arXiv:2603.05300v1 [math.CO] 5 Mar 2026

通过粒子运动研究具有奇偶性限制的安德鲁斯–戈登型恒等式

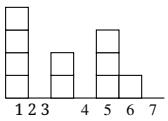
JEHANNE DOUSSE 和 JIHYEUG JANG

摘要。本文中，我们使用 Warnaar 引入并由我们两位作者、Jouhet 和 Konan 加以发展的粒子运动双射，研究具有奇偶性限制的安德鲁斯–戈登型 q 级数和分拆恒等式。这些限制的形式为“偶数（分别为奇数）分拆部分出现偶数次”。我们证明了 q 级数恒等式，其中多重求和等于乘积之和；这些恒等式以类似于 Stanton 恒等式推广安德鲁斯–戈登恒等式的方式，推广了 Andrews 和 Kim–Yee 的恒等式。作为本文结果的推论，我们为 Chern–Li–Stanton–Xue–Yee 最近提出的一个与 Ariki–Koike 代数相关的恒等式给出了简洁的证明。

1. 引言

正整数 n 的一个分拆是一个非递增序列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$，其各项均为正整数且总和为 n。整数 n 称为分拆 λ 的权重，也记作 $|\lambda|$；而 ℓ 称为其长度。每个分拆 λ 也可以用其频率序列 $f = (f_1, f_2, \cdots)$ 表示，其中 f_j 表示分拆 j 在 λ 中出现的次数。其权重为 $|f| = \sum_{k\geq 1} k f_k$。本文中，我们常用频率序列表示分拆，并用 x 轴上的方格列来作图表示。

例 1.1. 分拆 $\lambda = (6,5,5,5,3,3,1,1,1,1)$ 的频率序列为 $f = (4,0,2,0,3,1,0,0,\ldots)$，可用下图表示。



利用 *q-Pochhammer* 符号（参见 [GR04]）

$$(a;q)_n := (a)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k),$$
$$(a_1,\ldots,a_m;q)_n := (a_1;q)_n \cdots (a_m;q)_n,$$

对于 $n \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$，罗杰斯–拉曼努金恒等式 [RR19] 表明，对于 $a \in \{0,1\}$，

$$\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2+(1-a)n}}{(q)_n} = \frac{1}{(q^{2-a}, q^{3+a}; q^5)_\infty}. \tag{1.1}$$

作为组合恒等式，它们断言：对于 $a \in \{0,1\}$ 以及所有 $n \in \mathbb{N}$，n 的分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ 中满足对所有 i 均有 $\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2$、且部分 1 至多出现 a 次者的个数，等于 n 的分拆中分拆部分模 5 同余于 $\pm(2-a)$ 者的个数。等价地，就频数序列而言，它们可写成如下形式：对于 $a \in \{0,1\}$ 以及所有 $n \in \mathbb{N}$，n 的分拆 f 中满足对所有 i 均有 $f_i + f_{i+1} \leq 1$ 且 $f_1 \leq a$ 者的个数，等于 n 的分拆中分拆部分模 5 同余于 $\pm(2-a)$ 者的个数。

罗杰斯–拉曼努金恒等式无疑是最著名的分拆/q-级数恒等式之一，并出现在数学的多个领域：它们揭示了顶点算子代数在表示论中的作用 [LW84、LW85],在代数几何的弧空间理论中自然出现 [BMS13], ，并在数理物理中硬六角模型的精确解中发挥了关键作用 [Bax81], 这里只举几个例子。有关这些恒等式的更多详情，请参阅著作 [Sil18]。

Gordon 对罗杰斯–拉曼努金恒等式进行了组合学推广 [Gor61]。

定理 1.2（*Gordon*恒等式 [*Gor*61]）。对于整数 $k \geq 1$ 和 $0 \leq r \leq k$，满足条件 $\lambda_i - \lambda_{i+k} \geq 2$ 对所有 i均成立，且部分 *1* 至多出现（$k-r$）次的 n 的分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ 的数目，等于将 n 分拆为模 $2k+3$ 下不与 *0*, $\pm(k-r+1)$ 同余的部分所得分拆的数目。

等价地，上述差值条件可以用频数重新表述如下：

(1.2) n 的分拆，其频率序列 $(f_i)_{i\geq 1}$ 满足 $f_i + f_{i+1} \leq k$，对所有 i以及 $f_1 \leq k-r$均成立。

Andrews [和74]随后发现了 q-级数对应式，从而得到了如今所称的安德鲁斯–戈登恒等式。

理论 命题 1.3（安德鲁斯–戈登恒等式 [和74]）。设 $k \geq 1$ 和 $0 \leq r \leq k$ 是两个整数。那么

$$\sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0} \frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2+s_{k-r+1}+\cdots+s_k}}{(q)_{s_1-s_2}\cdots(q)_{s_{k-1}-s_k}(q)_{s_k}} = \frac{(q^{k+1-r}, q^{k+2+r}, q^{2k+3}; q^{2k+3})_\infty}{(q)_\infty}. \tag{1.3}$$

显然，（1.3）的右端是部分不与 $\pm(k-r+1)$ 模 $2k+3$同余的部分分拆的生成函数，但要证明左端是满足差值／频数条件的分拆的生成函数则困难得多。这一事实最初由 Andrews [通过74] 递推关系证明；二十多年后，Warnaar [发现了97]双射证明。请注意，该双射仅表明（1.3）的求和侧与频数条件之间的对应关系；安德鲁斯–戈登恒等式本身的双射证明仍是一个未解决的问题。

Warnaar双射依赖于从满足差条件的最小分拆出发，在频率序列图上进行粒子运动。它应用于通常的频率序列 $f = (f_1, f_2, \cdots)$。在 [DJK24], 中，第一作者、Jouhet 和 Konan 通过允许大小为 0 的部分，推广了 Warnaar 的方法，因此考虑了形式为 $f = (f_0, f_1, \cdots)$ 的频率序列。为了本文的目的，我们需要考虑大小为 0 的部分以及 -1。为求简洁且具有一般性，我们在更为一般的背景下阐述这一理论，将粒子运动应用于允许部分取任意大小的广义频数序列。因此，从现在起，分拆将指由非负整数构成的有限非递增序列，而广义频数序列将指形如 $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 的序列，其中只有有限多个 f_u 不为零。Warnaar 粒子运动的原理及其推广将在第2节中介绍，并附有相关应用。例如，在 [DJJ25], 中，两位作者与 Jouhet 运用他们对粒子运动的推广，证明了 Stanton 的这一推广定理 1.3 的定理。

定理1.4。 [Sta18，定理 3。2] 设 j， $r \geq 0$ 和 $k \geq 1$ 为整数，满足 $j + r \leq k$。则

$$\sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0} \frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2-s_1-\cdots-s_j+s_{k-r+1}+\cdots+s_k}}{(q)_{s_1-s_2}\cdots(q)_{s_{k-1}-s_k}(q)_{s_k}} = \sum_{s=0}^{j} \frac{(q^{k+1-r+j-2s}, q^{k+2+r-j+2s}, q^{2k+3}; q^{2k+3})_\infty}{(q)_\infty}. \tag{1.4}$$

本文旨在运用粒子运动证明与带有奇偶条件的分拆相关的 q-级数恒等式。

对满足频数条件（1.2）且附加奇偶条件的分拆恒等式的研究，始于 Andrews 的工作 [And10], , 此后又有多位学者进行了研究 [Kur10, KY13, KL24, CLS+24]。我们先来介绍 Andrews的结果，并稍作改写，使其适用于广义频数序列的语境。

定义 1。 5. 令 $\mathcal{W}_{k,\ a}$（分别为 $\mathcal{W}_{k,\ a}$）表示满足以下条件的广义频数序列 $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$

- $f_i + f_{i+1} \leq k$ 对所有 $i > 0$,
- $f_i = 0$对所有 $i \leq 0$,
- $f_1 \leq a$,
- f_i 当 i 为偶数（分别为奇数）时为偶数。也就是说，偶数（分别为奇数）分拆部分出现的次数为偶数。

Andrews 使用递推方程证明了以下两个定理。

定理 1.6 (Andrews [与10])。 对于 $k \geq a \geq 0$ 和 $k \equiv a$ (模 2),

$$\sum_{f\in\mathcal{W}_{k,a}} q^{|f|} = \sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0} \frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2+2s_{a+1}+2s_{a+3}+\cdots+2s_{k-1}}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}$$
$$= \frac{(-q;q^2)_\infty (q^{a+1}, q^{2k+3-a}, q^{2k+4}; q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

定理 1.7 (Andrews [和10])。 对于 $k \geq a \geq 1$， k 偶数和 a 奇数,

$$\sum_{f\in\overline{\mathcal{W}}_{k,a}} q^{|f|} = \sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0} \frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2+(s_1-s_2+s_3-\cdots+s_{a-2}-s_{a-1})+(s_a+s_{a+1}+\cdots+s_k)}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}$$
$$= \frac{(-q^2;q^2)_\infty (q^{a+1}, q^{2k+3-a}, q^{2k+4}; q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

接着，利用戈登标记，Kurşungöz [Kur10] 给出了$\mathcal{W}_{k}$的生成函数公式，$a(n)$ 其中$k \not\equiv a \pmod 2$ 且 $\mathcal{W}_{k,\ a}(n)$ 其中 k 为奇数且 a 为偶数时，以和的形式表示。值得注意的是，在这些特定情形中，以及在安德鲁斯–戈登恒等式的和式一侧，戈登标记等价于粒子运动。随后，Kim 和 Yee [KY13] 重新证明了这些和式一侧的结果，并利用递推关系和 q-级数恒等式，给出了乘积（或乘积之和）表达式。他们的结果如下。

定理 1.8 (Kim–Yee [KY13], 由 Kurşungöz 给出的求和侧 [Kur10])。 对于 $k \geq a \geq 0$ 和 $k \not\equiv a$ (模 2),

$$\sum_{f\in\mathcal{W}_{k,a}} q^{|f|} = \sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0} \frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2+2s_{a+1}+2s_{a+3}+\cdots+2s_k}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}$$
$$= \frac{(-q^3;q^2)_\infty (q^{a+2},q^{2k+2-a},q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} + q\cdot\frac{(-q^3;q^2)_\infty (q^{a},q^{2k+4-a},q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

定理 1.9 (Kim–Yee [KY13],由 Kurşungöz 给出的求和侧 [Kur10])。 对于 $k \geq a \geq 0$， k 奇数和 a 偶数 n,

$$\sum_{f\in\overline{\mathcal{W}}_{k,a}} q^{|f|} = \sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0} \frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2+(s_1-s_2+s_3-\cdots+s_{a-1}-s_a)+(s_{a+1}+\cdots+s_k)}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}$$
$$= \frac{(-q^2;q^2)_\infty (q^{a+2},q^{2k+2-a},q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

注意，对于 $k \geq a \geq 1$ 和 a 为奇数，$\overline{\mathcal{W}}_{k,\ a} = \mathcal{W}_{k,\ a-1}$。当 $k \equiv a$ (模 2)时，结论便由定理 1.7 和 1.9立即得出。也就是说，若 a 和 k 为偶数，则

$$\sum_{f\in\overline{\mathcal{W}}_{k,a}} q^{|f|} = \sum_{f\in\overline{\mathcal{W}}_{k,a+1}} q^{|f|} = \sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0} \frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2+(s_1-s_2+s_3-\cdots+s_{a-1}-s_a)+(s_{a+1}+\cdots+s_k)}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}$$
$$= \frac{(-q^2;q^2)_\infty (q^{a+2},q^{2k+2-a},q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

若 a 和 k 为奇数，则

$$\sum_{f\in\overline{\mathcal{W}}_{k,a}} q^{|f|} = \sum_{f\in\overline{\mathcal{W}}_{k,a-1}} q^{|f|} = \sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0} \frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2+(s_1-s_2+s_3-\cdots+s_{a-2}-s_{a-1})+(s_a+\cdots+s_k)}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}$$
$$= \frac{(-q^2;q^2)_\infty (q^{a+1},q^{2k+3-a},q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

因此，以上所有结果都可以统一如下。

定理 1.10 （定理的统一1.6–1.9）。 对于所有整数 $k \geq a \geq 0$,

$$\sum_{f\in\mathcal{W}_{k,a}} q^{|f|} = \sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0} \frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2+2s_{a+1}+2s_{a+3}+\cdots+(1-(-1)^{k+a})s_k}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}} \tag{1.5}$$
$$= \frac{(-q^3;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\left((q^{k-2\lfloor\frac{k-a}{2}\rfloor+1},q^{k+2\lfloor\frac{k-a}{2}\rfloor+3},q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty + q(q^{k-2\lfloor\frac{k-a+1}{2}\rfloor+1},q^{k+2\lfloor\frac{k-a+1}{2}\rfloor+3},q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty\right),$$

and

$$\sum_{f\in\overline{\mathcal{W}}_{k,a}} q^{|f|} = \sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0} \frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2+(s_1-s_2+s_3-\cdots+(-1)^{a+1}s_a)+(s_{a+1}+\cdots+s_k)}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}} \tag{1.6}$$
$$= \frac{(-q^2;q^2)_\infty (q^{2\lfloor\frac{a+2}{2}\rfloor},q^{2k+4-2\lfloor\frac{a+2}{2}\rfloor},q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

本文的主要目的是证明以下恒等式，它们以与 Stanton 的定理 1.10 推广安德鲁斯–戈登恒等式相同的方式推广定理 1.4 。我们通过粒子运动实现这一目标。

定理 1.11。 对于满足 $j+r\leq k$ 的非负整数 j、 r 和 k， 令 $\mathcal{Z}^{o}_{j,\ r,\ k}$ 为所有满足以下条件的频率序列 $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 的集合

- $f_i + f_{i+1} \le k$ 对于所有 $i \ge 0$,
- $f_i = 0$对所有 $i < 0$,
- $f_0 \le j$ 以及 $2f_0 + f_1 \le k - r + j$,
- f_i 当 i 为奇数时为偶数。也就是说，奇数部分出现偶数次。于是

$$\sum_{f\in\mathcal{Z}^o_{j,r,k}} q^{|f|} = \sum_{s_1\ge\cdots\ge s_k\ge 0} \frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2-(s_1+\cdots+s_j)+(s_{j+1}-s_{j+2}+s_{j+3}-\cdots\pm s_{k-r})+(s_{k-r+1}+\cdots+s_k)}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}$$

$$= \sum_{s=0}^{j} \frac{(-q^2;q^2)_\infty (q^{2\lfloor\frac{k+2-r+j-2s}{2}\rfloor}, q^{2k+4-2\lfloor\frac{k+2-r+j-2s}{2}\rfloor}, q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

当 $j = 0$时，定理 1.11 在令 1.6后化为 $r = k - a$。

定理 1.12。 对于非负整数 a、b 和 k，满足 $2a + 2b \le k$，令 $\mathcal{Z}^e_{a,\,b,\,k}$ 为所有频率序列的集合$(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，使得

- $f_i + f_{i+1} \le k$ 对所有 $i \ge 0$,
- $f_i = 0$对所有 $i < 0$,
- $f_0 \le 2a$ 且 $2f_0 + f_1 \le k - 2b + 2a$,
- f_i 为偶数，若 i为偶数。也就是说，偶数部分出现偶数次。

Then

$$\sum_{f\in\mathcal{Z}^e_{a,b,k}} q^{|f|} = \sum_{s_1\ge\cdots\ge s_k\ge 0} \frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2-2(s_2+s_4+\cdots+s_{2a})+2(s_{k-2b+1}+s_{k-2b+3}+\cdots+s_{k-1})}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}$$

$$= \sum_{s=0}^{a} \frac{(-q;q^2)_\infty (q^{k+1+2a-2b-4s}, q^{k+3-2a+2b+4s}, q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

定理 1.13. 对于非负整数 a、b 和 k，且满足 $2a + 2b - 1 \le k$，令 $\mathcal{Z}^e_{a,b,k}$ 为所有频数序列$(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 的集合，使得

- $f_i + f_{i+1} \le k$ 对所有 $i \ge 0$,
- $f_i = 0$对所有 $i < 0$,
- $f_0 \le 2a$ 以及 $2f_0 + f_1 \le k - 2b + 2a + 1$,
- f_i 当且仅当 i为偶数。也就是说，偶数部分出现的次数为偶数。

Then

$$\sum_{f\in\widetilde{\mathcal{Z}}^e_{a,b,k}} q^{|f|} = \sum_{s_1\ge\cdots\ge s_k\ge 0} \frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2-2(s_2+s_4+\cdots+s_{2a})+2(s_{k-2b+2}+s_{k-2b+4}+\cdots+s_k)}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}$$

$$= \frac{(-q^3;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} \sum_{s=0}^{a} \left[(q^{k+3+2a-2b-4s}, q^{k+1-2a+2b+4s}, q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty + q(q^{k+1+2a-2b-4s}, q^{k+3-2a+2b+4s}, q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty \right].$$

当 $a = 0$时，定理 1.12 和1.13分别归结为定理 1.6 和 1.8。由此还可得到其他一些漂亮的推论。事实上，定理 1.11 蕴含了以下内容 g.

推论 1.14。 对于满足 $k \ge 1$且 $0 \le a \le k$的整数 k 和 a，

$$\sum_{s_1\ge\cdots\ge s_k\ge 0} \frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2-(s_1+\cdots+s_a)+(s_{a+1}-s_{a+2}+\cdots+(-1)^{k-a-1}s_k)}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}$$

$$= \sum_{i=0}^{a} \frac{(-q^2;q^2)_\infty (q^{2\lfloor\frac{k-i+2}{2}\rfloor}, q^{2k+4-2\lfloor\frac{k-i+2}{2}\rfloor}, q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

以及定理 1.12 和 1.13 可推出以下结论。

推论 1.15. 对于整数 k 与 a，且满足 $k \ge 1$ 与 $0 \le 2a \le k$,

$$\sum_{s_1\ge\cdots\ge s_k\ge 0} \frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2-2(s_2+s_4+\cdots+s_{2a})}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}} = \sum_{i=0}^{a} \frac{(-q;q^2)_\infty (q^{k+1-2i}, q^{k+3+2i}, q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

近年来，人们对这些带有奇偶性限制的定理的兴趣变得更大，因为人们发现它们与 Ariki–Koike 代数的表示论存在某种联系，该代数由 Ariki–Koike 独立引入 [AK94]以及 Broué 和 Malle [BM93]。Ariki 和 Mathas [AM00] 证明了 Ariki–Koike 代数的单模由 Kleshchev 多重分拆标记，并且它们的生成函数为

$$\frac{(q^{a+1},q^{k+1-a},q^{k+2};q^{k+2})_\infty}{(q)_\infty(q;q^2)_\infty}, \tag{1.7}$$

这恰好是定理 1.9 的乘积侧，其中 q 被替换为 $q^{1/2}$。有趣的是，这个乘积也是仿射 Kac–Moody 李代数 $A_1^{(1)}$ 中层级为 k 的标准模的特征的主特化；Meurman 和 Primc [MP99] 以及第一作者、Hardiman 和 Konan [DHK25]对此进行了研究。

通过研究（1.7）与 Ariki–Koike 代数之间的联系，Chern、Li、Stanton、Xue 和 Yee [CLS+24] 发现并证明了以下 q-级数恒等式，随后 Kanade 和 Lovejoy [KL24] 利用 Bailey 对的理论，以一种更简单的方式重新证明了该恒等式。

定理 1.16 ([KL24，CLS+24])。设 $k\geq 1$ 且 $0\leq a\leq k-1$。则

$$\begin{aligned}\frac{(q^{a+1},q^{k+1-a},q^{k+2};q^{k+2})_\infty}{(q)_\infty(q;q^2)_\infty}&=\sum_{n_k,\dots,n_1\geq 0}\frac{q^{\binom{n_k+1}{2}+\cdots+\binom{n_1+1}{2}}}{(q)_{n_k}}\prod_{i=1}^{k-1}\begin{bmatrix}n_{i+1}+\delta_{a,i}\\ n_i\end{bmatrix}_q\\&=\sum_{\substack{N_k\geq N_{k-1}\geq\cdots\geq N_{a+1}\\ N_{a+1}+1\geq N_a\geq\cdots\geq N_2\geq 0}}\frac{q^{\sum_{i=2}^k\binom{N_i+1}{2}}(-q;q)_{N_{2+\delta_{a+1,2}}}\left(1-q^{N_{a+1}+1}\right)}{\left(1-q^{N_{a+1}-N_a+1}\right)\prod_{i=2}^k(q;q)_{N_i-N_{i-1}}},\end{aligned} \tag{1.8}$$

其中 $N_1=0$和 $N_{k+1}=\infty$。

这里我们使用了 q二项式系数，其对所有 $0\leq j\leq n$ 定义为

$$\begin{bmatrix}n\\ j\end{bmatrix}_q:=\frac{(q)_n}{(q)_j(q)_{n-j}}.$$

粒子运　动为定理1.16提供了一个更简单的证明，因为它可直接由定理1.1推出　　1.

事实上，令 $s_i=n_{k+1-i}$当 $i\in\{1,\dots,a\}$且 $s_i=n_{k+1-i}+1$当 $i\in\{a+1,\dots,k\}$时，方程（1.8）可改写为

$$\sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0}\frac{q^{(s_1^2+\cdots+s_k^2-s_1-\cdots-s_{k-a}+s_{k-a+1}+\cdots+s_k)/2}(1-q^{s_{k-a}})}{(q)_{s_1-s_2}\cdots(q)_{s_{k-1}-s_k}(q)_{s_k}}=\frac{\left(q^{a+1},q^{k+1-a},q^{k+2};q^{k+2}\right)_\infty}{(q;q)_\infty\,(q;q^2)_\infty}. \tag{1.9}$$

定义

$$\mathrm{AK}_{a,k}(q):=\sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0}\frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2-s_1-\cdots-s_{k-a}+s_{k-a+1}+\cdots+s_k}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}.$$

令 $j=k-a$ 和 $r=a$ 在定理 1.11 中取值，可得如下结果。

推论 1.17。

$$\mathrm{AK}_{a,k}(q)=\sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0}\frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2-s_1-\cdots-s_{k-a}+s_{k-a+1}+\cdots+s_k}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}=\sum_{i=a}^k\frac{(q^{2i+2},q^{2k+2-2i},q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty(q^2;q^4)_\infty}.$$

定理 1.16 （形式为（1.9））随后可通过在定理 1.17 中取差，并将 q 替换为 $q^{1/2}$，直接得到。

注记 1.18。这使人联想到 [ADJM23] 中的一种证明策略，其中恒等式

$$\sum_{s_1\geq\cdots\geq s_{r-1}\geq 0}\frac{q^{s_1^2+\cdots+s_{r-1}^2-s_1-\cdots-s_i}(1-q^{s_i})}{(q)_{s_1-s_2}\cdots(q)_{s_{r-2}-s_{r-1}}(q)_{s_{r-1}}}=\frac{(q^{r-i},q^{r+i+1},q^{2r+1};q^{2r+1})_\infty}{(q)_\infty},$$

对所有整数 $r>0$ 和 $0\leq i\leq r-1$均成立，这是通过将 i 和 $i-1$ 这两种情形相减，证明了 Bressoud 恒等式 [Bre80，（3.3）]:

$$\sum_{s_1\geq\cdots\geq s_{r-1}\geq 0}\frac{q^{s_1^2+\cdots+s_{r-1}^2-s_1-\cdots-s_i}}{(q)_{s_1-s_2}\cdots(q)_{s_{r-2}-s_{r-1}}(q)_{s_{r-1}}}=\sum_{k=0}^i\frac{(q^{r-i+k},q^{r+i-k+1},q^{2r+1};q^{2r+1})_\infty}{(q)_\infty}.$$

本文安排如下。在第2节中，我们介绍粒子运动并证明其若干性质，其中包括一些与奇偶性相关的性质。在第3、4 和5节中，我们运用粒子运动和一些枚举技巧，分别证明定理1.11、1.12 和1.13，以及相应的推论。最后，我们提出一些尚待解决的问题。

2. 粒子运动及其性质

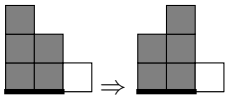
我们描述适用于广义框架序列背景的 Warnaar 的粒子运动原理，遵循 [DJJ25]的表述。

设 $f=(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 为广义频数序列，且 u 为一个指标，使得令 $h:=f_u+f_{u+1}$，

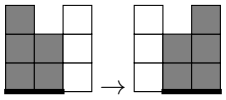
$$f_v+f_{v+1}\le h \text{ for all } v\ge u.$$

在指标 u 处实施的过程取决于 $f_{u+1}+f_{u+2}<h$ 还是 $f_{u+1}+f_{u+2}=h$:

(1) 若 $f_{u+1}+f_{u+2}<h$，然后变换$(f_u,\ f_{u+1})$ 为$(f_u-1,\ f_{u+1}+1)$，保持 u 不变（粒子运动）。



(2) 若 $f_{u+1}+f_{u+2}=h$，则保持$(f_u,\ f_{u+1})$ 不变，但将 u 变为 $u+1$ (焦点移动)。



令 $\mathrm{pm}_u^{(m)}(f)$ 表示从索引 u 开始应用 m 次粒子运动（不计焦点移动）后，由 (f_u,f_{u+1}) 得到的频率序列。此外，若 $\mathrm{pm}_u^{(m)}(f)=(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$且最终焦点位于数对 (f_v,f_{v+1}) 上，则称数对 (f_u,f_{u+1}) 移至 (f_v,f_{v+1})。

注意，根据构造，$(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}=\mathrm{pm}_u^{(m)}(f)$ 对所有 $i\ge u$ 都满足 $f_i+f_{i+1}\le h$。每次粒子运动都会使分拆的权重增加 1（因为它移除一个部分 u 并添加一个部分 $u+1$），而焦点移动不改变分拆。两者都不改变分拆的长度。

例如，若 $f=(\dots,0,f_1=4,f_2=0,2,1,3,1,0,\dots)$，则 $\mathrm{pm}_1^{(5)}(f)=(\dots,0,\overline{f}_1=2,1,3,1,1,3,0,\dots)$，且数对 (f_1,f_2) 移至 $(f_5,\overline{f_6})$。这一过程如图 1 所示。

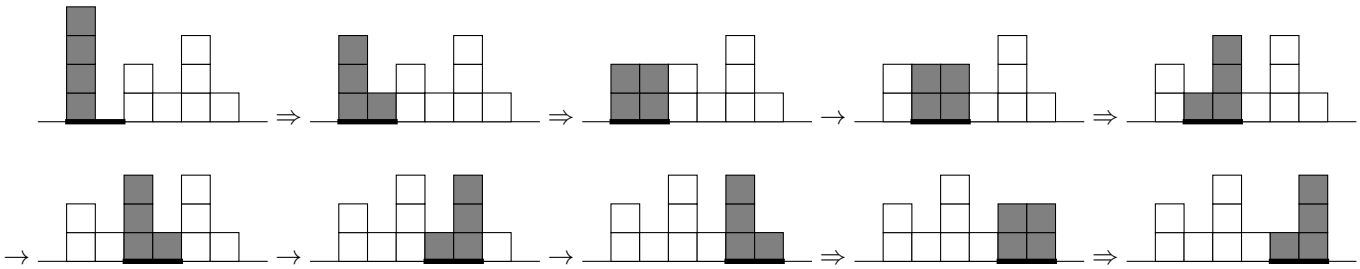


图 1。从频率序列 $f=(\dots,0,f_1=4,f_2=0,2,1,3,1,0,\dots)$ 的索引 1 开始应用 5 次粒子运动的示意图。符号 $\Rightarrow$ 表示一次粒子运动，$\to$ 表示一次焦点移动。

为得到式（1.3）的左边，Warnaar 的思路是从一个满足式（1.2）且权重为$s_1^2+\cdots+s_k^2+s_{k-r+1}+\cdots+s_k$ 的最小分拆出发，从而生成式（1.3）的分子。接着注意到，$(q)_{s_1-s_2}\cdots(q)_{s_{k-1}-s_k}(q)_{s_k}$ 生成k个分拆的有序组 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(k)})$，其中对于所有 i，$\lambda^{(i)}$ 都具有 s_i-s_{i+1} 非负 部分（令 $s_{k+1}:=0$ 后），而 $\boldsymbol{\lambda}$ 的部分通过粒子运动插入最小分拆中。更准确地说，Warnaar 的结果等价于以下结论。

定理 2.1 (Warnaar [War97]，(重新表述）。 对于整数 $k\ge1$ 和 $0\le r\le k$，令

$$\mathcal{O}_{r,k}:=\{(\boldsymbol{\lambda},\tilde{\mathrm{fs}}_{r,k}(\boldsymbol{\lambda})):\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(k)}) \textit{ is a } k\textit{-tuple of partitions into non-negative parts}\},$$

其中

$$\tilde{\mathrm{fs}}_{r,k}(\boldsymbol{\lambda}) := (\dots, 0, 0, \underbrace{f_1 = k-r, f_2 = r, \dots, k-r, r}_{s_k \text{ pairs}}, \dots,$$
$$\underbrace{\min(k-r,i), \max(0, i-k+r), \dots, \min(k-r,i), \max(0,i-k+r)}_{s_i - s_{i+1} \text{ pairs}}, \dots, \underbrace{1,0,\dots,1,0}_{s_1 - s_2 \text{ pairs}}, 0, 0, \dots),$$

且对于所有 i, $\lambda^{(i)}$ 的长度均为 $s_i - s_{i+1}$ （令 $s_{k+1} = 0$之后）。

Let

$$\mathcal{B}_{r,k} := \{(f_i)_{i\in\mathbb{Z}} : f_i + f_{i+1} \le k \text{ for all } i,\ f_1 \le k-r, \text{ and } f_i = 0 \text{ for all } i \le 0\}.$$

定义

$$\tilde{\Lambda}(\boldsymbol{\lambda}, \tilde{\mathrm{fs}}_{r,k}(\boldsymbol{\lambda})) = \left(\mathsf{pm}_1^{(\lambda_0)} \circ \mathsf{pm}_3^{(\lambda_1)} \circ \cdots \circ \mathsf{pm}_{2s_1-3}^{(\lambda_{s_1-2})} \circ \mathsf{pm}_{2s_1-1}^{(\lambda_{s_1-1})}\right)\left(\tilde{\mathrm{fs}}_{r,k}(\boldsymbol{\lambda})\right),$$

其中我们将.....重新命名为

$$(\lambda_{s_1-1}, \dots, \lambda_1, \lambda_0) := (\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_{s_1-s_2}^{(1)}, \dots, \lambda_1^{(k-1)}, \dots, \lambda_{s_{k-1}-s_k}^{(k-1)}, \lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_{s_k}^{(k)}).$$

˜那么， Λ 是$\mathcal{O}_{r,k}$ 与 $\mathcal{B}_{r,k}$之间的保权双射。

,$_k$ 的分拆恰好是满足频数条件（1.2）的那些分拆，而$\mathcal{O}_{r,k}$ 的分拆由（1.3）的左侧生成，因此这就通过双射证明了，满足（1.2）的分拆的生成函数确实是（1.3）的左侧。

这里我们d ˜efine一个映射 Λ，它推广了Warnaar的映射 Λ，并且我们将在不同情境中使用它 .

定义 2.2. 设 $\mathcal{P}$为有序对$(\boldsymbol{\lambda}, (f_i)_{i\in\mathbb{Z}})$的集合，其中 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)})$是（对某个 $k \ge 0$而言）由总长度为 ℓ的非负部分构成的分拆的 k元组，且$(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是一个广义频数序列，其中存在某个指标 u使得

- for all $i \notin \{u, u+1, \dots, u+2\ell-1\}$, $f_i = 0$,
- for all $i \in \{0, \dots, \ell-1\}$, $f_{u+2i} + f_{u+2i+1} \ge f_{u+2i+2} + f_{u+2i+3}$.

设 ℓ_i 为 $\lambda^{\,i}$ 的长度，并像之前一样重新命名

$$(\lambda_{\ell-1}, \dots, \lambda_1, \lambda_0) := (\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_{\ell_1}^{(1)}, \dots, \lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_{\ell_k}^{(k)}).$$

则映射 Λ 在 $\mathcal{P}$ 上定义如下： $\Lambda(\boldsymbol{\lambda},(f_i)_{i\in\mathbb{Z}})$是由$(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$得到的广义频数序列，方法是对所有 $i \in \{0, \dots, \ell-1\}$, 从右侧开始（即从 $i = \ell-1$开始，到 $i = 0$结束）在指标 $u+2i$处施加 λ_i 次粒子运动。换言之，

$$\Lambda(\boldsymbol{\lambda}, (f_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \left(\mathsf{pm}_u^{(\lambda_0)} \circ \mathsf{pm}_{u+2}^{(\lambda_1)} \circ \cdots \circ \mathsf{pm}_{u+2\ell-2}^{(\lambda_{\ell-1})}\right)((f_i)_{i\in\mathbb{Z}}).$$

在 [DJK24], 中，第一作者、Jouhet 和 Konan 考虑了上述定义中的一个特例，其中 $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是与框架序列 相关的 $\boldsymbol{\lambda}$, 即:

$$\mathrm{fs}(\boldsymbol{\lambda}) = (\dots, 0, \underbrace{f_0 = k, f_1 = 0, \dots, k, 0}_{s_k \text{ pairs}}, \dots, \underbrace{i, 0, \dots, i, 0}_{s_i - s_{i+1} \text{ pairs}}, \dots, \underbrace{1,0,\dots,1,0}_{s_1 - s_2 \text{ pairs}}, 0, \dots),$$

其权重为 $s_1^2 + \cdots + s_k^2 - s_1 - \cdots - s_k$, 其中对于所有 i, $\lambda^{(i)}$ 都有 $s_i - s_{i+1}$ 个分拆部分。

随后他们证明了以下结论。

定理 2.3([DJK24])。映射 Λ 在集合之间诱导出一个双射

$$\mathcal{P}_k = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{fs}(\boldsymbol{\lambda})) : \boldsymbol{\lambda} \text{ is a } k\text{-tuple of partitions}\},$$

and

$$\mathcal{A}_k = \{(f_i)_{i\in\mathbb{Z}} : f_i + f_{i+1} \le k \text{ for all } i \ge 0 \text{ and } f_i = 0 \text{ for all } i < 0\}.$$

通过选取 $\mathcal{A}_k$ 和 $\mathcal{P}_k$的适当子集，他们推导出了若干恒等式求和侧的双射，例如 Bressoud 恒等式 [Bre80, (3.4)]

$$\sum_{s_1 \ge \cdots \ge s_k \ge 0} \frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2+s_{k-r+1}+\cdots+s_k}}{(q)_{s_1-s_2}\cdots(q)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}} = \frac{(q^{k+1-r}, q^{k+1+r}, q^{2k+2}; q^{2k+2})_\infty}{(q)_\infty}, \tag{2.1}$$

这是一个偶模 与安德鲁斯–戈登恒等式对应的.....，或 Bressoud 的另一个恒等式 [Bre80, （3.3）]

$$\sum_{s_1 \ge \cdots \ge s_k \ge 0} \frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2-s_1-\cdots-s_j}}{(q)_{s_1-s_2}\cdots(q)_{s_{k-1}-s_k}(q)_{s_k}} = \sum_{s=0}^{j} \frac{(q^{k+2-j+2s}, q^{k+1+j-2s}, q^{2k+3}; q^{2k+3})_\infty}{(q)_\infty}. \tag{2.2}$$

以这一双射以及恒等式（1.3）和（2.1）为组成部分，他们得以证明若干新的和已知的 q级数恒等式。例如，框架序列中的0 频率对于在（2.2）左侧分子幂次中得到负号至关重要。

随后，在 [DJJ25] 中，两位作者与Jouhet将双射 Λ 改写为本文所给出的形式，并将其用于 $\mathcal{A}_k$ 与 $\mathcal{P}_k$ 的子集，在更为复杂的条件下证明了其他 q级数恒等式，既有已知的也有新的，其中包括定理1.4。

在本文中，我们的目标是利用粒子运动来证明涉及具有奇偶性限制的分拆的恒等式。为了证明其中某些恒等式，我们将需要一些允许分拆部分 -1 的分拆。因此，我们推广定理2.3 ，即允许框架序列向左或向右取任意偏移量。

定义2.4。 设 $u \in \mathbb{Z}$，并设 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots\ldots, \lambda^{(k)})$ 为一个 k元分拆组（对某个 $k \geq 0$），其各分拆均由非负部分组成，且对所有 i， $\lambda^{(i)}$ 具有 $s_i - s_{i+1}$ 个分拆部分。则 u-框架序列（与 $\boldsymbol{\lambda}$ 相关联）是广义频数序列

$$\mathrm{fs}_u(\boldsymbol{\lambda}) = (\cdots, 0, \underbrace{f_u = k, f_{u+1} = 0, \ldots, k, 0}_{s_k \text{ pairs}}, \ldots, \underbrace{i, 0, \ldots, i, 0}_{s_i - s_{i+1} \text{ pairs}}, \ldots, \underbrace{1, 0, \ldots, 1, 0}_{s_1 - s_2 \text{ pairs}}, 0, \ldots),$$

其权重为 $s_1^2 + \cdots + s_k^2 + (u-1)(s_1 + \cdots + s_k)$。

定理2.5。 令 $u \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$。 定义

$$\mathcal{P}_{k,u} = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{fs}_u(\boldsymbol{\lambda})) : \boldsymbol{\lambda} \textit{ is a } k\textit{-tuple of partitions}\},$$

and

$$\mathcal{A}_{k,u} = \{(f_i)_{i\in\mathbb{Z}} : f_i + f_{i+1} \leq k \textit{ for all } i \in \mathbb{Z}, \textit{ and } f_i = 0 \textit{ for all } i < u\}.$$

于是，映射 Λ 在集合$\mathcal{P}_{k,u}$ 与 $\mathcal{A}_{k,u}$之间诱导出一个双射。

证明。定理2.3在 [DJK24]（并在 [DJJ25]中重新表述）中的证明实际上从未用到框架序列从0开始这一事实，只用到了它的形状。因此，这些论文中的完全相同的证明也能证明这个更强的结果。□

显然，定理2.5 推广了定理2.3 （即情形 $u = 0$）。不过，定理2.1 也可由此推出。事实上，对于任意 k元分拆组 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)})$,

$$\tilde{\Lambda}(\boldsymbol{\lambda}, \tilde{\mathrm{fs}}_{r,k}(\boldsymbol{\lambda})) = \Lambda(\boldsymbol{\lambda}', \mathrm{fs}_1(\boldsymbol{\lambda}')),$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}'$由 $\boldsymbol{\lambda}$得到：对所有 $m \in \{1, \ldots, k\}$，将 $\max(0, m-k+r)$ 加到 $\lambda^{(m)}$的每个部分上。注意到 Λ 在.....之间诱导出一个双射，即可得到该结果。

$$\left\{(\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{fs}_1(\boldsymbol{\lambda})) : \boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}) \text{and the parts of } \lambda^{(m)} \text{ are at least } \max(0, m-k+r) \text{ for all } m\right\} \subset \mathcal{P}_{k,1},$$

and

$$\{(f_i)_{i\in\mathbb{Z}} : f_i + f_{i+1} \leq k \text{ for all } i \in \mathbb{Z},\ f_i = 0 \text{ for all } i < 1, \text{ and } f_1 \leq k - r\} \subset \mathcal{A}_{k,1}.$$

为了证明关于 Λ 的一些性质，将其拆分为粒子运动若干中间步骤的复合会更方便。

定义 2.6. 对于任意总长度为 s_1 的 k 元分拆组 $\boldsymbol{\lambda}$，定义

$$\mathrm{fs}_u(\boldsymbol{\lambda}) =: \theta^{(s_1)}, \theta^{(s_1-1)}, \ldots, \theta^{(1)}, \theta^{(0)} = \Lambda(\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{fs}_u(\boldsymbol{\lambda})), \tag{2.3}$$

其中每个 $\theta^{(i)}$ 都由 $\theta^{(i+1)}$ 通过以下方式得到：

$$\theta^{(i)} = \mathsf{pm}_{u+2i}^{(\lambda_i)}\left(\theta^{(i+1)}\right) \quad \text{for } i \in \{s_1 - 1, \ldots, 1, 0\}. \tag{2.4}$$

我们先来证明下面这个简单性质。

命题 2.7. 对于任意总长度为 s_1 的 k 元分拆组 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots\ldots, \lambda^{(k)})$，令 $\boldsymbol{\lambda}^+$ 为由 $\boldsymbol{\lambda}$ 得到的 k 元分拆组：对所有 $m \in \{1, \ldots, k\}$，将 m 加到 $\lambda^{(m)}$ 的每个部分上。注意，对于所有 $u \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{fs}_u(\boldsymbol{\lambda}) = \mathrm{fs}_u(\boldsymbol{\lambda}^+)$。那么，对于所有 $u \in \mathbb{Z}$,

$$\Lambda(\boldsymbol{\lambda}^+, \mathrm{fs}_{u-1}(\boldsymbol{\lambda}^+)) = \Lambda(\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{fs}_u(\boldsymbol{\lambda})).$$

证明。 回忆一下，

$$\Lambda(\boldsymbol{\lambda}^+, \mathrm{fs}_{u-1}(\boldsymbol{\lambda}^+)) = \left(\mathsf{pm}_{u-1}^{(\lambda_0^+)} \circ \mathsf{pm}_{u+1}^{(\lambda_1^+)} \circ \cdots \circ \mathsf{pm}_{u+2\ell-3}^{(\lambda_{\ell-1}^+)}\right)(\mathrm{fs}_{u-1}(\boldsymbol{\lambda}^+)),$$

$$\Lambda(\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{fs}_u(\boldsymbol{\lambda})) = \left(\mathsf{pm}_{u}^{(\lambda_0)} \circ \mathsf{pm}_{u+2}^{(\lambda_1)} \circ \cdots \circ \mathsf{pm}_{u+2\ell-2}^{(\lambda_{\ell-1})}\right)(\mathrm{fs}_u(\boldsymbol{\lambda})).$$

仿照定理 2.6，定义 $\theta^{(s_1)^+} = \mathrm{fs}_{u-1}(\boldsymbol{\lambda}^+)$，并且

$$\theta^{(i),+} = \mathsf{pm}_{u+2i-1}^{(\lambda_i^+)}\left(\theta^{(i+1),+}\right) \quad \text{for } i \in \{s_1 - 1, \ldots, 1, 0\}.$$

我们通过反向归纳法证明，对所有 $0 \le i \le s_1$, $\theta^{(i)}{}_{,j}{}^{+}$， $\theta^{(i)}_j$ 与 $j \ge u+2i-1$ 均相同，且 $\theta^{(i),+}_{u+2i-2} = \theta^{(i),}_{u+2i-1} = 0$。

显然，对于 $i = s_1$，这成立，因为在两个分拆中，$j \ge u + 2s_1 - 1$ 的出现次数都为零。此外，根据定义，$\mathrm{fs}_{u-1}(\boldsymbol{\lambda}^+)$ 中 $u+2i-2$ 的出现次数为 0。

现在假设该结论对 $i+1$ 成立，并证明它对 i 也成立。设 m 满足：λ_i 是 $\boldsymbol{\lambda}$ 中 $\lambda^{(m)}$ 的一个部分。那么，过程 $\mathrm{pm}^{(\lambda_i+m)}_{u+2i-1}(\theta^{(i+1),+})$ 从位置 $(u+2i-1, u+2i)$ 处的数对 $(m, 0)$ 开始。经过前 m 次粒子运动后，位置 $(u+2i-1, u+2i)$ 处的数对 $(m, 0)$ 移至位置 $(u+2i, u+2i+1)$ 处的数对 $(m, 0)$（事实上，根据归纳假设，在进行粒子运动之前，$u+2i$ 和 $u+2i+1$ 的出现次数均为 0）。随后，从该位置开始进行剩余的 λ_i 次粒子运动。这等同于直接应用 $\mathrm{pm}^{(\lambda_i)}_{u+2i}(\theta^{(i+1)})$，因为根据归纳假设，$\theta^{(i+1)}$、$^+$ 和 $\theta^{(i+1)}$ 中所有 $j \ge u+2i+1$ 的出现次数都相同。因此，$\theta^{(i)}$、$^+$ 和 $\theta^{(i)}$ 中所有 $j \ge u+2i-1$ 的出现次数都相同。最后，由于 $\mathrm{pm}^{(\lambda_i+m)}_{u+2i-1}(\theta^{(i+1),+})$ 中的前 m 次粒子运动将位置 $(u+2i-1, u+2i)$ 处的数对 $(m, 0)$ 移至位置 $(u+2i, u+2i+1)$ 处的数对 $(m, 0)$，$\theta^{(i),}{}^{+}_{u+2i-1}$ 的出现次数变为零。此外，根据定义，$\theta^{(i),}{}^{+}_{u+2i-2}$ 的出现次数在 $\mathrm{fs}_{u-1}(\boldsymbol{\lambda}^+)$ 中为零。因此，由归纳法可证该性质成立，并且 $\theta^{(0),+} = \Lambda(\boldsymbol{\lambda}^+, \mathrm{fs}_{u-1}(\boldsymbol{\lambda}^+))$ 与 $\theta^{(0)} = \Lambda(\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{fs}_u(\boldsymbol{\lambda}))$ 相同。□

我们现在改写 [DJJ25] 的部分结果，但将其推广到广义频率序列与 u-框架序列的情形。所有证明都没有用到框架序列从指标0开始这一事实，因此它们以完全相同的方式成立，我们在此不再重复。不过，我们将在更一般的情形下写出这些结果的陈述。

第一个命题　　是对 [DJJ25命题5.4] 在此情形下的重述，并将 v 替换为 $v+2$。

命题2.8（[*DJJ25*，命题5.4]）。设 $f = (f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 为广义频数序列。假设 u 是一个整数，使得存在 $h \ge 1$ 满足 $(f_u, f_{u+1}) = (h, 0)$，且对所有 $i \ge u$ 有 $f_i + f_{i+1} \le h$。对于非负整数 m，令 $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}} = \mathrm{pm}^{(m)}_u(f)$。定义

$$v := \min\left\{ t \ge u : \sum_{i=u+2}^{t+2} (h - (f_{i-1} + f_i)) \ge m \right\}. \tag{2.5}$$

然后，(f_u, f_{u+1}) 移动到 $(\overline{f}_v, \overline{f}_{v+1})$。此外，$(f)_{\overline{i}\in\mathbb{Z}}$ 的显式表达式为：

$$\overline{f}_i = \begin{cases} f_i & \text{if } i < u, \\ f_{i+2} & \text{if } u \le i < v, \\ f_{v+2} + \sum_{j=u+2}^{v+2}(h - (f_{j-1} + f_j)) - m & \text{if } i = v, \\ f_{v+1} + m - \sum_{j=u+2}^{v+1}(h - (f_{j-1} + f_j)) & \text{if } i = v+1, \\ f_i & \text{if } i \ge v+2. \end{cases} \tag{2.6}$$

我们定义三个集合，它们在本文所有证明中都起着关键作用。

定义 2.9. 设 j, r 和 k 为非负整数，满足 $j + r \le k$。定义

- 将 $\mathcal{X}_{j,r,k,u}$ 定义为所有有序对 $(\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{fs}_u(\boldsymbol{\lambda}))$ 的集合，其中 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{(1)} \dots, \lambda_{(k)})$ 是一个 k 元分拆组成的元组，$\mathrm{fs}_u(\boldsymbol{\lambda})$ 是对应于 $\boldsymbol{\lambda}$ 的 u- 框架序列，并且满足以下条件：对每个 $m = 1, \dots, k$，$\lambda_{(m)}$ 的每个部分都至少为 $m - j + \max\{m - (k-r), 0\}$，

- 将 $\mathcal{Y}_{j,r,k,u}$ 定义为所有满足以下条件的广义频数序列 $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 的集合：对所有 $i \ge u$，$f_i + f_{i+1} \le k$；对所有 $i < u$，$f_i = 0$；并且
$$f_u \in \{\ell + \max\{\ell - (j-r), 0\} : 0 \le \ell \le j\},$$

- $\mathcal{Z}_{j,\ r,\ k,\ u}$ 是所有广义频数序列 $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 的集合，使得 $f_i + f_{i+1} \le k$ 对所有 $i \ge u$ 均成立，$f_i = 0$ 对所有 $i < u$ 均成立，并且
$$f_u \le j - \max\{f_u + f_{u+1} - (k-r), 0\}.$$

映射 Λ 限制后给出了这两个集合之间的一个双射。

命题 2.10（　　[DJJ25], 命题 6.8）。映射 Λ 是一个保权双射，将 $\mathcal{X}_{j,r,k,u}$ 映射到 $\mathcal{Z}_{j,r,k,u}$　　.

采用定理 2.6中的记号，我们证明关于 $\{\theta^{(s_1)} \dots, \theta^{(0)}\}$上的奇偶条件的一些结果，以此表明 Λ 保持奇偶条件。

引理 2.11。设 $u \in 2\mathbb{Z}$。设 $\boldsymbol{\lambda}$ 为一个 k 元分拆组。对于所有 $i \in \{s, \dots, 0\}$，$\theta^{(i+1)}$ 中的每个奇数部分都出现偶数次，且 λ_i 为偶数，当且仅当 $\theta^{(i)}$ 中的每个奇数部分都出现偶数次。

证明。首先证明，若 $\theta^{(i+1)}$ 中的每个奇数部分都出现偶数次，且 λ_i 为偶数，则 $\theta^{(i)}$中的每个奇数部分都出现偶数次。令 $(\theta^{(i+1)}_{u+2i}, \theta^{(i+1)}_{u+2i+1}) = (h, 0)$，其中某个 $h > 0$。假设应用 $\mathrm{pm}^{(\lambda_i)}_{u+2i}$后，这一对 $(\theta^{(i+1)}_{u+2i}, \theta^{(i+1)}_{u+2i+1})$ 移至 $(\theta^{(i)}_v, \theta^{(i)}_{v+1})$。根据定理 2.8，对于 $j \notin \{v, v+1\}$ 的所有 $\theta^{(i)}_j$，它们要么保持在原位置，要么相对于其在 $\theta^{(i+1)}$中的原始位置移位两位。因此，对于 $j \notin \{v, v+1\}$ 的所有 $\theta^{(i)}_j$，其奇偶性保持不变，只需证明 $\theta^{(i)}_v$和 $\theta^{(i)}_{v+1}$的情形即可。

由（2.4），我们得到 $|\theta^{(i+1)}| + \lambda_i = |\theta^{(i)}|$。利用（2.6），可得

$$\sum_{t\in\mathbb{Z}} (t\,\theta^{(i+1)}_t) + \lambda_i = \sum_{t<u+2i} (t\,\theta^{(i+1)}_t) + \sum_{u+2i\le t<v} (t\,\theta^{(i+1)}_{t+2}) + v\cdot\theta^{(i)}_v + (v+1)\cdot\theta^{(i)}_{v+1} + \sum_{v+2\le t} (t\,\theta^{(i+1)}_t).$$

对模 2 取模，得到

$$(u+2i)\theta^{(i+1)}_{u+2i} + (u+2i+1)\theta^{(i+1)}_{u+2i+1} + \lambda_i \equiv \lambda_i \equiv v\cdot\theta^{(i)}_v + (v+1)\cdot\theta^{(i)}_{v+1} \pmod 2. \tag{2.7}$$

根据假设，λ_i 为偶数，且 v 和 $v+1$ 中恰有一个为奇数，因此这个奇数部分必定出现偶数次，从而完成证明。

现在我们证明反向蕴含。我们通过以下方式从 $\theta^{(i)}$ 恢复 $\theta^{(i+1)}$。在所有指标 $j \ge 2i$中，令 v 为满足 $\theta^{(i)}_j + \theta^{(i)}_{j+1}$ 取最大值的最小指标。接着，我们对位置 $\theta^{(i)}$ 上的数对（$\theta^{(i)}_v$，$\theta^{(i)}_{v+1}$）应用反向粒子运动（参见 [DJJ25，定义 5.8]），直到它移至位置 $2i$ 和 $2i+1$，且第二项变为 0。这种逆向移位的次数恰好为 λ_i。与正向过程一样，除了数对（$\theta^{(i+1)}_{u+2i}$，$\theta^{(i+1)}_{u+2i+1}$）之外，所有其他项要么保持在原位，要么移位两个位置，因此所有其他奇数部分的奇偶性保持不变。由于 $\theta^{(i+1)}_{u+2i+1} = 0$，可知 $\theta^{(i+1)}$ 的所有奇数部分都出现偶数次。

最后，对于 λ_i，该断言直接由（2.7）得出。根据对 $\theta^{(i)}$的假设，

$$v\cdot\theta^{(i)}_v + (v+1)\cdot\theta^{(i)}_{v+1} \equiv 0 \pmod 2.$$

因此由（2.7），λ_i 为偶数，证明完成。 □

通过一个简单的移位论证，当 u为奇数时，类似的引理成立。

引理 2.12. 设 $u \in 2\mathbb{Z}+1$。设 $\boldsymbol{\lambda}$ 是分拆的一个 k元组。对所有 $i \in \{s, \dots, 0\}$，$\theta^{(i+1)}$ 的每个偶数部分出现偶数次且 λ_i 为偶数，当且仅当 $\theta^{(i)}$ 的每个偶数部分出现偶数次。

证明。设 $\tilde{\theta}^{(i+1)}$ 是将 $\theta^{(i+1)}$ 向右移位一步所得的频率序列，即将 $\theta^{(i+1)}_j$ 替换为 $\theta^{(i+1)}_{j-1}$，对所有 $j \in \mathbb{Z}$。然后根据粒子运动的定义，$\theta^{(i)}$ 恰好是将$\tilde{\theta}^{(i)} = \pm^{(\lambda_i}_{u+2i+1}\left(\tilde{\theta}^{(i+1)}\right)$ 向左移位一步所得的广义频数序列。将引理 2.11 应用于这些 $\tilde{\theta}^{(i)}$，即可得出该结果，因为$\tilde{\theta}^{(i)}$ 的奇数部分变为 $\theta^{(i)}$的偶数部分。 □

令 $\mathrm{shift}(\mathcal{X}_{j,r,k,u})$ 表示所有有序对 $(\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{fs}_{u-1}(\boldsymbol{\lambda}))$ 的集合，其中 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)})$ 是一个 k-元分拆组，并且对于每个 $m = 1, \dots, k$，$\lambda^{(m)}$ 的每个部分都至少为 $m + \max\{m-j, 0\} + \max\{m-(k-r)\ 0\}$。换言之，

$$\mathrm{shift}(\mathcal{X}_{j,r,k,u}) = \left\{(\boldsymbol{\lambda}^+, \mathrm{fs}_{u-1}(\boldsymbol{\lambda})) : (\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{fs}_u(\boldsymbol{\lambda})) \in \mathcal{X}_{j,r,k,u}\right\}.$$

下面的引理说明了平移不变性。

命题 2.13. 映射 Λ 在 $\mathrm{shift}(\mathcal{X}_{j,r,k,u})$ 与 $\mathcal{Z}_{j,r,k,u}$ 之间诱导出一个双射。

证明。根据 $\mathrm{shift}(\mathcal{X}_{j,r,k,u})$ 的定义，我们有 $(\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{fs}_u(\boldsymbol{\lambda})) \in \mathcal{X}_{j,r,k,u}$ 当且仅当 $(\boldsymbol{\lambda}^+, \mathrm{fs}_{u-1}(\boldsymbol{\lambda})) \in \mathrm{shift}(\mathcal{X}_{j,r,k,u})$。由命题 2.7，对于任意 $(\boldsymbol{\lambda}^+, \mathrm{fs}_{u-1}(\boldsymbol{\lambda})) \in \mathrm{shift}(\mathcal{X}_{j,r,k,u})$，有 $\Lambda(\boldsymbol{\lambda}^+, \mathrm{fs}_{u-1}(\boldsymbol{\lambda})) = \Lambda(\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{fs}_u(\boldsymbol{\lambda}))$。又由定理 2.10，$\Lambda$ 在 $\mathcal{X}_{j,r,k,u}$ 与 $\mathcal{Z}_{j,r,k,u}$ 之间诱导出一个双射。因此，它也在 $\mathrm{shift}(\mathcal{X}_{j,r,k,u})$ 与 $\mathcal{Z}_{j,r,k,u}$ 之间诱导出一个双射。□

下一个引理可直接由引理2.12得出。

引理 2.14。 对于$(\boldsymbol{\lambda}$,$\mathrm{fs}_{u-1}(\boldsymbol{\lambda})) \in$ 移位$(\mathcal{X}_{j,r,k,u})$，令

$$\mathrm{fs}_{u-1}(\boldsymbol{\lambda}) =: \theta^{(s_1)}, \theta^{(s_1-1)}, \dots, \theta^{(1)}, \theta^{(0)} = \Lambda(\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{fs}_{u-1}(\boldsymbol{\lambda})),$$

其中每个 $\theta^{(i)}$ 都由 $\theta^{(i+1)}$ 通过 $\theta^{(i)} =$正负$^{(\lambda_i)}_{u+2i-1}\left(\theta^{(i+1)}\right)$（其中 $i = s_1-1$，……，1，0）得到。于是，$\theta^{(i+1)}$ 的每个偶数部分都出现偶数次，并且 λ_i 为偶数，当且仅当 $\theta^{(i)}$ 的每个偶数部分都出现偶数次。

我们在命题 2.10 中看到， Λ 在 $\mathcal{X}_{j,\,r,\,k,\,u}$ 与 $\mathcal{Z}_{j,\,r,\,k,\,u}$ 之间诱导出一个保权双射。然而， $\mathcal{Z}_{j,\,r,\,k,\,u}$ 并非一个其生成函数已广为人知的频率序列集合。因此，我们再做最后一个简单的双射，将 $\mathcal{Z}_{j,\,r,\,k,\,0}$ 与 $\mathcal{Y}_{j,\,r,\,k,\,0}$ 联系起来；借助安德鲁斯–戈登恒等式，后者的生成函数可以优雅地表示为乘积之和。

命题 2.15 ([DJJ25], 命题 6.7 的推广)。 存在一个保权双射，将 $\mathcal{Y}_{j,r,k,0}$ 映射到 $\mathcal{Z}_{j,r,k,0}$ ，该映射 ϕ 定义如下

$$(\dots,0,f_0,f_1,f_2,\dots)\mapsto(\dots,0,f_0',f_1,f_2,\dots),$$

其中，若 $j\geq r$，则

$$f_0'=\begin{cases}f_0 & \text{if } f_0\leq j-r,\\ j-r+\ell & \text{if } f_0=j-r+2\ell \text{ for some } \ell\in\{1,\dots,r\},\end{cases}$$

且若 $j<r$，则

$$f_0'=\ell,\quad \text{for } f_0=r-j+2\ell \text{ with } \ell\in\{0,\dots,j\}.$$

3. 定理1.11 及推论 1.14 的证明

本节将证明定理 1.11。首先，我们定义 $\mathcal{X}_{j,r,k,0}$ 的一个满足附加奇偶性条件的子集。

定义 3.1. 设 j,r 和 k 为满足 $j+r\leq k$ 的非负整数。定义 $\mathcal{X}^o_{j,r,k}$ 为所有有序对 $(\boldsymbol{\lambda},\mathrm{fs}_0(\boldsymbol{\lambda}))$ 的集合，其中 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(k)})$ 是一个 k 元组的分拆，并且对所有 $m\in\{1,\dots,k\}$，

- $\lambda^{(m)}$ 的每个部分都至少为 $m-j+\max\{m-(k-r),0\}$，对每个 $m=1,\dots,k$，
- $\lambda^{(m)}$ 是一个由偶数部分组成的分拆。

我们先来计算 $\mathcal{X}^o_{j,r,k}$ 的生成函数。

命题 3.2. 设 j、r 和 k 为满足 $j+r\leq k$ 的非负整数。那么

$$\sum_{(\boldsymbol{\lambda},\mathrm{fs}_0(\boldsymbol{\lambda}))\in\mathcal{X}^o_{j,r,k}}q^{|(\boldsymbol{\lambda},\mathrm{fs}_0(\boldsymbol{\lambda}))|}=\sum_{s_1\geq\dots\geq s_k\geq 0}\frac{q^{s_1^2+\dots+s_k^2-(s_1+\dots+s_j)+(s_{j+1}-s_{j+2}+s_{j+3}-\dots\pm s_{k-r})+(s_{k-r+1}+\dots+s_k)}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}.$$

证明。 注意，长度为 ℓ 且由大小至少为 b 的偶数部分组成的分拆，其生成函数为

$$\begin{cases}\frac{q^{b\ell}}{(q^2;q^2)_\ell} & \text{if } b \text{ is even},\\ \frac{q^{(b+1)\ell}}{(q^2;q^2)_\ell} & \text{if } b \text{ is odd}.\end{cases}$$

对于非负整数 $s_1,\dots,s_k$，其中 $s_1\geq\dots\geq s_k\geq 0$，定义 $X^o_{j,r}(s_1,\dots,s_k)$ 为满足 $(\boldsymbol{\lambda},\mathrm{fs}_0(\boldsymbol{\lambda}))\in\mathcal{X}^o_{j,r,k}$，且对每个 m， $\lambda^{(m)}$ 的长度为 s_m-s_{m+1} 的 k 元组分拆 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(k)})$ 的集合。于是，对于所有 $\boldsymbol{\lambda}\in X^o_{j,r}(s_1,\dots,s_k)$，$\mathrm{fs}_0(\boldsymbol{\lambda})$ 都相同；我们将其记为 $\mathrm{fs}_0(s_1,\dots,s_k)$。

回忆

$$|\mathrm{fs}_0(s_1,\dots,s_k)|=s_1^2+\dots+s_k^2-(s_1+\dots+s_k). \tag{3.1}$$

我们可以将 $\mathcal{X}^o_{j,r,k}$ 表示为

$$\mathcal{X}^o_{j,r,k}=\bigsqcup_{s_1\geq\dots\geq s_k\geq 0}X^o_{j,r}(s_1,\dots,s_k)\times\{\mathrm{fs}_0(s_1,\dots,s_k)\}. \tag{3.2}$$

计算生成函数时，对于 $X^o_{j,r}(s_1,\dots,s_k)$，我们区分 $\max\{m-(k-r),0\}$ 中的不同情形。我们得到

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in X^o_{j,r}(s_1,\dots,s_k)}q^{|\boldsymbol{\lambda}|}=A_1\cdot A_2\cdot A_3,$$

with

$$A_1=\sum q^{|\lambda^{(1)}|+\dots+|\lambda^{(j)}|},$$
$$A_2=\sum q^{|\lambda^{(j+1)}|+\dots+|\lambda^{(k-r)}|},$$
$$A_3=\sum q^{|\lambda^{(k-r+1)}|+\dots+|\lambda^{(k)}|},$$

其中，各个求和分别遍历所有满足 $(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(k)})\in X^o_{j,r}(s_1,\dots,s_k)$ 的分拆元组 $(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(j)})$、$(\lambda^{(j+1)},\dots,\lambda^{(k-r)})$ 和 $(\lambda^{(k-r+1)},\dots,\lambda^{(k)})$。

对于所有 $m \in \{1,\dots,j\}$， $\lambda^{(m)}$ 都是由至少 0 个偶数部分组成的分拆。因此

$$A_1 = \prod_{m=1}^{j} \frac{1}{(q^2;q^2)_{s_m - s_{m+1}}}. \tag{3.3}$$

为了计算 A_2和 A_3，我们需要区分两种情况。首先假设 $k-r-j$是偶数（$k-r-j$为奇数的情况随后讨论）。

对于所有 $m \in \{j+1,\dots,k-r\}, \lambda^{(m)}$ 是一个由不小于 $m-j$ 的偶数部分组成的分拆，因此

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{q^{2(s_{j+1}-s_{j+2})+2(s_{j+2}-s_{j+3})+4(s_{j+3}-s_{j+4})+4(s_{j+4}-s_{j+5})+\cdots+(k-r-j)(s_{k-r-1}-s_{k-r})+(k-r-j)(s_{k-r}-s_{k-r+1})}}{(q^2;q^2)_{s_{j+1}-s_{j+2}}(q^2;q^2)_{s_{j+2}-s_{j+3}}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-r}-s_{k-r+1}}} \\ &= \frac{q^{2s_{j+1}+2s_{j+3}+\cdots+2s_{k-r-1}-(k-r-j)s_{k-r+1}}}{(q^2;q^2)_{s_{j+1}-s_{j+2}}(q^2;q^2)_{s_{j+2}-s_{j+3}}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-r}-s_{k-r+1}}}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

对于所有 $m \in \{k-r+1,\dots,k\}, \lambda^{(m)}$，是一个由不小于 $2m-k+r-j$ 的偶数部分组成的分拆，因此

$$A_3 = \prod_{m=k-r+1}^{k} \frac{q^{(2m-k+r-j)(s_m-s_{m+1})}}{(q^2;q^2)_{s_m-s_{m+1}}} = \frac{q^{(k-r-j+2)s_{k-r+1}}q^{2s_{k-r+2}+2s_{k-r+3}+\cdots+2s_k}}{(q^2;q^2)_{s_{k-r+1}-s_{k-r+2}}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}. \tag{3.5}$$

通过合并（3.3）、（3.4）和（3.5），我们得到

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in X^o_{j,r}(s_1,\dots,s_k)} q^{|\boldsymbol{\lambda}|} = \frac{q^{2s_{j+1}+2s_{j+3}+\cdots+2s_{k-r-1}+2s_{k-r+1}+2s_{k-r+2}+\cdots+2s_k}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}.$$

将其与（3.1）和（3.2）结合，我们得到所需的公式。

现在我们处理 $k-r-j$ 为奇数的情形。除将方程（3.4）和（3.5）替换为以下方程外，所有论证均保持不变：

$$\begin{aligned} &\frac{q^{2(s_{j+1}-s_{j+2})+2(s_{j+2}-s_{j+3})+4(s_{j+3}-s_{j+4})+4(s_{j+4}-s_{j+5})+\cdots+(k-r-j-1)(s_{k-r-1}-s_{k-r})+(k-r-j+1)(s_{k-r}-s_{k-r+1})}}{(q^2;q^2)_{s_{j+1}-s_{j+2}}(q^2;q^2)_{s_{j+2}-s_{j+3}}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-r}-s_{k-r+1}}} \\ &\qquad = \frac{q^{2s_{j+1}+2s_{j+3}+\cdots+2s_{k-r}}q^{-(k-r-j+1)s_{k-r+1}}}{(q^2;q^2)_{s_{j+1}-s_{j+2}}(q^2;q^2)_{s_{j+2}-s_{j+3}}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-r}-s_{k-r+1}}}, \end{aligned}$$

and

$$\prod_{m=k-r+1}^{k} \frac{q^{(2m-k+r-j+1)(s_m-s_{m+1})}}{(q^2;q^2)_{s_m-s_{m+1}}} = \frac{q^{(k-r-j+3)s_{k-r+1}}q^{2s_{k-r+2}+2s_{k-r+3}+\cdots+2s_k}}{(q^2;q^2)_{s_{k-r+1}-s_{k-r+2}}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}},$$

分别为。因此，我们再次得到

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in X^o_{j,r}(s_1,\dots,s_k)} q^{|\boldsymbol{\lambda}|} = \frac{q^{2s_{j+1}+2s_{j+3}+\cdots+2s_{k-r}+2s_{k-r+1}+2s_{k-r+2}+\cdots+2s_k}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}},$$

于是结论成立。

□

现在我们定义集合 $\mathcal{Y}^o_{j,r,k}$，它将与 $\mathcal{Z}^o_{j,r,k}$ 以及 $\mathcal{X}^o_{j,r,k}$ 建立双射，并且其生成函数可以表示为乘积之和。

定义 3.3。 对于满足 $j+r \le k$ 的非负整数 j、r 和 k，定义 $\mathcal{Y}^o_{j,r,k}$ 为所有满足以下条件的频率序列 $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 的集合：

- $f_i + f_{i+1} \le k$ 对所有 $i \ge 0$,
- $f_i = 0$对所有 $i < 0$,
- $f_0 \in \{\ell + \max\{\ell - (j-r)\ 0\} : \ 0 \le \ell \le j\}$，且

若 i 为奇数，则• f_i 为偶数。也就是说，奇数部分出现偶数次。

现在我们证明这三个集合之间确实存在双射。

命题 3.4. $\mathcal{X}^o_{j,r,k}$ 与$\mathcal{Z}^o_{j,r,k}$之间存在保权双射。

证明。由于$\mathcal{X}^o_{j,r,k} \subseteq \mathcal{X}_{j,r,k,0}$以及$\mathcal{Z}^o_{j,r,k} \subseteq \mathcal{Z}_{j,r,k,0}$，我们将证明双射 $\Lambda : \mathcal{X}_{j,r,k,0} \to \mathcal{Z}_{j,r,k,0}$（见定理 2.10）限制后得到双射 $\Lambda : \mathcal{X}^o_{j,r,k} \to \mathcal{Z}^o_{j,r,k}$。

令 $(\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{fs}_0(\boldsymbol{\lambda})) \in \mathcal{X}^o_{j,r,k}$。我们使用定理 2.6 的记号。根据 $\mathcal{X}^o_{j,r,k}$ 的定义，每个 λ_i 都是偶数。因此，通过反复应用定理 2.11，可知 $\theta^{(s_1-1)}, \ldots, \theta^{(1)}$ 和 $\theta^{(0)} = \Lambda(\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{fs}_0(\boldsymbol{\lambda}))$ 都满足这样的条件：每个奇数部分出现偶数次。因此，$\mathcal{X}^o_{j,r,k}$ 在 Λ 下的像满足 $\mathcal{Z}^o_{j,r,k}$ 的奇偶性条件，从而 $\Lambda(\mathcal{X}^o_{j,r,k}) \subseteq \mathcal{Z}^o_{j,r,k}$。对于反向包含，定理 2.11 还表明，逆映射 Λ^{-1} 将 $\mathcal{Z}^o_{j,r,k}$ 映到 $\mathcal{X}^o_{j,r,k}$ 中，即 $\Lambda^{-1}(\mathcal{Z}^o_{j,r,k}) \subseteq \mathcal{X}^o_{j,r,k}$，证毕。□

命题 3.5. $\mathcal{Y}^o_{j,r,k}$ 与$\mathcal{Z}^o_{j,r,k}$之间存在保权双射。

证明。 定理 2.15 中的双射 ϕ 对 $u = 0$ 仅改变了 0 的出现次数，因此不会影响奇数部分的出现次数。因此， ϕ 将双射限制为$\mathcal{Y}^o_{j,r,k}$ 与$\mathcal{Z}^o_{j,r,k}$之间的双射。□

最后，我们利用（1.6）将$\mathcal{Y}^o_{j,r,k}$ 的生成函数表示为乘积之和。

命题 3.6. 对于满足 $j + r \le k$的非负整数 j、 r和 k， 有

$$\sum_{f \in \mathcal{Y}^o_{j,r,k}} q^{|f|} = \sum_{s=0}^{j} \frac{(-q^2;q^2)_\infty (q^{2\lfloor \frac{k+2-r+j-2s}{2} \rfloor}, q^{2k+4-2\lfloor \frac{k+2-r+j-2s}{2} \rfloor}, q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}. \tag{3.6}$$

证明。 先考虑 $j \le r$的情形。此时，对于 $0 \le \ell \le j$， $\ell + \max\{\ell - (j-r)\ 0\} = r - j + 2\ell$。 f_0 所有可能取值的集合为

$$F = \{\ell + \max\{\ell - (j-r), 0\} : 0 \le \ell \le j\} = \{r - j + 2s : 0 \le s \le j\}.$$

Thus

$$\mathcal{Y}^o_{j,r,k} = \bigsqcup_{s=0}^{j} \{f \in \mathcal{Y}^o_{j,r,k} : f_0 = r - j + 2s\}.$$

此外，集合 $\{f \in \mathcal{Y}^o_{j,r,k} :\ f_0 = a\}$ 与$\mathcal{W}_{k,k-a}$ 之间存在双射（通过去掉部分 0 得到）。因此

$$\sum_{f \in \mathcal{Y}^o_{j,r,k}} q^{|f|} = \sum_{s=0}^{j} \sum_{n \ge 0} \overline{W}_{k,k-r+j-2s}(n) q^n,$$

并利用（1.6）即可得出该结果。

现在假设 $j > r$。那么集合

$$F = \{\ell + \max\{\ell - (j-r), 0\} : 0 \le \ell \le j\} = \{0, 1, \ldots, j-r, j-r+2, \ldots, j+r\}$$

可以表示为不交并 $F = F_1 \sqcup F_2$，其中

$$\begin{aligned} F_1 &= \{j + r, j + r - 2, j + r - 4, \cdots\} \\ &= \{r - j + 2s : s = \lfloor (j-r)/2 \rfloor, \lfloor (j-r)/2 \rfloor + 1, \ldots, j\}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} F_2 &= \{j - r - 1, j - r - 3, j - r - 5, \cdots\} \\ &= \{j - r - 1 - 2s : s = 0, 1, \ldots, \lfloor (j-r)/2 \rfloor - 1\}. \end{aligned}$$

根据（1.6），相应的生成函数分别为,

$$\begin{aligned} \sum_{f \in \mathcal{Y}^o_{j,r,k} : f_0 \in F_1} q^{|f|} &= \sum_{s=\lfloor (j-r)/2 \rfloor}^{j} \sum_{n \ge 0} \overline{W}_{k,k-(r-j+2s)}(n) q^n \\ &= \sum_{s=\lfloor (j-r)/2 \rfloor}^{j} \frac{(-q^2;q^2)_\infty (q^{2\lfloor \frac{k-(r-j+2s)+2}{2} \rfloor}, q^{2k+4-2\lfloor \frac{k-(r-j+2s)+2}{2} \rfloor}, q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

and

$$\sum_{f\in\mathcal{Y}^{o}_{j,r,k}:f_0\in F_2} q^{|f|} = \sum_{s=0}^{\lfloor (j-r)/2\rfloor-1}\sum_{n\geq 0}\overline{W}_{k,k-(j-r-1-2s)}(n)q^n \tag{3.8}$$
$$= \sum_{s=0}^{\lfloor (j-r)/2\rfloor-1}\frac{(-q^2;q^2)_\infty (q^{2\lfloor\frac{k-(j-r-1-2s)+2}{2}\rfloor},q^{2k+4-2\lfloor\frac{k-(j-r-1-2s)+2}{2}\rfloor},q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

我们断言

$$2k+4-2\left\lfloor\frac{k-(j-r-1-2s)+2}{2}\right\rfloor = 2\left\lfloor\frac{k-(r-j+2s)+2}{2}\right\rfloor.$$

如果 $k-j+r$ 为奇数，则

$$2k+4-2\left\lfloor\frac{k-(j-r-1-2s)+2}{2}\right\rfloor = 2\left(\frac{k+j-r-2s+1}{2}\right) = 2\left\lfloor\frac{k+j-r-2s+2}{2}\right\rfloor,$$

从而命题得证。偶数情形同理可得。右端（3.8）和（3.7）中的各项相同。将（3.7）与（3.8）相加即完成证明。□

定理1.11 的证明直接由结合命题3.2、3.4、3.5 和3.6得到。

本节最后给出定理1.14的证明。

定理*1.14*的证明。 首先，将 $j=a$和 $r=0$ 代入定理1.11 可得

$$\sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0}\frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2-(s_1+\cdots+s_a)+(s_{a+1}-s_{a+2}+\cdots+(-1)^{k-a-1}s_k)}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}} \tag{3.9}$$
$$= \sum_{s=0}^{a}\frac{(-q^2;q^2)_\infty (q^{2\lfloor\frac{k+a-2s+2}{2}\rfloor},q^{2k+4-2\lfloor\frac{k+a-2s+2}{2}\rfloor},q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

所需恒等式的左端可立即得到。另一方面，右端可改写成略有不同的形式。注意， $k-i+2\leq k+2$当 $i=0,\ldots,a$时，而 $k+a-2s+2\geq k+2$当 $s=0,\ldots,\lfloor a/2\rfloor$时，并且$k+a-2s+2<k+2$当 $s=\lfloor a/2\rfloor+1,\ldots,a$时。要从（3.9）得到所需的右端，只需证明

$$\left\{2\left\lfloor\frac{k-i+2}{2}\right\rfloor : i=0,\ldots,a\right\} = \left\{2\left\lfloor\frac{k+a-2s+2}{2}\right\rfloor : s=\lfloor a/2\rfloor+1,\ldots,a\right\}$$
$$\sqcup\left\{2k+4-2\left\lfloor\frac{k+a-2s+2}{2}\right\rfloor : s=0,\ldots,\lfloor a/2\rfloor\right\}.$$

通过一个 类似于定理3.6证明中的论证，向下取整函数的一个基本性质可得

$$2k+4-2\left\lfloor\frac{k+a-2s+2}{2}\right\rfloor = 2\left\lfloor\frac{k-a+2s+3}{2}\right\rfloor.$$

证明由以下事实得出：集合 $\{k-i+2\colon i=0,\ldots,a\}$ 可以写成一个不交并

$$\{k-i+2 : i=0,\ldots,a\} = (\{k-a+2,k-a+4,k-a+6,\ldots\}\cap\{1,\ldots,k+2\})$$
$$\sqcup(\{k-a+3,k-a+5,k-a+7,\ldots\}\cap\{1,\ldots,k+2\}),$$

其中第一组和第二组分别等于

$$\{k+a-2s+2 : s=\lfloor a/2\rfloor+1,\ldots,a\},\quad \text{and}\quad \{k-a+2s+3 : s=0,\ldots,\lfloor a/2\rfloor\}.$$

□

4. 定理1.12的证明

现在我们转向定理 1.12 的证明，该定理涉及不同的奇偶条件。在本节中，(-1)-框架序列将会派上用场。

首先定义 shift($\mathcal{X}_{j,r,k,0}$) 的一个带有奇偶条件的子集。

定义 4.1。 设 a,b 和 k 为满足 $2a+2b\leq k$ 的非负整数。定义 $\mathcal{X}^{e}_{a,b,k}$ 为所有有序对 $(\boldsymbol{\lambda},\mathrm{fs}_{-1}(\boldsymbol{\lambda}))$ 构成的集合，其中 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(k)})$ 是一个 k 元组的分拆，并满足对于所有 $m\in\{1,\ldots,k\}$,

- $\lambda_{(m)}$ 中的每个分拆部分都至少为 $m+\max\{m-2a,0\}+\max\{m-(k-2b)\ 0\}$，对于每个 $m=1,\ldots,k$,

- $\lambda_{(m)}$ 是一个由偶数部分组成的分拆。

我们首先计算 $\mathcal{X}^e_{a,b,k}$ 的生成函数。

命题4.2。 设 a、b 和 k 为满足 $2a+2b\le k$ 的非负整数。则

$$\sum_{(\boldsymbol{\lambda},\mathrm{fs}_{-1}(\boldsymbol{\lambda}))\in\mathcal{X}^e_{a,b,k}} q^{|(\boldsymbol{\lambda},\mathrm{fs}_{-1}(\boldsymbol{\lambda}))|}=\sum_{s_1\ge\cdots\ge s_k\ge 0}\frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2-2(s_2+s_4+\cdots+s_{2a})+2(s_{k-2b+1}+s_{k-2b+3}+\cdots+s_{k-1})}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}.$$

证明。 此证明与定理 3.2 的证明类似。

对于满足 $s_1\ge\cdots\ge s_k\ge 0$ 的非负整数 $s_1,\dots,s_k$，定义 $X^e_{a,b}(s_1,\dots,s_k)$ 为满足以下条件的分拆$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(k)})$ 的 k 元组集合：$(\boldsymbol{\lambda},\mathrm{fs}_0(\boldsymbol{\lambda}))\in\mathcal{X}^e_{a,b,k}$，且对于每个 m，$\lambda^{(m)}$ 的长度为 s_m-s_{m+1}。那么，对于所有$\boldsymbol{\lambda}\in X^e_{a,b}(s_1,\dots,s_k)$，$\mathrm{fs}_{-1}(\boldsymbol{\lambda})$ 都相同；记作 $\mathrm{fs}_{-1}(s_1,\dots,s_k)$。

$$|\mathrm{fs}_{-1}(s_1,\dots,s_k)|=s_1^2+\cdots+s_k^2-2(s_1+\cdots+s_k). \tag{4.1}$$

我们可以将 $\mathcal{X}^e_{a,b,k}$ 表示为不交并

$$\mathcal{X}^e_{a,b,k}=\bigsqcup_{s_1\ge\cdots\ge s_k\ge 0} X^e_{a,b}(s_1,\dots,s_k)\times\{\mathrm{fs}_{-1}(s_1,\dots,s_k)\}, \tag{4.2}$$

为了计算 $X^e_{a,b}(s_1,\dots,s_k)$ 的生成函数，我们对 $\max\{m-2a,0\}+\max\{m-(k-2b),0\}$ 中的不同情形进行区分。于是得到

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in X^e_{a,b}(s_1,\dots,s_k)} q^{|\boldsymbol{\lambda}|}=A_1\cdot A_2\cdot A_3,$$

with

$$A_1=\sum q^{|\lambda^{(1)}|+\cdots+|\lambda^{(2a)}|},$$
$$A_2=\sum q^{|\lambda^{(2a+1)}|+\cdots+|\lambda^{(k-2b)}|},$$
$$A_3=\sum q^{|\lambda^{(k-2b+1)}|+\cdots+|\lambda^{(k)}|},$$

其中，各求和分别遍历满足 $(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(k)})\in X^e_{a,b}(s_1,\dots,s_k)$ 的所有分拆元组 $(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(2a)})$、$(\lambda^{(2a+1)},\dots,\lambda^{(k-2b)})$ 和 $(\lambda^{(k-2b+1)},\dots,\lambda^{(k)})$。

对于所有 $m\in\{1,\dots,2a\}$，$\lambda^{(m)}$ 都是一个由不小于 m 的 s_m-s_{m+1} 个偶数部分组成的分拆。因此

$$A_1=\frac{q^{2s_1+2s_3+\cdots+2s_{2a-1}}q^{-(2a)s_{2a+1}}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{2a}-s_{2a+1}}}. \tag{4.3}$$

对于所有 $m\in\{2a+1,\dots,k-2b\}$，$\lambda^{(m)}$ 是一个由不小于 $2m-2a$ 的 s_m-s_{m+1} 个偶数部分组成的分拆，因此 e

$$A_2=\frac{q^{(2a+2)s_{2a+1}}q^{2s_{2a+2}+2s_{2a+3}+\cdots+2s_{k-2b}}q^{-(2k-2a-4b)s_{k-2b+1}}}{(q^2;q^2)_{s_{2a+1}-s_{2a+2}}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-2b}-s_{k-2b+1}}}. \tag{4.4}$$

对于所有 $m\in\{k-2b+1,\dots,k\}$, $\lambda^{(m)}$ 是一个由不小于 $3m-k-2a+2b$ 的偶数部分组成的分拆，因此

$$A_3=\frac{q^{(2k-2a-4b+4)s_{k-2b+1}}q^{2s_{k-2b+2}+4s_{k-2b+3}+2s_{k-2b+4}+4s_{k-2b+5}+\cdots+4s_{k-1}+2s_k}}{(q^2;q^2)_{s_{k-2b+1}-s_{k-2b+2}}\cdots(q^2;q^2)_{s_k}}. \tag{4.5}$$

因此，由（4.3）、（4.4）和（4.5），我们得到

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in X^e_{a,b}(s_1,\dots,s_k)} q^{|\boldsymbol{\lambda}|}=\frac{q^{2(s_1+s_3+\cdots+s_{2a-1})+2(s_{2a+1}+s_{2a+2}+\cdots+s_{k-2b})+(4s_{k-2b+1}+2s_{k-2b+2}+4s_{k-2b+3}+\cdots+4s_{k-1}+2s_k)}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}.$$

将此结果与（4.1）和（4.2）结合，即得所需公式。

□

按照定理 1.11 的相同证明结构，我们定义集合 $\mathcal{Y}^e_{a,b,k}$，它与 $\mathcal{X}^e_{a,b,k}$ 以及 $\mathcal{Z}^e_{a,b,k}$ 构成双射。

定义 4.3。 对于满足 $2a+2b\le k$ 的非负整数 a,b 和 k，我们将 $\mathcal{Y}^e_{a,b,k}$ 定义为所有满足以下条件的频数序列 $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 的集合

- $f_i+f_{i+1}\le k$ 对于所有 $i\ge 0$,

- $f_i = 0$对于所有 $i < 0$,
- $f_0 \in \{2(\ell + \text{最大值}\{\ell - (a-b)\ 0\}) \colon\ 0 \le \ell \le a\}$，以及
- f_i 为偶数，当且仅当 i 为偶数。也就是说，偶数部分出现的次数为偶数。

现在我们证明这三个集合确实存在双射。

命题 4.4。 存在一个从$\mathcal{X}^e_{a、\,b、\,k}$ 到$\mathcal{Z}^e_{a、\,b、\,k}$的保权双射。

证明。论证与定理3.4类似。这里我们令 $j = 2a$ 和 $r = 2b$。在该证明中，将 j 替换为 $2a$，将 r替换为 $2b$，将定理 2.10 替换为定理2.13，将 $\mathcal{X}^o_{j、\,r、\,k}$替换为$\mathcal{X}^e_{a、\,b、\,k}$，将 $\mathcal{Z}^o_{j、\,r、\,k}$替换为$\mathcal{Z}^e_{a、\,b、\,k}$，并分别将 fs_0 替换为 fs_{-1}。然后用定理2.14替换引理2.11。经过这些替换，即可得到所需结论。□

命题4.5. 存在一个保权双射，将 $\mathcal{Y}^e_{a、\,b、\,k}$ 映射到 $\mathcal{Z}^e_{a、\,b、\,k}$。

证明。根据子集 $\mathcal{Y}^e_{a,b,k} \subseteq \mathcal{Y}_{2a,2b,k},0$ 和 $\mathcal{Z}^e_{a,b,k} \subseteq \mathcal{Z}_{2a,2b,k},0$ 的定义，$\mathcal{Y}^e_{a,b,k}$ 和 $\mathcal{Z}^e_{a,b,k}$ 中的每个元素的偶数第0频数都是偶数，并且每个偶数部分都出现偶数次。现在我们证明定理2.15中构造的双射 ϕ 限制后给出了从 $\mathcal{Y}^e_{a,b,k}$ 到 $\mathcal{Z}^e_{a,b,k}$ 的双射。

与定理3.5不同，因 为定义 $\mathcal{Y}^e_{a、\,b、\,k}$ 和 $\mathcal{Z}^e_{a、\,b、\,k}$ 的附加奇偶条件，这些集合中的每个元素都 s必须具有偶数第0频 数。因此，我们需要明确验证映射 ϕ 保持这一性质。

若令定理 j、r以及参数 ℓ 中的变量取偶数，即2.15 ,

$$j = 2a, \quad r = 2b, \quad \ell = 2m,$$

那么 ϕ 对$\mathcal{Y}^e_{a、\,b、\,k}$ 的限制可以明确描述如下:

$$(\dots, 0, f_0, f_1, f_2, \dots) \mapsto (\dots, 0, f_0', f_1, f_2, \dots),$$

其中，若 $a \ge b$，则

$$f_0' = \begin{cases} f_0 & \text{if } f_0 \le 2(a-b), \\ 2(a-b+m) & \text{if } f_0 = 2(a-b+2m) \text{ for some } 2m \in \{1, \dots, 2b\}, \end{cases}$$

若 $a < b$，则

$$f_0' = 2m, \quad \text{for } f_0 = 2(b-a+2m) \text{ with } 2m \in \{0, \dots, 2a\}.$$

根据 ϕ的明确描述，若 f_0 为偶数，则 f_0' 为偶数。因此，$\phi(\mathcal{Y}^e_{a、\,b、\,k}) \subseteq \mathcal{Z}^e_{a、\,b、\,k}$。此外，再次利用明确公式，很容易验证，由偶数 f_0' 得到的值 f_0 总是满足 $\mathcal{Y}^e_{a、\,b、\,k}$中 f_0 的定义条件。这说明 $\phi(\mathcal{Z}^e_{a、\,b、\,k}) \subseteq \mathcal{Y}^e_{a、\,b、\,k}$，从而完成证明。□

最后，我们利用定理 1.6 将 $\mathcal{Y}^o_{j、\,r、\,k}$ 的生成函数表示为乘积之和。

命题4.6. 对于满足 $2a + 2b \le k$的非负整数 a 和 b，我们有

$$\sum_{f \in \mathcal{Y}^e_{a,b,k}} q^{|f|} = \sum_{s=0}^{a} \frac{(-q;q^2)_\infty (q^{k+1+2a-2b-4s}, q^{k+3-2a+2b+4s}, q^{2k+4}; q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

证明。 此证明与定理3.6的证明类似。由定理1.6，满足 $f_0 = 2s$ 的$\mathcal{Y}^e_{a,b,k}$ 的频率序列的生成函数为

$$\frac{(-q;q^2)_\infty (q^{k+1-2s}, q^{k+3+2s}, q^{2k+4}; q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}. \tag{4.6}$$

我们用此结果计算$\mathcal{Y}^e_{a,b,k}$的生成函数。若 $a \le b$，则 f_0 所有可能取值的集合为

$$\{2(\ell + \max\{\ell - (a-b), 0\}) : 0 \le \ell \le a\} = \{-2a + 2b + 4\ell : 0 \le \ell \le a\},$$

且证明由（4.6）立即可得。

若 $a > b$，则集合

$$F = \{2(\ell + \max\{\ell - (a-b)\ 0\}) \colon\ 0 \le \ell \le a\} = \{0, 2, 4, \dots, 2a-2b-2, 2a-2b, 2a-2b+4, \dots, 2a+2b-4, 2a+2b\}$$

可表示为不交并 $F = F_1 \sqcup F_2$，其中

$$F_1 = \{2a + 2b, 2a + 2b - 4, 2a + 2b - 8, \dots\}$$

and

$$F_2 = \{2a - 2b - 2, 2a - 2b - 6, 2a - 2b - 10, \dots\}.$$

第一组为

$$F_1 = \{2b - 2a + 4s : s = \lfloor (a-b)/2 \rfloor, \lfloor (a-b)/2 \rfloor + 1, \dots, a\},$$

第二组为

$$F_2 = \{2a-2b-2-4s : s = 0, 1, \ldots, \lfloor (a-b)/2 \rfloor - 1\}.$$

根据（4.6），相应的生成函数分别为

$$\sum_{f \in \mathcal{Y}^e_{a,b,k}: f_0 \in F_1} q^{|f|} = \sum_{s=\lfloor (a-b)/2 \rfloor}^{a} \frac{(-q;q^2)_\infty (q^{k+1-(2b-2a+4s)}, q^{k+3+(2b-2a+4s)}, q^{2k+4}; q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty},$$

and

$$\sum_{f \in \mathcal{Y}^e_{a,b,k}: f_0 \in F_2} q^{|f|} = \sum_{s=0}^{\lfloor (a-b)/2 \rfloor - 1} \frac{(-q;q^2)_\infty (q^{k+1-(2a-2b-2-4s)}, q^{k+3+(2a-2b-2-4s)}, q^{2k+4}; q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} =$$

$$\sum_{s=0}^{\lfloor (a-b)/2 \rfloor - 1} \frac{(-q;q^2)_\infty (q^{k+1+2a-2b-4s}, q^{k+3-2a+2b+4s}, q^{2k+4}; q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

将这两个表达式相加，即完成证明。 □

5. 定理1.13 和推论1.15的证明

本节开头与上一节非常相似，因此此处略去部分细节。不过，定理1.13 证明的结尾需要新的论证，我们将在命题5.4中详细说明。

定义 5.1。 设 a, b 和 k 为非负整数，且满足 $2a + 2b - 1 \le k$。定义 $\mathcal{X}^e_{a,b,k}$ 为所有有序对 $(\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{fs}_{-1}(\boldsymbol{\lambda}))$ 的集合，其中 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)})$ 是一个 k 元分拆组，并满足对所有 $m \in \{1, \ldots, k\}$，

- $\lambda_{(m)}$ 的每个部分至少为 $m + \max\{m - 2a, 0\} + \max\{m - (k - 2b + 1)\ 0\}$，对于每个 $m = 1, \ldots, k$，并且
- $\lambda_{(m)}$ 是一个仅含偶数部分的分拆。

我们首先计算 $\mathcal{X}^e_{a,b,k}$ 的生成函数。

命题 5.2。 设 a、b 和 k 为满足 $2a + 2b - 1 \le k$ 的非负整数。那么

$$\sum_{(\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{fs}_{-1}(\boldsymbol{\lambda})) \in \widetilde{\mathcal{X}}^e_{a,b,k}} q^{|(\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{fs}_{-1}(\boldsymbol{\lambda}))|} = \sum_{s_1 \ge \cdots \ge s_k \ge 0} \frac{q^{s_1^2 + \cdots + s_k^2 - 2(s_2 + s_4 + \cdots + s_{2a}) + 2(s_{k-2b+2} + s_{k-2b+4} + \cdots + s_k)}}{(q^2;q^2)_{s_1 - s_2} \cdots (q^2;q^2)_{s_{k-1} - s_k} (q^2;q^2)_{s_k}}.$$

证明。此证明沿用定理 4.2 的相同论证，只作如下修改：$\mathcal{X}^e_{a,b,k}$ 和 $X^e_{a,b}(s_1, \ldots, s_k)$ 分别替换为 $\mathcal{X}^e_{a,b,k}$ 和 $X^e_{a,b}(s_1, \ldots, s_k)$，而导出 (4.4) 和 (4.5) 的部分则替换为以下内容。对于 $2a < m \le k - 2b + 1$，$\lambda^{(m)}$ 的分拆部分至少为 $2m - 2a$，因此

$$A_2 = \frac{q^{(2a+2)s_{2a+1}} q^{2s_{2a+2} + 2s_{2a+3} + \cdots + 2s_{k-2b+1}} q^{-(2k-2a-4b+2)s_{k-2b+2}}}{(q^2;q^2)_{s_{2a+1} - s_{2a+2}} \cdots (q^2;q^2)_{s_{k-2b+1} - s_{k-2b+2}}}.$$

对于 $k - 2b + 1 < m \le k$，$\lambda^{(m)}$ 的分拆部分至少为 $3m - k - 2a + 2b - 1$，因此

$$A_3 = \frac{q^{(2k-2a-4b+6)s_{k-2b+2}} q^{2s_{k-2b+3} + 4s_{k-2b+4} + 2s_{k-2b+5} + 4s_{k-2b+6} + \cdots + 2s_{k-1} + 4s_k}}{(q^2;q^2)_{s_{k-2b+1} - s_{k-2b+2}} \cdots (q^2;q^2)_{s_k}}.$$

这就得到

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \widetilde{X}^e_{a,b}(s_1, \ldots, s_k)} q^{|\boldsymbol{\lambda}|} = \frac{q^{2(s_1 + s_3 + \cdots + s_{2a-1}) + 2(s_{2a+1} + s_{2a+2} + \cdots + s_{k-2b} + s_{k-2b+1}) + (4s_{k-2b+2} + 2s_{k-2b+3} + 4s_{k-2b+4} + \cdots + 2s_{k-1} + 4s_k)}}{(q^2;q^2)_{s_1 - s_2} \cdots (q^2;q^2)_{s_{k-1} - s_k} (q^2;q^2)_{s_k}}.$$

因此，我们得到了所需的公式。 □

我们证明 $\mathcal{X}^e_{a,b,k}$ 和 $\mathcal{Z}^e_{a,b,k}$ 之间存在双射。

命题 5.3。 在 $\mathcal{X}^e_{a,b,k}$ 与 $\mathcal{Z}^e_{a,b,k}$ 之间存在保权双射。

Proof. 这与定理 4.4 的证明完全相同，只需将 $r = 2b - 1$ 替换为 $r = 2b$. □

最后，我们还需要最后一个命题，以便利用定理 1.12 来完成定理 1.13的证明。

命题 5.4. 下列等式成立：

$$(1+q)\sum_{f\in\widetilde{\mathcal{Z}}^e_{a,b,k}} q^{|f|}=\sum_{f\in\mathcal{Z}^e_{a,b-1,k}} q^{|f|}+q\sum_{f\in\mathcal{Z}^e_{a,b,k}} q^{|f|}.$$

~证明。我们有包含关系 $\mathcal{Z}^e_{a,b,k}\subseteq\mathcal{Z}^e_{a,b,k}\subseteq\mathcal{Z}^e_{a,b-1,k}$。此外，映射 $(f_0,f_1,f_2,\dots)\mapsto(f_0,f_1-1,f_2,\cdots)$ 是从 $\mathcal{Z}^e_{a,b,k}\setminus\mathcal{Z}^e_{a,b,k}$ 到 $\mathcal{Z}^e_{a,b-1,k}\setminus\mathcal{Z}^e_{a,b,k}$ 的一个~ ~双射。因此

$$\begin{aligned}(1+q)\sum_{f\in\widetilde{\mathcal{Z}}^e_{a,b,k}} q^{|f|}&=\sum_{f\in\widetilde{\mathcal{Z}}^e_{a,b,k}} q^{|f|}+\sum_{f\in\widetilde{\mathcal{Z}}^e_{a,b,k}\setminus\mathcal{Z}^e_{a,b,k}} q^{|f|+1}+q\sum_{f\in\mathcal{Z}^e_{a,b,k}} q^{|f|}\\&=\sum_{f\in\widetilde{\mathcal{Z}}^e_{a,b,k}} q^{|f|}+\sum_{f\in\mathcal{Z}^e_{a,b-1,k}\setminus\widetilde{\mathcal{Z}}^e_{a,b,k}} q^{|f|}+q\sum_{f\in\mathcal{Z}^e_{a,b,k}} q^{|f|}\\&=\sum_{f\in\mathcal{Z}^e_{a,b-1,k}} q^{|f|}+q\sum_{f\in\mathcal{Z}^e_{a,b,k}} q^{|f|}.\end{aligned}$$

□

利用 定理 1.12 来计算命题中的两个和 5.4 即可完成定理 1.1的证明 3.

最后，我们给出定理1.15的证明。

定理*1.15*的证明。 由定理 1.12和定理 1.13 结合 $b=0$，我们得到 (5.1)

$$\sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0}\frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2-2(s_2+s_4+\cdots+s_{2a})}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}=\sum_{s=0}^{a}\frac{(-q;q^2)_\infty(q^{k+1+2a-4s},q^{k+3-2a+4s},q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty},$$

and

$$\begin{aligned}&\sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0}\frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2-2(s_2+s_4+\cdots+s_{2a})}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}\\&\quad=\frac{(-q^3;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\sum_{s=0}^{a}\left[(q^{k+3+2a-4s},q^{k+1-2a+4s},q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty+q(q^{k+1+2a-4s},q^{k+3-2a+4s},q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty\right],\end{aligned}\tag{5.2}$$

分别。首先验证，在这一特化下，(5.1) 和 (5.2) 的右端相同。事实上，在 (5.2) 的右端中，我们对求和号内出现的第二个 $s\mapsto a-s$ -Pochhammer 符号中的 q作变量替换。在这一重编号下，第二个 q-Pochhammer 符号等于第一个，因此两个右端相同。

接下来，我们证明所需的右端可以由 (5.1) 的右端得到。论证与定理 1.14 的证明类似。我们将 (5.1) 右端的求和拆分为两个范围 $s=0,\dots,\lfloor a/2\rfloor$和 $s=\lfloor a/2\rfloor+1,\dots,a$。对于 $s=\lfloor a/2\rfloor+1,\dots,a$，有 $k+3-2a+4s<k+1$。因此，(5.1) 的右端可改写为

$$\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\lfloor a/2\rfloor}\frac{(-q;q^2)_\infty(q^{k+1+2a-4s},q^{k+3-2a+4s},q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\\&\qquad+\sum_{s=\lfloor a/2\rfloor+1}^{a}\frac{(-q;q^2)_\infty(q^{k+3-2a+4s},q^{k+1+2a-4s},q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.\end{aligned}\tag{5.3}$$

注意，集合 $\{k+1-2i:\ i=0,\ \dots\dots,\ a\}$ 可以分解为不交并

$$\begin{aligned}&(\{k+1-2a,k+1-2a+4,k+1-2a+8,\dots\}\cap\{1,\dots,k+1\})\\&\qquad\sqcup(\{k+3-2a,k+3-2a+4,k+3-2a+8,\dots\}\cap\{1,\dots,k+1\}),\end{aligned}$$

且第一个和第二个集合分别等于

$$\{k+1+2a-4s:s=\lfloor a/2\rfloor+1,\dots,a\},\quad\text{and}\quad\{k+3-2a+4s:s=0,\dots,\lfloor a/2\rfloor\},$$

分别。将此分解与（5.3）结合，即可得到所需结果。 □

6. 开放问题

我们提出了两个值得进一步研究的方向。

首先，可以尝试为直接由我们结果推出的恒等式寻找组合证明。由定理 1.11，我们得到同一乘积表达式的两种不同无穷求和表达式。更确切地说，在定理 1.11中分别取 $j=k-a$ 和 $r=a$，可得定理 1.17中出现的 $\mathrm{AK}_{a,\,k}(q)$。取 $\mathrm{AK}_{a,\,k}(q)-\mathrm{AK}_{a+1,\,k}(q)$之差，得到

$$\sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0}\frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2-s_1-\cdots-s_{k-a}+s_{k-a+1}+\cdots+s_k}(1-q^{2s_{k-a}})}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}=\frac{(-q^2;q^2)_\infty(q^{2a+2},q^{2k+2-2a},q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

另一方面，在定理 1.11 中取 $j=0$ 和 $r=k-2a$，可得到另一个恒等式

$$\sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0}\frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2+(s_1-s_2+s_3-\cdots+s_{2a-1}-s_{2a})+(s_{2a+1}+\cdots+s_k)}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}=\frac{(-q^2;q^2)_\infty(q^{2a+2},q^{2k+2-2a},q^{2k+4};q^{2k+4})_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}.$$

由上述两个恒等式，我们得到

$$\sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0}\frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2-s_1-\cdots-s_{k-a}+s_{k-a+1}+\cdots+s_k}(1-q^{2s_{k-a}})}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}=\sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0}\frac{q^{s_1^2+\cdots+s_k^2+(s_1-s_2+s_3-\cdots+s_{2a-1}-s_{2a})+(s_{2a+1}+\cdots+s_k)}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}. \tag{6.1}$$

问题 6.1。 为（6.1）寻找一个组合证明。

类似地，对乘积表达式进行比较，会得到两个求和变量数量不同的求和表达式之间的恒等式。根据 [DJJ25，定理 1。12]和定理 1.13，我们得到

$$\sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0}\frac{q^{2(s_1^2+\cdots+s_k^2-s_1-\cdots-s_j+s_{k-r+1}+\cdots+s_k)}(-q^{1+2s_k};q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{k-1}-s_k}(q^2;q^2)_{s_k}}=\sum_{s_1\geq\cdots\geq s_{2k}\geq 0}\frac{q^{s_1^2+\cdots+s_{2k}^2-2(s_2+s_4+\cdots+s_{2j})+2(s_{2k-2r+2}+s_{2k-2r+4}+\cdots+s_{2k})}}{(q^2;q^2)_{s_1-s_2}\cdots(q^2;q^2)_{s_{2k-1}-s_{2k}}(q^2;q^2)_{s_{2k}}}. \tag{6.2}$$

问题 6.2。寻找一种组合 证明 6.2)（例如，通过粒子运动或其他任意组合方法）

其次，我们提出在其他方向上的推广，并给出我们结果的替代证明。Stanton [Sta18] 不仅证明了恒等式（1.4），还证明了安德鲁斯–戈登恒等式的二项式扩展 [Sta18，定理 3。1]：设 j，$r\geq 0$和 $k\geq 1$ 为满足 $j+r\leq k$的整数。那么

$$\sum_{s_1\geq\cdots\geq s_k\geq 0}q^{s_1^2+\cdots+s_k^2+s_{k-r+1}+\cdots+s_k}\cdot\frac{q^{-s_1-\cdots-s_j}(1+q^{s_1+s_2})(1+q^{s_2+s_3})\cdots(1+q^{s_{j-1}+s_j})}{(q)_{s_1-s_2}\cdots(q)_{s_{k-1}-s_k}(q)_{s_k}}=\sum_{s=0}^{j}\binom{j}{s}\frac{(q^{2k+3},q^{k+1-r+j-2s},q^{k+2+r-j+2s};q^{2k+3})_\infty}{(q)_\infty}. \tag{6.3}$$

此外，j 因子 q^{-s_1} 和 $q^{-s_i}(1+q^{s_{i-1}+s_i})$，$2\leq i\leq j$ 可以替换为 $\{q^{-s_1}\}\cup\{q^{-s_i}(1+q^{s_{i-1}+s_i}):2\leq i\leq k-r\}$ 的任意 j 元子集。若能为我们的结果发展出类似的二项式扩展，将会很有意思。

问题 6.3. 求定理 1.11、定理 1.12以及定理 1.13 的二项式推广，仿照（6.3）的思路。

在作者与 Jouhet 的合作工作 [DJJ25] 中，利用 Bailey 对证明了带二项式系数的 Stanton 型推广。若能找到回答前一问题的显式公式，则自然会寻求这些恒等式的 Bailey 对证明。同样，获得我们主要结果的 Bailey 对证明也将是有意义的。

问题 6.4. 利用 Bailey 对证明定理 1.11、定理 1.12以及定理 1.13 。

致谢

作者得到 SNSF Eccellenza 资助项目 PCEFP2 202784 的支持。他们感谢 Frédéric Jouhet 提出是否有可能用粒子运动证明 Chern–Li–Stanton–Xue–Yee 恒等式，并感谢他对本文早期版本的评论。

参考文献

[ADJM23] P. Afsharijoo、J. Dousse、F. Jouhet 与 H. Mourtada。安德鲁斯–戈登恒等式与交换代数。Adv. Math. 417, 108946, 28 2023 paper No pp, 。[And74] G. E. Andrews。罗杰斯–拉马努金恒等式关于奇模数的解析推广。Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 71:4082–4085, 1974。[And10] G. E. Andrews。分拆恒等式中的奇偶性。Ramanujan J., 23(1-3):45–90, 2010。[AK94] S. Ariki 与 K. Koike。$(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})$ 的赫克代数 $\wr\Sigma_n$ 及不可约表示的构造。Adv. Math., 106:216–243, no. 2, 1994。[AM00] S. Ariki 与 A. Mathas。型为 $G(r,1,n)$ 的赫克代数的单模个数。Math. Z., 233:601–623, no. 3, 2000。[Bax81] R. J. Baxter。硬六边形模型中的罗杰斯–拉马努金恒等式。J. Stat. Phys., 26:427–452, 1981。[Bre80] D. Bressoud。罗杰斯–拉曼努金恒等式的解析与组合推广。Mem. Amer. Math. Soc. 24, no 227, 54 pp, 1980。[BM93] M. Broué 与 G. Malle。分圆赫克代数。Astérisque, 212:119–189, 1993。[BMS13] C. Bruschek、H. Mourtada 与 J. Schepers。弧空间与罗杰斯–拉马努金恒等式。Ramanujan J., 30:9–38, 2013。[CLS+24] S. Chern、Z. Li、D. Stanton、T. Xue 与 A. J. Yee。有木–小池代数与罗杰斯–拉马努金型分拆。J. Algebraic Combin., 60(2):491–540, 2024。[DHK25] J. Dousse、L. Hardiman 与 I. Konan。来自 $A_1^{(1)}$ 的高层晶体的分拆恒等式。Proc. Amer. Math. Soc., 153:1363–1382, 2025。[DJJ25] J. Dousse、J. Jang 与 F. Jouhet。安德鲁斯–戈登型与 Stanton 型恒等式：双射方法与贝利引理方法。预印本, arXiv:2507.13239v1, 2025。[DJK24] J. Dousse、F. Jouhet 与 I. Konan。安德鲁斯–戈登型与 Bressoud 型恒等式的组合方法。预印本, arXiv:2403 05414, 2024 . 。[GR04] G. Gasper 与 M. Rahman。基本超几何级数，第二版。数学及其应用百科全书 96, 剑桥大学出版社，剑桥，2004。[Gor61] B. Gordon。罗杰斯–拉曼努金恒等式的组合推广。Amer. J. Math., 83:393–399, 1961。[KL24] S. Kanade 与 J. Lovejoy。Bailey 对与一条 Chern–Li–Stanton–Xue–Yee 恒等式。预印本, arXiv:2410.15408v1, 2024。[Kur10] K. Kurşungöz。安德鲁斯–戈登恒等式中的奇偶性考量。European J. Combin., 31(3):976–1000, 2010。[KY13] S. Kim 与 A. J. Yee。罗杰斯–拉马努金–戈登恒等式、广义戈尔尼茨–戈登恒等式与奇偶性问题。J. Combin. Theory Ser. A, 120(5):1038–1056, 2013。[LW84] J. Lepowsky 与 R. L. Wilson。标准模的结构，I：泛代数与罗杰斯–拉曼努金恒等式。Invent. Math., 77:199–290, 1984。[LW85] J. Lepowsky 与 R. L. Wilson。标准模的结构，II：情形 $A_1^{(1)}$，主分次。Invent. Math., 79:417–442, 1985。[MP99] A. Meurman 与 M. Primc。$sl(2,\mathbb{C})\sim$ 的标准模的湮灭场与组合恒等式。Mem. Amer. Math. Soc., 137:viii + 89 pp., 1999。[RR19] L. J. Rogers 与 S. Ramanujan。组合分析中若干恒等式的证明。Cambr. Phil. Soc. Proc., 19:211–216, 1919。[Sil18] A. V. Sills，《罗杰斯–拉马努金恒等式导论》，CRC Press，佛罗里达州博卡拉顿，2018。[Sta18] D. Stanton。二项式安德鲁斯–戈登–布雷索德恒等式。载于正交多项式与 q-级数前沿，Contemp. Math. Appl. Monogr. Expo. Lect. Notes 第1卷，第7–19页。World Sci. Publ.，新泽西州哈肯萨克，2018。[War97] S. O. Warnaar。安德鲁斯–戈登恒等式与 q-多项系数。Comm. Math. Phys., 184:203–232, 1997。

日内瓦大学，总议会街 7–9 号，1205 日内瓦，瑞士
电子邮箱地址：jehanne.dousse@unige.ch

日内瓦大学，总议会街 7–9 号，1205 日内瓦，瑞士电子邮箱地址：
jihyeug.jang@unige.ch