arXiv:2603.05274v1 [stat.ME] 5 Mar 2026

基于函数图模型的多通道轮廓协方差监测

Christian Capezza[1], Davide Forcina[1], Antonio Lepore*[1], 以及 Biagio Palumbo[1]

[1]那不勒斯费德里科二世大学工业工程系，特基奥广场 *80* 号，*80125*，那不勒斯，意大利

摘要

大多数统计过程监控方法针对多通道轮廓时只关注均值；当变化涉及协方差结构时，这些方法几乎无法发挥作用。尽管协方差监测至关重要，但它需要估计数量多得多的参数，而这些参数可能以细微且稀疏的方式发生偏移。也就是说，失控（OC）状态可能表现为较小的偏差，且仅影响其中极少数参数。为应对这些困难，我们提出一种基于函数图模型的多通道轮廓协方差（MPC）控制图，用于以可解释的方式表示轮廓间的条件依赖关系。随后，对对应不同稀疏度水平的似然比检验进行非参数组合，以作出总体推断并判断是否可能发生了失控状态。可能发生偏移的剖面间关系会被自然识别出来，且不会增加计算成本。我们通过一项广泛的蒙特卡洛模拟研究，将MPC控制图与最先进的竞争方法进行比较；此外，通过一项关于监控烘烤机多通道温度剖面的案例研究，展示了该方法的实际适用性。

关键词：过程 监控、统计过程控制、非参数组合

1 引言

现代制造系统中传感技术的最新进展，使得人们能够收集大量数据，这些数据可用于统计过程监控（SPM）和故障诊断。这些数据通常随时间或空间变化，最适合

*通讯作者。电子邮件：antonio.lepore@unina.it

用函数变量或轮廓表示（Ramsay 和 Silverman，2005；Kokoszka 和 Reimherr，2017），从而激发了人们对轮廓监控的日益关注（Noorossana 等人，2011）。轮廓监控以及一般的统计过程监控通常分两个阶段实施。第一阶段（第一阶段）主要是通过对从过程中抽取的初始数据集进行回顾性监控，识别一个可视为代表过程受控状态的干净数据集，以下称为第一阶段样本；第二阶段则侧重于对新的观测值进行前瞻性（在线）监控（Qiu，2014），以下称为第二阶段观测。统计过程监控方法的性能通常以平均运行长度（ARL）衡量，即针对特定偏移，发出失控状态信号所需的平均观测值数量。对应于无偏移情形的平均运行长度通常称为受控状态下的 ARL or ARL_0。

在许多实际情形中，产品质量由从多个传感器采集的轮廓来表征；这些传感器称为通道，并同时测量相同或相似的过程变量。多通道轮廓数据在实际应用中十分常见，如 Paynabar 等人（2013）、Capezza 等人（2024）和Li 等人（2018）所示。在这一设定下，文献中已提出若干方法，旨在仅监控过程均值。Paynabar 等人（2016）通过将多维函数主成分分析（主成分分析）纳入变点模型，提出了一种第一阶段监控框架；Ren等人（2019年）将多通道函数主成分分析（多元函数主成分分析）与指数加权移动平均方案相结合，用于第二阶段监控；Wang 等人（2018）提出了一种阈值化多元主成分分析方法，用以在失控状态下选取多通道剖面中的显著特征；Zhang 等人（2018b）针对具有稀疏均值变化的弱相关多通道轮廓，开发了稀疏多通道函数主成分分析。其他相关贡献包括Paynabar 等人（2013）、Grasso 等人（2014）、Zhang 等人（2018a）和Li 等人（2018）。

出乎意料的是，这些方法都没有涉及对过程协方差结构变化的监控，而该结构被假定为随时间保持稳定。然而在实践中，这一点往往无法保证，因为即使没有均值偏移，过程状态也可能严重依赖质量变量的离散程度及其交互作用。为说明这一点，我们来考虑对从

一台烘烤机采集的多通道温度剖面进行监控；第4节也将对此进行探讨。该烘烤机配有五个腔室，每个腔室内设有三个温度传感器，安装在不同位置，以捕捉过程中不同的热行为。每个烘焙周期持续1小时，每个周期都会记录总计15条温度轮廓。众所周知，即使均值保持稳定，最终产品的质量也与剖面间关系密切相关，因为这些关系反映了所研究过程的整体动态特性。这类变化可能表明传热动态发生变化、空气循环不均匀，或加热元件部分失效。在IC条件下，同一腔室内采集的温度轮廓具有很强的相关性，因为它们描述的是相同环境中的同一物理现象，尽管测量位置略有不同，因此构成了多通道轮廓数据的一个有效示例。因此，相关结构因意外减弱或增强而发生变化，可为潜在的底层过程动态特性偏移提供早期预警。

这一原理并不局限于工业过程。例如，在经济和金融市场中，日内价格数据、收益率和期限结构数据以及日内波动率数据也呈现为轮廓（Horv´ath et al., 2014）。监控此类数据中的剖面间关系，对于合理的资产配置至关重要，因为依赖结构的偏移可能会显著影响投资组合管理（Avanesov and Buzun, 2018; Ke-shavarz et al., 2020）。同样，在火山活动监测中（Zhao等人, 2020），部署在多个地点的地震传感器会生成周期性的地震剖面。尽管地震活动的均值水平可能保持不变，但在监控火山动态时，不应忽视剖面间关系的偏移。

在这一框架下，函数图模型正日益受到关注，因为它们为轮廓之间的条件关系提供了一种可解释的表示。在函数图模型中，每个节点表示一个函数变量，每条边表示两个节点之间的条件依赖。也就是说，当且仅当两个节点在给定其他所有节点的条件下仍相互依赖时，它们才相连。在多元高斯过程的假设下，文献中已经提出了多种用于估计函数图模型的方法。Qiao 等人（2019）提出了

函数图形套索，将 Friedman 等（2008）提出的、用于估计多元标量数据图模型的图形套索扩展到了函数情形。作者通过截断的 Karhunen-Lo`eve 展开，将问题的维度降至有限个主成分得分。随后，根据得分精度矩阵中的非零块恢复图的条件依赖关系。Zhao 等（2024）采用一组惩罚函数对函数回归，将 Meinshausen 和 B¨uhlmann（2006）针对标量数据提出的邻域选择方法扩展到了函数情形。Zhu 等（2016）提出了一个用于可分解函数图贝叶斯推断的框架。Zapata 等（2022）针对多元函数型数据的协方差算子提出了新的可分离性概念。

然而，函数图模型的潜力在统计过程监控中受到的关注要少得多。Wu 等（2022）的工作是少数尝试监测异质多通道剖面中剖面间关系的研究之一。作者提出了一种基于异质图模型的建模方法，以同时追踪图网络之间的差异与相似性。随后，构建了 Shewhart 型控制图来监测模型残差，尽管众所周知，此类控制图并非检测微小且持续偏移的最合适方法。Wu 等（2022）方法的另一个缺点是无法识别仅影响一小部分剖面间关系的过程协方差变化；这些关系的数量远多于变量本身，且其幅度和模式事先未知。其思路是，可以利用精度矩阵的稀疏性来提高控制图机制的性能（Yeh 等人，2012）。

沿着这一思路，在多元标量情形下，Li 等（2013）提出了一种基于精度矩阵惩罚似然估计的 Shewhart 型控制图，采用 ℓ_1惩罚；而 Maboudou-Tchao 和 Diawara（2013）则在估计的样本协方差矩阵为奇异矩阵时引入了类似框架。Abdella 等（2019）指出了惩罚似然比方法的不足，并提出了一种基于 Cai 和 Liu（2011）自适应阈值方法的控制图。Yeh 等（2012）将 Li 等（2013）的惩罚似然估计与 Hawkins 和 Maboudou-Tchao（2008）的多元指数加权移动协方差（MEWMC）框架相结合。另见

Maboudou-Tchao 和 Diawara（2013）。Shen 等人（2014）提出同时使用经典的 L_2 范数检验和基于最大范数的检验，以克服惩罚参数选择所带来的局限性。然而，上述方法均无法处理多通道轮廓数据；在监控单个观测时，惩罚参数的选择仍是一个关键问题，因为惩罚似然方法的性能很大程度上取决于这一选择。尽管如此，这些方法主要是为第二阶段监控而设计的，并假设受控状态参数已知，或能够在不确定性可忽略的情况下被准确估计。这一假设往往并不现实，因为参数估计的不确定性会显著影响统计过程监控方法的性能（Jensen等人，2006）。

另一项顺带提及多通道轮廓数据协方差监控的研究来自 Ren等人（2019年）。他们设想基于 Hawkins 和 Maboudou-Tchao（2008）的 MEWMC 扩展其方法，并提出了适当的似然比检验（LRT）统计量。尽管假设得分在 IC条件下遵循特定的协方差结构，但该 LRT 统计量是在单位协方差矩阵的假设下推导的，而且没有提供使用估计参数计算控制限的明确指南。尽管如此，Ren等人（2019年）的方法无法适应多元标量协方差监控文献中常见的各种变化模式。

本文旨在提出一种新的统计过程监控（SPM）方法，称为多通道轮廓协方差（MPC）控制图，用于在线监控多通道轮廓的协方差。该方法能够识别大小不一的小幅持续偏移，从而实现更及时的检测。MPC控制图利用多元函数主成分分析（MFPCA）从轮廓中提取信息丰富的特征，并借助函数图模型的可解释框架，将剖面间关系嵌入精度矩阵中。该方法旨在定位偏移最显著的关系，并使用非参数组合（NPC）（Pesarin 和 Salmaso，2010a年，2010b；Centofanti 等人，2025年）结合多个受约束似然比检验（LRT），以在线适应未知的变化模式。当发出报警信号时，所提框架还可在无需额外计算的情况下提供信号后诊断程序，即判定具体哪些剖面关系发生了偏移。

本文其余部分安排如下。第2节介绍MPC控制图框架。第3节通过蒙特卡洛模拟研究，将所提方法的性能与文献中最先进的方法进行比较。第4节通过一项关于监控烘烤机多通道温度剖面的案例研究，展示所提方法的实际适用性。第5节总结全文。补充材料包含额外的模拟结果、模拟研究中使用的数据生成过程的详细信息，以及第2节中介绍的算法。所有计算和绘图均使用R语言（R核心团队，2024年）完成。

2 方法

所提出的 MPC 控制图分为四个小节进行介绍。第 2.1 节介绍如何使用多元函数主成分分析和函数图模型对轮廓之间的关系进行建模。第 2.2 节描述基于 MPC 统计量以及受约束似然比检验的非参数组合的监控程序，第 2.3 节则介绍信号后诊断策略。第 2.4 节提供实现细节。

2.1 多通道轮廓关系建模

假设有 N 个独立同分布的 p通道轮廓观测值 $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t) \ldots, X_p(t))^T$可供使用，其中 $X_j(t)$、 $j = 1,\ldots, p$的取值属于$L^2(\mathcal{T})$，即定义在紧集$\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$上的平方可积函数所构成的希尔伯特空间。此外，假设多通道轮廓遵循如下模型

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\mu}(t) + \boldsymbol{Y}(t), \quad t \in \mathcal{T},$$

其中， $\boldsymbol{\mu}(t) = (\mu_1(t) \ldots, \mu_p(t))^T$表示 p维均值函数，而 $\boldsymbol{Y}(t) = (Y_1(t) \ldots, Y_p(t))^T$是随机误差，且 $\mathrm{E}(\boldsymbol{Y}(t)) = \boldsymbol{0}$。不失一般性，令 $t \in \mathcal{T} = [0, 1]$，并令均值函数 $\boldsymbol{\mu}(t)$为零。使用多元函数主成分分析（Paynabar 等人，

2016)， $\boldsymbol{Y}(t)$可以用一组正交归一基函数表示如下 s

$$\boldsymbol{Y}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{\xi}_k v_k(t),\quad t\in[0,1], \tag{1}$$

其中， $\boldsymbol{\xi}_k=(\xi_{k1},\ldots,\xi_{kp})^T=\int_0^1\boldsymbol{Y}(t)v_k(t)dt$ 是均值为零的 p 维主成分得分，其协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Omega}_{0k}=\mathrm{E}\left(\boldsymbol{\xi}_k\boldsymbol{\xi}_k^T\right)$。在多通道剖面假设下， $\boldsymbol{Y}(t)$ 的各元素 $Y_j(t)$， $j=1,\ldots,p$ 呈现相似的模式，即它们共享一组特征函数 $v_k(t)$， $k=1,2,\ldots$。为求得这些特征函数，只需考察定义如下的总体协方差函数

$$c(s,t)=\sum_{j=1}^{p}\mathrm{E}\left(Y_j(s)Y_j(t)\right),\quad s,t\in[0,1], \tag{2}$$

并按照第 2.4 节所述进行标准主成分分析。随后可得到相应的特征值 $\lambda_k=\sum_{j=1}^{p}\mathrm{E}\left(\xi_{kj}^2\right)$。显然，公式（2）汇总了各通道的函数型协方差，以衡量向量值随机函数 $\boldsymbol{Y}(\cdot)$ 在 s, $t\in[0,1]$ 上的总体协方差。

在实践中，为了处理 $\boldsymbol{Y}(t)$ 的无限维性，通常假设少数几个特征值和特征函数就足以捕捉多通道剖面样本中的大部分变异。因此， $\boldsymbol{Y}(t)$ 可以通过截断公式（1）中的求和来近似，即

$$\boldsymbol{Y}(t)=\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{\xi}_k v_k(t),\quad t\in[0,1], \tag{3}$$

其中，选择 K 以达到所需的总方差解释比例（FVE）。

此时，引入一个 $pK\times pK$ 置换矩阵 $\boldsymbol{P}$来排列得分 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\eta}$会很方便，其中 $\boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{\xi}_1^T$、.....、$\boldsymbol{\xi}_K^T)^T$的排列方式是：第一组 K 得分对应第一个变量，第二组对应第二个变量，依此类推。例如，若 $p=3$ 且 $K=2$,

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

那么，得分为 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{P\eta}=(\xi_{11}、\ \xi_{21}、\ \xi_{12}、\ \xi_{22}、\ \xi_{13}、\ \xi_{23})^T$，其中 $\boldsymbol{\eta}=(\xi_{11}、\ \xi_{12}、\ \xi_{13}、\ \xi_{21}、\ \xi_{22}、\ \xi_{23})^T$。

在假设 $\boldsymbol{X}(t)$ 是多元高斯过程的一次实现的情况下，得分服从正态分布，因此，对剖面间关系的研究问题可以归结为计算相应的 $pK\times pK$ 协方差矩阵。具体而言，正如 Qiao 等人（2019）所示，随机函数之间的条件依赖结构可由一个图网络表示，其中顶点对应函数变量，边对应条件关系；该结构可以通过估计精度矩阵 $\boldsymbol{\Theta}_0=(\boldsymbol{\Sigma}_0)^{-1}$ 恢复，其中 $\boldsymbol{\Sigma}_0=\boldsymbol{P\Omega}_0\boldsymbol{P}^T$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的协方差矩阵，而 $\boldsymbol{\Omega}_0$ 构造为具有 $p\times p$ 个对角块 $\boldsymbol{\Omega}_{0k}$ 的块对角矩阵（Paynabar 等人，2016）。

具体而言，假设 $X_j(t)$'s，$j=1,\ldots,p$ 属于图 $G=(V,E)$，其节点集为 $V=\{1,\ldots,p\}$，则边集 E 对应于

$$E=\{(j,l):\|\boldsymbol{\Theta}_{0jl}\|_{\mathrm{F}}\neq 0,(j,l)\in V^2,j\neq l\},$$

其中，$\boldsymbol{\Theta}_{0jl}$ 是对应于 $\boldsymbol{\Theta}_0$ 的第（j,l）个子矩阵的 $K\times K$ 矩阵，$\|\cdot\|_F$表示 Frobenius 范数。

给定 $\boldsymbol{X}(t)$的 N 个独立实现 $\boldsymbol{X}_i(t)$，其得分向量为 p维$\boldsymbol{\xi}_{i,k}$,$i=1,\ldots,N$，$k=1,\ldots,K$，通过求解以下带有自适应 Lasso 惩罚的惩罚似然问题，得到 $\boldsymbol{\Theta}_0$的估计值 $\boldsymbol{\Theta}_0$

$$\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_0=\underset{\boldsymbol{\Theta}}{\operatorname{argmax}}\left\{\log|\boldsymbol{\Theta}|-\operatorname{tr}\left(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_0\boldsymbol{\Theta}\right)-\lambda\sum_{j\leq l}\frac{\|\boldsymbol{\Theta}_{jl}\|_{\mathrm{F}}}{\|\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_{0jl}\|_{\mathrm{F}}}\right\},\tag{4}$$

其中，$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_0=\boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_0\boldsymbol{P}^T$，而 $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_0$通过构建块对角矩阵得到，其对角块为 $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{0k}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{\xi}_{i,k}\boldsymbol{\xi}_{i,k}^T\right)$，对应于每个 $k=1,\ldots,K$，并且 λ是一个非负调节参数，将在交叉验证中选取（Wu 等人，2022）。问题（4）可以

通过交替方向乘子法（ADMM）（Boyd 等人，2011）求解，详见补充材料 B。自适应 Lasso 权重涉及一个~非稀疏初始估计量 $\boldsymbol{\Theta}_0$，该估计量由 Van Wieringen 和 Peeters（2016）的岭精度矩阵估计量得到。岭估计量将式（4）中的惩罚项 ℓ_1 替换为形式为 ℓ_2 的惩罚项

$$\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tr}\left[(\boldsymbol{\Theta}-\boldsymbol{T})^T(\boldsymbol{\Theta}-\boldsymbol{T})\right],$$

其中，γ 为通过交叉验证选取的非负调节参数，$\boldsymbol{T}$ 为此处选定的目标矩阵，即零矩阵。Van Wieringen 和 Peeters（2016）给出了该估计量的闭式表达式，并证明了其渐近一致性，因此适合用于构造自适应 Lasso 权重。

本文公式（4）中使用的自适应 Lasso 惩罚不同于 Qiao 等人（2019）提出的惩罚，因为它对精度矩阵的不同块施加了不同程度的收缩。在多元标量情形中，研究已表明，与标准 Lasso 相比，自适应 Lasso 能产生更稀疏的精度矩阵估计。此外，由此得到的估计量是一致且渐近无偏的（Fan 等人，2009）。然而，Lasso 和自适应 Lasso 在有限样本中都会产生有偏估计量。这是一个关键问题，因为受控状态参数估计量中的微小偏差，都可能导致无法检测到沿偏差方向的小幅偏移，类似于有偏统计检验中出现的情况（Qiu 和 Hawkins，2003）。遗憾的是，数值研究表明，仅使用自适应 Lasso 惩罚不足以充分减轻有限样本中的偏差。事实上，当偏移幅度与偏差相当，且方向与偏差方向一致时，也就是说，它会使 $\boldsymbol{\Theta}_0$ 的非对角块趋于零，OC 平均运行长度会超过相应的受控状态平均运行长度。为解决这一局限，我们采用 Jankova 和 van de Geer（2015）提出的去稀疏化精度矩阵估计量，其定义如下：

$$\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_0^{*}=2\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_0-\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_0\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_0\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_0. \tag{5}$$

作者表明，在满足充分稀疏性的条件下，估计量是无偏的（参见 Jankova 和 van de Geer（2015）中的引理 1）；结合自适应 Lasso 惩罚，

我们发现，这有助于减小有限样本估计的偏差。

2.2 监控程序

假设第一阶段样本中有一组函数主成分得分 $\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\eta}_i$，其中 $\boldsymbol{\eta}_i = (\xi_{i,1}, \cdots \xi_{i,K})^T$ 对应于多通道轮廓 $\boldsymbol{X}_i(t)$，$i = 1, \ldots, N$。在多元高斯过程假设下，得分 $\boldsymbol{\xi}_i$ 相互独立且同分布，服从 $N \sim \left(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Theta}_0^{-1}\right)$，其中 $\boldsymbol{\Theta}_0$ 是待估计的受控状态精度矩阵，具体估计方法见第2.1节。设 $\boldsymbol{X}_n(t)$，$n = N+1, N+2, \ldots$ 为时刻 n 在线采集的一组新多通道轮廓。对应的得分 $\boldsymbol{\xi}_n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\eta}_n$（其中 $\boldsymbol{\eta}_n = (\xi_{n,1}, \cdots \xi_{n,K})^T$）通过将 $\boldsymbol{X}_n(t)$ 投影到由特征函数 $v_k(t)$ 张成的空间上获得，具体如下

$$\xi_{n,k} = \int_0^1 \boldsymbol{X}_n(t) v_k(t) dt, \quad k = 1, \ldots, K, \quad n = N+1, N+2, \ldots.$$

令 $\boldsymbol{\Theta}_1$ 表示新收集的得分 $\boldsymbol{\xi}_n$ 的精度矩阵。我们的目标是检验原假设 H_0（IC 过程）与备择假设 H_1（失控状态过程）

$$H_0 : \boldsymbol{\Theta}_1 = \boldsymbol{\Theta}_0, \quad H_1 : \boldsymbol{\Theta}_1 \neq \boldsymbol{\Theta}_0,$$

这对应于检测得分协方差的变化，已知 $\boldsymbol{\Theta}_0 = (\boldsymbol{\Sigma}_0)^{-1}$。为检验上述假设，与 Hawkins 和 Maboudou-Tchao（2008）一样，我们通过 MEWMC 统计量累积 $\boldsymbol{\xi}_{n,\,k}$ 的历史值

$$\boldsymbol{S}_{n,k} = (1-\rho)\, \boldsymbol{S}_{n-1,k} + \rho \boldsymbol{\xi}_{n,k} \boldsymbol{\xi}_{n,k}^T, \quad k = 1, \ldots, K, \quad n = N+1, N+2, \ldots, \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{S}_{0,\,k} = \boldsymbol{\Omega}_{0,\,k}$ 和 $\rho \in (0, 1]$ 为加权参数。然后，通过求解以下约束最大似然问题，得到 $\boldsymbol{\Theta}_1$ 的估计值

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{1s} = \arg\max_{\Theta} \left\{ \log|\boldsymbol{\Theta}| - \operatorname{tr}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{\Theta}) \right\} \\ \text{s.t.} \quad \boldsymbol{\Theta}_{jl} = \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{0,jl}, \quad (j,l) \notin I(s), \end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{S}_n$ 是由分块 $\boldsymbol{S}_{n,\ k}$和 I组成的分块对角矩阵，s是一组s 索引对（$j,\ l$），$j,\ l\ =\ 1$、.....、p。问题（7）使用交替方向乘子法求解（Boyd 等人，2011），具体过程见补充材料 B。估计量 $\boldsymbol{\Theta}_{1s}$ 是 $\boldsymbol{\Theta}_1$的最大似然估计量，其约束条件是：不属于集合 I（s）的元素必须等于对应的 IC 对应项。换言之，只估计 $\boldsymbol{\Theta}_1$ 的 s个元素，并假设所有其他元素相对于 IC 状态均保持不变。理想情况下，如果已知偏移元素 s 的数量及其位置，只需将 I（s）中的元素定义为偏移元素的索引，从而估计 $\boldsymbol{\Theta}_1$，并使这些元素不受约束。随后，可以将广义似然比检验（GLRT）的统计量构造为 H_0 和H_1下似然函数的比值。由于对数似然函数除常数项外等于

$$\ell(\boldsymbol{\Theta}) = \log|\boldsymbol{\Theta}| - \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{\Theta}\right), \tag{8}$$

对数似然比检验统计量可表示为

$$\Lambda_s = \ell(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{1s}) - \ell(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_0^*). \tag{9}$$

显然， Λ_s 的值越大，越支持备择假设。

然而，在实践中，偏移元素的身份以及 s 的值都无法预先获知。因此，需要一种识别程序来确定 $\boldsymbol{\Theta}_1$ 中的哪些分量发生了变化。对于固定的 s，穷举搜索需要估计 $\binom{p(p+1)/2}{s}$ 个候选精度矩阵，并选择使公式（9）中的对数似然比检验统计量达到最大的矩阵。这种组合搜索在在线监控中会变得计算成本过高，尤其是在高维场景下，因此并不实用。

为克服这一问题，受 Cai 和 Liu（2011）的协方差估计程序启发（该程序也用于监控具有批次观测的协方差矩阵；Abdella 等人，2019），我们提出如下方法来估计 $\boldsymbol{\Theta}_1$ 中最显著的偏移元素。˜令 $\boldsymbol{\Theta}_1$ 为 Van Wieringen 和 Peeters （ 2016 ）提出的非稀疏岭估计量，ˆ以 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Theta}_0$ 为目标矩阵得到。惩罚参数的选择将在

˜ ˆ第 2.4 节中讨论。我们通过对称的 $p \times p$ 矩阵 $\boldsymbol{D}$ 来量化 $\boldsymbol{\Theta}_1 - \boldsymbol{\Theta}_0$ 之间的偏差，其元素为对应子矩阵的 Frobenius 范数

$$D_{jl} = \|\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_{1,jl} - \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{0,jl}\|_F \quad j = 1, \ldots, p, \quad l = 1, \ldots j. \tag{10}$$

令 p_{jl}^D 为与 D_{jl} 相关联的 p 值，其中 $j = 1, \ldots p, l = 1 \ldots, j$，定义为 s

$$p_{jl}^D = \Pr\left(D_{jl} \geq \tilde{D}_{jl} | H_0\right), \quad j = 1, \ldots p, \quad l = 1, \ldots, j,$$

˜其中 D_{jl} 是 D_{jl} 的观测值，并将它们的次序统计量记为 y

$$p_{(1)}^D \leq p_{(2)}^D \leq \cdots \leq p_{\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)}^D.$$

保留与最小的 s 个 p 值相关联的索引，即可得到 s 个最显著的偏移元素

$$I(s) = \left\{(j,l) : p_{jl}^D \in \{p_{(1)}^D, \ldots, p_{(s)}^D\}\right\}. \tag{11}$$

ˆ给定所选的 I（s），通过求解方程（7）得到约束估计量 $\boldsymbol{\Theta}_{1s}$，随后将其代入方程（9）以计算 Λ_s。然而，该检验统计量对 s的选择高度敏感，因为它直接控制偏移的稀疏性，这一问题与惩罚似然方法中惩罚参数的选择密切相关（Li 等人，2013；Yeh 等人，2012）。如引言所述，使用具有固定预先设定惩罚参数的惩罚似然方法来监控协方差矩阵，在多元标量文献中受到了严厉批评（Cai 和 Liu，2011；Shen 等人，2014；Abdella 等人，2019年），因为变化模式通常未知，并且可能不同于所选惩罚达到最优时所对应的模式。事实上，较大的惩罚值可能有利于检测以稀疏变化模式为特征的变化，而较小的值在识别具有稠密变化模式的变化时可能更为有效。为了能够适应各类变化，我们建议采用非参数组合（NPC），将与调节参数 s 的多个取值相关联的部分检验加以合并（Pesarin 和 Salmaso，2010a年，b）。非参数组合是一种非参数框架

它通过组合函数汇总来自相依或独立部分检验的 p值，并且最近已被用于监控多元函数型数据中的均值偏移（Centofanti 等人，2025年）。具体而言，原假设 H_0 被分解为一组原假设子假设 H_{0s}，并配有相应的调节参数 $s \in S$，其中 S 是基数为 n_s的一组调优参数，使得当所有 H_{0s} 同时成立时， H_0 为真。更确切地说，相应部分检验的原假设子假设及其对应的备择假设为

$$H_{0s} : \mathbf{\Theta}_{1s} = \mathbf{\Theta}_0, \quad H_{1s} : \mathbf{\Theta}_{1s} \neq \mathbf{\Theta}_0, \quad s \in S,$$

其中， $\mathbf{\Theta}_{1s}$ 是给定 s时待估计的新得分的精度矩阵。将部分检验合并到一个共同尺度上，得到总体监控统计量 Λ ，其中考虑了相应的 p值 p_s，定义如下：

$$p_s = \Pr\left(\Lambda_s \geq \tilde{\Lambda}_s | H_{0s}\right), \quad s \in S,$$

其中， $\tilde{\Lambda}_s$ 表示 Λ_s的观测值。虽然有多种方法可以组合得到总体监控统计量 Λ，我们提出采用***Fisher***综合（Fisher，1970）组合函数。这是一种常用的选择，通过该函数可得：

$$\Lambda = -2 \sum_{s \in S} \log p_s. \tag{12}$$

当 Λ超过控制限 h时，MPC控制图便发出信号。控制限取能够使IC ARL 大于或等于预先指定值ARL_0的最小值。关于 h的选择以及所提方法的实现，详见第 2.4 节。

需要指出的是，所提方法在以下几个主要方面与惩罚似然公式以及 Abdella 等（2019）的自适应程序有显著差异。与后者不同，所提方法专为多通道轮廓数据设计。其次，惩罚似然方法以及 Abdella 等（2019）提出的自适应阈值方案，都高度依赖于

惩罚参数或阈值参数的选择，而这会显著影响其检测性能。尽管 Abdella 等（2019）提出的自适应阈值方案会根据协方差元素的估计变异性调整阈值，但它仍无法避免由用户指定调节参数，以直接控制所估计偏移的稀疏性。此外，该自适应阈值方案的理论依据是协方差估计量的渐近正态性；遗憾的是，这一依据无法用于多通道剖面设置，因为 MEWMC 统计量（6）中的有效样本量受 ρ 限制，且依赖结构由估计精度矩阵的各个块编码，每个块都包含相关分量。

2.3 信号后诊断

所提出的 MPC 控制图方案的一项关键优势是，监控框架中自然嵌入了一套诊断程序，可用于定位可能的变点，并识别导致失控信号的剖面间关系。在许多工业场景中，这套程序对于实际识别并消除可能导致过程处于失控状态的根本原因至关重要。

如第2.2节所述，在每个监控步骤中，都会计算与方程（10）中的偏差 $D_{jl}, j = 1, \ldots p, \ l = 1, \ldots\ldots, \ j$ 相关的 p 值 $p_{jl}^{D}, j = 1, \ \ldots p, \ l = 1, \ldots\ldots, \ j$，以识别偏移最显著的元素。这些 p 值可直接衡量针对每种剖面间关系的反对原假设的证据，并可立即用于诊断，无需额外计算。

为识别导致失控信号的任何剖面间关系，我们建议对触发警报的 p 值 $p_{jl}^{D}, j = 1, \ldots p, l = 1, \ldots, j$ 使用 Benjamini-Hochberg (BH) 程序（Benjamini 和 Hochberg, 1995年），该程序可控制检测到的偏移中的假发现率（错误发现率）。BH 程序解决了同时检验所有成对关系时固有的多重检验问题，同时控制假发现所占的比例。

为识别变点，采用基于 ℓ_2 惩罚项的惩罚似然程序。具体而言，假设所提出的 MPC控制图在时间步

m触发信号。通过对每个候选变点 u处的以下对数似然函数进行考察，可得到变点 τ 的估计量 $\widehat{\tau}$，

$$\begin{aligned}\ell^{cp}(u,m,\boldsymbol{\Theta}_u) =& N_{b,u}\left(\log|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_0^*| - \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_{b,u}\boldsymbol{P}^T\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_0^*\right)\right) + \\ & N_{a,u}\left(\log|\boldsymbol{\Theta}_u| - \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_{a,u}\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{\Theta}_u\right)\right),\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $N_{b,u}$ 和 $N_{a,u}$ 分别为 u 之前和之后的观测值数量。类似地，$\boldsymbol{S}_{b,u}$ 和 $\boldsymbol{S}_{a,u}$ 分别为在 u 之前和~之后收集的得分的样本协方差矩阵，而 $\boldsymbol{\Theta}_u$ 是在 u 之后收集的得分的精度矩阵。$\boldsymbol{\Theta}_u$ 的估计 $\boldsymbol{\Theta}_u$ 可通过使用 Van Wieringen 和 Peeters（2016）^的岭估计量并采用目标矩阵 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Theta}_0$ 得到。因此，变点最终可估计为

$$\widehat{\tau} = \underset{1\le u\le m}{\operatorname{argmax}}\, \ell^{cp}(u,m,\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_u). \tag{14}$$

2.4 实现细节

在第2.1节中，假定 IC 均值函数 $\boldsymbol{\mu}(t)$ 和特征函数 $v_k(t)$ 已知；然而，它们必须根据一组 IC 数据进行估计。在实践中，轮廓观测值 $\boldsymbol{X}_i(t)$、 $i = 1,\ldots,N$ 通常在有限长度区间内的有序密集网格点 t_{ih}、 $h = 1,\ldots,n_i$ 上测量（Ramsay 和 Silverman，2005）。然而，在许多情况下， n_i 是固定的，且 t_{ih} 仅依赖于 h，即 t_h、 $h = 1,\ldots,n$。于是，均值函数 $\boldsymbol{\mu}(t)$ 的估计量 $\widehat{\boldsymbol{\mu}}(t)$ 可通过对每个网格点取其样本版本而轻易得到，并且多元函数主成分分析可通过将传统主成分分析应用于^ $n \times n$ 样本协方差矩阵 $\boldsymbol{C}$（其元素为

$$\widehat{C}_{hl} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{p}\left\{X_{ij}(t_h) - \widehat{\mu}_j(t_h)\right\}\left\{X_{ij}(t_l) - \widehat{\mu}_j(t_l)\right\}, \quad h,l = 1,\ldots n.$$

然后， σ_{0kjq} $\boldsymbol{\Omega}_{0k}$ 的各项估计为

$$\widehat{\sigma}_{0kjq} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{h=1}^{n}\left\{X_{ij}(t_h) - \widehat{\mu}_j(t_h)\right\}\widehat{v}_k(t_h)\sum_{h=1}^{n}\left\{X_{iq}(t_h) - \widehat{\mu}_q(t_h)\right\}\widehat{v}_k(t_h)\right],$$

^其中， $\widehat{v}_k(t_h)$ 是上一步得到的、在 t_h 处评估的 $\boldsymbol{C}$ 的估计特征函数。如果采样网格稀疏或网格点间距不均匀，可以先使用适当的平滑技术对各个剖面数据进行平滑，然后将上述过程应用于等间距网格。

调优参数集合 S 可根据实际中预期发生偏移的剖面间关系数量来选择。具体而言，令 s^* 表示偏移块的真实数量。取值接近 s^* 的 $s \in S$ 往往能增强所提方法的检测能力，而取值与 s^* 相差较大时，如果按方程（12）聚合相应的 p值，性能可能会下降。因此，当先验领域知识或工程专业知识能够确定偏移稀疏度的合理范围时，我们建议在该范围内选择 s 的取值。若缺乏此类知识，一种实用策略是考虑规模适中的候选值网格。在我们的实验中，我们发现，使用大小为 $n_s = 10$、范围从 1 到元素总数的一半的网格，即 $p(p+1)/4$，能够在计算成本与检测性能之间取得良好平衡。

~方程（10）中用于计算 $\boldsymbol{\Theta}_1$ 的 ℓ_2 惩罚参数 γ ，在偏差与方差之间进行权衡，从而影响对可能发生偏移的元素的检测。具体而言，较大的γ 会使 $\boldsymbol{\Theta}_1$ 的元素向对应的 IC 值收缩，从而降低方差但增加偏差；较小的 γ 则会得到收缩程度较低但变异性较大的估计值。最优的 γ 取决于未知的偏移数量、幅度和方向。实际应用中~，可利用 IC 数据估计 B 精度矩阵 $\boldsymbol{\Theta}_b$、$b = 1$、……、 B，并在一系列取值中选取有效的 γ；具体来说，选择当 γ 每单位变化所带来的平均样本外负对数似然改善率降至给定阈值以下时对应的 γ ；例如， 10^{-3}。采用这种方式选择 γ，而不是直接最小化负对数似然，可以通过惩罚有效降低 IC 数据对 $\boldsymbol{\Theta}_1$估计的变异性，同时避免过度收缩，以免导致精度矩阵中的微小偏移无法检测。

Λ_s和 D_{jl}的 IC 分布， $j = 1$，……， p， $l = 1$，……， j，在实践中通常都是未知的，而 p值 p_s和 p_{jl}^D， $j = 1$，……， p， $l = 1$，……， j，难以直接获得。为此，我们建议采用以下估计量（Pesarin 和

Salmaso，2010b年）

$$\widehat{p}_{jl}^{D}=\frac{1+\sum_{i=1}^{n_{IC}} I\left(D_{i,jl}^{IC}\geq D_{jl}\right)}{1+n_{IC}},\quad j=1,\ldots,p,\quad l=1,\ldots,j, \tag{15}$$

and

$$\widehat{p}_{s}=\frac{1+\sum_{i=1}^{n_{IC}} I\left(\Lambda_{i,s}^{IC}\geq \Lambda_{s}\right)}{1+n_{IC}},\quad s\in S, \tag{16}$$

其中，$D_{1}^{IC}{}_{、jl}$、……、$D_{n_{IC}、jl}^{IC}$和$\Lambda_{1\,s}^{IC}$、……、$\Lambda_{n_{IC}、s}^{IC}$分别是通过随机抽取 IC 数据生成长度为 l_{seq}^{I} 的 n_{seq}^{I} 个序列而得到的 D_{jl} 和部分检验值 Λ_{s}。随后，对每个序列中的每个观测值，使用方程（12）结合 p 值 $\widehat{p}_{s}$、 $s\in S$，计算检验统计量 Λ。最后，对每个序列，将首次出现失控状态信号前获得的观测值数量记录为游程长度（RL），并将 RL 值在 n_{seq}^{I} 个序列上的平均值计算为 ARL。选择控制限 h，使其达到预先指定的 ARL_{0}。

为减少计算控制限 h 及方程（15）和（16）中的量时出现的过拟合问题（Kruger 和 Xie，2012），我们将第一阶段样本划分为训练集和调优集。前者用于估计多元函数主成分分析和 IC 精度矩阵 $\widehat{\ }\ \boldsymbol{\Theta}_{0}$，后者则用于计算其余各量。此外，值得注意的是，上述过程会舍弃未能产生失控信号的序列，因此需要设定较高的 l_{seq}^{I}，以尽量减少被舍弃的迭代次数。为解决这一问题，我们采用 Lim 和 Lee（2024）提出的方法，将舍弃的运行保留为 I型删失观测，并用它们估计 ARL。这样，我们可以将 l_{seq}^{I} 设为适中值，同时利用删失序列中的信息，对控制限 h 作出良好估计。

在第二阶段监控中，将当前观测值 $\boldsymbol{X}_{new}(t)$ 投影到多元函数主成分分析模型上，以获得得分 $\boldsymbol{\xi}_{new,\ k}$。然后，使用方程~(6)计算 MEWMC 统计量，并用它来计算 $\boldsymbol{\Theta}_{1}$，进而计算 $\boldsymbol{D}$。之后，通过方程（11）得到 $I(s)$，并通过求解方程（7）来估计 $s\in S$ 对应的 $\boldsymbol{\Theta}_{1s}$。最后，将与 Λ_{s}相关的 p 值结合起来，计算监控统计量 Λ。如果满足 $\Lambda>h$，则触发警报，并执行第2.3节中的信号后诊断程序，以确定变点的位置以及导致失控条件的剖面间关系

。所提方法的详细算法见算法 1。

3 模拟研究

为评估所提出的 MPC控制图在不同情景下检测过程失控状态的性能，本文借鉴 Zhao 等（2024）的做法，按如下方式生成受控多通道剖面观测。令

$$X_{ij}(t) = \boldsymbol{c}_{ij}^T \boldsymbol{\phi}(t), \quad i = 1, \ldots, N, \quad j = 1, \ldots p, \quad t \in [0, 1],$$

为独立同分布的多通道轮廓观测值，其中 $\boldsymbol{c}_{ij} \in \mathbb{R}^M$ 和 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 是包含前 $M = 5$ 个傅里叶基函数的向量。系数向量 $\left(\boldsymbol{c}_{i1}^T, \ldots, \boldsymbol{c}_{ip}^T\right)^T \in \mathbb{R}^{pM}$服从均值为零、协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \boldsymbol{\Theta}_0^{-1}$ 的多元高斯分布。考虑精度矩阵 $\boldsymbol{\Theta}_0$的三种设定。

- **模型 I：** 令 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 为一个三对角矩阵，其中 $\boldsymbol{A}_{k,k} = 1$, $\boldsymbol{A}_{k,k+1} = \boldsymbol{A}_{k+1,k} = 0.6$ 和 $\boldsymbol{A}_{k,k+2} = \boldsymbol{A}_{k+2,k} = 0.3$。精度矩阵 $\boldsymbol{\Theta}_0$ 生成为一个分块带状精度矩阵，其各块为 $\boldsymbol{\Theta}_{0j,j} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\Theta}_{0j,j+1} = \boldsymbol{\Theta}_{0j+1,j} = 0.6\boldsymbol{A}$和 $\boldsymbol{\Theta}_{0j,j+2} = \boldsymbol{\Theta}_{0j+2,j} = 0.3\boldsymbol{A}$。其余所有块均设为零。

- **模型 II：** 精度矩阵 $\boldsymbol{\Theta}_0$ 按如下方式生成为分块对角矩阵。轮廓按每组三个进行排列。对于每一组，相应的 $3M \times 3M$精度矩阵块按照模型 I 的方式生成。非对角块设为零。如果 p 不是三的倍数，则假定其余变量彼此独立，最后的块为$\boldsymbol{\Theta}_{0j,\ j} = \boldsymbol{A}$。

- **模型 III：** $\boldsymbol{\Theta}_0$ 生成为随机分块稀疏精度矩阵，其非对角块$\boldsymbol{\Theta}_{0j,\ l} = \boldsymbol{\Theta}_{0l,\ j} = 0.5\boldsymbol{A}$ 以 0.2 的概率取值，否则为 $\mathbf{0}_M$。对角块设为$\boldsymbol{\Theta}_{0j,\ j} = \delta\boldsymbol{A}$，其中 δ 的选取保证精度矩阵正定，即 $\boldsymbol{\Theta}_0 \succ 0$。

我们固定 $N = 2000$, $p = 10$,20,30，而每个随机函数都在 $[0, 1]$ 中的一个包含 100 个等距时间点的网格上观测。然后，对于每个时间点，观测值

生成如下

$$\tilde{X}_{ij}(t) = \sum_{l=1}^{M} c_{ijl}^{T} \boldsymbol{\phi}_l(t) + \varepsilon_{ij}(t), \quad i = 1, \ldots, N, \quad j = 1, \ldots p, \quad t \in [0, 1],$$

其中 $\varepsilon_{ij}(t) \sim N(0, 0.5_2)$。尽管数据是通过含噪的离散值观测到的，但每个生成观测值的分量均采用样条平滑方法获得，并对二阶导数平方积分施加粗糙度惩罚；该方法使用20个三次B样条，惩罚参数则按照 Ramsay 和 Silverman（2005）常用的方法，通过广义交叉验证准则（GCV）选取。

所提方法与文献中的两种最先进的方法进行了比较，即 Wu 等（2022）的层次图模型（以下简称 HGM）以及 Ren等人（2019）的多通道剖面监控方法（以下简称 REN）。这些方法旨在识别多个轮廓之间关系的偏移。正如引言中所述，Ren等人（2019）仅简要提及了如何监控多通道轮廓数据的协方差。此外，他们没有提供计算控制限的具体指南，并且在得分服从受控状态下的单位协方差矩阵这一假设下推导监控统计量，而这里并非如此。这会导致统计检验产生偏差；正如第2.1节所讨论的，这种检验无法有效检测偏差方向附近的偏移。为克服这些局限，本文通过将得分的受控状态单位协方差替换为正确的受控状态协方差矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_{0k}$，推导监控统计量。随后，按照 Capezza 等人（2025）所述的相同程序计算控制限。

对于每个模型，我们探讨四种场景，每种场景均由不同的变化模式所刻画，以根据 IC 精度矩阵 $\boldsymbol{\Theta}_0$定义失控精度矩阵 $\boldsymbol{\Theta}_1$ 。在第一种场景（场景 I）中，向 IC 图中添加新的边。具体而言，我们随机偏移 $\boldsymbol{\Theta}_0$ 的零非对角块，使得 $\boldsymbol{\Theta}_{0jl} = \mathbf{0}, j \neq l$，变为 $\boldsymbol{\Theta}_{1jl} = \delta' \boldsymbol{A}$，其中$0 \leq \delta' \leq \delta'_{max}$ 对应于特定的严重程度水平（SL），而 δ'_{max} 的取值经过选择，使得 $\boldsymbol{\Theta}_1$ 为正定矩阵且其行列式接近于零。在第二种场景（场景 II）中，按照以下方式移除 IC 图中已有的边。我们随机选择 IC 精度矩阵 $\boldsymbol{\Theta}_0$ 的非零非对角块，使得 $\boldsymbol{\Theta}_{0jl} \neq 0$,

$j \neq l$，变为 $\boldsymbol{\Theta}_{1jl} = (1-\delta'')\boldsymbol{\Theta}_{0jl}$，其中 $0 \leq \delta'' \leq 1$ 对应于特定的 SL。在第三种场景（场景 III）中，通过设置 $\boldsymbol{\Theta}_{1jj} = (1+\delta'')\boldsymbol{\Theta}_{0jj}$来增大 IC 精度矩阵的对角块。这对应于削弱涉及第 j 个变量的关系，并减小其边际方差。最后，在第四种场景（称为场景 IV）中，通过设置 $\boldsymbol{\Theta}_{1jj} = (1-\delta''')\boldsymbol{\Theta}_{0jj}$来减小 IC 精度矩阵的对角块，其中 $0 \leq \delta''' \leq \delta'''_{max}$，且 δ'''_{max} 对应于特定的 SL，同时取值经过选择，使得 $\boldsymbol{\Theta}_1$ 为正定矩阵且其行列式接近于零。这对应于增强涉及第 j个变量的关系，并增大其边际方差。随后，对于每种场景，变化模式分别通过偏移 $n_{el} = 1,3,5,10$ 个 $\boldsymbol{\Theta}_0$ 元素来刻画。

考察了五个递增的严重程度等级 $SL \in \{0,1,2,3,4\}$，每一等级对应于精度矩阵中的某一给定偏移，其中 $SL = 0$ 对应于 IC 过程。对于每个严重程度水平，执行 50 次模拟运行。根据第 2.4 节，在每次运行中，将模拟的 IC 数据随机划分为 500 个和 1500 个观测值，从而分别得到训练集和调优集。函数主成分的个数被选择为使方差解释比例至少达到 95%，而公式（6）中的 MEWMC 参数取为 $\rho = 0.1$，并且 S 按照第 2.4 节选取，其基数为 $n_s = 10$。利用调优集生成长度为 $l^I_{seq} = 200$的 $n^I_{seq} = 200$ 条序列，以估计监控中将使用的未知量，具体如算法 1 所述。在第二阶段，随机生成长度为 $l^{II}_{seq} = 1000$ 的 $n^{II}_{seq} = 100$ 条序列，并以 ARL 作为严重程度水平的函数来评估控制图的性能。当过程为 IC 时，ARL 应尽可能接近 ARL_0，而 ARL_0被设定为等于 100；当过程失控时，则应尽可能小。

模型 I 在 $p = 10$ 和 $p = 30$ 下的仿真结果分别如图 1 和图 2 所示，它们描绘了每种监控方法以及各情景与变化模式组合下，均值 ARL 随严重程度水平的变化。所提MPC控制图在所有情景中均明显优于竞争方法，尤其是对于更稀疏的偏移。HGM表现最差，因为它监控单个观测值，且不累积历史数据。正如预期，REN与所提方法一样会累积历史数据，因而表现优于HGM，但难以维持相当的性能

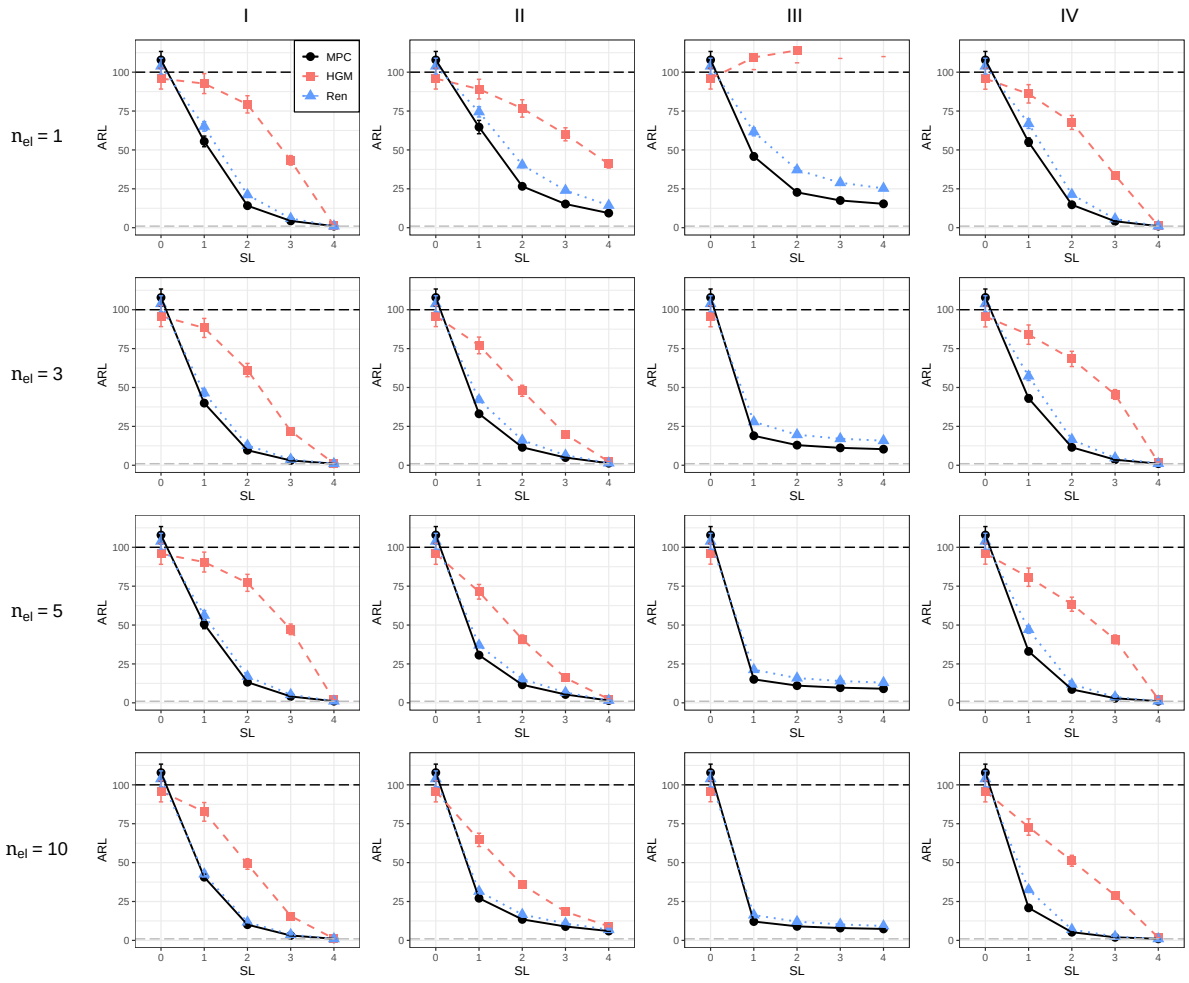


图 1：模型 I 中，MPC、HGM 和 Ren 在第二阶段达到的均值 ARL，随严重程度水平变化的情况；该模型包含 $p = 10$ 个函数变量。

相较于 MPC，因为它没有利用偏移稀疏性。所提方法与 Ren 之间的性能差距往往会随着偏移元素数量 n_{el} 的增加而缩小，但 MPC 仍然是性能最佳的方法。这凸显了 MPC 在不同稀疏度水平下结合部分检验的优势，从而增强了对变化模式的适应性。此外，随着 p 增加，MPC 与其他方法之间的性能差距会扩大，在场景 II 和场景 III 中尤为明显。这表明 MPC 在识别潜在稀疏偏移方面十分有效，尤其是在高维场景中；这类偏移的特点是轮廓之间的关系减弱。需要指出的是，场景 II 和场景 III 比场景 I 和场景 IV 更难检测，尤其是在 $n_{el} = 1$ 时。事实上，尽管移除一条边或显著减弱关系时严重程度等级达到最大，但由此产生的精度矩阵并不像另外两种场景中的精度矩阵那样极端，后者会接近奇异。当过程处于 IC 状态时，所有方法的 ARL 值都至少达到预先设定的 ARL_0 (100)，这表明它们能够在 IC 条件下控制误报。不过，即使在这些情况下，MPC 的 ARL 也会随着偏移严重程度的增加而更加稳定地下降，并且在较宽的偏移幅度范围内保持可接受的检出功效。观察到的性能差异凸显了利用偏移稀疏性来捕捉多通道剖面底层结构的重要性。模型 II 和模型 III 的模拟结果与前文所述类似，详见补充材料。

4 案例研究

通过对烘焙过程进行监控的案例研究，展示了所提出的 MPC控制图在实践中的适用性。数据可在 Kaggle 上公开获取，网址为 `https://www.kaggle.com/datasets/podsyp/production-quality`。烘焙机由五个腔室组成，每个腔室配有三个传感器，分别安装在不同位置以获取温度轮廓。因此，每个烘焙周期（持续一小时）可收集 $p = 15$ 个温度轮廓。数据采集频率为每分钟测量一次温度，因此每个轮廓包含 60 个数据点。温度轮廓的动态特性对最终产品的质量至关重要，其质量通过一个

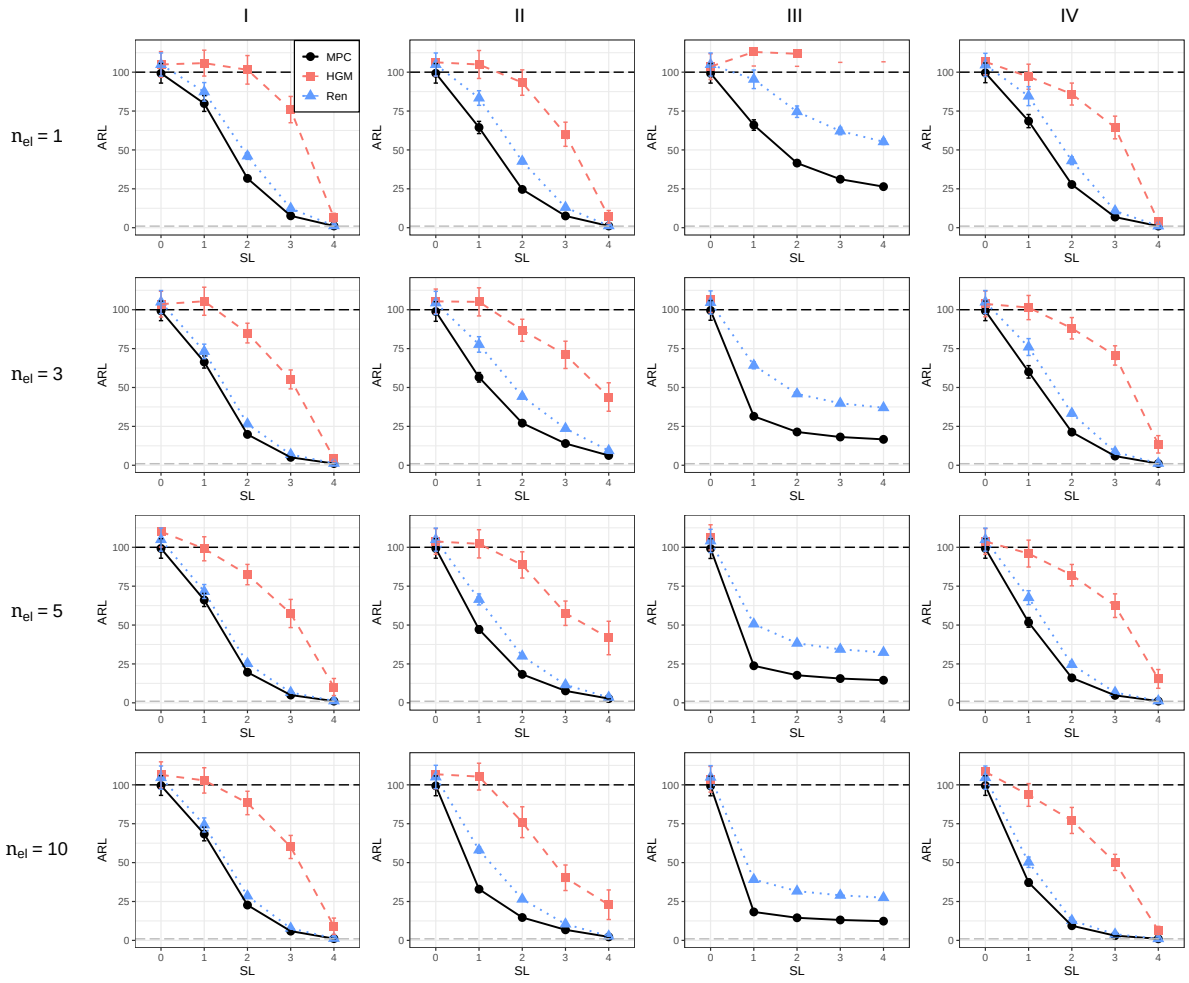


图 2：模型 I 中，MPC、HGM 和 Ren 在第二阶段达到的均值 ARL，以及函数变量 $p = 30$ 随严重程度水平变化的情况。

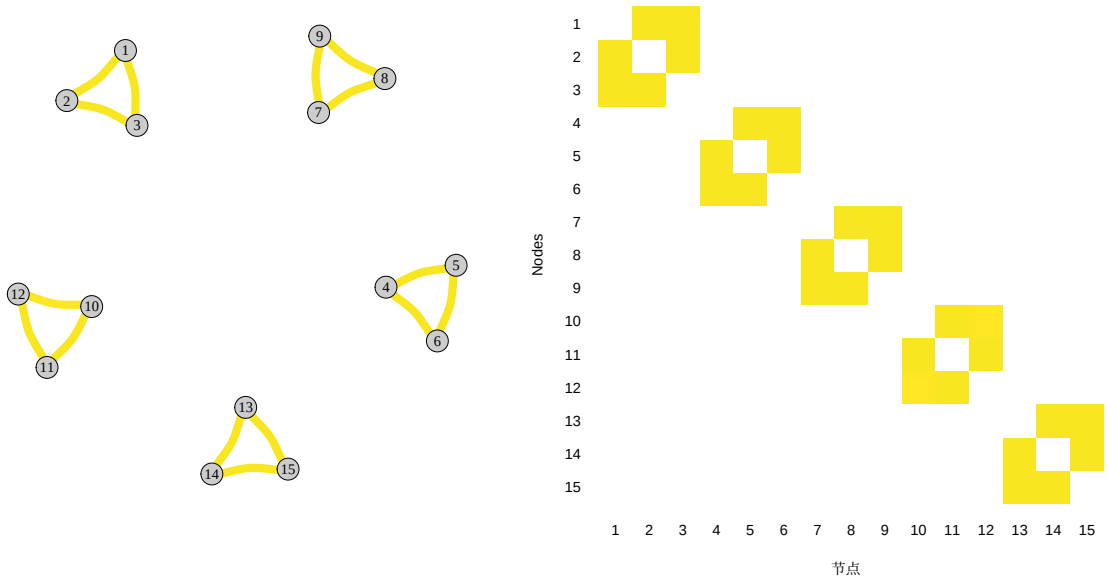


图3：案例研究中估计的 IC图（左）以及估计的受控状态精度矩阵各块的范数（右）。

数据集中的总体得分用于评估产品尺寸和硬度是否符合行业标准。质量评分低于第20百分位数的产品被归类为不合格品（共5752件）。因此，其余21212件产品被视为合格品。Yao等人（2023）也分析了该数据集，并观察到，与质量评分较高的产品相关的轮廓相比，质量评分较低的产品相关轮廓表现出均值函数偏移。该结果是通过采用自适应抽样策略的多轮廓控制图得出的。然而，某些失控轮廓序列不仅显示出均值函数偏移，还揭示了温度轮廓之间依赖结构的变化。如第1节所述，在IC条件下，位于同一腔室内的传感器所测得的温度轮廓预计会表现出相似特征，因为它们在相同环境中捕捉同一物理现象，因此可视为多通道数据。图4展示了一个示例：左图显示每件产品的29条IC小时轮廓序列，各序列由灰色竖向虚线分隔，数据来自15个传感器（通道），记录时间为2016-02-06 18:05:00至2016-02-07 22:05:00；相应地，右图显示了28条失控小时轮廓序列，采集时间为2017-08-27 09:05:00至2017-08-28 13:05:00。与Yao等人（2023）补充材料中报告的观测结果一致，可以清楚地看到传感器的均值偏移，

如图所示，偏移出现在第三腔室的传感器上。然而，位于烘烤机第三腔室内的传感器8与传感器7和9之间的关系也出现了明显变化。

由于重点在于检测过程协方差可能发生的偏移，因此先对数据进行预处理，去除针对每个腔室计算的均值函数。随后，将非缺陷单元的所得轮廓等分为训练集和调优集，并用于第一阶段。如算法 1所述，前一数据集用于估计多元函数主成分分析模型和受控状态精度矩阵，而后一数据集则用于估计第二阶段所需的其余参数。根据第3节，控制限 h的选取满足$ARL_0 = 100$，MEWMC 参数 ρ 设为 0.1， S 的基数选为 $n_s = 10$。图3通过相应的图（左图）以及其元素范数的 $p \times p$ 矩阵（右图），展示了估计得到的受控状态精度矩阵。五个腔室中的传感器清晰可辨，因为相应的温度轮廓呈现出很强的相关性。值得注意的是，不同腔室之间的轮廓条件独立，而同一腔室内的轮廓则不独立。

为了比较 MPC 与第3节所介绍的竞争方法的性能，从 5752 个 OC轮廓中随机抽取了 200 个受控状态序列，并采用各方法对其进行监测。 ARL 计算为每个序列的运行长度的均值。结果列于表1，其中所提出的 MPC 方法明显优于所有竞争方法，并证实了其在模拟研究中取得的优异性能。

最后，为了展示所提方法在信号后诊断方面的有效性，我们将所提MPC控制图应用于图4所示的28个OC轮廓，检测到在 $m = 65$处发生偏移，如红色竖带所示。随后，我们将第2.3节详述的信号后诊断程序应用于截至m的所有观测值，并估计变点位于 $\hat{\tau} = 57$，如绿色竖带所示。使用第2.3节所述的BH程序和 $FDR = 0.01$，识别出OC精度矩阵中的偏移元素，并在图5中呈现；左侧面板展示了相应的图。涉及传感器8以及传感器7和9的关系均被正确识别，表明该腔室可能存在故障，值得进一步

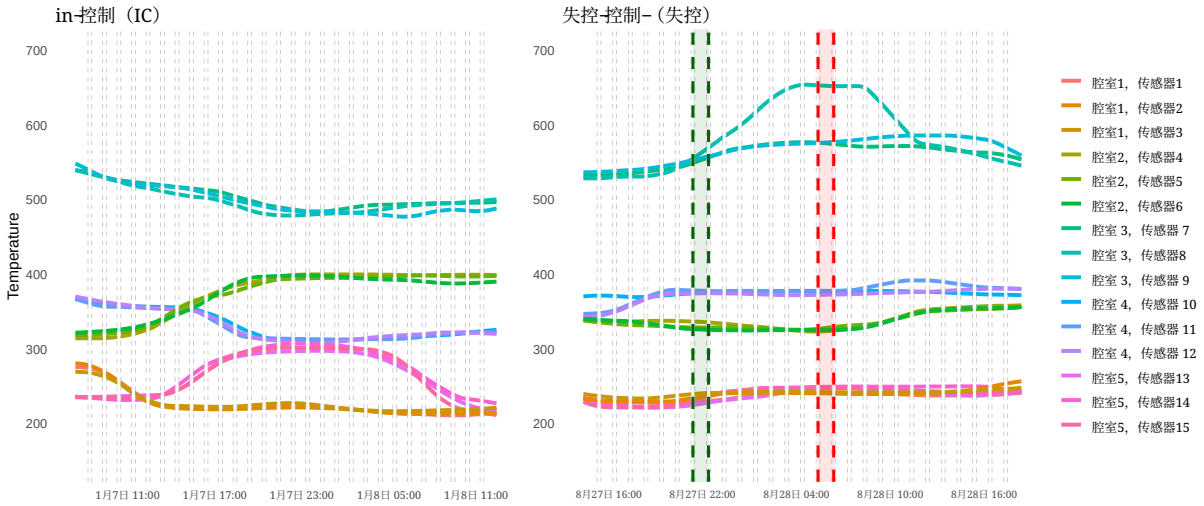


图4：左图为2016-02-06 18:05:00至2016-02-07 22:05:00期间记录的IC温度数据样本。右图为2017-08-27 09:05:00至2017-08-28 13:05:00期间记录的原始OC温度数据，这些数据在案例研究的第二阶段进行监测。灰色虚线将每种产品的每小时剖面分隔开，红色和绿色竖带分别标示所提方法识别出的停止时间和变点。

由领域专家开展调查。如本案例研究所示，所提MPC是一种卓越且易于解释的工具，可用于监控多通道轮廓的协方差并识别可能发生偏移的位置，从而帮助领域专家诊断过程异常信号的根本原因。

5 结论

本文介绍了用于在线监控多通道轮廓中协方差的多通道轮廓协方差（MPC）控制图。所提方法利用函数图模型这一可解释框架，首先在受控状态精度矩阵中编码轮廓之间的条件关系，然后通过识别精度矩阵中的偏移块，并比较不同稀疏度水平下的多个约束似然比检验，实现在线监控。具体而言，首先利用相应的 p-值识别出 s 个最显著的偏移关系；随后采用非参数组合方法，将不同稀疏度水平下的多个检验结合起来，得到总体检验统计量。通过大量蒙特卡罗模拟，结果表明，在所提MPC控制图优于最先进方法的情况下，这种组合方法在广泛的场景中均有效，能够适应

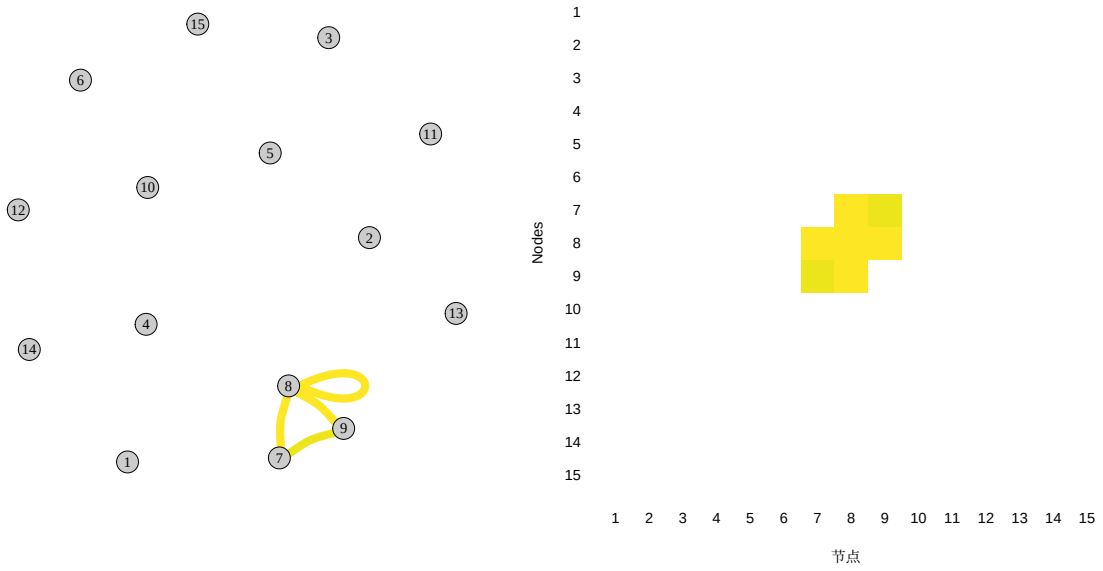


图5：案例研究中采用 BH程序 得到的显著偏移条件关系图（左）和显著 p值 矩阵（右）。

未知的变化模式。此外，所提控制图一旦发出信号，监控程序中内置的变化定位功能便会立即提供信号后的诊断，无需额外计算，从而告知实践人员哪些具体的剖面关系可能发生了偏移。通过一项关于烘焙过程监控的案例研究，展示了所提方法的实际适用性。在该应用中，与竞争方法相比，MPC不仅检测出了过程的失控状态，还准确识别了变点，并对潜在偏移提供了可解释的诊断，具体而言，定位出第三腔室中传感器之间存在问题的关系。

这项工作为未来研究提出了几个有前景的方向。尽管当前方法依赖于多元高斯过程这一假设，以建立函数图模型与主成分得分精度矩阵之间的联系，但将该框架扩展到非参数设置将显著拓宽其适用范围。此外，所提方法假设观测值在时间上相互独立，而在许多实际情境中这一假设可能并不成立，因为连续多通道剖面之间存在时间相关性。将

时间依赖关系纳入监控框架，是一项重要的扩展；当存在此类相关性时，这一扩展有望提高检测性能。最后，当前框架假设过程在受控状态下处于平稳状态，并在未知变点处发生偏移。然而，许多现代工业过程会因渐进磨损或运行条件缓慢变化而表现出非平稳行为。开发一种能够区分自然非平稳性与协方差结构异常偏移的监控程序，将提高该方法在此类情境中的适用性。

补充材料

补充材料提供了额外的实现细节、模拟结果以及用于复现案例研究中所呈现结果的 R代码。

参考文献

Abdella, G. M., Kim, J., Kim, S., Al-Khalifa, K. N., Jeong, M. K., Hamouda, A. M., 和 Elsayed, E. A.（2019）。基于自适应阈值的过程变异监控。质量技术杂志，51(3):242–256。Avanesov, V. 和 Buzun, N.（2018）。高维协方差结构中的变点检测。《电子统计学杂志》，12(2):3254–3294。Benjamini, Y. 和 Hochberg, Y.（1995年）。控制假发现率：一种实用且有效的多重检验方法。英国皇家统计学会学报：*B*辑（方法论），57(1):289–300。Boyd, S., Parikh, N., Chu, E., Peleato, B., Eckstein, J., 等（2011）。通过交替方向乘子法实现分布式优化与统计学习。基础与趋势® 机器学习，3(1):1–122。Cai, T. 和 Liu, W.（2011）。稀疏协方差矩阵估计的自适应阈值。美国统计协会杂志，106(494):672–684。Capezza, C., Capizzi, G., Centofanti, F., Lepore, A., 和 Palumbo, B.（2025年）。自适应多变量函数型EWMA控制图。质量技术杂志，57(1):1–15。Capezza, C., Centofanti, F., Lepore, A., 和 Palumbo, B.（2024）。稳健多变量函数型控制图。《技术计量学》，66(4):531–547。Centofanti, F., Lepore, A., 和 Palumbo, B.（2025年）。自适应多变量函数型控制图。《技术计量学》。

Fan, J., Feng, Y., 和 Wu, Y.（2009）。通过自适应套索和SCAD 惩罚探索网络。应用统计年鉴，3(2):521–541。Fisher, R. A.（1970）。研究工作者的统计方法。载于统计学突破：方法论与分布，第66–70页。施普林格。Friedman, J., Hastie, T., 和 Tibshirani, R.（2008）。利用图形套索进行稀疏逆协方差估计。生物统计学，9(3):432–441。Grasso, M., Colosimo, B. M., 和 Pacella, M.（2014）。通过传感器融合进行轮廓监控：主成分分析方法在多通道数据中的应用。《国际生产研究杂志》，52(20):6110–6135。Hawkins, D. M. 和 Maboudou-Tchao, E. M.（2008）。多元指数加权移动协方差矩阵。《技术计量学》，50(2):155–166。Horv´áth, L., Kokoszka, P., 和 Rice, G.（2014）。函数型时间序列的平稳性检验。《计量经济学杂志》，179(1):66–82。Jankova, J. 和 van de Geer, S.（2015）。高维逆协方差估计的置信区间。《电子统计学杂志》，9(1):1205–1229。Jensen, W. A., Jones-Farmer, L. A., Champ, C. W., 和 Woodall, W. H.（2006）。参数估计对控制图特性的影响：文献综述。质量技术杂志，38(4):349–364。Keshavarz, H., Michaildiis, G., 和 Atchad´e, Y.（2020）。高维高斯图模型中的序贯变点检测。《机器学习研究杂志》，21(82):1–57。Kokoszka, P. 和 Reimherr, M.（2017）。函数型数据分析导论。Chapman and Hall/CRC。Kruger, U. 和 Xie, L.（2012）。复杂多元过程的统计监控：工业过程控制中的应用。约翰·威立父子公司。Li, B., Wang, K., 和 Yeh, A. B.（2013）。通过惩罚似然估计监控协方差矩阵。*IIE*汇刊，45(2):132–146。Li, Y., Zhou, Q., Huang, X., 和 Zeng, L.（2018）。基于重复观测的多元高斯过程模型成对估计：多元轮廓监控中的应用。《技术计量学》，60(1):70–78。Lim, J. 和 Lee, S.（2024）。利用删失运行长度高效估计一般控制图的平均运行长度。《质量工程》，第1–10页。Maboudou-Tchao, E. M. 和 Diawara, N.（2013）。用于监控协方差矩阵的套索控制图。《质量技术与定量管理》，10(1):95–114。Meinshausen, N. 和 B¨uhlmann, P.（2006）。利用套索进行高维图构建与变量选择。《统计学年鉴》，34(3):1436–1462。Noorossana, R., Saghaei, A., 和 Amiri, A.（2011）。轮廓监控的统计分析。约翰·威立父子公司。

Paynabar, K., Jin, J., and Pacella, M. (2013). 使用不相关多线性主成分分析监控和诊断多通道非线性轮廓变异。*IIE*汇刊, 45(11):1235–1247. Paynabar, K., Zou, C., and Qiu, P. (2016). 多元轮廓监控与诊断中的第一阶段分析变点方法。《技术计量学》, 58(2):191–204. Pesarin, F. and Salmaso, L. (2010a). 基于组合的置换检验的有限样本相合性及其在重复测量设计中的应用。非参数统计杂志, 22(5):669–684. Pesarin, F. and Salmaso, L. (2010b). 复杂数据的置换检验：理论、应用与软件. 约翰·威立父子公司. Qiao, X., Guo, S., and James, G. M. (2019). 函数图模型。美国统计协会杂志 , 114(525):211–222. Qiu, P. (2014). 统计过程控制导论. CRC出版社. Qiu, P. and Hawkins, D. (2003). 一种用于检测各个方向偏移的非参数多元累积和程序。英国皇家统计学会杂志 *D*辑：统计学家, 52(2):151–164. R Core Team (2024). *R*：统计计算语言与环境. R统计计算基金会, 维也纳, 奥地利. Ramsay, J. and Silverman, B. (2005). 函数型数据分析. 施普林格. Ren, H., Chen, N., and Wang, Z. (2019). 多通道轮廓观测的第二阶段监控。质量技术杂志, 51(4):338–352. Shen, X., Tsung, F., and Zou, C. (2014). 一种用于监控协方差矩阵的新型多元指数加权移动平均方案。《国际生产研究杂志》, 52(10):2834–2850. Van Wieringen, W. N. and Peeters, C. F. (2016). 基于高维数据的逆协方差矩阵岭估计。计算统计与数据分析, 103:284–303. Wang, Y., Mei, Y., and Paynabar, K. (2018). 用于第一阶段多通道轮廓监控的阈值化多元主成分分析。《技术计量学》, 60(3):360–372. Wu, H., Zhang, C., and Li, Y.-F. (2022). 基于异质图模型的异质多元轮廓监控。《技术计量学》, 64(2):210–223. Yao, J., Xian, X., and Wang, C. (2023). 利用轮廓内与轮廓间相关性监控多轮廓数据的自适应抽样。《技术计量学》, 65(3):375–387. Yeh, A. B., Li, B., and Wang, K. (2012). 通过惩罚似然估计和单个观测监控多元过程变异性。《国际生产研究杂志》, 50(22):6624–6638. Zapata, J., Oh, S.-Y., and Petersen, A. (2022). 多元高斯过程的部分可分性与函数图模型。生物计量学, 109(3):665–681.

Zhang, C., Yan, H., Lee, S., and Shi, J. (2018a). 多轮廓传感器监测与异常检测。质量技术杂志, 50(4):344–362. Zhang, C., Yan, H., Lee, S., and Shi, J. (2018b). 基于稀疏多通道函数主成分分析的弱相关轮廓监控。*IISE*汇刊, 50(10):878–891. Zhao, B., Zhai, P. S., Wang, Y. S., and Kolar, M. (2024). 通过邻域选择方法进行高维函数图模型结构学习。《电子统计学杂志》, 18(1):143–188. Zhao, Y., Li, Y., and Wu, N. (2020). 基于卷积神经网络的分布式声波传感垂直地震剖面数据去噪器。*IEEE*地球科学与遥感汇刊, 60:1–11. Zhu, H., Strawn, N., and Dunson, D. B. (2016). 多元函数型数据的贝叶斯图模型。《机器学习研究杂志》, 17(204):1–27。

算法 1： MPC控制图

输入： IC 数据 $\{\boldsymbol{X}_i(t)\}_{i=1}^{N}$，参数 FVE, ρ, n_s, ARL_0, n_s^I $_{eq}$, l_{seq}^I，错误发现率，第二阶段数据 $\boldsymbol{X}_{new}(t)$

输出： $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_0$, $\widehat{\tau}$，显著偏移元素

第一阶段：

将 $\{\boldsymbol{X}_i(t)\}_{i=1}^{N}$ 拆分为训练集和调优集；

利用训练**集，**

估计受控状态参数 $\widehat{\boldsymbol{\mu}}(t)$、$\widehat{v}_k(t)$，$\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_0$ 和 $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_0^*$；

利用调优**集：**

计算岭惩罚 γ，D_{jl}的经验分布，

$j = {}^{1、\cdots\cdots、p,}\ l = 1、\ldots、j$和 Λ_s；

生成 n^I $_{seq}$ 通过随机抽样生成序列 l^I $_{seq}$ 观测值；

对于 $i \leftarrow 1$ **到** n_{seq}^I **do**

  对于 $n \leftarrow 1$ **到** l_{seq}^I **do**

    使用公式（6）计算 MEWMC 统计量；

    计算非稀疏估计 $\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_1$；

    计算差值 $D_{jl}(i,\ n) = \|$的 p 值 $\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_{1jl} - \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{0jl}\|$；

    获得 $\widehat{\ }$通过对每个 $s \in S$求解方程（7），获得$\boldsymbol{\Theta}_{1s}(i,n)$；

    计算每个 $s \in S$对应的 $\Lambda_s(i,n)$；

    将 $\widehat{p}_s(i,n)$与方程（12）结合，获得检验统计量 $\Lambda(i,n)$；

  选择控制限 h 以达到所需的 ARL_0；

第二阶段：

使用公式（6）计算新观测值的 MEWMC 统计量；

计算非稀疏估计 $\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_1^{new}$；

计算差值 $D_{jl}^{new} = \|$的 p 值 $\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_{1jl}^{new} - \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{0jl}\|$；

获取 $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{1s}^{new}$通过对每个 $s \in S$求解方程（7）；

对每个 $s \in S$计算 Λ_s^{new}；

将各 $\widehat{p}_s^{new}$与方程（12）结合，得到检验统计量 Λ^{new}；

如果 $\Lambda^{new} > h$ **则**

  触发警报并停止监控；

  执行第2.3节的信号后诊断程序，以获得 $\widehat{\tau}$ 和偏移元素的 $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_0$；

	$\widehat{ARL}$	CI
MPC	**12.340**	[10.611, 14.068]
HGM	34.585	[30.156, 39.013]
Ren	17.710	[15.439, 19.980]

表1：案例研究中第二阶段序列的平均运行长度估计值（记作 ARL），以及各监控方法对应的 95% 置信区间（CI）。