arXiv:2603.05253v1 [cs.FL] 5 Mar 2026

Zd 上可逆一阶元胞自动机的代数刻画

Baby C. J.[1] 和 Kamalika Bhattacharjee[2]

[1] 印度国家理工学院计算机科学与工程系，蒂鲁吉拉伯利，泰米尔纳德邦 620015，印度[2] 印度工程科学与技术学院信息技术系，希布布尔，西孟加拉邦 711103，印度
{babycj1120, kamalika.it}@gmail.com

摘要。 已有算法可以用二次时间检测有限格和无限格上元胞自动机（CA）的可逆性。但是，我们能否在常数时间内识别出一种对任意格大小 $n \in \mathbb{N}$ 都始终可逆的 d 状态 CA 规则？为解决这一问题，本文研究了一类一维、三邻域、 d 状态有限元胞自动机（CA）的可逆性，这类自动机称为一阶元胞自动机（FDCA），其元胞数（$n \in \mathbb{N}$）任意，并采用零边界条件。在一阶元胞自动机（FDCA）中，局部规则由八个参数定义。为了确保 d 状态 FDCA 的全局转移函数对任意元胞数（$n \in \mathbb{N}$）均可逆，只需验证参数值之间的三个代数条件；这也是充分必要的。根据这些条件，对于任意给定的 d，都可以合成所有可逆 FDCA 规则。同样，给定一条 FDCA 规则，也可以检查这些条件，从而在常数时间内判定其可逆性。

关键词： 可逆元胞自动机 · 一阶元胞自动机 · 可逆性条件 · 代数特征 · 算法。

1 引言

元胞自动机（CA）中的可逆性是指每个构型恰好有一个前驱这一性质。这意味着可逆元胞自动机的构型之间遵循一一对应关系。多年来，人们一直在研究可逆性，它在多个领域都有应用 [1, 2], ，包括模式识别、聚类、伪随机数生成、数据分类、密码学等。

在经典文献中，对元胞自动机可逆性的研究主要针对无限格 [3, 4], ，尽管也有一些研究探讨了有限格 [5–8] 上元胞自动机的可逆性。若元胞自动机的全局转移函数是双射，也就是说既是单射（一对一）又是满射（到上），则认为它是可逆的。在 Amorosso 和 Patt 的经典研究中 [3], ，通过使用.....来判定定义在无限格上的元胞自动机的可逆性

特定算法来检验满射性和单射性。而在 Sutner 的论文 [4], 中，则通过 de Bruijn 图的各种性质来分析同类元胞自动机的可逆性。后续文献探讨了具有特定元胞数（n）的元胞自动机的可逆性，尤其是有限格 [7, 5] 上的情形。其他研究考察了有限格和无限格上元胞自动机可逆性之间的关系，并将可逆性分为三类：可逆、严格不可逆和半可逆 [6]。若规则为 R 的元胞自动机在所有元胞数（$n \in \mathbb{N}$）下，其全局转移函数对所有构型的集合都是双射，则它是 $reversible$。相反，若元胞自动机的全局转移函数在每个元胞数（$n \in \mathbb{N}$）下都不是双射，则它是严格不可逆 。若规则为 R 的元胞自动机在某个特定元胞数（n）下，其全局转移函数对所有构型的集合是双射，则称其为半可逆 。这三类元胞自动机是根据周期边界条件下有限格上的可逆性定义的。考察无限格时，严格不可逆 和半可逆 类别在无限格的语境下均视为不可逆 ，而$reversible$ 元胞自动机规则的类别保持不变。下文中，除非另有明确说明，“可逆元胞自动机”指在所有 $n \in \mathbb{N}$ 下均可逆的元胞自动机。

在所有现有关于元胞自动机可逆性的研究中，都没有一种方法能够在不检验其可逆性的情况下综合出所有可逆规则的集合。即使是用于判定周期配置下元胞自动机可逆性的最佳算法（对所有 $n \in \mathbb{N}$），其复杂度也至少为德布鲁因图节点数的二次方 [4]。然而，对于零边界条件下所有 n 的可逆性，目前还没有开发出这样的算法。此外，也没有一种综合技术能够保证针对任意 d 生成所有可能的可逆元胞自动机。如果只需检查规则本身就能确定元胞自动机规则是否对所有元胞都可逆，那么可逆元胞自动机的分析与应用将会容易得多。然而，对于 d 状态、 m 邻域的元胞自动机，一般而言，这种分析极其困难。因此，我们聚焦于零边界条件下一个由三邻域 d 状态元胞自动机构成的子集，称为一阶元胞自动机（FDCAs） [9] 。对于有限离散元胞自动机，局部规则由 $\mathbb{Z}_d$ 上的八个参数定义。本研究表明，对于任意元胞数（$n \in \mathbb{N}$），有限离散元胞自动机可逆，当且仅当这些参数满足三个特定的代数条件。本文给出了这三个条件，并对其进行了证明和验证（第 3 节）。对于任意 d 状态有限离散元胞自动机，满足这些条件的有效参数列表构成了零边界条件下可逆有限差分细胞自动机规则的集合（第 4 节）。基于这些条件，本文还提出了一种常数时间算法，用于扫描任意给定的 d 状态有限离散元胞自动机规则中的八个参数，并判定其可逆性（第 5 节）。

2 一阶元胞自动机

本文研究零边界条件下的一维三邻域有限元胞自动机，其中每个元胞的状态变化取决于其当前状态以及左右邻居的状态。元胞的编号从 0 到 $n-1$，这样的 n 元胞元胞自动机中的每个元胞使用一个状态集

$S = \{0, 1, 2, \cdots, d-1\}$。每个元胞的下一状态可由局部规则 R： $S^3 \to S$ 确定。构型 c: $\mathscr{L} \to S$ 是任意时刻所有元胞的状态。

定义 1. 一个格大小为 n 、全局转移函数为 $G_n{:}C_n \to C_n$ 的有限元胞自动机，若对于每个 $y \in C_n$，其中 C_n 是所有长度为 n 的构型的集合，恰好存在一个 $x \in C_n$，使得 $G_n(x) = y$，则称其为可逆元胞自动机。也就是说，当且仅当 G_n 是一个双射时，该元胞自动机才是可逆的。否则，对于该 n *[10]*，元胞自动机是不可逆的。

如果一个元胞自动机对每种格大小 $n \in \mathbb{N}$ 都是可逆的，则称其为可逆元胞自动机。已有算法可在零边界条件 [7, 11] 下，判定有限元胞自动机在特定 n 下的可逆性。因此，要判定所有 n 的可逆性，就必须对所有 $n \in \mathbb{N}$ 运行带有此类算法的元胞自动机，这是不可能完成的任务。此外，如前所述，目前没有高效的方法来合成任意 d 状态元胞自动机的所有可逆规则。为此，我们考虑一类具有三邻域、d 状态的元胞自动机子集，称为一阶元胞自动机（FDCAs）。文献 [9], 首次引入了一阶元胞自动机，它能有效表示一类元胞自动机：每个元胞的状态数可以很大，但邻域仅限于三个元胞。形式上，一阶规则定义如下：

定义 2。 若元胞自动机规则 R： $S^3 \to S$ 可以表示为以下形式，则称该规则 R： $S^3 \to S$ 为一阶规则： $R(x, y, z) = c_0xyz + c_1xy + c_2xz + c_3yz + c_4x + c_5y + c_6z + c_7$(模 d)。这里， S 是有限状态集，d 是元胞自动机的状态数，而 x、 y、 z 是三个邻居的状态，其中 x、 y、 $z \in S$。常数为 $c_i \in \mathbb{Z}_d$ *[9, 12]*。

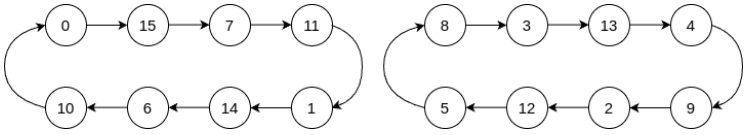


图 1：参数为⟨0、0、0、0、1、1、0、1⟩的4细胞2状态一阶元胞自动机转移图

任何一阶元胞自动机都可以用其局部规则的八个系数表示，即 $\langle c_0$、 c_1、 c_2、 c_3、 c_4、 c_5、 c_6、 $c_7\rangle$。这些系数称为 FDCA 规则的参数。例如，图 1 表示参数为 ⟨0、0、0、0、1、1、0、1⟩的4细胞2状态一阶元胞自动机的转移图。这里，构型 1010 (10) 可由构型 0000 (0) 到达，而构型 1000 (8) 无法由 0000 (0) 到达。然而，每个构型都有唯一的前驱，不存在不可达构型。因此，当 $n = 4$ 时，该 FDCA 是可逆的。

3 一阶元胞自动机的可逆性

本节将介绍一阶元胞自动机的参数要满足哪些条件才能成为可逆元胞自动机。随后，我们将表述与各项条件相对应的

理论。先来看一个状态集为 $\mathbb{Z}_d$ 的 FDCA 规则示例。

例*1* 考虑状态集 $S = \mathbb{Z}_8$ （即 $d = 8$）上的一条有限离散元胞自动机规则，其参数为 $\langle c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\rangle = \langle 2, 4, 0, 6, 3, 3, 2, 1\rangle$。对于每个格大小 $n \in \mathbb{N}$，该规则都是可逆的。现在，我们来考察该规则满足的代数条件。这里，c_5与 d =之间的最大公约数 *gcd(*c_5*,* d*)* =*gcd(3, 8)* = 1，这表明 c_5 与 d互素。此外，系数 $c_7 = 1$属于状态集 $\mathbb{Z}_8$。这里，参数 c_0、c_1、c_2 和 c_3 的值分别为 *2*、*4*、*0* 和 *6*。对于$d = 8$，我们有 *rad(8)* = 2，其中 *rad(*d*)* 表示 d 的不同素因子的乘积，因此对应的集合包含所有偶数。因此，系数 c_0、c_1、c_2 和 c_3 都是 *rad(*d*)* 的倍数。这意味着这些值都属于集合 $\{a \mid a \equiv 0$ *(mod rad(*d*))* $\}$。对于$c_4 = 3$ 和 $c_6 = 2$，乘积 $c_4 \cdot c_6 = 6$ 也是 *rad(*d*)* 的倍数，这意味着系数 c_4 和 c_6 满足条件 $c_4 \cdot c_6 \equiv 0$ *(mod rad(*d*))* 。

如上述示例所示，所有可逆有限差分细胞自动机规则都满足某些代数条件。具体而言，只有其参数满足以下三个条件的规则，才对所有 $n \in \mathbb{N}$可逆。

1. 最大公约数(c_5, d) = 1 其中 $c_5 \neq 0$ 且 $c_7 \in \mathbb{Z}_d$2. $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \{a | \ a \equiv 0$ (mod rad(d)), 其中 rad(d) 是整除 d 的互异素数之积。即 rad(d) = $\prod p\}^{p|d}$
3. $c_4 \cdot c_6 \equiv 0$ (mod rad(d)), 其中 rad(d) 是整除 d 的互异素数之积。

任何不满足这些条件的规则，对于部分或全部元胞数而言都是不可逆规则，这表明它们将属于半可逆 或严格不可逆 类别。我们希望确定可逆规则的性质。以下引理对应于这三个条件：

引理 1。 如果某个 *FDCA*规则对于所有元胞数 $n \in \mathbb{N}$ 都是可逆的，那么最大公约数(c_5, d) = 1，其中 $c_5 \neq 0$ 和 $c_7 \in \mathbb{Z}_d$。

示例 *2* 考虑一个在零边界条件下的 d 状态 *FDCA*。设参数为 $\langle c_0$、c_1、c_2、c_3、c_4、c_5、c_6、$c_7\rangle = \langle 0$、*0*、*0*、*0*、*0*、*3*、*0*、$1\rangle$，则局部规则变为 *R(x, y, z)* $= 3y + 1$ （模 *6*）。取两个不同的构型 *(u, v, w)* =*(0, 0, 2)* 和 *(r, s, t)* =*(0, 0, 4)*。在零边界条件下，下一步构型为：

对于 (u, v, w) =(0, 0, 2):

$$u'_0 = R(0, u, v) = R(0, 0, 0) = 3 \cdot 0 + 1 \equiv 1 \pmod 6,$$
$$u'_1 = R(u, v, w) = R(0, 0, 2) = 3 \cdot 0 + 1 \equiv 1 \pmod 6,$$
$$u'_2 = R(v, w, 0) = R(0, 2, 0) = 3 \cdot 2 + 1 = 7 \equiv 1 \pmod 6,$$

对于 $(r、s、t) = (0、0、4)$:

$$r'_0 = R(0,r,s) = R(0,0,0) = 3\cdot 0+1 \equiv 1 \pmod 6,$$
$$r'_1 = R(r,s,t) = R(0,0,4) = 3\cdot 0+1 \equiv 1 \pmod 6,$$
$$r'_2 = R(s,t,0) = R(0,4,0) = 3\cdot 4+1 = 13 \equiv 1 \pmod 6,$$

因此，这两个不同的输入构型演化为相同的构型：$(0，0，2) \mapsto (1，1，1)$，$(0，0，4) \mapsto (1，1，1)$。因此，该 *FDCA* 是不可逆的。这里 $c_5 = 3$ 且$\gcd(c_5，6) = 3 \neq 1$，这违反了可逆性条件。

这个引理表明，如果违反此条件，那么对于所有 $n \in \mathbb{N}$，该元胞自动机都将严格不可逆。

引理 2。如果某个 *FDCA* 规则对于任意所有 $n \in \mathbb{N}$ 都是可逆的，那么 $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 \equiv 0 \pmod{\mathrm{rad}(d)}$，其中$\mathrm{rad}(d)$ 是整除 d 的互异素数的乘积。

示例 *3* 考虑一个具有 d 个状态、$d = 8$ 的有限离散元胞自动机，在零边界条件下运行。设参数为 $\langle c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\rangle = \langle 0, 1, 0, 0, 5, 1, 2, 0\rangle$，使得 $R(x, y, z) \equiv xy + 5x + y + 2z \pmod 8 \equiv y(x+1) + 5x + 2z \pmod 8$。取 $n = 2$ 的两个不同构型 $(u, v) = (7, 0)$ 和 $(r, s) = (7, 4)$。在零边界条件下，下一步的构型为:

$$R(0,u,v) = R(0,7,0) = 0+0+7+0 = 7 \equiv 7 \pmod 8,$$
$$R(u,v,0) = R(7,0,0) = 0+35+0+0 = 35 \equiv 3 \pmod 8,$$
$$R(0,r,s) = R(0,7,4) = 0+0+7+8 = 15 \equiv 7 \pmod 8,$$
$$R(r,s,0) = R(7,4,0) = 28+35+4+0 = 67 \equiv 3 \pmod 8.$$

因此，$(u, v) \mapsto (7，3)$，$(r, s) \mapsto (7，3)$。两个不同的输入都演化为相同的下一步构型 $(7，3)$。因此，对于这个参数集，$c_1 \not\equiv 0 \pmod{\mathrm{rad}(d)}$。由于 $\mathrm{rad}(8) = 2$ 且 $c_1 = 1$，我们有 $c_1 \not\equiv 0 \pmod 2$，并且该有限离散元胞自动机是不可逆。

引理 3. 若对于任意元胞数 $n \in \mathbb{N}$，*FDCA*规则均可逆，则$c_4 \cdot c_6 \equiv 0 \pmod{\mathrm{rad}(d)}$，其中 $\mathrm{rad}(d)$ 是整除 d 的互异素数的乘积。

示例 4 考虑一个 d 状态的有限离散元胞自动机，在 $d = 12$ 零边界条件下。设参数为 $\langle c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\rangle = \langle 0,0, 0, 0,5, 1, 1, 0\rangle$.考虑两个互异构型 $(u, v) = (6, 3)$ 和 $(v, u) = (3,6)$。下一步的构型为:

$$R(0,u,v) = 5(0)+1(u)+1(v) \equiv u+v \equiv 9 \pmod{12},$$
$$R(u,v,0) = 5(u)+1(v)+0 \equiv 5u+v \equiv 5(6)+3 = 33 \equiv 9 \pmod{12},$$
$$R(0,v,u) = 5(0)+1(v)+1(u) \equiv v+u \equiv 9 \pmod{12},$$
$$R(v,u,0) = 5(v)+1(u)+0 \equiv 5v+u \equiv 5(3)+6 = 21 \equiv 9 \pmod{12}.$$

在这两种情况下，得到的构型相同 $(u, v) \mapsto (9,9)$，$(v, u) \mapsto (9,9)$。因此，两个不同的输入配置会得到相同的下一构型。这里，$c_4 = 5$ 和 $c_6 = 1$。由于 $\mathrm{rad}(12) = 2 \times 3 = 6$ 且 $c_4 \cdot c_6 \not\equiv 0 (\mathrm{mod} \mathrm{rad}(12))$，对于这些参数值，该有限离散元胞自动机是 不可逆 的。

以下定理给出了一阶元胞自动机可逆的充要条件。

定理 1. *d*状态一阶元胞自动机的规则对于任意元胞数($n \in \mathbb{N}$) 均可逆，当且仅当这些规则满足以下三个条件。

1. $GCD(c_5, d) = 1$ 和 $c_7 \in \mathbb{Z}_d$*2.* $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \{a |\ a \equiv 0$ (模 rad(d))，其中 $\mathrm{rad}(d)$ 是整除 d 的互异素数的乘积。也就是说 $\mathrm{rad}(d) = \prod p\}^{p|d}$*3.* $c_4 \cdot c_6 \equiv 0$ (模 rad(d))，其中 $\mathrm{rad}(d)$ 是整除 d 的互异素数的乘积。

表 1：满足不同状态 *d*的可逆性条件的有限离散元胞自动机系数

*d*是素数						*d*是合数					
d	c_0, c_1, c_2, c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	d	c_0, c_1, c_2, c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
2	0	0	1	0,1	0,1	4	0,2	0	1,3	0–3	0–3
		1	1	0	0,1			1	1,3	0,2	0–3
								2	1,3	0–3	0–3
								3	1,3	0,2	0–3
3	0	0	1,2	0-2	0-2	6	0	0	1,5	0–5	0–5
		1	1,2	0	0-2			1	1,5	0	0–5
		2	1,2	0	0-2			2	1,5	0,3	0–5
								3	1,5	0,2,4	0–5
								4	1,5	0,3	0–5
								5	1,5	0	0–5
5	0	0	1–4	0–4	0–4	8	0,2,4,6	0	1,3,5,7	0–7	0–7
		1	1–4	0	0–4			1	1,3,5,7	0,2,4,6	0–7
		2	1–4	0	0–4			2	1,3,5,7	0–7	0–7
		3	1–4	0	0–4			3	1 3 5 7	0,2,4,6	0–7
		4	1–4	0	0–4			4	1,3,5,7	0–7	0–7
								5	1,3,5,7	0,2,4,6	0–7
								6	1,3,5,7	0–7	0–7
								7	1,3,5,7	0,2,4,6	0–7
7	0	0	1–6	0–6	0–6	9	0,3,6	0	1,2,4,5,7,8	0–8	0–8
		1	1–6	0	0–6			1	1,2,4,5,7,8	0,3,6	0–8
		2	1–6	0	0–6			2	1,2,4,5,7,8	0,3,6	0–8
		3	1–6	0	0–6			3	1,2,4,5,7,8	0–8	0–8
		4	1–6	0	0–6			4	1,2,4,5,7,8	0,3,6	0–8
		5	1–6	0	0–6			5	1,2,4,5,7,8	0,3,6	0–8
		6	1–6	0	0–6			6	1,2,4,5,7,8	0–8	0–8
								7	1,2,4,5,7,8	0,3,6	0–8
								8	1,2,4,5,7,8	0,3,6	0–8

4 可逆一阶元胞自动机的综合

本节基于上一节阐述的代数条件，以表格形式表示任意状态（d）下不同元胞数对应的可逆规则。表 1 列出了在 $\mathbb{Z}_d$ 上生成可逆 FDCA规则的有效系数集。要生成一条可逆 FDCA规则，我们可以选择一个状态 d，然后选择任意一行。该行中的条目指定了每个系数 c_0 到 c_7 的允许取值。从这些集合中任意组合取值，都能确保生成的 FDCA规则可逆。

4.1 d— 状态有限离散元胞自动机的可逆规则，其中 d 为素数

当 d 为素数时，定理 1 可简化。这是因为，对于素数 d，不存在因子。因此，系数值 c_0，c_1，c_2，c_3 始终为零，而系数 c_7 可以取 $\mathbb{Z}_d$ 中的任意值。这意味着，当 d 为素数时，所有可逆规则都是线性规则。系数 c_5 与 d 和 $c_4 \cdot c_6 = 0$ 互素。也就是说，如果 c_4 为零，那么 c_6 可以取自 $\mathbb{Z}_d$ 的任意值。然而，如果 c_4 非零，那么 c_6 始终为零。由此得到以下推论。

推论1。 d 状态有限离散元胞自动机的规则（其中 d 是素数）对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 均可逆，当且仅当参数 $c_0 = c_1 = c_2 = c_3$ =0、 $c_4 = 0$ 或 $c_6 = 0$，以及 最大公约数(c_5, d) $= 1$.

4.2 d—状态有限离散元胞自动机的可逆规则，其中 d 为合数

当 FDCA 规则的状态数为合数时， d 可以是形如 $d = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ 的合数，其中 p_i 是 d 的素因子。此时， c_4 与 c_6 之间的关系取决于 d 的因子。具体而言， $c_4 \cdot c_6 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ \mathrm{rad}(d))$，其中 rad($d$) 是整除 d 的互异素数的乘积。在这种情况下，系数 c_0，c_1，c_2，和 c_3 可以是满足条件 c_0，c_1，c_2，$c_3 \in \{a \mid a \equiv 0 (\mathrm{mod}\ \mathrm{rad}(d))\}$ 的某些非零数。因此，对于任意合数 d，某些非线性规则也会对所有 $n \in \mathbb{N}$ 可逆。

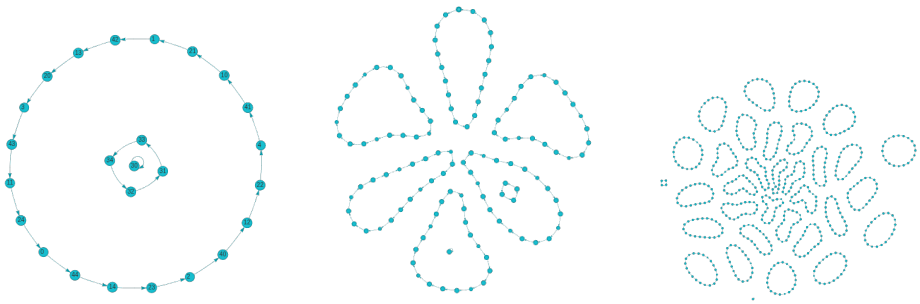
5 一阶元胞自动机的可逆性测试

无需生成规则，而是可以根据系数条件使用常数时间算法直接测试可逆性。通过检查一阶元胞自动机的系数，我们可以确定规则对于任意元胞数 ($n \in N$) 是否可逆。由于只有比较步骤，因此可使用算法 1 完成此操作，其复杂度为 O (8)。

通过图形验证过程，我们可以检查满足条件的FDCA规则是否可逆。下面通过一个示例来检查FDCA规则的可逆性。根据算法1，FDCA规则 $\langle 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 3,\ 0,\ 4 \rangle$ 对于满足 $d = 5$ 的元胞是可逆的，因为它满足所有可逆性条件；而FDCA规则 $\langle 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 3,\ 0,\ 4 \rangle$ 则不可逆（对某些元胞不可逆），因为它违反了状态 $d = 5$ 下系数c_0 的条件。为了进行直观验证，我们绘制转移图

算法1 检查 FDCA规则对任意元胞数是否可逆。

要求： 状态数为 d 的 FDCA规则的系数 $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$
确保： 报告该 FDCA规则是否可逆。
1：rad(d) $\longleftarrow$ 整除 d 的互异素数之积
2：**如果** gcd(c_5, d) $\neq 1$ 且 $c_7 \in \mathbb{Z}_d$ **则**
3:　　报告元胞自动机不可逆并停止。
4: **结束 if**
5: **对于** c_0，c_1，c_2，c_3 **执行**
6:　　**如果** c_i (mod rad(d)) $\neq 0$ **则**
7:　　报告元胞自动机不可逆并停止。
8:　　**结束 if**
9: **结束循环**
10: **如果** ($c_4 \times c_6$) (mod rad(d)) $\neq 0$ **则**
11:　　报告：元胞自动机不可逆，并停止。
12: **结束条件判断**
13: **如果** 满足上述所有条件**则**
14:　　报告：元胞自动机可逆。
15: **结束 if**



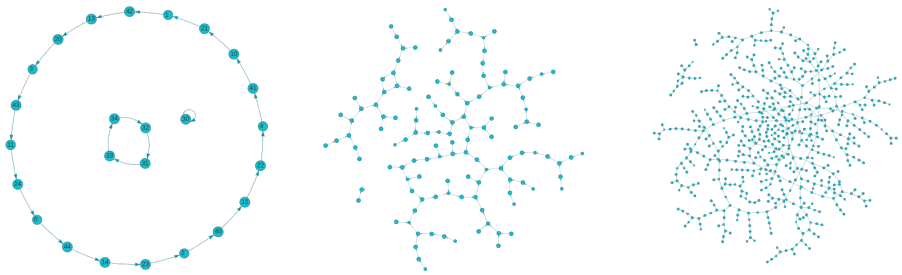
(a) $n = 2$　　(b) $n = 3$　　(c) $n = 4$

图 2：状态 $d = 5$ 的 FDCA规则 $\langle 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 3,\ 0,\ 4\rangle$ 的转移图

针对某些 n，并分析状态转移。如图2所示，当状态为 $d = 5$ 时，FDCA规则 $\langle 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 3,\ 0,\ 4\rangle$ 对于 $n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ 是可逆的。然而，图3所示的FDCA规则 $\langle 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 3,\ 0,\ 4\rangle$ 在 $n = 3,\ 5$ 时不可逆。

6 结论

在本研究中，我们对可逆规则进行了代数刻画，以确定一阶元胞自动机可逆的充要条件。利用这些条件，可以综合出所有在零边界条件下对任意格大小都可逆的 d状态一阶元胞自动机。同样，我们可以使用常数时间算法验证任意FDCA规则的可逆性。未来的研究可通过



(a) $n = 2$ (b) $n = 3$ (c) $n = 4$

图 3：状态 $d = 5$ 下 FDCA 规则 $\langle 2, 0, 0, 0, 2, 3, 0, 4\rangle$ 的转移图

分析违反一个或多个已识别条件的情形，将本研究拓展至 FDCA规则的半可逆性。此外，为任意 d状态元胞自动机寻找此类可逆性条件，也是未来研究的另一个方向。

参考文献

1. P. P. Chaudhuri, D. R. Chowdhury, S. Nandi, S. Chattopadhyay, 《加性元胞自动机：理论与应用》，第1卷，第43卷，John Wiley & Sons，1997年。2. K. Bhattacharjee, N. Naskar, S. Roy, S. Das, 《元胞自动机综述：类型、动力学、非均匀性及应用》，Natural Computing 19 (2020年) 433–461。3. S. Amoroso, Y. N. Patt, 《镶嵌结构上并行映射满射性与单射性的判定程序》，Journal of Computer and System Sciences 6 (5) (1972年) 448–464。4. K. Sutner, 《de Bruijn 图与线性元胞自动机》，Complex Systems 5 (1) (1991年) 19–30。5. K. Bhattacharjee, S. Das, 《d 状态有限元胞自动机的可逆性》，Journal of Cellular Automata 11 (2016年)。6. K. Bhattacharjee, S. Das, 《有限一维元胞自动机：可逆性与半可逆性》，arXiv 预印本 arXiv:1903.06011 (2019年)。7. S. Das, 《超大规模集成电路设计中非线性元胞自动机的理论与应用》，博士论文，博士论文，BE College (2006年)。8. S. Das, B. K. Sikdar, 《一维周期边界可逆元胞自动机的刻画》，Electronic Notes in Theoretical Computer Science 252 (2009年) 205–227。9. K. Bhattacharjee, 《一阶元胞自动机作为伪随机数生成器》，载于：亚洲元胞自动机技术研讨会，Springer，2022年，第123–137页。10. K. Bhattacharjee, 《元胞自动机：可逆性、半可逆性与随机性》，博士论文，IIEST，Shibpur (2019年)。arXiv:1911.03609。11. S. Mukherjee, K. Bhattacharjee, S. Das, 《可逆元胞自动机：一种自然聚类技术》，Journal of Cellular Automata 16 (2021年)。12. K. Bhattacharjee, V. Vicky, 《用于随机性研究的一阶元胞自动机》，Journal of Cellular Automata 17 (2023年)。