3节。设$F^k = E_\omega^k \cap \Omega$。显然有

$$F^1 \subset F^2 \subset \cdots \subset \Omega$$

并且根据定理2.1，有 $\mathscr{L}^n(\Omega \setminus F^k) \le c_k$，因此每个$F^k$都非空。接下来，令$z \in F^k$，则$z = \lim_\omega z_m$，其中某个$z_m \in E_m^k$满足此条件。由于

$$\begin{aligned} d_m(u_m^{k+1}(z), u_m^k(z)) &\le d_m(u_m^{k+1}(z), u_m^{k+1}(z_m)) + d_m(u_m^k(z_m), u_m^k(z)) \\ &\le (\lambda_{k+1} + \lambda_k) \cdot |z - z_m|, \end{aligned}$$

可得$u_\omega^{k+1}(z) = u_\omega^k(z)$，因此

$$u_\omega^{k+1}|_{F^k} = u_\omega^k|_{F^k}.$$

我们得出结论：(u_ω^k)是一个带有参数λ_k且满足c_k的卢津–利普希茨可容许序列。同样，注意到$u_m^k(z_m) = u_m(z_m)$，并且

$$d_m(u_m^k(z), u_m(z_m)) \le \lambda_k |z - z_m|,$$

可得

$$u_\omega(z) = \lim_\omega u_m^k(z) = \lim_\omega u_m(z_m) \in X_\omega.$$

我们得出结论：在可能于零测集$\Omega \setminus \bigcup F^k$上重新定义$u_\omega$之后，$u_\omega$映射到$X_\omega$。□

我们将u_ω称为与 Lusin–Lipschitz 可容许序列(u_m^k)相关联的超极限。从现在起，我们将u_ω视为从 Ω 到X_ω的映射。

引理 6.2. 与(u_m^k)相关联的超极限 u_ω 属于 $W^{1,p}(\Omega, X_\omega)$。此外，

$$\lim_\omega E^p(u_m) \ge E^p(u_\omega)$$

对于任意下半连续能量，以及在 $p \ge n$ 时，

$$\lim_\omega \mathrm{Vol}(u_m) \ge \mathrm{Vol}(u_\omega)$$

对于任意下半连续体积。

证明. 根据定理 1.6，存在一个完备度量空间 Z、一个子序列 (m_l) 和等距嵌入 ι_l: $X'_{m_l} \hookrightarrow Z$，使得对于每个 k，映射序列 $f_{km_l} = \iota_l \circ u^k_{m_l}$一致地收敛到映射 f^k_∞: $\Omega \to Z$。此外，记 C 为 $\bigcup f^k_\infty(\Omega)$ 的闭包，则存在一个等距嵌入 $\eta : C \hookrightarrow X'_\omega$，使得对每个 k 都有 $u^k_\omega = \eta \circ f^k_\infty$。根据定理 6.1，这一因子分解保证序列 $(f_{k\infty})$ 是参数为 λ_k 和 c_k 的 Lusin–Lipschitz 可容许序列。我们断言，其极限 f_∞ 属于 $W^{1,p}(\Omega, Z)$。由于映射 $f_{m_l} = \iota_l \circ u_{m_l}$具有一致有界能量，只需证明它们在 L^p 中收敛到 f_∞。

设 $\varepsilon > 0$。由定理 5.2，存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得

$$\|d(f_\infty, f^k_\infty)\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{and} \quad \|d_m(u_m, u^k_m)\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{3}$$

对每个 m 都成立。由于 f_{km_l}一致收敛到 f^k_∞，当 $l \to \infty$ 时，我们最终得到

$$\|d(f_\infty, f_{m_l})\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{3} + \|d(f^k_\infty, f^k_{m_l})\|_{L^p(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{3} \le \varepsilon$$

对所有充分大的l均成立。由于 ε 是任意的，这表明f_{m_l} 在L^p 中收敛到f_∞，因此$f_\infty \in W^{1,p}(\Omega, Z)$。由于$u^k_\omega = \eta \circ f^k_\infty$对每个$k$都成立，因此$u_\omega = \eta \circ f_\infty$几乎处处成立，所以$u_\omega$属于$W^{1,p}(\Omega, X_\omega)$。

给定一个下半连续的能量和体积概念（若$p \geq n$），在选取序列(m_l)时，我们也可以假设

$$\lim_{l\to\infty} \mathrm{Vol}(u_{m_l}) = \lim_\omega \mathrm{Vol}(u_m) \quad \text{if } p \geq n \quad \text{and} \quad \lim_{l\to\infty} E^p(u_{m_l}) = \lim_\omega E^p(u_m).$$

该断言得证。 □

下一个引理表明，映射 u_ω 不依赖于所选择的卢津–利普希茨可容许序列 (u^k_m)。

引理 6.3。 若 $(v_m\colon \Omega \to X_m)$ 是另一个 p-有界序列，并且其相应的卢津–利普希茨可容许序列为 $(v^k_m\colon \Omega \to X'm)$，超极限为 v_ω，则

$$\|d_\omega(u_\omega, v_\omega)\|_{L^p(\Omega)} = \lim_\omega \|d_m(u_m, v_m)\|_{L^p(\Omega)}$$

and

$$\|d_\omega(\mathrm{tr}(u_\omega), \mathrm{tr}(v_\omega))\|_{L^p(\partial\Omega)} = \lim_\omega \|d_m(\mathrm{tr}(u_m), \mathrm{tr}(v_m))\|_{L^p(\partial\Omega)}.$$

这立即推出以下关键性质。

推论 6.4。 若 (u_m) *Lipschitz* 有界，则 u_ω 与逐点超极限几乎处处一致。此外，若 (φ_m) 是一个从映射 $\varphi_m\colon X_m \to Y_m$ 组成的 *Lipschitz* 有界序列，则映射序列 $v_m = \varphi_m \circ u_m$ 满足 $v_\omega = \varphi_\omega \circ u_\omega$ 几乎处处。

第一部分由定理 6.3 直接得出。第二部分利用了这一附加事实：$\varphi_m\colon X_m \to Y_m$ 有一个延拓 $\Phi_m\colon X'm \to Y'm$ 到内射包，使得 (Φ_m) Lipschitz 有界。

定理 6.3 的证明。证明采用了与定理 6.2 类似的思路。事实上，由定理 1.6，存在一个完备度量空间 Z、一个子序列 (m_l) 以及等距嵌入 $\iota_l\colon \mathrm{X'm}_l \hookrightarrow \mathrm{Z}$，使得对每个 k，映射序列 $\mathrm{f}^k_{m_l} = \iota_l \circ \mathrm{u}^k_{m_l}$ 和 $\mathrm{g}^k_{m_l} = \iota_l \circ \mathrm{v}^k_{m_l}$ 一致地收敛到映射 $\mathrm{f\,k}_\infty\colon \Omega \to \mathrm{Z}$ 和 $\mathrm{g}^k_\infty\colon \Omega \to \mathrm{Z}$。进一步，记 C 为 $\bigcup(\mathrm{f\,k}_\infty(\Omega) \cup \mathrm{g}^k_\infty(\Omega))$ 的闭包，则存在一个等距嵌入 $\eta\colon \mathrm{C} \hookrightarrow \mathrm{X}'_\omega$，使得对每个 k，$\mathrm{u}^k_\omega = \eta \circ \mathrm{f}^k_\infty$ 且 $\mathrm{v}^k_\omega = \eta \circ \mathrm{g}^k_\infty$。在选择 (m_l) 时，我们还可以假设

$$\lim_{l\to\infty} \|d_{m_l}(u_{m_l}, v_{m_l})\|_{L^p(\Omega)} = \lim_\omega \|d_m(u_m, v_m)\|_{L^p(\Omega)}$$

and

$$\lim_{l\to\infty} \|d_{m_l}(\mathrm{tr}(u_{m_l}), \mathrm{tr}(v_{m_l}))\|_{L^p(\partial\Omega)} = \lim_\omega \|d_m(\mathrm{tr}(u_m), \mathrm{tr}(v_m))\|_{L^p(\partial\Omega)}.$$

令 f_∞ 和 g_∞ 表示定理 6.2 证明中所述的 $(\mathrm{f\,k}_\infty)$ 和 (g^k_∞) 的逐点极限。我们回顾证明中的结论：$\mathrm{u}_\omega = \eta \circ \mathrm{f}_\infty$ 且 $\mathrm{v}_\omega = \eta \circ \mathrm{g}_\infty$ 几乎处处成立，并且 f^{m_l} 和 g^{m_l} 在 L^p 中收敛到 f_∞ 和 g_∞。由此很容易推出

$$\begin{aligned}\lim_{l\to\infty} \|d_{m_l}(u_{m_l}, v_{m_l})\|_{L^p(\Omega)} &= \lim_{l\to\infty} \|d(f_{m_l}, f_{m_l})\|_{L^p(\Omega)} \\ &= \|d(f_\infty, g_\infty)\|_{L^p(\Omega)} = \|d_\omega(u_\omega, v_\omega)\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

迹的连续性性质蕴含了关于迹的断言；参见第3.4节。

□

我们已经证明，映射 $(u_m) \mapsto u_\omega$ 满足定理 1.1中所述的性质。为完成该定理的证明，还需处理唯一性问题。

引理 6.5. 如果在 p-有界序列上定义的映射 $(u_m) \mapsto {}^\sim u_\omega$ 满足 (1)、(2) 和(3)，那么对于每个 p-有界的(u_m)，几乎处处有 $u_\omega = {}^\sim u_\omega$。

证明. 给定(u_m^k) 如上所述，序列(u_m^k) 对于 $k \in \mathbb{N}$ 是 Lipschitz 有界的，定理5.2 保证

$$\|d_m(u_m, u_m^k)\|_{L^p(\Omega)} \le 2^{-k\delta} C' \quad \text{for } k \in \mathbb{N},$$

其中 δ 和 C' 与 k 和 m 无关。因此，由公理可得

$$\|d_\omega(\tilde{u}_\omega, u_\omega^k)\|_{L^p(\Omega)} = \lim_\omega \|d_m(u_m, u_m^k)\|_{L^p(\Omega)} \le 2^{-k\delta} C'$$

类似地，$\|d_\omega(u_\omega, u_\omega^k)\|_{L^p(\Omega)} \le 2^{-k\delta} C'$。令 $k \to \infty$ 趋于极限，即得唯一性。□

要完成定理 1.2 的证明，还需验证（7）。

引理 6.6. 若迹 $\mathrm{tr}(u_m)\colon \partial\Omega \to X_m$ 具有连续代表 (γ_m)，且这些代表来自一个等度连续且一致有界的族，那么其逐点超极限 γ_ω 是 $\mathrm{tr}(u_\omega)$ 的连续代表。

证明。由定理 1.6，存在完备度量空间 Z、一个子序列 (m_l) 以及等距嵌入 $\iota_l\colon X'_{m_l} \hookrightarrow Z$，使得对每个 k，映射序列 $f\,k m_l = \iota_l \circ u^k_{m_l}$ 一致收敛到映射 $f^k_\infty\colon \Omega \to Z$，且 $\iota_l \circ \gamma_{m_l}$ 一致收敛到映射 γ_∞。此外，记 C 为 $\bigcup(f\,k_\infty(\Omega) \cup \gamma_\infty(\partial\Omega))$ 的闭包，则存在等距嵌入 $\eta\colon C \hookrightarrow X'_\omega$，使得对每个 k，$u^k_\omega = \eta \circ f^k_\infty$，且 $\gamma_\omega = \eta \circ \gamma_\infty$。

我们沿用定理 6.2 的证明中的记号和论证。此处 $\mathrm{tr}(f^{m_l}) = \iota_l \circ \mathrm{tr}(u^{m_l}) = \iota_l \circ \gamma_{m_l}$ 几乎处处。由于 (f^{m_l}) 的迹通过 $(d(f^{m_l}, f_\infty))$ 在 L^p 意义下收敛于零而在 $L^p(\partial\Omega, Z)$ 中收敛到 f_∞ 的迹，因此 $\mathrm{tr}(f_\infty) = \gamma_\infty$ 几乎处处。再回想 $u_\omega = \eta \circ f_\infty$ 几乎处处成立，可得 $\mathrm{tr}(u_\omega) = \eta \circ \mathrm{tr}(f_\infty) = \eta \circ \gamma_\infty = \gamma_\omega$ 几乎处处。□

定理的证明1.1和1.2 现已完成。

7. 稳定性结果

在定理1.7的证明中，我们将在接下来的小节应用超极限定理，即定理1.1和1.2。在随后的子小节中，我们将应用定理1.7，证明 Dehn 函数稳定性定理1.3。

实际上，我们将证明这些结果的一个适用于任意下半连续面积 μ 的版本，因此需要以下定义：给定完备度量空间 X 中的一条利普希茨曲线 $\gamma\colon S^1 \to X$，相对于 μ 的 γ 的 *Sobolev* 填充面积为

$$\mathrm{FillArea}^\mu_X(\gamma) = \inf\left\{\mathrm{Area}^\mu(u)\colon u \in W^{1,2}(\mathbb{D}, X),\ \mathrm{tr}(u) = \gamma\right\}.$$

省略 μ 时，我们称之为 γ 的参数化豪斯多夫面积。

下文中，ω 表示 $\mathbb{N}$ 上的一个非主超滤子。

7.1. 定理1.7的证明。

我们表述定理 1.7的一般版本如下。

定理 7.1。 设 μ 为一个下半连续面积。假设 (X_m, d_m, p_m) 是完备带基点长度空间的序列，且 X_ω 为其超极限。若 $(\gamma_m\colon S^1 \to X_m)$ 是一个 *Lipschitz*有界序列，满足 $\gamma = \lim_\omega \gamma_m$ 且 $\lim_\omega \mathrm{FillArea}^\mu X_m(\gamma_m) < \infty$，则存在 $u \in W^{1,2}(\mathbb{D}, X_\omega)$ 使得

$$\mathrm{tr}(u) = \gamma \quad \textit{and} \quad \mathrm{Area}^\mu(u) \le \lim_\omega \mathrm{FillArea}^\mu_{X_m}(\gamma_m).$$

证明。设 $L > \lim_\omega \mathrm{LIP}(\gamma_m)$。我们考虑由以下性质定义的子集 $\mathcal{G} \subset \mathbb{N}$：$\mathrm{d}(p_m, \gamma_m(S^1)) \le 1 + \mathrm{d}(p_\omega, \gamma(S^1))$，$\mathrm{FillArea}^\mu(\gamma_m) \le 1 + \lim_\omega \mathrm{FillArea}^\mu(\gamma_m)$，以及 $\mathrm{LIP}(\gamma_m) \le L$。它满足 $\omega(\mathcal{G}) = 1$。对于 $m \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{G}$，不妨设 X_m 是单点集。

考虑 $u_m \in W^{1,2}(\mathbb{D}, X_m)$，使得 $\mathrm{tr}(u_m) = \gamma_m$，并且

$$\mathrm{Area}^\mu(u_m) \le \mathrm{FillArea}^\mu_{X_m}(\gamma_m) + \frac{1}{m}. \tag{7.1}$$

接下来，我们将序列 (u_m) 提升到映射柱 Y_m。为此，赋予柱体 $Z = [0, 3L] \times S^1(L) \subset \mathbb{R}^3$ 内禀长度距离。令 Y_m 为通过将 Z 粘合到 X_m 而得到的商空间，其中 $\gamma_m(s)$ 对每个 $s \in S^1$ 都与 $(0, Ls)$ 等同，并赋予 Y_m 商度量。

注意，由于 L 的选取，自然包含映射 $X_m \hookrightarrow Y_m$ 是等距的，而自然映射 $\iota_m \colon Z \to Y_m$ 是 1-利普希茨的；其在 $(0, 3L] \times S^1(L)$ 上的限制是内射的且为局部等距；事实上，ι_m 在顶端 $T = \{3L\} \times S^1(L)$ 的 L 邻域 $N = [2L, 3L] \times S^1(L)$ 上的限制是等距嵌入。此外，投影映射 $P_m \colon Y_m \to X_m$ 逐点固定 X_m，并将 (s, t) 映射到 $\gamma_m(L^{-1}t)$，其中 $(s, t) \in Z$；该映射是 1-利普希茨的。

根据上述内容，我们可以将 u_m 视为 $W^{1,2}(\mathbb{D}, Y_m)$中的一个元素。根据 Sobolev 映射的标准粘接性质 [LW16，第2节。2], 我们得到一个 $W^{1,2}(\mathbb{D}, Y_m)$-映射

$$v_m(z) = \begin{cases} u_m(2z), & \text{if } |z| < 2^{-1}, \\ \left(3L(2|z| - 1), L\dfrac{z}{|z|}\right), & \text{if } 2^{-1} \le |z| < 1. \end{cases}$$

成立的是

$$\mathrm{Area}^\mu(v_m) = \mathrm{Area}^\mu(u_m) + 6\pi L^2.$$

根据度量 Morrey ε-共形引理 [FW20], , 存在一个直到边界的微分同胚 $\phi_m \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 使得 $h_m = v_m \circ \phi_m$ 满足

$$E^2_+(h_m) \le \frac{1}{m} + C_\mu \mathrm{Area}^\mu(v_m),$$

其中 C^μ 是一个仅依赖于 μ 的常数。特别地，在通过 ι_m 将顶端 $\Gamma_m := \iota_m(T) \subset Y_m$ 等距地识别为 T 之后，我们可以假设三点条件

$$\mathrm{tr}(h_m)(p_j) = (3L, Lp_j) \quad \text{for } j \in \{1, 2, 3\} \text{ and } m \in \mathbb{N}$$

对固定三元组成立 $\{p_1, p_2, p_3\}$ 取自 S^1。特别地，根据库朗–勒贝格引理，迹 $(\mathrm{tr}(h_m))$ 构成等度连续族，参见 [LW17a，引理 7。3]。

由庞加莱不等式可知 (h_m) 是 2-有界的（见 [LW17a，引理 4。11]），且

$$\mathrm{Area}^\mu(P_m \circ h_m) = \mathrm{Area}^\mu(P_m \circ v_m) = \mathrm{Area}^\mu(u_m). \tag{7.2}$$

第二个等式由面积公式（3.3）得出。

接下来，我们应用超极限定理，即定理 1.1，得到 (h_m) 的超极限 $h_\omega \in W^{1,2}(\mathbb{D}, Y_\omega)$。考虑投影 (P_m) 的超极限 $P_\omega \colon Y_\omega \to X_\omega$。由定理 1.1 可知，$P_\omega \circ h_\omega$ 是 $(P_m \circ h_m)$ 的超极限。此外，利用定理 1.2，我们有如下性质：首先，

$$\mathrm{Area}^\mu(P_\omega \circ h_\omega) \le \lim_\omega \mathrm{Area}^\mu(P_m \circ h_m) \le \lim_\omega \mathrm{FillArea}^\mu_{X_m}(\gamma_m) \tag{7.3}$$

由 (7.2) 和 (7.1)。其次，由于迹 $(\mathrm{tr}(h_m))$ 构成一个等度连续序列，迹的超极限 $\mathrm{tr}(h_\omega)$ 是 $\Gamma_\omega = \iota_\omega(T)$ 的弱单调参数化；这里 $\iota_\omega\colon Z \to Y_\omega$ 是 (ι_m) 的逐点超极限。

虽然 $P_\omega \circ h_\omega$ 满足正确的面积界（7.3），但其迹不一定是 γ。因此，我们需要在向下投影之前修改 h_ω。我们将找到 $v \in W^{1,2}(\mathbb{D}, Y_\omega)$，使得 $\mathrm{tr}(v)(z) = (3L, Lz)$ 对 $z \in \mathbb{S}^1$ 成立，并且

$$\mathrm{Area}^\mu(P_\omega \circ v) \le \mathrm{Area}^\mu(P_\omega \circ h_\omega). \tag{7.4}$$

显然，$u := P_\omega \circ v$ 根据（7.4）和（7.3），满足该断言的结论。

一个简单的同伦论证（参见 [LW16，引理 2.6]，）表明，只要找到满足（7.4）（其中以 g 替换 v）的 $g \in W^{1,2}(\mathbb{D}, Y_\omega)$，使得 tr(g) 是 $\mathrm{tr}(h_\omega)$ 的保向重参数化且为双 Lipschitz 映射，就能得到 v。映射 g 可通过在分段光滑约当域 $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{2k}$ 中修改 h_ω 得到，这些约当域由有限条短圆弧构成，圆弧来自以 $\mathbb{S}^1$ 为圆心的圆。该构造使得 $\partial\Omega^- j = \mathbb{S}^1 \cap \partial\Omega$ 连通并覆盖$\mathbb{S}^1$。通过选取适当的圆，我们可以根据 [SW25，引理 6.4]，要求每个迹 $\theta_j = \mathrm{tr}(h_\omega|_{\Omega_j})$ 都连续且长度任意小；对我们而言，$\ell(\theta_j) < L$ 就足够了。为得到 $g|_{\Omega_j}$，我们对 θ_j 在 $\partial\Omega^- j$ 上重新参数化，使其具有恒定速度，并利用 $\iota_\omega(N)$ 上的局部等周不等式填充所得曲线 $\eta_j\colon \partial\Omega_j \to Y_\omega$。这里，由于 $\iota_\omega(Z)$ 通过 P_ω投影到 $\gamma(\mathbb{S}^1)$，面积公式（3.3）保证（7.4）成立。□

7.2. **超极限中的德恩函数。** 现在应用定理 7.1。定理1.3是以下一般版本的特例。

定理 7.2。 设 r_0 和 δ 如定理1.3中所述。设(r_m) 为一个收敛到零的正数序列，并设$(\delta_m : (0, r_0) \to (0, \infty))$ 逐点收敛到 δ，其中收敛区间为$(0, r_0)$。假设 μ 是下半连续面积。若(X_m, d_m, p_m) 是一个完备带基点长度空间序列，且

$$\delta^\mu_{X_m}(r) \le \delta_m(r) \quad \textit{for every } r \in (r_m, r_0),$$

则超极限 X_ω 满足

$$\delta^\mu_{X_\omega}(r) \le \delta(r) \quad \textit{for every } r \in (0, r_0).$$

证明。设 $r \in (0, r_0)$，并设 $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to X_\omega$ 是一条利普希茨曲线，满足 $0 < \ell(\gamma) \le r$。于是 γ 是有界利普希茨曲线序列 $\gamma_m\colon \mathbb{S}^1 \to X_m$的超极限，且满足 $\lim_\omega \ell(\gamma_m) = \ell(\gamma)$，参见 [LWY20，推论 2.6]。设 $r < s < r_0$，并注意到对于每个满足 $\omega(\mathbb{N} \setminus \mathcal{G}) = 0$的 $m \in \mathcal{G} \subset \mathbb{N}$，都有 $r_m < \ell(\gamma_m) < s$。由于

$$\mathrm{FillArea}^\mu_{X_m}(\gamma_m) \le \delta^\mu_{X_m}(s) \le \delta_m(s)$$

并且由于 $\delta_m(s) \to \delta(s)$，由定理 7.1可得 $\mathrm{FillArea}^\mu{}_{X_\omega}(\gamma) \le \delta(s)$。这意味着 $\delta_{X_\omega}(r) \le \delta(s)$。由 δ 的右连续性，结论得证。□

8. Applications

本节将证明应用定理 1.5 和定理 1.4。与前文相同，ω 表示 $\mathbb{N}$上的非主超滤子。

8.1. **Gromov双曲。** 我们表述并证明以下定理1.5的一般版本。回顾一下，完备测地度量空间 X 是 Gromov双曲的，当且仅当它的所有渐近锥都是度量树，参见 [Dru02，命题 3.1。1]。

定理8.1。 设 μ 是一种下半连续面积，且 X 是一个完备测地空间，并且

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\delta_X^\mu(r)}{r^2} < C_\mu.$$

那么，X_ω 的每个渐近锥都是一棵度量树。也就是说，X 是 *Gromov*双曲的。

常数 C^μ 定义为

$$C_\mu := \inf\{\mu_V(\mathbb{I}_V)/\ell^2(\partial\mathbb{I}_V)\}, \tag{8.1}$$

其中，下确界取遍二维赋范平面 V ，其中 $\mathbb{I}_V \subset V$ 是一个等周集。也就是说，在周长固定的集合中，其 μ 面积最大。例如，对于 Holmes–Thompson、Gromov 的质量*、Busemann–Hausdorff 以及伊万诺夫内接黎曼面积，都有$C_\mu = 1/(4\pi)$ [APT04]。因此，定理 8.1 推出定理 1.5 ，正如所声称的那样。

为了证明定理8.1，我们需要一个引理。

引理8.2。 设 μ 是一个下半连续面积，且 X 是满足以下条件的完备长度空间

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\delta_X^\mu(r)}{r^2} < C_\mu.$$

于是，对每个 $u \in W^{1,2}(\mathbb{D},X)$，都有 面积$^\mu(u) = 0$ 。

证明。 若存在 $u \in W^{1,2}(\mathbb{D},X)$ 满足面积$^\mu(u) > 0$，则 u 的近似度量微分为范数的点集具有正测度。因此，根据标准论证，X 的一个切锥 X_ω 包含一个二维赋范空间 $X\,\mathrm{V} \subset X_\omega$ ；参见 [LW17a，命题 11。2]。周长为一的等周集 $\mathbb{I}_V \subset V$ 满足

$$C_\mu \le \mu_V(\mathbb{I}_V).$$

令 Z 为 V 的内射包，并令 $f\colon X_\omega \to Z$ 为 1-利普希茨映射，使得 $f|_V\colon V \to V$是恒等映射。令 $c\colon \mathbb{S}^1 \to \partial\mathbb{I}_V$ 为匀速参数化。由于 μ 是下半连续面积，因此

$$\mu_V(\mathbb{I}_V) = \mathrm{FillArea}_V^\mu(c) = \mathrm{FillArea}_Z^\mu(f\circ c),$$

因此，f 的 1-利普希茨性质推出

$$C_\mu \le \mathrm{FillArea}_{X_\omega}^\mu(c).$$

根据稳定性结果定理 7.2，我们推出矛盾

$$C_\mu \le \mathrm{FillArea}_{X_\omega}(c) \le \left(\limsup_{r\to 0^+} \frac{\delta_X^\mu(r)}{r^2}\right) < C_\mu.$$

□

在定理 8.1 的证明及下文中，我们将使用以下定义：给定一条若尔当曲线 $\Gamma \subset X$，我们将 $\Lambda(\Gamma,X)$ 定义为所有这样的集合：其中的 $u \in W^{1,2}(\mathbb{D},X)$ 的迹具有一个连续代表元，且该代表元是 Γ 的弱单调参数化。

定理的证明*8.1*。我们的目标是证明，每个Y 的X 渐近锥都是一棵度量树。为此，只需证明其中不存在可求长的若尔当曲线$\Gamma \subset Y$。根据稳定性结果定理7.2，每个Y 的X 渐近锥都满足

$$\delta_Y^\mu(r) \le (1-\varepsilon)C_\mu r^2 \quad \text{for some } \varepsilon \in (0,1) \text{ and every } r > 0.$$

现在假设 Γ ⊂ Y是一条长度为L ＞ 0的可求长若尔当曲线。根据定理8.3，对每个 u ∈ Λ(Γ,Y)，都有Area(u) ＝ 0 。然后，利用度量Morrey的 ε-共形性，我们可以找到一个满足固定三点条件的序列u_m ∈ Λ(Γ,Y)，且$E^2_+(u_m)$ ≤ 1/m。根据Courant–Lebesgue定理，序列(tr(u_m))等度连续，因此，对于超完备化Y_ω，序列(u_m)的超极限u_ω: Ω → Y_ω 属于 Λ(Γ, Y_ω)，且具有零能量，因而必定本质上为常值。这与u_ω ∈ Λ(Γ, Y_ω)矛盾。□

8.2. **比较几何**。 在证明定理 1.4 之前，我们先证明一些预备结果。

引理 8.3。 设 μ 是一种下半连续面积，且内积赋范平面是实现等周常数 C^μ 的唯一赋范平面。若 X 是一个完备长度空间，满足

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{\delta_X^\mu(r)}{r^2} \le C_\mu, \tag{8.2}$$

则 X 具有性质（ET）。特别地，每个 $u \in W^{1,2}(\mathbb{D}, X)$ 都满足

$$\mathrm{Area}^\mu(u) = \mathrm{Area}^{\mu_i}(u) = \mathrm{Area}(u).$$

性质（ET），即具有 欧氏切空间这一性质，最初由[LW17a]引入。

证明。 若 X 不具有性质（ET），根据定义，存在 u ∈$W^{1,2}(\mathbb{D},X)$ 使得 u 的近似度量微分不是内积范数的点集具有正测度。因此，X 的一个切空间包含一个范数并非由内积诱导的赋范平面。这与定理 8.2 的证明中一样，导致矛盾。□

在给出定理的证明之前1.4，我们在超完备化中求解普拉托问题。为使这一点精确，我们进一步定义记号。填充面积一条若尔当曲线 Γ ⊂ X 关于某一面积 μ 是

$$\mathrm{FillArea}^\mu_X(\Gamma) = \inf\{\mathrm{Area}^\mu(u) : u \in \Lambda(\Gamma, X)\}.$$

与Lipschitz曲线的情形一样，当省略 μ 时，我们指的是参数化豪斯多夫面积。

命题8.4. 设 $\kappa \in \mathbb{R}$ 与$r_0 \in (0, 2D_\kappa]$。设X为完备长度空间，并假设 $\delta_X(r)$ ≤ $\delta_\kappa(r)$ 对r ∈ $(0, r_0)$成立。若可求长$Jordan$曲线 Γ ⊂ X的长度严格小于r_0，，则存在 Γ 在超完备化X_ω中的普拉托问题的一个解。也就是说，存在$u_\omega \in \Lambda(\Gamma, X_\omega)$ 满足

$$E^2_+(u_\omega) = \mathrm{Area}(u_\omega) = \mathrm{FillArea}_{X_\omega}(\Gamma).$$

证明。 由稳定性，定理1.3，超完备化X_ω 满足

$$\delta_{X_\omega}(r) \le \delta_\kappa(r) \quad \text{for } r \in (0, r_0). \tag{8.3}$$

考虑一条若尔当曲线 Γ ⊂ X 其长度严格小于 r_0。设 c: $\mathbb{S}^1 \to \Gamma$ 为匀速参数化。给定（8.3），我们得到

$$\mathrm{FillArea}_{X_\omega}(\Gamma) = \mathrm{FillArea}_{X_\omega}(c)$$

由 [LW18a，引理 4.8]。此外，

$$\mathrm{Area}(v) = \mathrm{Area}^{\mu_i}(v) \quad \text{and} \quad \mathrm{FillArea}^{\mu_i}_{X_\omega}(c) = \mathrm{FillArea}_{X_\omega}(c)$$

每当 v ∈ $W^{1,2}(\mathbb{D},X_\omega)$ 由定理 8.3。

根据 [SW25，命题 4.1]（参见 [LWY20，命题 3.5]的证明），存在一个完备长度空间序列 (Y_m)，使得 $X \hookrightarrow Y_m$ 等距

并且满足以下条件：首先，m^{-1}-邻域X 在Y_m 中为Y_m。其次，Y_m 在尺度 ^1L_m上是L-利普希茨1-连通的。第三，

$$\delta_{Y_m}^{\mu_i}(r) \le \delta_\kappa(r) + Lr^2 \quad \text{for } r \in (0, r_0)$$

并且

$$\delta_{Y_m}^{\mu_i}(r) \le \delta_\kappa(r) + \frac{1}{\sqrt{m}} r^2 \quad \text{for } r \in \left(\frac{1}{\sqrt{m}}, r_0\right),$$

其中L 是一个万有常数。

根据度量 Morrey 的 ε-共形性，存在$u_m \in \Lambda(\Gamma, Y_m)$ 使得

$$E^2_+(u_m) \le \mathrm{FillArea}^{\mu_i}_{Y_m}(\Gamma) + \frac{1}{m}$$

并且 $\mathrm{tr}(u_m)$ 满足一个固定的三点条件。根据 Courant–Lebesgue定理，族$(\mathrm{tr}(u_m))$ 是等度连续的。

设 X_ω 是 (Y_m, d_m, p) 关于 $p \in X \subset Y_m$ 的一个超极限。注意，X_ω 与 X 的超完备化等距。(u_m) 的超极限 $u_\omega \in W^{1,2}(\mathbb{D}, X_\omega)$ 具有以下关键性质。首先，迹 $\mathrm{tr}(u_\omega)$ 是 $(\mathrm{tr}(u_m))$ 的一个超极限，因此 $u_\omega \in \Lambda(\Gamma, X_\omega)$。其次，

$$\mathrm{Area}(u_\omega) = \mathrm{Area}^{\mu_i}(u_\omega) \le E^2_+(u_\omega) \le \lim_\omega E^2_+(u_m)$$

and

$$\lim_\omega E^2_+(u_m) \le \lim_\omega \mathrm{FillArea}^{\mu_i}_{Y_m}(\Gamma).$$

第三，提升结果 [Wen19，定理 5。1], 推广至

$$\lim_\omega \mathrm{FillArea}^{\mu_i}_{Y_m}(c) \le \mathrm{FillArea}^{\mu_i}_{X_\omega}(c)$$

经过细微修改。最后，由于 $\mathrm{FillArea}^{\mu_i Y_m}(\Gamma) = \mathrm{FillArea}^{\mu_i Y_m}(c)$ 根据 [LW18a，引理 4。8], 我们有

$$\lim_\omega \mathrm{FillArea}^{\mu_i}_{Y_m}(\Gamma) \le \mathrm{FillArea}_{X_\omega}(\Gamma) \le \mathrm{Area}(u_\omega).$$

该结论由不等式链推出。 □

在定理1.4的证明之前，我们回顾度量空间上的上曲率界的定义。一个测地三角形 $\Delta \subset X$ 是三条测地线的并集γ_1、 γ_2和 γ_3，它们分别连接顶点 p_1 到 p_2, p_2 到 p_3, 以及 p_3 到 p_1, 。 Δ 的周长 为 $\ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2) + \ell(\gamma_3)$。

给定 $\kappa \in \mathbb{R}$，若一个周长为 $< 2D_\kappa$ 的测地三角形 Δ 满足 CAT(κ) 比较条件，则意味着：给定一个比较三角形 $\Delta' \subset M^2_\kappa$，将各边等距地映射到对应边的比较映射 $\Delta' \to \Delta$是 1-利普希茨的。我们称度量空间 X 是 CAT(κ) 空间，如果每个周长为 $< 2D_\kappa$ 的测地三角形都满足 CAT(κ) 比较条件，并且 X 中任意满足 $d(x, y) < D_\kappa$ 的 x、y $\in$ 都可以由一条测地线连接；有关进一步背景请参见 [BH99] （以及 [AKP24]）。Jordan 三角形是一种测地三角形，其各边仅在端点处重叠。特别地，Jordan 三角形同胚于 S^1。

定理的证明*1.4*. 我们首先证明以下断言：设 X 是一个满足 $\delta_X(r) \le \delta_\kappa(r)$ 的完备长度空间，其中 $r \in (0, r_0)$。那么，任意周长为 $< r_0$ 的测地三角形 $\Delta \subset X$ 满足 CAT(κ) 比较。

按照 [LW18b，引理 3。1], 只需考虑一个周长为$\Delta < r_0$的 Jordan 三角形。考虑超完备化$Y = X_\omega$。根据稳定性定理 1.3，超完备化满足

$$\delta_Y(r) \le \delta_\kappa(r) \quad \text{for } r \in (0, r_0). \tag{8.4}$$

设 $u \in \Lambda(\Delta, Y)$ 是由定理 8.4 得到的普拉托问题的一个解。由 (8.4) 可知，u 在边界上有一个连续代表，参见[LW17a，定理 9.1]。此外，u 可分解通过一个内在圆盘 Z：由[LW18a，定理 1.1], 可知，存在一个与 $\mathbb{D}$同胚的测地空间 Z、一个连续且单调的 $P_u\colon \mathbb{D} \to Z$，以及满足$u : Z \to X_\omega$、$u = u \circ P_u$的 1-利普希茨映射，并且对于每个可求长的$\gamma$，$u \circ \gamma$ 和 $P_u \circ \gamma$ 的长度相等。因此，只需验证 ∂Z 的比较估计。我们断言

$$\mathcal{H}^2(\Omega) \le \delta_\kappa(\ell(\partial\Omega)) \quad \text{for Jordan domains } \Omega \subset Z \text{ with } \ell(\partial\Omega) < 2D_\kappa. \tag{8.5}$$

为此，当 $\ell(\partial\Omega) < r_0$, 时，不等式 (8.5) 可通过对[LW18a 定理 8.2] 的证明稍作修改后，由 (8.4) 推得。若 $r_0 \le \ell(\partial\Omega) < 2D_\kappa$，则我们注意到 $\mathcal{H}^2(\Omega) \le \mathcal{H}^2(Z) \le \delta_\kappa(\ell(\partial Z)) \le \delta_\kappa(\ell(\partial\Omega))$。于是，根据 [LW20 定理 1.4], 的证明，我们得出当 $r \in (0,2D_\kappa)$ 时，$\delta_Z(r) \le \delta_\kappa(r)$。因此，由 [LW18b 定理 1.4], , Z 是 CAT(κ) 空间。断言得证。

最后，我们先假设 X 是测地空间。若 $r_0 = 2D_\kappa$，则根据关于测地三角形的断言，X 是 CAT(κ) 空间。若 $r_0 < 2D_\kappa$，则按如下方式处理。对于所有满足 $d(x, y) < r_0/2$ 的 $x, y \in X$，关于测地三角形的断言蕴含连接 x 与 y 的测地线 γ_{xy} 唯一，且还随端点连续变化。此外，如果 x, y 属于开球 $B = B_X(x_0,r_0/4)$，那么 γ_{xy} 也包含在 B 中。特别地，B 是测地空间且局部为 CAT(κ)。根据 [AKP24 的径向引理（引理 9.52], ），B 是 CAT(κ) 空间；不难看出，闭球 B（它与 B 的闭包重合）是测地空间且为 CAT(κ)，正如所断言的那样。 —

剩下的情况是，X 仅为完备长度空间。于是其超完备化 Y 是测地空间，并满足前述步骤的结论。由于 X 是完备长度空间，很容易推出：对于任意 $x, y \in X$，只要 $d(x, y) < r_0/2$，Y 中唯一的测地线 γ_{xy} 实际上包含于 X 中。若 $r_0 = 2D_\kappa$，则证明完毕。若 $r_0 < 2D_\kappa$，则任意闭球 $B_X(x_0, r_0/4)$ 都是 CAT(κ) 空间 $B_Y(x_0,r_0/4)$ 的测地子集。因此，$B_X(x_0,r_0/4)$ 是 CAT(κ) 空间。□

注8.5。 定理8.4，因此定理1.4，显然在将布塞曼–豪斯多夫面积替换为任意下半连续面积时仍成立 μ 只要内积赋范平面是实现等周常数的唯一赋范平面$C_\mu = 1/(4\pi)$。这可直接由定理8.3得出。

参考文献

[AKP24] Stephanie Alexander、Vitali Kapovitch 和 Anton Petrunin。《亚历山德罗夫几何——基础》，数学研究生教材第236卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，[2024] ©2024。[APT04] J. C. Álvarez Paiva 和 A. C. Thompson。赋范空间与芬斯勒空间上的体积。载于《黎曼–芬斯勒几何选读》，数学科学研究所出版物第50卷，第1–48页。剑桥大学出版社，剑桥，2004年。[Bat22] David Bate。利用切空间刻画可整流度量空间。《数学发明》，230(3):995–1070，2022年。[BH99] Martin R. Bridson 和 André Haefliger。《非正曲率度量空间》，数学基础原理第319卷。施普林格出版社，柏林，1999年。[BI12] Dmitri Burago 和 Sergei Ivanov。赋范空间中平面的极小性。《几何与泛函分析》，22(3):627–638，2012年。[BNS22] Elia Bruè、Aaron Naber 和 Daniele Semola。Ricci曲率有下界的空间的边界正则性与稳定性。《数学发明》，228(2):777–891，2022年。[BPS25] Elia Bruè、Alessandro Pigati 和 Daniele Semola。Ricci曲率有下界的非塌缩空间的拓扑正则性与稳定性，2025年。cvgmt预印本。[CC97] Jeff Cheeger 和 Tobias H. Colding。Ricci曲率有下界的空间结构研究。I。《微分几何杂志》，46(3):406–480，1997年。

[CC00a] Jeff Cheeger 和 Tobias H. Colding。Ricci曲率有下界的空间结构研究。II。《微分几何杂志》，54(1):13–35，2000年。[CC00b] Jeff Cheeger 和 Tobias H. Colding。Ricci曲率有下界的空间结构研究。III。《微分几何杂志》，54(1):37–74，2000年。[CE24] 保罗·克罗伊茨和尼基塔·叶夫谢耶夫。通过弱导数研究度量空间值索伯列夫映射的一种方法。《分析、几何与度量空间》，12(1):论文编号20230107，共16页，2024年。[Cre22] 保罗·克罗伊茨。奇异曲线的普拉托问题。《通讯分析与几何》，30 1792，2022 8 1779( ): – 。[DM21] 乔治奥斯·达斯卡洛普洛斯和千香子·梅濑。泰希米勒空间的刚性。《数学发明》，224(3):791–916，2021年。[DMV11] 乔治奥斯·达斯卡洛普洛斯、千香子·梅濑和阿丽娜·弗多维娜。双曲建筑的超刚性。《几何与泛函分析》，21(4):905–919，2011年。[Dru02] Cornelia Druţu。拟等距不变量与渐近锥。第12卷，第99–135页。2002年。几何与组合群论及半群理论方法国际会议（内布拉斯加州林肯，2000年）。[DS05] Cornelia Druţu 和马克·萨皮尔。树分层空间与群的渐近锥。《拓扑学》，44(5):959–1058，2005年。附录由丹尼斯·奥辛和马克·萨皮尔撰写。[Fed69] 赫伯特·费德勒。《几何测度论》。数学科学基础丛书，第153卷。施普林格出版社纽约公司，纽约，1969年。[FW20] 马丁·菲齐和STEFAN WENGER。度量空间中的Morrey ε-共形性引理。《美国数学会会刊》，148(10):4285–4298，2020年。[GHR03] S·M·格斯滕、D·F·霍尔特和T·R·赖利。幂零群的等周不等式。《几何与泛函分析》，13(4):795–814，2003年。[GHWX22] 郭昌宇、黄曼子、王壮和徐海清。度量空间之间的p-调和映射。《数学杂志》，302(3):1797–1819，2022年。[GPW90] 卡斯滕·格罗夫、Peter Petersen、V 和吴志扬。通过受控拓扑得到的几何有限性定理。《数学发明》，99(1):205–213，1990年。[Gro81] 米哈伊尔·格罗莫夫。多项式增长群与扩张映射。《高等科学研究所数学出版物》，(53):53–73，1981年。[Gro87] M. Gromov。双曲群。载于《群论论文集》，数学科学研究所出版物第8卷，第75–263页。施普林格出版社，纽约，1987年。[Gro93] M. Gromov。无限群的渐近不变量。载于《几何群论》第2卷（苏塞克斯，1991年），伦敦数学会讲义丛书第182卷，第1–295页。剑桥大学出版社，剑桥，1993年。[Gro07] Misha Gromov。《黎曼与非黎曼空间的度量结构》。Birkhäuser现代经典。Birkhäuser Boston公司，波士顿，马萨诸塞州，英文版，2007年。基于1981年法文原版，附有M. Katz、P·潘苏和S·塞姆斯撰写的附录，由肖恩·迈克尔·贝茨从法文翻译。[GS92] 米哈伊尔·格罗莫夫和理查德·舍恩。映入奇异空间的调和映射与秩一群格的p进超刚性。《高等科学研究所数学出版物》，(76):165–246，1992年。[GW20] 郭昌宇和STEFAN WENGER。局部非紧度量空间中的面积极小圆盘。《通讯分析与几何》，28(1):89–112，2020年。[Haj96] 彼得·哈伊瓦什。任意度量空间上的Sobolev空间。《势分析》，5 415，1996 4 403( ): – 。[HKST01] 尤哈·海诺宁、佩卡·科斯凯拉、Nageswari Shanmugalingam 和杰里米·T·泰森。巴拿赫空间值函数的Sobolev 类与拟共形映射。《数学分析杂志》，85:87–139，2001年。[HKST15] 尤哈·海诺宁、佩卡·科斯凯拉、Nageswari Shanmugalingam 和杰里米·T·泰森。《度量测度空间上的Sobolev空间》，新数学专著第27卷。剑桥大学出版社，剑桥，2015年。基于上梯度的方法。[HS14] 彼得·哈伊瓦什和阿明·希科拉。利普希茨同伦与Sobolev空间中利普希茨映射的稠密性。《芬兰科学院数学年刊》，39(2):593–604，2014年。[Isb64] J·R·伊斯贝尔。关于内射度量空间的六个定理。《瑞士数学评论》，39 76，1964 65: – 。[Iva08] S·V·伊万诺夫。利普希茨度量的体积与面积。《代数与分析》，20(3):74–111，2008年。[Jos94] 于尔根·约斯特。度量空间之间的平衡映射。《变分法与偏微分方程》，2(2):173–204，1994年。[Kar07] M·B·卡尔马诺娃。取值于度量空间的Sobolev 类映射的面积公式与余面积公式。《西伯利亚数学杂志》，48(4):778–788，2007年。[KKL98] 迈克尔·卡波维奇、Bruce Kleiner 和 Bernhard Leeb。拟等距与德拉姆分解。《拓扑学》，37(6):1193–1211，1998年。

[KL95] M. Kapovich与B. Leeb。关于3-流形基本群的渐近锥与拟等距类。Geom. Funct. Anal.，5(3):582–603，1995。[KL97] Bruce Kleiner与Bernhard Leeb。对称空间与欧几里得建筑的拟等距的刚性。Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.，(86):115–197，1997。[KS93] Nicholas J. Korevaar与Richard M. Schoen。度量空间靶的Sobolev 空间与调和映射。Comm. Anal. Geom.，1(3-4):561–659，1993。[KSTT05] Linus Kramer、Saharon Shelah、Katrin Tent与Simon Thomas。有限表示群的渐近锥。Adv. Math.，193(1):142–173，2005。[LS05] Urs Lang与Thilo Schlichenmaier。长田维数、拟对称嵌入与Lipschitz 延拓。Int. Math. Res. Not.，(58):3625–3655，2005。[LV09] John Lott与Cédric Villani。经由最优传输得到的度量测度空间的Ricci 曲率。数学年刊 (2)，169(3):903–991，2009。[LW16] Alexander Lytchak与Stefan Wenger。具有二次等周不等式的空间中调和圆盘的正则性。变分法与偏微分方程计算，55 98，19，2016 4( ):Art. 。[LW17a] Alexander Lytchak与Stefan Wenger。度量空间中的面积极小圆盘。Arch. Ration. Mech. Anal.，223(3):1123–1182，2017。[LW17b] Alexander Lytchak与Stefan Wenger。度量空间中的能量与面积极小者。Adv. Calc. Var.，10(4):407–421，2017。[LW18a] Alexander Lytchak与Stefan Wenger。度量空间中极小圆盘的内蕴结构。Geom. Topol.，22(1):591–644，2018。[LW18b] Alexander Lytchak与Stefan Wenger。上曲率界的等周刻画。Acta Math.，221(1):159–202，2018。[LW20] Alexander Lytchak与Stefan Wenger。度量圆盘的典范参数化。Duke Math. J.，169(4):761–797，2020。[LWY20] Alexander Lytchak、Stefan Wenger与Robert Young。渐近锥中的德恩函数与Hölder延拓。J. Reine Angew. Math.，763:79–109，2020。[MW25] Damaris Meier与Stefan Wenger。度量曲面的拟共形几乎参数化。J. Eur. Math. Soc. (JEMS)，27(12):5133–5154，2025。[NR22] Dimitrios Ntalampekos与Matthew Romney。非长度曲面的多面体逼近与一致化。arXiv预印本，第arXiv:2206.01128页，2022年6月。即将发表于J. Eur. Math. Soc. (JEMS)。[NR23] Dimitrios Ntalampekos与Matthew Romney。度量曲面的多面体逼近及其在一致化中的应用。Duke Math. J.，172(9):1673–1734，2023。[Pan83] Pierre Pansu。幂零流形中球与闭测地线的增长。Ergodic Theory Dynam. Systems，3(3):415–445，1983。[Pet90] Peter Petersen, V。度量空间的有限性定理。《微分几何杂志》，31(2):387–395，1990。[Raj17] Kai Rajala。二维度量曲面的一致化。Invent. Math.，207(3):1301–1375，2017。[Res68] Yu. G. Reshetnyak。曲率不大于K的空间中的非扩张映射。Sibirsk. Mat. Zh.，9:918–927，1968。[Res97] Yu. G. Reshetnyak。取值于度量空间的函数的Sobolev 类。Sibirsk. Mat. Zh.，38(3):657–675，iii–iv，1997。[Sha00] Nageswari Shanmugalingam。Newton 空间：Sobolev 空间向度量测度空间的延拓。Rev. Mat. Iberoamericana，16(2):243–279，2000。[Sta21] Stephan Stadler。CAT(0) 空间中极小曲面的结构。J. Eur. Math. Soc. (JEMS)，23(11):3521–3554，2021。[Stu06a] Karl-Theodor Sturm。论度量测度空间的几何。I。Acta Math.，196(1):65–131，2006。[Stu06b] Karl-Theodor Sturm。论度量测度空间的几何。II。Acta Math.，196(1):133–177，2006。[SW01] R. Schoen与J. Wolfson。拉格朗日曲面间的面积最小化：映射问题。《微分几何杂志》，58(1):1–86，2001。[SW25] Stephan Stadler与Stefan Wenger。等周不等式与上曲率界。Geom. Topol.，29(2):829–862，2025。[vdDW84] L. van den Dries与A. J. Wilkie。关于多项式增长群的Gromov 定理与初等逻辑。J. Algebra，89(2):349–374，1984。[Vod00] Serguei K. Vodop’yanov。Carnot 群上不同拓扑中的 $\mathcal{P}$-可微性及相关论题。载于Trudy po analizu i geometrii，第603–670页。新西伯利亚：Izdatel’stvo Instituta Matematiki Im. S. L. Soboleva SO RAN，2000。[Wen08] Stefan Wenger。Gromov 双曲空间与最佳等周常数。Invent. Math.，171(1):227–255，2008。

[Wen11a] Stefan Wenger。具有有界直径与体积的流形与积分流的紧性。变分法与偏微分方程计算，40(3-4):423–448，2011。[Wen11b] Stefan Wenger。不具有精确多项式Dehn 函数的幂零群。拓扑学杂志，4(1):141–160，2011。[Wen19] Stefan Wenger。具有几乎欧几里得Dehn 函数的空间。数学年刊，373(3-4):1177–1210，2019。[You13] Robert Young。SL$(n;\mathbb{Z})$的Dehn 函数。数学年刊 *(2)*，177(3):969–1027，2013。

数学系，弗里堡大学，博物馆路23号，1700 弗里堡，瑞士。电子邮箱地址: toni.ikonen@unifr.ch

数学系，弗里堡大学，博物馆路23号，1700 弗里堡，瑞士。电子邮箱地址: stefan.wenger@unifr.ch