arXiv:2603.05306v1 [math.PR] 5 Mar 2026

稀疏等相关高斯场的最大值及其应用

Johannes Heiny
数学系，瑞典皇家理工学院，斯德哥尔摩
heiny@kth.se

Tiefeng Jiang
数据科学学院，香港中文大学（深圳）jiang040@cuhk.edu.cn

Tuan Pham*
统计与数据科学系，德克萨斯大学奥斯汀分校
tuan.pham@utexas.edu

Yongcheng Qi
数学与统计系，明尼苏达大学德卢斯分校
yqi@d.umn.edu

2026年3月6日

摘要

我们研究三角形上稀疏且等相关的高斯场的极值：每条垂直或水平线上的相关系数均等于参数 $r \in [0, 1/2]$，其他位置的相关系数则均为零。这个问题与高维统计学和极值理论中的多个问题密切相关。我们确定了使 r 的标准 Gumbel 分布失效的阈值。我们的结果基于对泊松近似的陈-斯坦方法的一项精妙应用。作为应用，我们讨论了本研究结果对多重检验的影响，并解决了 Heiny 和 Kleemann [2025], Tang 等人 [2022]和 Fan 和 Jiang [2019]中遗留的若干未解问题。

目录

1 引言 2 **2 主要结果 5** **3 应用 I：最大点间距离 6** 3.1 固定边缘情形 . 7 3.2 n-依赖边缘分布情形 . 9

*通讯作者。

4 应用 II：等相关总体的样本系数 数 114.1 固定边际情形 .124.2 n-依赖边缘分布情形 .145 应用 III：多重检验中的 FWER 控制 166 定理 2.1 的证明 167 定理 2.2 的证明 228 定理 2.3 的证明 249 技术结果 2410 参考文献 29

1 引言

考虑一个中心化高斯场 $\mathcal{G}_n = \left\{G^{ij}\right\}_{1\le i<j\le}$<style id='11>n ，其相关结构由下式给出

$$\mathbb{E}\left(G_{ij}G_{kl}\right) = \begin{cases} 0 & \text{if } \left|\{i,j\}\cap\{k,l\}\right| = 0; \\ r & \text{if } \left|\{i,j\}\cap\{k,l\}\right| = 1; \\ 1 & \text{if } \left|\{i,j\}\cap\{k,l\}\right| = 2. \end{cases} \tag{1.1}$$

该场 $\mathcal{G}_n$ 可视为定义在三角形上的高斯场，其中属于同一行或同一列的所有元素均以共同参数 $r \in [0, 1/2]$, 等相关，否则相互独立。限制条件 $r \in [0, 1/2]$ 是自然的，因为当 r 为负数或超过 1/2 时， $\mathcal{G}_n$ 的相关结构便无法明确定义。例如，要求 $r \le 1/2$，可以通过注意到以下事实看出:

$$\mathrm{Var}\,(G_{12} - G_{23} + G_{34} - G_{41}) = 4 - 8r \ge 0.$$

尽管形式特殊，高斯场 $\mathcal{G}_n$ 在（1.1）中出现在高维统计学和极值理论的许多不同问题中。特别是，理解 $\mathcal{G}_n$ 的极值有助于改进许多现有结果。据我们所知，所有需要处理相关结构（1.1）的现有结果，都仅限于 $r \le 1/3$ 的情形，此时 $\mathcal{G}_n$ 的最大值表现得如同独立同分布标准正态变量的最大值。下面我们介绍（1.1）出现的若干背景。

- 高维空间中的最大点间距离。在Heiny 和 Kleemann [2025]; Tang 等人[2022], 作者研究了该统计量的渐近分布

$$D_n := \max_{1\le i<j\le p} \|\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{X}_j\| \tag{1.2}$$

其中，向量 $\{\boldsymbol{X}_i = (x_{k1}, \ldots, x_{kn})\}^p{}_{i=1}$ 在 $\mathbb{R}^n$中独立同分布，且坐标独立同分布，均值为零、方差为单位方差。我们注意到，在（1.2）中，n 表示数据的维数，而 p 表示样本量。我们采用了 Heiny 和 Kleemann [2024]所使用的记法。相比之下，Tang 等人 [2022] 使用相反的约定，其中 n 表示样本量，p 表示维数。尽管记法不同，以下条件（1.3）在两篇文献中相同。

Heiny 和 Kleemann [2025] 以及 Tang 等人 [2022] 证明，在高维情形下，满足适当的矩条件且D_n 渐近服从 Gumbel 分布

$$\mathbb{E}x_{11}^4 \le 5. \tag{1.3}$$

在这些研究中，当（$_n$ 1.3）不成立时，的渐近分布仍未得到解决。值得注意的是，这些论文对（$_n$ 的分析，实质上归结为研究式（$\mathcal{G}_n$ 1.1）中的高斯场的最大值，其相关参数为

$$r = \frac{\mathbb{E}[x_{11}^4] - 1}{2\mathbb{E}[x_{11}^4] + 2}.$$

条件（1.3）等价于要求$r \le \frac{1}{3}$。

- 等相关总体的样本系数。在Fan 和 Jiang [2019], 中，作者研究了超高维情形下最大样本系数的渐近分布。这包括下文式（1.5）和（1.4）所述的样本协方差矩阵和相关矩阵的最大元素。第4节介绍了一些背景和相关结果。

让我们简要介绍设定。给定n 独立同分布数据点$\boldsymbol{X}_k = \left(x_{k1},\ x_{k2},\ \ldots,\ x_{kp}\right)^\top,\ 1 \le k \le n$ 来自具有协方差矩阵的多元正态分布

$$\mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}_1 \boldsymbol{X}_1^\top\right) = (1-\rho)\,\boldsymbol{I}_p + \rho \mathbf{1}\mathbf{1}^\top,$$

定义样本相关系数和（未标准化的）样本协方差系数

$$\hat{\rho}_{ij} := \frac{\sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{kj} - \bar{x}_j)^2}}, \tag{1.4}$$

$$\hat{r}_{ij} := \sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j). \tag{1.5}$$

Fan 和 Jiang [2019]证明，在高维情形下，$\max_{i<j}\hat{\rho}_{ij}$和 $\max_{i<j}\hat{r}_{ij}$渐近服从 Gumbel 分布、正态分布，或二者的混合分布，具体取决于$\rho\sqrt{\log p} \ll 1$、$\rho\sqrt{\log p} \gg 1$，还是 $\rho\sqrt{\log p} \to c \in (0, \infty)$。

有趣的是，$\max_{i<j}\hat{\rho}_{ij}$和 $\max_{i<j}\hat{r}_{ij}$的分析都可以归结为研究式 $\mathcal{G}_n$ （1.1）中的高斯场 $\mathcal{G}_n$，其相关参数为

$$r = \frac{\rho}{1+\rho} \quad \text{for (1.5)}, \qquad r = \frac{\rho - \rho^2/2}{1 + 2\rho - \rho^2/2} \quad \text{for (1.4)}.$$

注意，当 $\rho \to 1$ 时，参数 r 在式（1.5）的情形下趋近于 1/2，在式（1.4）的情形下趋近于 1/5。因此，技术条件为

$$\limsup \rho < \tfrac{1}{2} \tag{1.6}$$

在 Fan 和 Jiang [2019]对最大值进行分析时$\max_{i<j}\hat{r}_{ij}$，他们采用了这一假设。值得指出的是，这一假设等价于要求 $r \le \frac{1}{3}$ 属于（1.1）。

有趣的是，可以看出，在高斯情形下，相应的r 对于（1.4）始终小于或等于 1/5，这解释了为什么分析 ρ的最大值时无需对$\max_{i<j}\hat{\rho}_{ij}$ 作出限制，见Fan 和 Jiang [2019]。

- 多重检验中的族系错误率（***FWER***）控制。考虑多重检验问题

$$H_{0ij}:\theta_{ij}=0 \text{ against } H_{1ij}:\theta_{ij}>0$$

其中，对每个 $1\le i<j\le n$，都得到一个单个观测值 $Y_{ij}\sim N\left(\theta_{ij},1\right)$。

假设 $\mathcal{Y}_n=\left\{Y_{ij};\ 1\le i<j\le n\right\}$ 的联合分布是一个协方差满足以下条件的高斯图模型

$$\mathbb{E}Y_{ij}Y_{kl}:=\begin{cases}0 & \text{if } |\{i,j\}\cap\{k,l\}|=0;\\ r_{ijkl}\in[0,1/2-\delta] & \text{if } |\{i,j\}\cap\{k,l\}|=1;\\ 1 & \text{if } |\{i,j\}\cap\{k,l\}|=2\end{cases} \tag{1.7}$$

对某些 $\delta>0$。

上述图协方差结构常见于脑成像数据：相邻脑区通常相关，而非相邻脑区往往相互独立。控制族系错误率（FWER）的一种自然检验统计量是：当

$$\max_{1\le i<j\le n} Y_{ij}>u_n \tag{1.8}$$

对于某个阈值 u_n。因此，了解该图模型下 $\max_{1\le i<j\le n} Y_{ij}$ 的行为很有意义。基于光滑高斯场越界概率的标准方法 Chengand Xiao [2016]; Cheng and Schwartzman [2019]; Cheng and Xiao[2024] 依赖光滑流形结构，由于图的离散性质，这些方法并不适用。尽管如此，我们的主要结果表明，分析具有相关结构（1.1）的 $\mathcal{G}_n$ u_n，可以得到其渐近精确的近似。

一般而言，在复杂相依性下控制 FWER 颇具挑战：人们往往诉诸并集界，但这会导致过于保守的阈值。因此，多重检验文献大多转而关注如何控制错误发现率（FDR）。作为我们结果的一项应用，我们证明，对于高斯图模型（1.7），实际上可以得到控制 FWER 的渐近精确阈值。

本文旨在通过建立关于 $\mathcal{G}_n$（1.1）中高斯场最大值的新结果，弥补上述所有不足。我们证明，也许出乎意料的是，只要 $\mathcal{G}_n$ 的最大值仍表现得如同独立同分布标准正态随机变量的最大值一样

$$1-2r\gg\frac{\log\log n}{\sqrt{\log n}}.$$

这与一种普遍看法相悖：当 $r>1/3$ 时，冈贝尔渐近分布不再成立。

此外，在更精细的尺度（$1-2r$）$\log n\to\lambda\in[0,\infty)$ 下，独立同分布行为会被打破。在这一机制下，我们证明，最大值的渐近分布类似于经过扰动的泊松过程最右端点，或泊松过程最右侧两个点之和。我们的证明通过精心设计的截断论证来实现渐近独立性，并巧妙地运用 Chen–Stein方法进行泊松近似。

作为新近获得的结果的推论，我们证明如下结论。

1. 对最大点间距离 D_n 所做的四阶矩有上界 5 的假设，即（1.3），可以去掉。因此，Heiny 和 Kleemann [2025]; Tang 等人 [2022]中的结果在没有该假设的情况下仍然成立。

2. 当四阶矩在 $\log p$ 的尺度上发散至无穷时，独立同分布行为不再成立，并且 D_n 具有不同的极限分布。

3. 对样本相关系数，我们在Fan 和 Jiang [2019] 针对非高斯分布的结果基础上，去除了相关参数 ρ 必须与 1/2 保持正距离这一限制（见1.6）。此外，我们证明，在非高斯情形下，情况要复杂得多：即使在弱依赖区间 $\rho\sqrt{\log p} \to 0$ 中，只要允许边际分布的四阶矩发散，涉及非 Gumbel 分布和中心极限定理的相变仍可能出现。

> 相较之下，在高斯情形下（或固定边际情形，见下文第3节和第4 节），极限分布始终为 Gumbel 分布。类似地，最大点间距离也可能呈现非 Gumbel 分布，见Heiny 和 Kleemann [2025]。

4. 以下定理2.1 的结果可用于为高斯图模型中的多重检验提供渐近精确的阈值。

本文结构。 关于高斯场最大值的主要结果 $\mathcal{G}_n$ 在第 2节给出。三个应用——最大点间距离、等相关总体的样本相关系数以及多重检验——分别在第 3、 4 和第 5节介绍。证明汇集在第 6、 7 和第 8节，其他一些技术性结果见第 9节。

2 主要结果

为描述高斯场 $\mathcal{G}_n$ 在（1.1）中的最大值的极限分布，我们需要以下数列

$$c_n := \sqrt{2\log n} \quad \text{and} \quad d_n := \sqrt{2\log n} - \frac{\log\log n + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log n}}. \tag{2.1}$$

除非另有明确说明，我们假设相关参数 $r = r_n$ 依赖于n。本文中所有极限均取$n \to \infty$。

我们的第一个结果涉及弱依赖区间。

定理 **命题 2.1**。 假设 $(1-2r)\sqrt{\log n}\log\log n \to \infty$ 并回顾高斯场 $\mathcal{G}_n$ 在 (1.1)。则 n,

$$\sqrt{2}c_n\left(\max_{1\le i<j\le n} G_{ij} - \sqrt{2}c_n + \frac{\log\left(4\sqrt{\pi}c_n\right)}{\sqrt{2}c_n}\right)$$

依分布收敛于标准 *Gumbel* 分布，其累积分布函数为 $\exp(-e^{-x})$。

众所周知，正态分布属于冈贝尔分布的最大值吸引域，这对应于定理 *2.1* $= 0$ 中的特殊情形 (例如参见Embrechts 等人[1997]) 。定理 2.1 指出，即使存在相依性， $\mathcal{G}_n$ 的最大值也与独立同分布标准正态随机变量的最大值表现相似，只要 ~~(1~~ $-2r)\sqrt{\log n}/\log\log n \to \infty$。接下来，我们描述临界情形下的极限分布，此时这种独立同分布的相似性不再成立。

令 $\{\zeta_k; k \ge 1\}$ 为一列独立同分布的标准指数随机变量，并定义

$$\eta_i := -\log\left(\sum_{k=1}^{i}\zeta_k\right), \qquad i \ge 1. \tag{2.2}$$

那么，集合 $\{\eta_i; i \geq 1\}$ 构成一个强度测度为$e^{-x}dx$的泊松点过程（P.P.P.）的一个实现。本文中我们将交替使用这两种等价表述。

在临界相关机制下，$\max_{1\leq i<j\leq n} G_{ij}$ 的极限分布可表示为点 η_i 与独立同分布正态变量的上确界，具体如下一个结果所述。

定理 2.2. 设 $(1-2r)\log n \to \lambda \in (0,\infty)$ 并回顾式 $\mathcal{G}_n$ 中的高斯场 (1.1)。则有

$$c_n\left(\max_{1\leq i<j\leq n} G_{ij} - \sqrt{2}d_n\right) \xrightarrow{d} \sup_{i<j}\left(\frac{\eta_i+\eta_j}{\sqrt{2}} + \sqrt{2\lambda}\cdot Z_{ij}\right) - \lambda, \tag{2.3}$$

*whe*其中 η_i 在 (2.2) 中定义，且 Z_{ij} 是独立于 η_k 的独立同分布标准正态变量 .

注意，由引理 9.3，式（2.3）右侧的上确界几乎必然有限，且具有非退化分布。在定理 2.2 中，相关参数 r 趋于 $1/2$ 的速率是特定的。若令 $r \to 1/2$ 的速率更快，则 Z_{ij} 将从极限分布的表达式中消失。

定理2.3. 假设$(1-2r)\log n \to 0$。则成立

$$c_n\left(\max_{1\leq i<j\leq n} G_{ij} - \sqrt{2}d_n\right) \xrightarrow{d} \frac{\eta_1+\eta_2}{\sqrt{2}}.$$

注2.1. 我们分别比较定理2.1 与定理2.2 和2.3中的尺度。在这三种情况下，尺度序列的阶相同，但中心序列中的二阶项不同。对于定理2.1，中心化中的二阶项为 $\log\log n/(4\sqrt{\log n})$，而对于定理2.2 和2.3，则为 $\log\log n/(2\sqrt{\log n})$。——

这种微妙的差异可以通过考察哪些项对最大值有贡献来解释。我们的证明表明，在定理 2.1 中，有 $\Theta(p^2)$ 个项 G_{ij}在相同尺度上对最大值有贡献；而在定理2.2 和2.3 中，只有大小为 $\Theta(p)$ 的集合对最大值有显著贡献。这里，记号$a_n = \Theta(b_n)$ 表示$b_n/C \leq a_n \leq Cb_n$，其中$C > 0$ 是某个普适常数。

3 应用 I：最大点间距离

最大点间距离是随机几何和统计学中的经典研究对象，过去几十年来已得到广泛研究。

设 $\boldsymbol{X}_1,\ldots,\boldsymbol{X}_p$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的独立同分布随机向量，其中每个 $\boldsymbol{X}_i = (x_{i1},\ldots,x_{in})^\top$ 的分量独立同分布，且与某个一般随机变量 ξ同分布。我们假设该随机变量均值为零、方差为单位方差。这里n 表示维数，p表示样本量。为与 Heiny 和 Kleemann [2024]保持一致，我们采用这一约定。请注意，Tang 等人 [2022] 用 (n,p) 分别表示样本量和维数。

目标是研究其渐近分布

$$D_n := \max_{1\leq i<j\leq p} \|\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{X}_j\|_2 \tag{3.1}$$

当 n、$p \to \infty$ 时。

这一问题历史悠久，已有结果虽不完整，但包括 Matthews 和 Rukhin[1993]；Henze andKlein [1996]；Jammalamadaka andJanson [2015]；另见其中的参考文献。尽管这些早期结果是在固定维情形下建立的，但近期高维统计学的发展促使人们需要研究维数发散时的渐近分布。

在这一高维情形下，D_n 的极限分布尚未得到充分了解。据我们所知，目前仅有 Tang 等人 [2022]；Heiny 和 Kleemann [2025]研究过这一问题。在这两项研究中，作者证明，当 D_n 在p，$n \to \infty$ 且满足以下条件时，其渐近服从冈贝尔分布：

$$\mathbb{E}\xi^4 \le 5.$$

接下来，我们通过去除上述条件来改进他们的结果。此外，我们证明，如果允许 ξ 的分布依赖于n，即 $\xi = \xi_n$，则会出现不同的极限分布。因此，这些极限分布可能会显著依赖于量 $\mathbb{E}\xi_n^4$。

3.1 固定边际分布情形

我们对 ξ施加以下条件之一：

$$\exists\, s > 2, \varepsilon > 0: \quad \mathbb{E}\left[\,|\xi|^{2s+\varepsilon}\,\right] < \infty. \tag{B1}$$

$$\exists\, \eta > 0: \quad \mathbb{E}\left[e^{\eta|\xi|^2}\right] < \infty. \tag{B2}$$

$$\exists\, K < \infty: \quad \mathbb{P}(|\xi| \le K) = 1. \tag{B3}$$

可以看出，我们的条件（B1）–（B3）与 Heiny 和 Kleemann[2025], 的定理 2.1中的条件相似，但我们没有对 $\mathbb{E}\xi^4$的大小施加任何限制。技术细节请参见备注3.1 。

在这两项假设中的任一项成立时，只要p相对于n的增长不过快，最大点间距离渐近服从 Gumbel 分布。

命题3.1。 在条件（B1）–（B3）之一成立时，我们有：

$$\sqrt{2}c_p\left(\frac{D_n^2 - 2n}{\sqrt{2n(1+\mathbb{E}\xi^4)}} - \sqrt{2}c_p + \frac{\log\left(4\sqrt{\pi}c_p\right)}{\sqrt{2}c_p}\right) \tag{3.2}$$

依分布收敛到标准 *Gumbel* 分布，其累积分布函数为 $\exp(-e^{-x})$，其中 c_p 定义见(2.1) 其中以 p 替换 n，且 p 满足

(i) $p = O(n^{(s-2)/4})$ *if* (B1) *holds.*
(ii) $p = \exp(o(n^{1/5}))$ 若 (B2)成立。
(iii) $p = \exp\left(o\left(\frac{n^{1/3}}{(\log n)^{2/3}}\right)\right)$ 若 (B3) 成立。

注意，(3.2) 中的缩放方式与 Heiny 和 Kleemann [2024完全相同].

命题 3.1 的证明。令 $\mathcal{G}_n = \left\{G_{ij}: \quad 1 \le i < j \le p\right\}$ 为 (1.1) 中相关参数为 r 的高斯场$r = (\mathbb{E}\xi^4 - 1)/(2(\mathbb{E}\xi^4 + 1))$。由于

$$1 - 2r = \frac{2}{\mathbb{E}\xi^4 + 1} > 0,$$

定理的一个应用2.1 可得

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{2}c_p\left(\max_{1\le i<j\le p} G_{ij} - \sqrt{2}c_p + \frac{\log\left(4\sqrt{\pi}c_p\right)}{\sqrt{2}c_p}\right) \le x\right) \to \exp\left(-e^{-x}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

因此，只需验证

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\left(\frac{D_n^2-2n}{\sqrt{2n(1+\mathbb{E}\xi^4)}}\le t\right)-\mathbb{P}\Big(\max_{1\le i<j\le p}G_{ij}\le t\Big)\right|\to 0 \tag{3.3}$$

如果 (B1)–(B3) 中任一条件成立，并且对 p 的相应要求与命题3.1中的陈述一致。为验证 (3.3)，注意到

$$\mathbb{P}\left(D_n^2\le t\right)=\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ki}-x_{kj}\right)^2\le t:1\le i<j\le p\right)$$

这是独立同分布随机向量之和落在超矩形 $[-\infty,t]^{p(p-1)/2}$ 中的概率。对于该和的高维正态逼近，我们计算这些向量的协方差结构：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(x_{12}-x_{13}\right)^2&=2,\\ \operatorname{Var}\left[\left(x_{12}-x_{13}\right)^2\right]&=2\left(1+\mathbb{E}\xi^4\right),\\ \operatorname{Corr}\left[\left(x_{12}-x_{13}\right)^2,\left(x_{12}-x_{14}\right)^2\right]&=\frac{\mathbb{E}\xi^4-1}{2\left(\mathbb{E}\xi^4+1\right)}=r.\end{aligned}$$

然后，在条件 (3.3) 下应用 Koike [2020] 的定理 2.1(b)，其中条件 B1) 下 $q=s+\varepsilon/2$（另请参见下文 (3.6) 右侧的界，其中我们将明确推导这些界）。在条件 (B2) 下，我们应用 Koike [2020] 中的推论2.1，得到 (3.3)。

最后，在 (B3) 下，由于条件 $\log p=o\left(n^{1/3}/(\log n)^{2/3}\right)$，根据 Chernozhukov et al. [2023]中的推论2.1，我们得到 (3.3)。注意，该结果之所以适用，是因为其协方差矩阵的最小特征值

$$\left\{\left(x_{1i}-x_{1j}\right)^2-2\right\}_{1\le i<j\le p}$$

严格大于 0。我们将在下面的引理 9.1 中验证这一点，从而完成式（3.3）的证明。 □

注记3.1。 有必要对命题 3.1 的假设作几点说明 .

(a) 条件（B2）与 Heiny 和 Kleemann [2025] 中针对 $r=1$ 的条件（B3）一致，而条件（B3）与Heiny 和 Kleemann [2025], 中的条件（B4）类似，区别仅在于 n上有一个较温和的对数项。条件（B1）与 Heiny 和 Kleemann[2025] 中的条件（B1）仅相差一个额外的 ε因子。我们想指出，对式（3.3）证明作更仔细的考察可以发现，条件（B1）可替换为 $\mathbb{E}\left[|\xi|^{2s}(\log|\xi|)^M\right]<\infty$，其中 M是某个较大的常数。我们保留这一最低限度的次优性，以使分析更加简洁。

(b) 我们认为，通过调整定理 2.1 的证明，使其仍与大偏差计算相兼容，就有可能在与定理 2.1 相同的假设下重现Heiny 和 Kleemann [2025], 的结果，同时不对四阶矩作任何限制。我们不再探讨这一方向，因为我们的目标是统一处理若干相关问题。

(c) 直接应用高维正态逼近（如3.3的证明中所做的那样），在 ξ 为次威布尔分布的情况下，会导致次优的维数依赖性，这对应于Heiny 和 Kleemann [2025]中的条件（B2）。不过，在此处考虑的三种情形（B1）–（B3）中，这种次优性非常轻微。

3.2 边际分布依赖于n的情形

在本小节中，我们将使用定理2.2 和2.3 说明，当允许 $\xi = \xi_n$ 依赖于n且发散时，可能会出现新的极限分布。为此，为简便起见，我们将重点讨论简单的高维线性情形，即$p \asymp n$ 。值得一提的是，下面的论证可以相对直接地推广到其他机制和矩条件。

我们假设满足以下条件：

$$0 < \inf_{n\geq 1} \frac{p}{n} \leq \sup_{n\geq 1} \frac{p}{n} < \infty \quad \text{and} \quad n, p \to \infty. \tag{C1}$$

$$\exists \varepsilon > 0: \quad \mathbb{E}\left(|\xi_n|^{12+\varepsilon}\right) < \infty, \ \forall n \geq 1. \tag{C2}$$

$$\exists C_\varepsilon > 0: \quad \sup_{n\geq 1} \frac{\mathbb{E}\left(|\xi_n|^{12+\varepsilon}\right)}{\left[\mathbb{E}\left(\xi_n^4\right)\right]^{C_\varepsilon}} < \infty. \tag{C3}$$

条件（C1）要求 p 至多随 n线性增长。条件（C2）假设 ξ_n 对每个 $12 + \varepsilon$ 矩都有有限的 n（尽管它可能随 $n \to \infty$ 而发散）。最后，条件（C3）是一种反向 H¨older 不等式，它指出 $12 + \varepsilon$ 阶矩 ξ_n 至多按其四阶矩的多项式速度增长。该条件是保证高斯近似论证有效所必需的。

直观而言，条件（C2）和（C3）意味着 ξ_n 的分布质量可以逐渐向无穷远处移动，但其尺度应使高阶矩至多以多项式速度增长。

ξ_n 的一个例子是混合分布

$$\xi_n \overset{d}{=} \delta_n \mathrm{Unif}\left[-1, 1\right] + (1 - \delta_n)\mathrm{Unif}\left[(-2e_n, -e_n) \cup (2e_n, e_n)\right], \tag{3.4}$$

其中 $\delta_n := 2/\left(7e_n^2 - 1\right)$ 且 $e_n \geq 10$。注意，上述选取的 ξ_n 是中心化的，具有单位方差，并且满足

$$\mathbb{E}\xi_n^{2k} = \frac{1}{2k+1}\left[1 + \delta_n((2^{2k+1} - 1)\, e_n^{2k} - 1)\right]$$

对每个固定的 $k \in \mathbb{N}$。显然，对每个固定的 $k > 1$，2阶矩 ξ_n 在 e_n 发散时也发散。容易验证，这个混合分布满足（C2）和（C3），其中 $\varepsilon = 2$ 且$C_\varepsilon = 5$ 对每个序列 $\{e_n;\ n \geq 1\}$。

作为定理2.2 和 2.3的推论，我们可以证明，在（C1）–（C3）条件下，最大点间距离可以具有非冈贝尔极限分布。

命题 3.2。假设（C1）–（C3）成立，并回忆序列 c_n 和 d_n，它们定义于 （2.1）。假设 $(\log p)\,/\,\mathbb{E}\xi_n^4 \to \lambda$ 对某个 $\lambda \in [0, \infty)$ 成立，其中在 $\lambda = 0$ 的情形下，我们还要求

$$\mathbb{E}\left(\xi_n^4\right) = O\left((\log p)^A\right) \tag{3.5}$$

对某个常数 $A > 1$。则有

$$c_p\left(\frac{D_n^2 - 2n}{\sqrt{2n(1 + \mathbb{E}\xi_n^4)}} - \sqrt{2}d_p\right) \overset{d}{\to} \sup_{i<j}\left(\frac{\eta_i + \eta_j}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{\lambda} \cdot Z_{ij}\right) - 2\lambda$$

其中 η_i由（（2.2） 定义，而 Z_{ij}是与 η_i相互独立的独立同分布标准正态随机变量，且 c_p 和 d_p 的定义与（2.1）中相同。

在 $\lambda = 0$命题3.2 的情形下，极限随机变量可简化为

$$\sup_{i<j} \frac{\eta_i + \eta_j}{\sqrt{2}} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\sqrt{2}},$$

其中我们用到了 $\{\eta_k;\ k \geq 1\}$ 构成一个递减序列这一事实。

注 3.2. 请注意，命题 3.2 未涵盖 $\lambda = \infty$这种情形；对此需要更强的条件 $(\sqrt{\log p})/\mathbb{E}\xi_n^4 \to \infty$。若该条件成立，则极限分布与命题 3.1(i) 中的一样，是标准 Gumbel 分布。尺度 $\sqrt{\log p}$ 与 $\log p$ 之间的差距源于定理 2.1 与 2.2之间的差距。我们猜想，定理 2.1 在尺度达到 $\log p$之前仍然成立，不过基于泊松近似的分析恐怕无法推广到那么远。

命题 3.2 的证明。 我们首先检查，在条件（3.3）–（C1）–（C3）下，（3.3）仍然成立。注意到

$$\mathbb{E}[(x_{12}-x_{13})^2] = 2 \quad \text{and} \quad \mathrm{Var}\left[(x_{12}-x_{13})^2\right] = 2\left(1+\mathbb{E}\xi_n^4\right).$$

令 $\mathcal{G}_n = \left\{G_{ij};\ 1 \le i < j \le p\right\}$为（1.1）中的高斯场，其相关参数为

$$r_n := \frac{\mathbb{E}\xi_n^4 - 1}{2\left(\mathbb{E}\xi_n^4 + 1\right)}.$$

利用高维中心极限定理（参见 Koike [2020]中的定理 2.1），我们得到

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\left(\frac{D_n^2 - 2n}{\sqrt{2n\left(1+\mathbb{E}\xi_n^4\right)}} \le t\right) - \mathbb{P}\left(\max_{1\le i<j\le p} G_{ij} \le t\right)\right| \\
&\lesssim_\varepsilon \left(\frac{B_{n1}^2 (\log p)^5}{n}\right)^{1/6} + \left(\frac{B_{n2}^2 (\log p)^{3-2/q}}{n^{1-2/q}}\right)^{1/3}, \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

其中$q := 6 + \varepsilon/4$，且

$$\begin{aligned}
B_{n1}^2 &:= \frac{\mathbb{E}\left[\left((x_{12}-x_{13})^2 - 2\right)^4\right]}{\left[1+\mathbb{E}\xi_n^4\right]^2} \le \frac{128 + 8\mathbb{E}\,(x_{12}-x_{13})^8}{\left[1+\mathbb{E}\xi_n^4\right]^2} \le \frac{128\left[1+16\mathbb{E}\xi_n^8\right]}{\left[1+\mathbb{E}\xi_n^4\right]^2}; \\
B_{n2} &:= \frac{1}{\sqrt{1+\mathbb{E}\xi_n^4}}\left\| \max_{1\le i<j\le p}\left|\left(x_{1i}-x_{1j}\right)^2 - 2\right|\right\|_{L_q}.
\end{aligned}$$

利用假设（C2）和 H¨older 不等式，我们得出 $B^2{}_{n1} = O\left((\log p)^{C_1}\right)$，其中常数$C_1$ 仅依赖于 ε。对于项 B_{n2}，注意假设（C2）意味着

$$\begin{aligned}
\left\| \max_{1\le i<j\le p}\left|\left(x_{1i}-x_{1j}\right)^2 - 2\right|\right\|_{L_q} &\le p^{2/q} \times \mathbb{E}\left[\left|\left(x_{1i}-x_{1j}\right)^2 - 2\right|^q\right]^{1/q} \\
&= O\left(p^{2/q}(\log p)^{C_2}\right)
\end{aligned}$$

其中常数$C_2 > 0$ 与n无关。

因此, 要推导出（3.6）趋于 0，我们只需验证存在$C_3 > 0$ 使得 t

$$\frac{B_{n2}^2}{n^{1-2/q}} \ll n^{-C_3}.$$

这是因为

$$\frac{p^{4/q}}{n^{1-2/q}} = O\left(n^{6/q-1}\right) = O\left(n^{-\varepsilon/(24+\varepsilon)}\right).$$

命题 3.2的证明可通过调用定理 2.2、2.3并结合（3.6）以及以下事实完成

$$(1-2r_n)\log p = \frac{2\log p}{1+\mathbb{E}\xi_n^4} \to 2\lambda.$$

□

4 应用 II：等相关总体的样本系数

样本协方差和样本相关系数极值的研究可追溯至 Jiang 的开创性工作 [2005]。此后，类似的结果和技术已应用于许多不同的问题，包括检验协方差结构和独立性 Cai [2017]; Bastian 等人 [2024], 的双样本检验 Cai 等人 [2013],, 以及社群检测 Hu 等人 [2021]。

下面简要回顾相关问题的设定及结果。设给定独立同分布数据点 $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$，其中 $\boldsymbol{X}_i = \left(x_{i1}、x_{i2}, \ldots、x_{ip}\right)^\top$。回忆样本协方差系数 $\hat{r}_{ij}$ 和样本相关系数 $\hat{\rho}_{ij}$ 分别定义于（1.5）和（1.4）中。它们的最大值为

$$R_n := \max_{1\le i<j\le p} \hat{r}_{ij} \qquad \text{and} \qquad M_n := \max_{1\le i<j\le p} \hat{\rho}_{ij}. \tag{4.1}$$

关于独立情形下 R_n 和 M_n 的渐近分布已有大量文献，其中坐标 x_{ki} 是独立同分布的。Jiang [2005] 建立的 R_n 和 M_n 的渐近冈贝尔分布被 Zhou [2007] 推广到更一般的框架，该框架只要求 x_{ij} 的六阶矩有限，并满足条件 $p = O(n)$。在后续研究中，Li 等人 [2010,2012]; Li 和 Rosalsky [2006], 推导了冈贝尔分布成立的充要条件。关于 p 和 n 之间的相依性，Li 等人 [2008], 、Shao 和 Zhou [2014], 、Heiny 等人 [2021] 以及 Heiny 和 Kleemann[2024] 获得了最优的维数依赖结果。有关带状协方差矩阵的结果见 Boucher 等人 [2025]。

高维下 R_n 和 M_n 的渐近分布极其复杂。高维性、依赖结构和重尾都可能破坏经典的冈贝尔分布。高维性通常会通过在极值中诱发聚集（常用极值指数加以量化）而破坏冈贝尔极限；而依赖结构（即使很简单）也可能彻底改变极限分布，导致渐近分布不再属于经典的冈贝尔型、Fr´echet 型或 Weibull 型极值分布族。

依赖情形下的结果要少得多。据我们所知，Fan 和 Jiang[2019] 和Jiang 和 Pham [2025] 是仅有的研究这一情形的工作。具体而言，Fan 和 Jiang [2019] 研究了具有等相关结构的高斯总体，而Jiang 和 Pham [2025]研究了自回归相关结构。这两篇论文均表明，在这些情形下，R_n 和 M_n 的渐近分布不再是冈贝尔分布。

现在我们更详细地介绍 Fan 和 Jiang [2019] 的结果。假设 $\boldsymbol{X}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots\ldots, x_{ip})^\top$ 的分布具有如下表示

$$x_{ik} := \sqrt{\rho}\,\xi_i + \sqrt{1-\rho}\,\xi_{ik} \tag{4.2}$$

其中 $\{\xi_i, \xi_{ik} : \ 1 \le i \le n, \ 1 \le k \le p\}$ 相互独立同分布，均值为 0、方差为单位方差。为简便起见，将它们的共同分布记作 ξ。Fan 和 Jiang [2019] 证明了，当 ξ 为标准正态且 $\log p = o(n^{1/3})$时，以下结论成立：

(i) 对于 R_n（定义见（4.1））, 在条件 $\limsup \rho_n < 1/2$ 下，R_n 渐近服从冈贝尔分布、正态分布，或独立冈贝尔分布与正态分布的混合，具体取决于 $\rho\sqrt{\log p}$ 收敛于 0、 ∞，还是有限非零常数。

(ii) 对于 M_n（定义见（4.1））, 在条件 $\limsup \rho_n < 1$ 下，M_n 渐近服从冈贝尔分布、正态分布，或独立冈贝尔分布与正态分布的混合，具体取决于 $\rho\sqrt{\log p}$ 收敛于 0、 ∞，还是有限非零常数。

Fan 和 Jiang的证明 [2019]技术性很强，也十分繁复。本节将用非常简洁的证明重新推导关于 R_n 和 M_n 的结果，而且不再要求 /2 对 ρ取值范围的限制。我们还将进一步说明，当允许其分布依赖于ξ 时，可以出现不同的极限分布。

4.1 固定边际分布情形

我们将首先在更强的假设 $\log p = o(n^{1/5})$ 下证明这些结果。尽管这一条件强于 $\log p = o(n^{1/3})$，证明却短得多，也更直观；更重要的是，它不对 ρ 的取值范围作任何限制。下文中，我们令 $\kappa = \mathbb{E}\xi^4$，并额外假设 ξ 的分布为次高斯分布，即 $\mathbb{E}\exp\left(t\xi^2\right) < \infty$，其中 $t > 0$。

Pro命题 4.1. 假设 $\log p = o(n^{1/5})$，$\limsup \rho_n < 1$ 并回顾 R_n 来自 (4.1)。定义 e

$$R_n^* := \frac{R_n}{\sqrt{n}} - \rho\sqrt{n} - \left(2\sqrt{\log p} - \frac{\log\log p}{4\sqrt{\log p}}\right)\sqrt{1-\rho^2}.$$

则下列陈述成立。

(i) 若 $\rho\sqrt{\log p} \to 0$，则有

$$2\sqrt{\log p}\, R_n^* \xrightarrow{d} G_1,$$

其中 G_1 服从 *Gumbel* 分布，其累积分布函数为 $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-x}\right)$。

(ii) 若 $\rho\sqrt{\log p} \to \lambda \in (0, \infty)$，则有

$$\tfrac{1}{\rho}R_n^* \xrightarrow{d} \tfrac{1}{2\lambda}G_1 + N(0, \kappa - 1),$$

其中 G_1 与 $N(0, \kappa-1)$ 相互独立。

(iii) 若 $\rho\sqrt{\log p} \to \infty$，则有

$$\tfrac{1}{\rho}R_n^* \xrightarrow{d} N(0, \kappa - 1).$$

注意，与 Fan 和 Jiang [2019] 以及 Heiny 和 Kleemann [2025], 不同，我们并不施加条件 $\limsup \rho_n < 1/2$。此外，取 $\kappa = 3$ 时，我们便恢复了 Fan 和 Jiang [2019],中的结果，这对应于高斯情形。

证明 **命题 4.1**。我们首先消去 (1.5) 中的样本均值。我们将证明 th at

$$\frac{R_n}{\sqrt{n}} = \max_{1\le i<j\le p} \frac{\sum_{k=1}^n x_{ki}x_{kj}}{\sqrt{n}} + O_{\mathbb{P}}\left(\frac{\log p}{\sqrt{n}}\right). \tag{4.3}$$

为看出这一点，写成

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_i)\left(x_{kj} - \bar{x}_j\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n x_{ki}x_{kj} - \sqrt{n}\cdot\bar{x}_i\bar{x}_j.$$

B可以使用 Jiang 和 Pham [2025] 中的引理 2 或伯恩斯坦不等式，得到

$$\max_{1\le i\le p}\sqrt{n}|\bar{x}_i| = O_{\mathbb{P}}\left(\sqrt{\log p}\right).$$

因此，（4.3）是合理的。利用（4.2）进行直接计算可得

$$\mathbb{E}(x_{1i}x_{1j}x_{1k}x_{1l}) = \begin{cases} (\kappa-1)\rho^2, & \left|\{i,j\}\cap\{k,l\}\right| = 0; \\ \rho + (\kappa-2)\rho^2, & \left|\{i,j\}\cap\{k,l\}\right| = 1; \\ 1 + (\kappa-2)\rho^2, & \left|\{i,j\}\cap\{k,l\}\right| = 2. \end{cases}$$

接下来，利用高维中心极限定理（定理 2.1，见 Koike [2020]），我们得到 $\log p = o(n^{1/5})$，即

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\left(\max_{1\le i<j\le p}\frac{\sum_{k=1}^n x_{ki}x_{kj} - n\rho}{\sqrt{n(1+(\kappa-2)\rho^2)}} \le t\right) - \mathbb{P}\left(\max_{1\le i<j\le p} Z_{ij} \le t\right)\right| \to 0, \tag{4.4}$$

其中 $\{Z_{ij};\ 1 \le i < j \le p\}$ 是具有相关结构的中心化高斯场

$$\mathbb{E}(Z_{ij}Z_{kl}) = \begin{cases} \frac{(\kappa-1)\rho^2}{1+(\kappa-2)\rho^2}, & |\{i,j\} \cap \{k,l\}| = 0; \\ \frac{\rho+(\kappa-2)\rho^2}{1+(\kappa-2)\rho^2}, & |\{i,j\} \cap \{k,l\}| = 1; \\ 1, & |\{i,j\} \cap \{k,l\}| = 2. \end{cases}$$

由此可写为

$$\max_{1\le i<j\le p} Z_{ij} \overset{d}{=} \sqrt{\frac{(\kappa-1)\rho^2}{1+(\kappa-2)\rho^2}} \cdot G + \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+(\kappa-2)\rho^2}} \cdot \max_{1\le i<j\le p} G^*_{ij}, \tag{4.5}$$

其中，G 服从标准正态分布，且与 G_{ij} 相互独立，而高斯场 $\{G_{ij};\ 1 \le i < j \le p\}$ 与（1.1）中的相关参数 $r = \frac{\rho}{1+\rho}$ 相同。根据关于 ρ 的假设，可得

$$1 - 2r = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

严格大于零。因此，$(1-2r)\sqrt{\log p / \log\log p} \to \infty$。结合（4.3）、（4.4）、（4.5），再应用定理 2.1 并进行一些简单（但繁琐）的代数运算，即完成证明。□

关于最大的样本相关系数，我们可以得到以下结果。

命题 4.2. 假设 $\log p = o(n^{1/5})$，$\limsup \rho_n < 1$ 并回顾 $(_n$ (4.1)中的 M。定义

$$M_n^* := \sqrt{n}M_n - \rho\sqrt{n} - (1-\rho)\sqrt{1 + 2\rho + \frac{\kappa-5}{2}\rho^2} \cdot \left(2\sqrt{\log p} - \frac{\log\log p}{4\sqrt{\log p}}\right).$$

于是以下陈述成立。

(i) 若 $\rho\sqrt{\log p} \to 0$，则有

$$2\sqrt{\log p}\, M_n^* \overset{d}{\to} G_1,$$

其中 G_1 服从累积分布函数为 $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-x}\right)$ 的 *Gumbel* 分布。

(ii) 若 $\rho\sqrt{\log p} \to \lambda \in (0,\infty)$，则有

$$\tfrac{1}{\rho}M_n^* \overset{d}{\to} \tfrac{1}{2\lambda}G_1 + N(0, \kappa-1),$$

其中 G_1 与 $N(0,\kappa-1)$ 相互独立。

(iii) 若 $\rho\sqrt{\log p} \to \infty$，则有

$$\tfrac{1}{\rho(1-\rho)}M_n^* \overset{d}{\to} N(0,\kappa-1).$$

条件 $\limsup \rho_n < 1$ 在命题 4.2 中所施加的条件与 Fan 和 Jiang [2019],中相同，其目的是防止样本相关系数过快地坍缩为 1。容易验证，对于 $\kappa = 3$，我们恢复了Fan 和 Jiang [2019]中的结果。

命题的证明4.2。 对 Jiang 和 Pham [2025], 中的定理 1 证明的步骤 1 稍作修改后，我们得到

$$\max_{1\le i<j\le p} \sqrt{n}\hat{\rho}_{ij} - \rho\sqrt{n} = \max_{1\le i<j\le p} \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} x_{ki}x_{kj} - \frac{\rho}{2}\left(x_{ki}^2 + x_{kj}^2\right)\right\} + O_{\mathbb{P}}\left(\frac{\log p}{\sqrt{n}}\right). \tag{4.6}$$

对于 $k = 1, \ldots, n$，令

$$T_{ij}^{(k)} := x_{ki}x_{kj} - \frac{\rho}{2}\left(x_{ki}^2 + x_{kj}^2\right).$$

利用（4.2）进行一些矩计算可得

$$\mathbb{E}\left(T_{ij}^{(1)}T_{kl}^{(1)}\right) = \begin{cases} (1-\rho)^2\left(1 + 2\rho + \frac{\rho^2}{2}(3\kappa - 7)\right), & \left|\{i,j\} \cap \{k,l\}\right| = 2; \\ (1-\rho)^2\left[\rho + \left(\frac{5\kappa-9}{4}\right)\rho^2\right], & \left|\{i,j\} \cap \{k,l\}\right| = 1; \\ (1-\rho)^2(\kappa - 1)\rho^2, & \left|\{i,j\} \cap \{k,l\}\right| = 0. \end{cases}$$

根据高维中心极限定理（Koike [2020]中的定理 2.1），对于 $\log p = o(n^{1/5})$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\left(\max_{1\le i<j\le p}\frac{\sum_{k=1}^n T_{ij}^{(k)}}{(1-\rho)\sqrt{n(1 + 2\rho + \frac{\rho^2}{2}(3\kappa - 7)}} \le t\right) - \mathbb{P}\left(\max_{1\le i<j\le p} Z_{ij} \le t\right)\right| \to 0, \tag{4.7}$$

其中 $\{Z_{ij};\ 1 \le i < j \le p\}$ 是具有如下相关结构的中心化高斯场

$$\mathbb{E}(Z_{ij}Z_{kl}) = \begin{cases} \frac{(\kappa-1)\rho^2}{1+2\rho+\frac{\rho^2}{2}(3\kappa-7)}, & \left|\{i,j\} \cap \{k,l\}\right| = 0; \\ \frac{\rho+\left(\frac{5\kappa-9}{4}\right)\rho^2}{1+2\rho+\frac{\rho^2}{2}(3\kappa-7)}, & \left|\{i,j\} \cap \{k,l\}\right| = 1; \\ 1, & \left|\{i,j\} \cap \{k,l\}\right| = 2. \end{cases}$$

因此，我们进一步得到如下分解

$$\max_{1\le i<j\le p} Z_{ij} \overset{d}{=} \sqrt{\rho_1}G + \sqrt{1-\rho_1}\cdot\max_{1\le i<j\le p} G_{ij}, \tag{4.8}$$

其中 $\rho_1 := \rho^2(\kappa-1)(1+2\rho+(\rho^2/2)(3\kappa-7))^{-1}$，$G$服从标准正态分布，且独立于 G_{ij}及高斯场 $\{G_{ij};\ 1 \le i < j \le p\}$与（1.1）中相同，其相关参数为

$$r = \frac{\rho + \frac{\kappa-5}{4}\rho^2}{1 + 2\rho + \frac{\kappa-5}{2}\rho^2}.$$

利用关于 ρ 的假设以及 $\kappa \ge 1$这一事实，我们推得

$$1 - 2r = \frac{1}{1 + 2\rho + \frac{\kappa-5}{2}\rho^2}$$

严格大于零。因此，$(1-2r)\sqrt{\log p/\log\log p} \to \infty$。结合 (4.6)、(4.7)、(4.8)，并应用定理 2.1 以及一些简单（但繁琐）的代数运算，即可完成证明。

□

4.2 n 依赖边缘分布的情形

回顾 R_n 在 (4.1) 中的定义。现在我们说明，若 $\xi = \xi_n$ 允许依赖于 n，则 R_n 的极限分布会发生显著变化，具体取决于 κ_n 的大小：$= \mathbb{E}[\xi_n^4]$。我们将考察 R_n 在两种情形下的行为：当 ξ_n 表现为重尾分布，且概率质量向无穷远处偏移时；以及当 ξ_n 表现为 Rademacher分布，且概率质量向两个点偏移时。在这两种情形下，R_n 的行为都与第 ff节中的情况截然不同4.1。

假设 (C1)–(C3)。我们将考虑以下两种 κ_n机制：

(i) $\kappa_n/(\log p) \to \lambda_1 \in (0,\infty)$，且 $\rho_n \log p \to \lambda_2 \in (0,\infty)$，当$n \to \infty$时。(ii) $(\kappa_n - 1)(\log p)^2 \to \lambda_1 \in (0,\infty)$，且 $(1-\rho_n)\log p \to \lambda_2 \in (0,\infty)$。

满足条件（C1）–（C3）和（i）的分布示例见（3.4），其中 $e_n = \Omega(\sqrt{\log p})$。

满足条件（C1）–（C3）和（ii）的一个分布示例是该分布

$$\xi_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{(\log p)^2+\lambda_1}{(\log p)^2}}, & \text{with probability } \frac{(\log p)^2}{2(\lambda_1+(\log p)^2)}; \\ 0, & \text{with probability } \frac{\lambda}{\lambda+(\log p)^2}; \\ -\sqrt{\frac{(\log p)^2+\lambda_1}{(\log p)^2}}, & \text{with probability } \frac{(\log p)^2}{2(\lambda_1+(\log p)^2)}. \end{cases}$$

事实上，可以验证

$$\mathbb{E}\xi_n = 0, \quad \mathbb{E}\xi_n^2 = 1, \quad \mathbb{E}\xi_n^4 = 1 + \frac{\lambda_1}{(\log p)^2}, \quad \mathbb{E}\xi_n^{14} = \left(1 + \frac{\lambda_1}{(\log p)^2}\right)^6.$$

更一般地，条件（ii）意味着 ξ_n 依分布收敛到一个拉德马赫随机变量。为此，注意到（ii）要求 $\kappa_n \to 1$，这进而意味着 $\mathbb{P}(|\xi_n| \le 1) \to 1$。由于 ξ_n 均值为零且方差为单位方差，因此可以得出 ξ_n 收敛到Rademacher分布。

以下结果描述了R_n 在n相关情形下的极限分布。

命题4.3。 假设（C1）–（C3）。

(i) 在机制 *(i)* 中，

$$2\sqrt{\log p}\left[\frac{R_n}{\sqrt{n}} - \rho\sqrt{n} - \sqrt{1-\rho^2}\left(2\sqrt{\log p} - \frac{\log\log p}{4\sqrt{\log p}}\right)\right] \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0, 2\lambda_1\lambda_2^2) + G_1, \tag{4.9}$$

其中 G_1 是命题 *4.1*中的 *Gumbel* 分布，且与正态项独立。

(ii) 在机制 *(ii)* 中，

$$\log p\left[\frac{R_n}{\sqrt{n}} - \rho\sqrt{n} - \sqrt{1-\rho^2}\left(2\sqrt{\log p} - \frac{\log\log p + \log(4\pi)}{2\sqrt{\log p}}\right)\right] \tag{4.10}$$

依分布收敛于

$$N(0,\lambda_1) + \sqrt{\lambda_2}\sup_{i<j}\left\{\frac{\eta_i+\eta_j}{\sqrt{2}} + \sqrt{\lambda_2}Z_{ij} - \frac{\lambda_2}{2}\right\},$$

其中 η_i 与 (2.2)中的相同，$Z_{ij} \sim N(0,1)$ 是独立同分布的，且正态分量与其余部分独立。

命题 4.3 的证明。 可以验证，在条件 (4.4)–(C1)–(C3) 下，(4.5) 仍然成立。将定理 2.2 应用于 (4.5) 即得所需结果。为简洁起见，省略细节。□

让我们将机制 (i) 和 (ii) 与 Fan 和 Jiang [2019]的结果进行比较。在机制 (i) 中，Fan 和 Jiang [2019] 表明，（4.9）中的统计量在 $\rho\sqrt{\log p} \to 0$时收敛到标准Gumbel分布。在我们的设定中，尽管 $\rho\sqrt{\log p} = O\left((\log p)^{-1/2}\right) \to 0$，发散的四阶矩为极限分布贡献了一个额外的高斯分量。

在机制 (ii) 中，行为更为复杂。数据点 $\boldsymbol{x}_i$ 具有强相依的坐标，其边缘分布收敛于 Rademacher分布。从启发式角度看，（4.5）中的高斯贡献仍然存在，而 Gumbel分量在（4.5）的第二项中失效。

此外，（4.10）中统计量的尺度为Ω(（log$p$）$^{-1}$)阶，这是非标准的。该尺度可视为渐近方差。相比之下，已知（例如参见Ding 等人 [2015]），对于一组$X_1, \ldots\ldots, X_N$，即具有单位方差和任意协方差的正态分布，

$$\mathrm{Var}\left(\max_{1\le i\le N} X_i\right) \;\ge\; \frac{C}{\left(1+\mathbb{E}\max_{1\le i\le N} X_i\right)^2},$$

对某个普适常数C。

因此，在所有现有结果中，最大元素的渐近方差的阶为 $(\log p)^{-1}$，因为 $O(p^2)$ 个标准正态分布的最大值的量级为 $\Theta(\sqrt{\log p})$。相比之下，在 (4.10) 中，渐近方差的阶仅为 $\Theta((\log p)^{-2})$，这是由 ff 的退化效应导致的 κ_n。

5 应用III：多重检验中的 FWER 控制

作为定理 2.1 和 Slepian 引理的直接推论，我们可以看出，只要 (1.8) 对某个 $\delta > 0$ 满足 (1.7)，该检验在渐近意义上与独立同分布标准正态变量的最大值检验相同。因此，我们可以将阈值 u_n 选为

$$u_n = \frac{q_\alpha}{2\sqrt{\log n}} + 2\sqrt{\log n} - \frac{\log\log n + \log(4\pi)}{4\sqrt{\log p}}$$

其中 q_α 是具有累积分布函数 $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-x}\right)$ 的 Gumbel 分布的 $(1-\alpha)$ 分位数。

此外，定理2.1 还表明，如果允许 $\delta = \delta_n$ 依赖于n，那么只要u_n 满足 $\delta_n \gg \log\log n/\sqrt{\log n}$ 趋于$n \to \infty$，相同的阈值仍然有效。定理2.2 和2.3 表明，当u_n 的选取在 δ_n 以至少与Ω $(1/\log n)$同样快的速度衰减时，这种选取就不再适用。

现在我们给出两个例子，说明这种多重检验问题在统计分析中的一些常见情形。第一个例子是经典的方差分析（ANOVA），第二个例子是称为社会关系模型的网络模型（详见 Hoff [2021]）。

例*1*：随机效应双因素方差分析。方差分析可能是用于均值比较的最古老统计技术。我们将考虑随机效应双因素方差分析，这可以说是实验设计中最常用的模型。在此背景下，我们考虑一组随机变量的观测值 Y_{ij}'s，其形式为

$$Y_{ijk} := \mu_{ij} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

其中，μij 是（确定性的）均值。随机变量 $\{\alpha_i;\ \beta_j;\ (\alpha\beta)_i$jk; ϵ_ij$\}$服从方差可能不同的独立同分布正态分布。可以将数对 (i, j) 看作处理，将 k 看作该处理的重复次数。在实践中，通常取 $\hat{}$ Yij（对 k 求样本均值），以获得每个 (i, j) 对应的处理效应估计值。容易验证，在正态性假设下，$\{\hat{}\text{Y}_{ij};\ 1 \le \text{i} < \text{j} \le \text{n}\}$的协方差结构与 (1.1) 中的形式相同。

示例 *2*：社会关系模型。这是取自Hoff [2021]（更多详情亦可参见其中的参考文献）。它与上述双因素方差分析模型相似，但不同之处在于{*i*、*j*}可能具有网络结构，并且可以是有向的，也可以是无向的。

定理2.1 的证明

接下来，我们将反复使用如下表示

$$G_{ij} := \sqrt{r}\left(X_i + X_j\right) + \sqrt{1-2r}\cdot Y_{ij} \tag{6.1}$$

对于相互独立的序列 $(X_i)_{1\le i\le n}$ 和 $(Y_{ij})_{1\le i<j\le n}$，它们由独立同分布标准正态随机变量构成。需要特别注意的是，利用这一构造，随机场 $\{G_{ij}\}_{1\le i<j\le n}$ 具有协方差结构（1.1）。

我们首先定义$T_n := \log\log n$和$f_n := 1-2r$，并引入截断水平

$$t_n := \sqrt{2\log n} + \frac{T_n}{\sqrt{\log n}}.$$

记$E_n := \{\max_{1\le i\le n}|X_i| \le t_n\}$，容易验证

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_n^c) &\le 2n\cdot(1-\Phi(t_n))\\ &\le 2n\cdot\frac{e^{-t_n^2/2}}{\sqrt{2\pi}t_n} = O\left(\frac{n\cdot e^{-t_n^2/2}}{\sqrt{\log n}}\right)\\ &= O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)\to 0.\end{aligned}$$

固定$y\in\mathbb{R}$并定义

$$u_n = u_n(y) = \sqrt{2}c_n + \frac{y-\log\left(4\sqrt{\pi}c_n\right)}{\sqrt{2}c_n}$$

其中 c_n 如（2.1）中所示。令

$$A_{ij} = \left\{G_{ij}\le u_n\right\}\cup\left\{|X_i|\vee|X_j|\ge t_n\right\},$$

容易看出

$$\mathbb{P}\left(\cap_{1\le i<j\le n}A_{ij}\right)\le\mathbb{P}\left(\max_{1\le i<j\le n}G_{ij}\le u_n\right)+\mathbb{P}(E_n^c) = \mathbb{P}\left(\max_{1\le i<j\le n}G_{ij}\le u_n\right)+o(1).$$

现在，根据 利用泊松近似（例如，参见 Arratia 等人 [1989]中的定理 1），我们有

$$\left|\mathbb{P}\left(\cap_{1\le i<j\le n}A_{ij}\right)-e^{-\sum_{1\le i<j\le n}p_{ij}}\right|\le b_1+b_2,$$

其中

$$\begin{aligned}p_{ij} &:= \mathbb{P}\left(A_{ij}^c\right) = \mathbb{P}\Big(\left\{G_{ij}>u_n\right\}\cap\left\{|X_i|\vee|X_j|<t_n\right\}\Big),\\ b_1 &:= O(n^3)\cdot p_{12}^2,\\ b_2 &:= O(n^3)\cdot\mathbb{P}\left(A_{12}^c\cap A_{13}^c\right).\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\left|\mathbb{P}\left(\max_{1\le i<j\le n}G_{ij}\le u_n\right)-e^{-\sum_{1\le i<j\le n}p_{ij}}\right|\le b_1+b_2+o(1).$$

为完成证明，我们需要证明以下三个陈述

$$\sum_{1\le i<j\le n}p_{ij} = \frac{n(n-1)}{2}p_{12}\to e^{-y}, \tag{6.2}$$

$$b_1\to 0, \tag{6.3}$$

$$b_2\to 0. \tag{6.4}$$

（6.2）的证明。利用米尔斯比，可得 $\frac{n(n-1)}{2}\ \mathbb{P}(G_{12}\ge u_n)\ \to e^{-y}$；例如参见 Heiny 等人 [2021]。因此，要证明（6.2），只需证明：

$$n^2\left[\mathbb{P}(G_{12}\ge u_n)-\mathbb{P}(G_{12}\ge u_n,|X_1|\vee|X_2|\le t_n)\right]\to 0.$$

注意到

$$\mathbb{P}\left(G_{12} \geq u_n\right) - \mathbb{P}\left(G_{12} \geq u_n, |X_1| \vee |X_2| \leq t_n\right) \leq 2\mathbb{P}\left(G_{12} \geq u_n, |X_1| \geq t_n\right),$$

我们只需证明

$$n^2 \cdot \mathbb{P}\left(G_{12} \geq u_n, |X_1| \geq t_n\right) \to 0. \tag{6.5}$$

为此，写作

$$\mathbb{P}\left(G_{12} \geq u_n, |X_1| \geq t_n\right) = \mathbb{P}\left(G_{12} \geq u_n, X_1 \geq t_n\right) + \mathbb{P}\left(G_{12} \geq u_n, X_1 \leq -t_n\right).$$

对于第二项，我们注意到

$$\mathbb{P}\left(G_{12} \geq u_n, X_1 \leq -t_n\right) = \int_{-\infty}^{-t_n} \left[1 - \Phi\left(\frac{u_n - \sqrt{r}x}{\sqrt{1-r}}\right)\right] \phi(x)dx = o(n^{-2}).$$

为了对第一项进行估计，回顾Hashorva 和 H¨usler [2003] 中的例1,

$$\mathbb{P}\left(G_{12} \geq u_n, X_1 \geq t_n\right) \leq O\left(\frac{1}{\left(u_n - \sqrt{r}t_n\right)\left(t_n - \sqrt{r}u_n\right)}\right) \cdot \exp\left(-\frac{u_n^2 - 2\sqrt{r}u_n t_n + t_n^2}{2(1-r)}\right).$$

注意到

$$\begin{aligned}\left(u_n - \sqrt{r}t_n\right)\left(t_n - \sqrt{r}u_n\right) &\geq \Omega\left(\sqrt{\log n}\right)\left[(1 - \sqrt{2r})\sqrt{\log n} + \frac{T_n}{2\sqrt{\log n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)\right] \\ &\geq \Omega\left((1 - \sqrt{2r})\log n\right) = \Omega(f_n)\end{aligned}$$

其中我们利用了$T_n = o\left(\log n\right)$这一事实，得到下界$u_n - \sqrt{r}t_n \gtrsim \sqrt{\log n}$。此外，经过简单的代数运算可得

$$\begin{aligned}u_n^2 &= 4\log n - \log\log n + O\left(\frac{(\log\log n)^2}{\log n}\right), \\ 2\sqrt{r}u_n t_n &= 2\sqrt{r} \cdot 2\sqrt{\log n}\left(1 - \frac{\log\log n}{8\log n} - O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right)\sqrt{2\log n}\left(1 + \frac{T_n}{\sqrt{2}\log n}\right) \\ &= 4\sqrt{2r}\log n\left(1 + \frac{T_n}{\sqrt{2}\log n} - \frac{\log\log n}{8\log n} - O\left(\frac{T_n\log\log n}{(\log n)^2}\right) - O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right), \\ t_n^2 &= 2\log n + 2\sqrt{2}T_n + \frac{T_n^2}{\log n}.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}-\frac{u_n^2 - 2\sqrt{r}u_n t_n + t_n^2}{2(1-r)} \leq &-\log n\left[\frac{6 - 4\sqrt{2r}}{2(1-r)}\right] + \frac{\log\log n}{2(1-r)} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{r}{2}}\right) \\ &- T_n \cdot \frac{2\sqrt{2} - 4\sqrt{r}}{2(1-r)} + O(1)\end{aligned}$$

其中，我们在上述公式中略去了含有T_n^2的项。

因此，我们得到

$$\begin{aligned}-\frac{u_n^2 - 2\sqrt{r}u_n t_n + t_n^2}{2(1-r)} &\leq -\log n\left[2 + \frac{6 - 4\sqrt{2r} - 4 + 2r}{2(1-r)}\right] + O(1) \\ &= -\log n\left[2 + \frac{(1 - \sqrt{2r})^2}{2(1-r)}\right] + O(1)\end{aligned}$$

由此我们得出

$$\mathbb{P}\left(G_{12} \geq u_n, X_1 \geq t_n\right) \leq O\left(\frac{1}{(1-2r)\log n}\right) \frac{\exp\left[-(1+o(1)) f_n^2 \log n + O(\log\log n)\right]}{n^2} = o(n^{-2}).$$

由于 f_n^2对数 $n \gg$对数对数 n。这就完成了对（6.2）的证明。

（(6.3)）的证明。这是（6.2）的直接推论，因为（6.5）的证明表明$p_{12} = O(n^{-2})$。

（(6.4)）的证明。注意到

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A_{12}^c \cap A_{13}^c\right) &= \mathbb{P}\left(G_{12} \geq u_n, G_{13} \geq u_n, |X_1| \leq t_n, |X_2| \leq t_n, |X_3| \leq t_n\right) \\
&\asymp \iiint_{[-t_n, t_n]^3} \left[1 - \Phi\left(\frac{u_n - \sqrt{r}(x_1 + x_2)}{\sqrt{1-2r}}\right)\right] \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{u_n - \sqrt{r}(x_1 + x_3)}{\sqrt{1-2r}}\right)\right] \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2}\right) dx_1 dx_2 dx_3.
\end{aligned}$$

为了对该积分作界，我们先进行变量替换，将积分移至正半轴。令 $\Delta_i := t_n - x_i$ 对 $i = 1,2,3$，得到如下界

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A_{12}^c \cap A_{13}^c\right) &\asymp \iiint_{[0,2t_n]^3} \left[1 - \Phi\left(L_n + \frac{\sqrt{r}(\Delta_1 + \Delta_2)}{\sqrt{1-2r}}\right)\right] \cdot \left[1 - \Phi\left(L_n + \frac{\sqrt{r}(\Delta_1 + \Delta_3)}{\sqrt{1-2r}}\right)\right] \\
&\quad \times \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^3 (t_n - \Delta_i)^2}{2}\right] d\boldsymbol{\Delta},
\end{aligned}$$

其中 $d\boldsymbol{\Delta} = d\Delta_1 d\Delta_2 d\Delta_3$ 并且

$$L_n := \frac{u_n - 2\sqrt{r} t_n}{\sqrt{1-2r}} = \frac{2\sqrt{1-2r}\sqrt{\log n}}{1 + \sqrt{2r}} + O\left(\frac{\log\log n}{\sqrt{f_n \log n}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right).$$

在假设 $f_n \sqrt{\log n} \gg \log\overline{\log n}$ 下，有 $L_n \geq \sqrt{f_n \log n}(1 + o(\overline{1})) \to \infty$。利用初等界 $1 - \Phi(x) \lesssim \exp\left(-x^2/2\right)$（对所有 $x \geq 0$），我们得到

$$\begin{aligned}
&\iiint_{[0,2t_n]^3} \left[1 - \Phi\left(L_n + \frac{\sqrt{r}(\Delta_1 + \Delta_2)}{\sqrt{1-2r}}\right)\right] \cdot \left[1 - \Phi\left(L_n + \frac{\sqrt{r}(\Delta_1 + \Delta_3)}{\sqrt{1-2r}}\right)\right] \\
&\quad \times \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^3 (t_n - \Delta_i)^2}{2}\right] d\boldsymbol{\Delta} \\
&\lesssim \exp\left(-L_n^2 - \frac{3t_n^2}{2}\right) \iiint_{[0,2t_n]^3} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^3 \Delta_i^2}{2} + t_n \sum_{i=1}^3 \Delta_i - \frac{L_n\sqrt{r}}{\sqrt{1-2r}}(2\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)\right] \\
&\quad \times \exp\left[-\frac{r}{2(1-2r)}\left((\Delta_1 + \Delta_2)^2 + (\Delta_1 + \Delta_3)^2\right)\right] d\boldsymbol{\Delta}.
\end{aligned}$$

将积分域扩大到 $[0,\infty)^3$,，我们得到上界

$$\mathbb{P}\left(A_{12}^c \cap A_{13}^c\right) \lesssim \exp\left(-L_n^2 - \frac{3t_n^2}{2}\right) \times \iiint_{[0,\infty)^3} \exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}^\top \boldsymbol{H} \boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{g}^\top \boldsymbol{\Delta}\right] d\boldsymbol{\Delta},$$

其中 $\boldsymbol{H} := \boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{M}$,

$$\boldsymbol{M} := \alpha^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \boldsymbol{g} := \begin{pmatrix} t_n - 2\alpha L_n \\ t_n - \alpha L_n \\ t_n - \alpha L_n \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha := \sqrt{r/(1-2r)}$。为处理积分项，注意到

$$\begin{aligned}
&\iiint_{[0,\infty)^3} \exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}^\top \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{g}^\top\boldsymbol{\Delta}\right] d\boldsymbol{\Delta} \\
&= \iiint_{[0,\infty)^3} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Delta}-\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{g}\right)^\top \boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{\Delta}-\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{g}\right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^\top\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{g}\right] d\boldsymbol{\Delta} \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^\top\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{g}\right)\cdot \iiint_{[0,2t_n]^3-\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{g}} \exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}\right) d\boldsymbol{y} \\
&\le \exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^\top\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{g}\right)\cdot \iiint_{[0,\infty)^3-\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{g}} \exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}\right) d\boldsymbol{y}.
\end{aligned}$$

其中，第二个等式由变量代换 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{g}$ 得出。

可以验证，$\boldsymbol{H}$ 有三个特征值 $1+3\alpha^2$、$1+\alpha^2$、1，因此，

$$(\det(\boldsymbol{H}))^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{(1+3\alpha^2)(1+\alpha^2)}}.$$

要找出 $\boldsymbol{H}^{-1}$，只需对矩阵 $\alpha^{-2}\boldsymbol{M}$ 进行对角化。该矩阵有三个互异的特征值$\lambda_1 = 3$、$\lambda_2 = 1$ 和 $\lambda_3 = 0$。对应的特征向量为

$$\boldsymbol{u}_1 := (2,1,1)^\top; \quad \boldsymbol{u}_2 := (0,1,-1)^\top; \quad \boldsymbol{u}_3 := (1,-1,-1)^\top.$$

因此，$\boldsymbol{g}$ 可写为

$$\boldsymbol{g} = \underbrace{\frac{2t_n - 3\alpha L_n}{3}}_{a_1}\boldsymbol{u}_1 - \underbrace{\frac{t_n}{3}}_{a_3}\boldsymbol{u_3}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{g} &= \frac{a_1}{1+3\alpha^2}\boldsymbol{u}_1 - a_3\boldsymbol{u_3} \\
&= \frac{2t_n - 3\alpha L_n}{3(1+3\alpha^2)}\cdot(2,1,1)^\top - \frac{t_n}{3}(1,-1,-1)^\top \\
&= \left(\frac{4t_n - 6\alpha L_n}{3(1+3\alpha^2)} - \frac{t_n}{3}, \frac{2t_n - 3\alpha L_n}{3(1+3\alpha^2)} + \frac{t_n}{3}, \frac{2t_n - 3\alpha L_n}{3(1+3\alpha^2)} + \frac{t_n}{3}\right)^\top \\
&= \underbrace{\left(\frac{t_n(1-\alpha^2) - 2\alpha L_n}{1+3\alpha^2}, \frac{t_n(1+\alpha^2) - \alpha L_n}{1+3\alpha^2}, \frac{t_n(1+\alpha^2) - \alpha L_n}{1+3\alpha^2}\right)^\top}_{\boldsymbol{\mu}:=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)^\top}.
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^\top\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{g}\right) &= \exp\left[\frac{1}{2}\left(a_1\boldsymbol{u}_1^\top - a_3\boldsymbol{u}_3^\top\right)\boldsymbol{H}^{-1}\left(a_1\boldsymbol{u}_1 - a_3\boldsymbol{u}_3\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{1}{2}\left(a_1\boldsymbol{u}_1^\top - a_3\boldsymbol{u}_3^\top\right)\boldsymbol{H}^{-1}\left(a_1\boldsymbol{u}_1 - a_3\boldsymbol{u}_3\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{1}{2}\left(a_1\boldsymbol{u}_1^\top - a_3\boldsymbol{u}_3^\top\right)\left(\frac{a_1\boldsymbol{u}_1}{1+3\alpha^2} - a_3\boldsymbol{u}_3\right)\right] \\
&= \exp\left(\frac{3a_1^2}{1+3\alpha^2} + \frac{3}{2}a_3^2\right) = \exp\left[\frac{(2t_n - 3\alpha L_n)^2}{3(1+3\alpha^2)} + \frac{t_n^2}{6}\right].
\end{aligned}$$

变量代换后的积分域为 $[0,\infty)^3-\mu = \otimes^3{}_{i=1}[-\mu_i,\infty)$。令 $\boldsymbol{Z}=(Z_1,Z_2,Z_3)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中服从分布 $N\left(\mathbf{0},\boldsymbol{H}^{-1}\right)$ 的高斯向量。可以看出，

$$\begin{aligned}\iiint_{[0,\infty)^3-\boldsymbol{\mu}} \exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}\right) d\boldsymbol{y} &= \det(\boldsymbol{H})^{-1/2}\times \mathbb{P}\left(\boldsymbol{Z}\geq -\boldsymbol{\mu}\right)\\ &\leq \frac{\mathbb{P}\left(Z_1\geq -\mu_1\right)}{\sqrt{(1+3\alpha^2)(1+\alpha^2)}}.\end{aligned}$$

根据 μ_1，的定义，我们有

$$\mu_1 = \frac{-t_n\alpha^2}{1+3\alpha^2}-\frac{2\alpha L_n - t_n}{1+3\alpha^2}.$$

注意，$Z_1\sim N\left(0,\left(\boldsymbol{H}^{-1}\right)_{11}\right)$，其中

$$\left(\boldsymbol{H}^{-1}\right)_{11} = \left((\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M})^{-1}\right)_{11} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3(1+3\alpha^2)} = \frac{1-r}{1+r}.$$

因此，我们已经证明

$$\mathbb{P}\left(A_{12}^c\cap A_{13}^c\right)\lesssim \frac{\exp\left[-L_n^2-\frac{3t_n^2}{2}+\frac{(2t_n-3\alpha L_n)^2}{3(1+3\alpha^2)}+\frac{t_n^2}{6}\right]}{\sqrt{(1+3\alpha^2)(1+\alpha^2)}}\mathbb{P}\left(N\left(0,\frac{1-r}{1+r}\right)\geq \frac{t_n\alpha^2}{1+3\alpha^2}+\frac{2\alpha L_n-t_n}{1+3\alpha^2}\right).$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}\exp\left[-L_n^2-\frac{3t_n^2}{2}+\frac{(2t_n-3\alpha L_n)^2}{3(1+3\alpha^2)}+\frac{t_n^2}{6}\right] &= \exp\left(-\frac{u_n^2}{1+r}\right),\\ \frac{t_n\alpha^2}{1+3\alpha^2}+\frac{2\alpha L_n-t_n}{1+3\alpha^2} &= \frac{2\sqrt{r}u_n-(1+r)t_n}{1+r}.\end{aligned}$$

利用初等界 $1-\Phi(x)\lesssim \exp\left(-x^2/2\right)$（对所有 $x\geq 0$ 均成立），我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(N\left(0,\frac{1-r}{1+r}\right)\geq \frac{2\sqrt{r}u_n-(1+r)t_n}{1+r}\right) &\lesssim \exp\left[-\frac{\left(2\sqrt{r}u_n-(1+r)t_n\right)^2}{2(1+r)^2}\cdot\frac{1+r}{1-r}\right]\\ &= \exp\left[-\frac{\left(2\sqrt{r}u_n-(1+r)t_n\right)^2}{2(1-r^2)}\right].\end{aligned}$$

综上，我们有

$$\begin{aligned}n^3\mathbb{P}\left(A_{12}^c\cap A_{13}^c\right) &\lesssim \exp\left(3\log n-\frac{u_n^2}{1+r}-\frac{\left(2\sqrt{r}u_n-(1+r)t_n\right)^2}{2(1-r^2)}\right)\\ &= \exp\left[-g(r)\log n+O\left(\log\log n\right)+O(1)\right]\end{aligned}\tag{6.6}$$

其中

$$g(r):=\frac{4}{1+r}+\frac{\left(4\sqrt{r}-\sqrt{2}(1+r)\right)^2}{2(1-r^2)}-3=\frac{2(1-\sqrt{2r})^2}{1-r}=\frac{2(1-2r)^2}{(1-r)(1+\sqrt{2r})^2}\geq\frac{1}{2}f_n^2.$$

结合（6.6）、上面的公式以及 $f_n^2\log n \gg \log\log n$ 这一事实即可完成证明。□

7 定理2.2的证明

回顾（2.1）中 c_n 和 d_n 的定义，以及（6.1）中 G^{ij} 的表示。定义

$$Z_i := c_n (X_i - d_n).$$

众所周知，点过程 $N_n := \sum^n{}_{i=1} \delta_{Z_i} \xrightarrow{d} N := \sum^\infty{}_{i=1} \delta_{\eta_i}$收敛于点过程。极限过程 N 是强度测度为 $e^{-x}dx$ 的泊松点过程（PPP）（例如参见 Embrechts 等人 [1997]）。根据点过程收敛，对于任意 $k \geq 1$，有

$$(Z_{(1)}, Z_{(2)}, \ldots, Z_{(k)}) \xrightarrow{d} (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k) \tag{7.1}$$

其中 $Z_{(1)} \geq \cdots \geq Z^{(n)}$ 表示 $Z_1, \ldots, Z_n$ 的次序统计量，且 η_i 中的各项与式（2.2）相同。

定理2.2 的证明基于以下结果

命题 7.1. 对任意 $c > 0$，有

$$\sup_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ \frac{Z_{(i)} + Z_{(j)}}{\sqrt{2}} + cY_{ij} \right\} \xrightarrow{d} \sup_{i<j} \left\{ \frac{\eta_i + \eta_j}{\sqrt{2}} + c\mathcal{Y}_{ij} \right\}$$

其中 $\{\eta_i\}^\infty{}_{i=1}$ 与 (2.2) 中的相同，且 $\mathcal{Y}_{ij}$是与 η_i 相互独立的独立同分布标准正态变量。

值得注意的是，命题7.1 并不能直接由连续映射论证推出。这是因为映射

$$f : \sum_i \delta_{x_i} \mapsto \sum_{i<j} \delta_{x_i + x_j}$$

在N处并非几乎必然连续。事实上，映射f 在N处几乎必然不连续。有趣的是，点过程$f(N)$局部有限（因此是良定义的），但在每个紧区间上的强度测度都为无穷。为此，取 $[a、b] \subset \mathbb{R}$，并注意到

$$\begin{aligned} \mathbb{E} f(N)[a,b] = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{x+y \in [a,b]\}} \cdot e^{-x-y} dxdy &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \int_{a-x}^{b-x} e^{-y} dydx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \left(e^{x-a} - e^{x-b} \right) dx = \infty. \end{aligned}$$

然而，η_i在（2.2）中的形式表明，$f(N)$几乎必然局部有限。下面给出一个明确的例子，说明f在N 的任何实现处都不连续：取足够大的$M > 0$并定义

$$\mathcal{N}_n := \sum_{i=1}^n \delta_{\eta_i} + \delta_{-\eta_n + M}.$$

容易看出，$\mathcal{N}_n$ 在模糊拓扑下收敛到N，但其像$f(\mathcal{N}_n)$对所有$n \geq 1$都包含 δ_M。因此，当$M > \eta_1 + \eta_2$时，$f(\mathcal{N}_n)$不收敛到$f(N)$。这一构造表明，对于任何由一个趋于负无穷的递减序列构成的点配置，f都不连续。

命题的证明7.1. 对于 $\in \mathbb{R}$，定义

$$\begin{aligned} F_n(x) &:= \mathbb{P}\left(\forall 1 \leq i < j \leq n : \frac{Z_{(i)} + Z_{(j)}}{\sqrt{2}} + cY_{ij} \leq x \right), \\ F(x) &:= \mathbb{P}\left(\forall 1 \leq i < j : \frac{\eta_i + \eta_j}{\sqrt{2}} + c\mathcal{Y}_{ij} \leq x \right). \end{aligned}$$

只需证明

$$\limsup_{n \to \infty} F_n(x) \leq F(x) \tag{7.2}$$

and

$$\liminf_{n\to\infty} F_n(x) \geq F(x). \tag{7.3}$$

证明 （7.2）。 固定一个数 $1 \leq K \leq n$ 并注意到

$$F_n(x) \leq \mathbb{P}\left(\forall 1 \leq i < j \leq K : \frac{Z_{(i)} + Z_{(j)}}{\sqrt{2}} + cY_{ij} \leq x\right).$$

由（7.1）和连续映射定理可得

$$\left(Z_{(i)} + Z_{(j)}\right)_{1\leq i<j\leq K} \xrightarrow{d} \left(\eta_i + \eta_j\right)_{1\leq i<j\leq K}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} F_n(x) &\leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\forall 1 \leq i < j \leq K : \frac{Z_{(i)} + Z_{(j)}}{\sqrt{2}} + cY_{ij} \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\forall 1 \leq i < j \leq K : \frac{\eta_i + \eta_j}{\sqrt{2}} + c\mathcal{Y}_{ij} \leq x\right)\end{aligned}$$

且由于这对所有 K 都成立，因此令 K，得到（7.2 $\to \infty$。
（7. 的证明 3）。取 $\varepsilon > 0$，由引理 9.2，存在$C_\varepsilon > 0$，它仅依赖于 ε，使得

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\operatorname*{argmax}_{i<j}\left(\frac{Z_{(i)} + Z_{(j)}}{\sqrt{2}} + cY_{ij}\right) \in \{1, 2, \ldots, K\}^2\right) \geq 1 - \varepsilon$$

对所有 $K \geq C_\varepsilon$ 都成立。因此，对于任意 $K \geq C_\varepsilon$，我们有

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} F_n(x) &\geq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\forall 1 \leq i < j \leq K : \frac{Z_{(i)} + Z_{(j)}}{\sqrt{2}} + cY_{ij} \leq x\right) - \varepsilon \\ &= \mathbb{P}\left(\forall 1 \leq i < j \leq K : \frac{\eta_i + \eta_j}{\sqrt{2}} + c\mathcal{Y}_{ij} \leq x\right) - \varepsilon.\end{aligned}$$

由于这对任意 $K \geq C_\varepsilon$ 都成立，因此先令 K $\to \infty$，再令 $\varepsilon \to 0$，即可得到式（7.3）。命题 7.1 的证明至此完成。 □

现在我们可以证明定理 2.2。不失一般性，我们可以假设

$$\frac{(1-2r)\log n}{2r} = \lambda \in (0, \infty). \tag{7.4}$$

事实上，给定一列满足式（$\mathcal{G}_n$ 1.1）的高斯场，其对应参数为 r_n，且满足 $1 - 2r_n)\log n \to \underline{\lambda}$，通过考虑参数分别为 $\underline{\mathcal{G}}_n$ 的高斯场 $\mathcal{G}_n$ 和 $\mathcal{G}_n$，并分别选取参数r 和 r，使得

$$\begin{aligned}(1-2\overline{r})\log n &= \lambda - \varepsilon, \\ (1-2\underline{r})\log n &= \lambda + \varepsilon,\end{aligned}$$

对于某个 $\varepsilon \in (0,c)$。

Thi这进一步意味着，对所有足够大的n，$r \leq r \leq \overline{r}$。因此，Slepian 引理给出

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(c_n\left(\max_{1\leq i<j\leq n} G_{ij} - \sqrt{2}d_n\right) \leq x\right) &\leq \mathbb{P}\left(c_n\left(\max_{1\leq i<j\leq n} \overline{G}_{ij} - \sqrt{2}d_n\right) \leq x\right), \\ \mathbb{P}\left(c_n\left(\max_{1\leq i<j\leq n} G_{ij} - \sqrt{2}d_n\right) \leq x\right) &\geq \mathbb{P}\left(c_n\left(\max_{1\leq i<j\leq n} \underline{G}_{ij} - \sqrt{2}d_n\right) \leq x\right).\end{aligned}$$

对所有 $x \in \mathbb{R}$。先令 $n \to \infty$，再令 $\varepsilon \to 0$，即可得到所需结论。现在假设（7.4）。根据命题7.1，我们有

$$\begin{aligned} c_n\left(\max_{1\le i<j\le n}\frac{G_{ij}}{\sqrt{2r}} - \sqrt{2}d_n\right) &= \max_{1\le i<j\le n}\left\{\frac{Z_i+Z_j}{\sqrt{2}} + \sqrt{2\lambda}Y_{ij}\right\} \\ &\overset{d}{=} \max_{1\le i<j\le n}\left\{\frac{Z_{(i)}+Z_{(j)}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2\lambda}Y_{ij}\right\} \\ &\overset{d}{\to} \sup_{i<j}\left(\frac{\eta_i+\eta_j}{\sqrt{2}} + \sqrt{2\lambda}\cdot Z_{ij}\right). \end{aligned}$$

注意，上面展示式中的第二行由 $\{Y_{ij}$的可交换性推出；$1 \le i < j \le n\}$：若 π 是 $[n]$ 的一个置换，使得$Z_{(i)} = Z_{\pi(i)}$，那么 π 在置换群上均匀分布，且独立于Y_{ij}，并且

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\max_{1\le i<j\le n}\left\{\frac{Z_i+Z_j}{\sqrt{2}} + \sqrt{2\lambda}Y_{ij}\right\} \le x\right) \\ =&\mathbb{P}\left(\max_{1\le i<j\le n}\left\{\frac{Z_{(i)}+Z_{(j)}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2\lambda}Y_{\pi(i)\pi(j)}\right\} \le x\right) \\ =&\mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(\forall 1\le i<j\le n:\ \sqrt{2\lambda}\cdot Y_{\pi(i)\pi(j)} \le x - \frac{Z_{(i)}+Z_{(j)}}{\sqrt{2}}\middle| Z_1,\dots,Z_n\right)\right] \\ =&\mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(\forall 1\le i<j\le n:\ \sqrt{2\lambda}\cdot Y_{ij} \le x - \frac{Z_{(i)}+Z_{(j)}}{\sqrt{2}}\middle| Z_1,\dots,Z_n\right)\right] \\ =&\mathbb{P}\left(\max_{1\le i<j\le n}\left\{\frac{Z_{(i)}+Z_{(j)}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2\lambda}Y_{ij}\right\} \le x\right). \end{aligned}$$

现在，我们通过指出2.2，完成定理的证明

$$c_n\left(\max_{1\le i<j\le n}\frac{G_{ij}}{\sqrt{2r}} - \sqrt{2}d_n\right) = (1+o(1))\cdot c_n\left(\max_{1\le i<j\le n} G_{ij} - \sqrt{2r}\cdot\sqrt{2}d_n\right)$$

and

$$c_n\left(1-\sqrt{2r}\right)\sqrt{2}d_n = \frac{(1-2r)2\log(n)\cdot(1+o(1)))}{1+\sqrt{2r}} \to \lambda.$$

□

8 定理2.3的证明

这是定理2.2 和 Slepian 引理的推论。为此，考虑两个高斯场$\mathcal{G}_n$和 $\mathcal{G}_n$，它们具有形式1.1）及参数$r_- = 1/2$（分别）r，选取这些参数使得（$1-2r$）$\log n = \varepsilon$对某个 $\varepsilon > 0$成立。

定理2.3 的证明现可由与定理2.2证明中相同的 Slepian 引理论证得出，该论证给出一个双边界；首先令$n \to \infty$，然后令 $\varepsilon \to 0$。□

9 技术结果

本节将汇集一些有用的渐近展开。

引理 9.1. 定义一个大小为 $p(p-1)/2$ 的方阵 $\boldsymbol{A}$，其指标集为 $I = \{(i,j): 1 \le i < j \le p\}$，如下所示

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}} = \begin{cases} 0, & \big|\{i,j\} \cap \{k,l\}\big| = 0; \\ b \in [0,1/2), & \big|\{i,j\} \cap \{k,l\}\big| = 1; \\ 1, & \big|\{i,j\} \cap \{k,l\}\big| = 2; \end{cases}$$

其中$\boldsymbol{e} = (i,j)$ 以及$\boldsymbol{f} = (k,l)$。那么，对所有 $p \ge 4$，$\boldsymbol{A}$ 的最小特征值为 $\lambda_{min}(\boldsymbol{A}) = 1 - 2b$.

引理 9.1 的证明。我们无需担心 I 的具体排序选择，因为$\boldsymbol{A}$ 是一个随机向量的协方差矩阵，而对随机向量的分量进行置换不会改变其协方差矩阵的最小特征值。

令 $d = p(p-1)/2 = |I|$。定义线性无关向量 $\boldsymbol{s}^{(v)} := (s^{(v)}{}_{ij}) \in \mathbb{R}^d$, $1 \le v \le p$，其范围为

$$s_{ij}^{(v)} = \mathbf{1}_{\{v \in \{i,j\}\}},\ 1 \le i < j \le p.$$

通过观察对所有实数 α_i'：，可以看出它们是线性无关的

$$\left[\sum_{v=1}^{p} \alpha_v \boldsymbol{s}^{(v)}\right]_{(i,j)} = \alpha_i + \alpha_j.$$

由上面的公式，我们还有

$$\sum_{v=1}^{p} \boldsymbol{s}^{(v)} = 2 \cdot \mathbf{1}_d. \tag{9.1}$$

将 $\mathbb{R}^d$ 分解为正交子空间的直和：$\mathbb{R}^d = \text{span}\ \{\mathbf{1}_d\} \oplus S_1 \oplus S_2$, 其中

$$S_1 := \left\{\sum_{v=1}^{p} \alpha_v \boldsymbol{s}^{(v)} : \sum_{v=1}^{p} \alpha_v = 0\right\} \quad \text{and} \quad S_2 := \Big[\text{span}\,\{\mathbf{1}_d\} \oplus S_1\Big]^{\perp}.$$

前两个子空间的正交性源于（9.1）。子空间 S_2 也可以等价地刻画为

$$\begin{aligned} S_2 = \Big[\text{span}\,\{\mathbf{1}_d\} \oplus S_1\Big]^{\perp} &= \text{span}\left\{\boldsymbol{s}^{(v)}; 1 \le v \le p\right\}^{\perp} \\ &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \sum_{u:(u,v) \text{ or } (v,u) \text{ in } I} x_{(u,v)} = 0 \text{ for all } v \in [p]\right\}. \end{aligned}$$

下文将证明，这些恰好是$\boldsymbol{A}$的特征子空间。在 $\text{span}\,\{\mathbf{1}_d\}$ 上，我们有

$$[\boldsymbol{A}\mathbf{1}_d]_{(i,j)} = 1 + 2b(p-2)$$

对所有的 $(i,j) \in I$ 都成立。这是因为对于每个 $(i,j) \in I$，有 $2p-2$ 个与其共享一个顶点的数对。因此，$\lambda_1 = 1 + 2b(p-2)$ 是对应于这个特征子空间的特征值。

在 S_1 上，对于 $\boldsymbol{x} = \sum_{v=1}^{p} \alpha_v \boldsymbol{s}^{(v)}$，我们有

$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}]_{(i,j)} = \sum_{v=1}^{p} \alpha_v [\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}^{(v)}]_{(i,j)} = \begin{cases} 1 + b(p-2), & \text{if } v \in \{i,j\}; \\ 2b, & \text{if } v \notin \{i,j\}. \end{cases}$$

因此，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{v=1}^{p} \alpha_v \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}^{(v)} = \sum_{v=1}^{p} \alpha_v \left(2b \cdot \mathbf{1}_d + (1 + b(p-4)\boldsymbol{s}^{(v)})\right) = [1 + b(p-4)] \cdot \boldsymbol{x}.$$

因此， $\lambda_2 = 1 + b(p-4)$ 是子空间 S_1 上的特征值。

最后，考虑 S_2。对于 $\boldsymbol{x} \in S_2$,，我们有

$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}]_{(i,j)} = x_{(i,j)} + \sum_{u \neq i,j} x_{(i,u)} + \sum_{u \neq i,j} x_{(j,u)} = 1 - bx_{(i,j)} - bx_{(i,j)} = (1-2b)x_{(i,j)}.$$

因此， $\lambda_3 = 1 - 2b$ 是子空间 S_2上的特征值。

在三个特征值 $\lambda_1 = 1 + 2b(p-2)$、 $\lambda_2 = 1 + b(p-4)$、 $\lambda_3 = 1 - 2b$中，当$p \geq 4$时，最小的是 λ_3。证明完毕。□

引理 9.2。 与命题 *7.1* 中使用相同的记号，对于所有 $\varepsilon > 0$ 存在 $C_\varepsilon > 0$ 使得 *at*

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\operatorname*{argmax}_{(i,j):i<j} \left\{ \frac{Z_{(i)} + Z_{(j)}}{\sqrt{2}} + cY_{ij} \right\} \in [K] \times [K] \right) \geq 1 - \varepsilon \tag{9.2}$$

对于所有 $K \geq C_\varepsilon$。这里， $[K] = \{1, 2, \ldots\ldots, K\}$。

引理的证明9.2。 设 $K \geq 1$并定义

$$M_{in}(K,n) := \max_{1 \leq i < j \leq K} \left\{ \frac{Z_{(i)} + Z_{(j)}}{\sqrt{2}} + cY_{ij} \right\} \quad \text{and} \quad M_{out}(K,n) := \max_{i \vee j \geq K} \left\{ \frac{Z_{(i)} + Z_{(j)}}{\sqrt{2}} + cY_{ij} \right\}.$$

只需证明

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(M_{out}(K,n) \leq M_{in}(K,n) \right) \geq 1 - \varepsilon$$

对充分大的K 成立。

我们先估计$Z_{(i)}$ 在i较大时的大小。令$b_k := -(\log k)/2$。注意，对所有$k \leq n$，利用米尔斯比可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[N_n\left(b_k, \infty\right) \right] = n\mathbb{P}\left(Z_1 \geq b_k \right) &= n\mathbb{P}\left(N(0,1) \geq \frac{b_k}{c_n} + d_n \right) \\
&\leq \frac{10n}{\sqrt{\log n}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{b_k}{c_n} + d_n \right)^2}{2} \right) \\
&\leq \frac{10n}{\sqrt{\log n}} \exp\left[b_k\left(\frac{1}{2} + o(1) \right) - \frac{d_n^2}{2} - \frac{b_n^2}{2c_n^2} \right] \\
&\leq \frac{10n}{\sqrt{\log n}} \exp\left[b_k\left(\frac{1}{2} + o(1) \right) - \log n + \frac{\log\log n}{2} \right] \\
&\leq k^{3/4}
\end{aligned} \tag{9.3}$$

当n 和k 充分大时，此估计一致成立，例如M_0 （一个普适常数）。

Re回想一下，对于大小为n 且均值为 μ 的二项分布X，切尔诺夫界给出

$$\mathbb{P}\left(X \geq k \right) \leq \exp\left[-nD_{KL}\left(\frac{k}{n}, \frac{\mu}{n} \right) \right]$$

对所有$k \geq \mu$，其中 KL散度为

$$D_{KL}(p,q) := p\log\left(\frac{p}{q} \right) + (1-p)\log\left(\frac{1-p}{1-q} \right).$$

注意到$N_n\left(b_k, \infty\right)$服从均值为$O(k^{3/4})$量级的二项分布。因此，应用切尔诺夫界可得

$$\mathbb{P}\left(Z_{(k)} \geq b_k \right) = \mathbb{P}\left(N_n(b_k, \infty) \geq k \right) \leq \exp\left(-\frac{k}{4}\log k + 2k \right)$$

因此，$\mathbb{P}(\exists k \geq K:\ Z_{(k)} \geq b_k) \leq \sum_{k\geq K} \exp\left(-\frac{k}{4}\log k + 2k\right)$。由此可得

$$\mathbb{P}(\forall k \geq K_1(\varepsilon) : Z_{(k)} \leq b_k) \geq 1 - \varepsilon/10, \tag{9.4}$$

其中

$$K_1(\varepsilon) := \min\left\{K \geq 1 : \sum_{k\geq K} \exp\left(-\frac{k}{4}\log k + 2k\right) \leq \frac{\varepsilon}{10}\right\}. \tag{9.5}$$

步骤 1：M 的高概率下界$_{in}(K,n)$。由（7.1），我们有

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_{in}(K,n) \geq x) = \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i<j\leq K}\left\{\frac{\eta_i+\eta_j}{\sqrt{2}} + c\mathcal{Y}_{ij}\right\} \geq x\right) \geq \mathbb{P}\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{\sqrt{2}} + c\mathcal{Y}_{12} \geq x\right)$$

对所有 $x \in \mathbb{R}$ 和 $K \geq 1$。选取$T_\varepsilon \in \mathbb{R}$使得

$$\mathbb{P}\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{\sqrt{2}} + c\mathcal{Y}_{12} \geq T_\varepsilon\right) = 1 - \frac{\varepsilon}{20}. \tag{9.6}$$

在此 T_ε 的选取下，我们有 $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_{in}(K,n) \geq T_\varepsilon) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{10}$。

步骤 2：$M_{out}(K,n)$ 的高概率上界。注意到 $M_{out}(K,n) = \max\{M_{1n}, M_{2n}\}$，其中

$$M_{1n} := \max_{K+1\leq i<j\leq n}\left\{\frac{Z_{(i)}+Z_{(j)}}{\sqrt{2}} + cY_{ij}\right\} \quad \text{and} \quad M_{2n} := \max_{K+1\leq j\leq n;1\leq i\leq K}\left\{\frac{Z_{(i)}+Z_{(j)}}{\sqrt{2}} + cY_{ij}\right\}.$$

我们定义 $W_j := \max_{1\leq i\leq K} Z_{ij}$并回顾 T_ε在（9.6）。根据（9.4），我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_{out}(K,n) \geq T_\varepsilon) &\leq \mathbb{P}(M_{1n} \geq T_\varepsilon/2) + \mathbb{P}(M_{2n} \geq T_\varepsilon/2) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{5} + \mathbb{P}\left(\max_{K+1\leq i<j\leq n}\left\{\frac{-\log(i)-\log(j)}{2\sqrt{2}} + cY_{ij}\right\} \geq \frac{T_\varepsilon}{2}\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\frac{Z_{(1)}}{\sqrt{2}} + \max_{j\geq K+1}\left\{-\frac{\log(j)}{2\sqrt{2}} + cW_j\right\} \geq \frac{T_\varepsilon}{2}\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{5} + \mathbb{P}\left(\max_{K+1\leq i<j\leq n}\left\{\frac{-\log(i)-\log(j)}{2\sqrt{2}} + cY_{ij}\right\} \geq \frac{T}{2}\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\frac{Z_{(1)}}{\sqrt{2}} \geq v\right) + \mathbb{P}\left(\max_{j\geq K+1}\left\{-\frac{\log(j)}{2\sqrt{2}} + cW_j\right\} \geq \frac{T_\varepsilon}{2} - v\right)
\end{aligned}$$

对所有 $v \in \mathbb{R}$。我们接下来针对 $K \geq \exp\left\{-T_\varepsilon(\sqrt{2}+1)\right\}$ 估计右边的每一项。对于第一个概率，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\max_{K+1\leq i<j\leq n}\left\{\frac{-\log(i)-\log(j)}{2\sqrt{2}} + cY_{ij}\right\} \geq \frac{T_\varepsilon}{2}\right) \\
&\leq \sum_{K+1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}\left(Y_{ij} \geq \frac{1}{2c}\left(T_\varepsilon + \frac{\log(i)+\log(j)}{\sqrt{2}}\right)\right) \\
&\leq \sum_{K+1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}\left(Y_{ij} \geq \frac{\log(i)+\log(j)}{4c}\right) \\
&\leq \left(\sum_{i\geq K+1} \exp\left(-\frac{\log^2(i)}{32c^2}\right)\right)^2 \leq \frac{\varepsilon}{5},
\end{aligned}$$

每当

$$K \geq K_2(\varepsilon) := \min\left\{K \geq 1 : \sum_{i\geq K+1} \exp\left(-\frac{\log^2(i)}{32c^2}\right) \leq \sqrt{\varepsilon/5}\right\}. \tag{9.7}$$

对于第二个概率，注意到对于满足 $v = v_\varepsilon$ 使得 $\mathbb{P}\left(\eta_1 \geq \sqrt{2}v_\varepsilon\right) = \varepsilon/10$ 的情况，我们有
For

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Z_{(1)}}{\sqrt{2}} \geq v_\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\eta_1 \geq \sqrt{2}v_\varepsilon\right) = \frac{\varepsilon}{10} < \frac{\varepsilon}{5} \tag{9.8}$$

由于（7.1）。最后，我们将第二个概率估计为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\max_{j\geq K+1}\left\{-\frac{\log(j)}{2\sqrt{2}} + cW_j\right\} \geq \frac{T_\varepsilon}{2} - v_\varepsilon\right) &\leq \sum_{j\geq K+1} \mathbb{P}\left(W_j \geq \frac{1}{c}\left(\frac{T_\varepsilon}{2} - v_\varepsilon + \frac{\log(j)}{2\sqrt{2}}\right)\right)\\ &\leq K\sum_{j\geq K+1} \mathbb{P}\left(N(0,1) \geq \frac{1}{c}\left(\frac{T_\varepsilon}{2} - v_\varepsilon + \frac{\log(j)}{2\sqrt{2}}\right)\right) \leq K\sum_{j\geq K+1} \mathbb{P}\left(N(0,1) \geq \frac{\log(j)}{4c}\right)\end{aligned}$$

对所有 $K \geq \exp\left(4(\sqrt{2}+1)\left(v_\varepsilon - \frac{T_\varepsilon}{2}\right)\right)$ 均成立。上式右侧进一步可界为

$$K\sum_{j\geq K+1} \exp\left(-\frac{\log^2(j)}{32c^2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{5}$$

当

$$K \geq K_3(\varepsilon) := \min\left\{K \geq 1 : K\sum_{j\geq K+1} \exp\left(-\frac{\log^2(j)}{32c^2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{5}\right\}. \tag{9.9}$$

步骤 3：结论。取 T_ε 使其满足（9.6），我们有

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(M_{in}(K,n) \geq T_\varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{10}.$$

对所有 $K \geq 1$ 均成立。

此外，根据步骤 2，我们知道 $\mathbb{P}(M_{out}(K,n) \geq T_\varepsilon) \leq 4\varepsilon/5$ whenever

$$K \geq K_\varepsilon := \max\left\{K_1(\varepsilon), M_0, K_2(\varepsilon), K_3(\varepsilon), \exp\left\{-T_\varepsilon(\sqrt{2}+1)\right\}, \exp\left\{4(\sqrt{2}+1)\left(v_\varepsilon - \frac{T_\varepsilon}{2}\right)\right\}\right\}, \tag{9.10}$$

其中 M_0 是使（9.3）成立的普适常数，且 $K_1(\varepsilon)$、$K_2(\varepsilon)$、$K_3(\varepsilon)$、T_ε、v_ε 分别定义于（9.5）、（9.7）、（9.9）、（9.6）、（9.8）中。

我们得出

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(M_{in}(K,n) \geq M_{out}(K,n)\right) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{10} - \frac{4\varepsilon}{5} > 1 - \varepsilon.$$

对所有 $K \geq K_\varepsilon$ 均成立，从而完成证明。 □

请注意，上文引理9.2的证明实际上表明，（9.2）不仅在 c 的某个取值处成立，而且对紧区间内的所有 c 都一致成立。下一个引理指出，定理 2.2中的极限分布是非退化的。

引理 9.3. 回顾 η_i 在 (2.2) 中的表达式。对于 $c \geq 0$，定义

$$Y_c := \sup_{i<j}\left\{\frac{\eta_i + \eta_j}{\sqrt{2}} + cZ_{ij}\right\}$$

其中，Z_{ij} 是与 η_i 相互独立的标准正态随机变量。于是，

(i) 对所有 $c \geq 0$，$Y_c < \infty$ 几乎必然成立。

(ii) $Y_{c_n} \xrightarrow{d} Y_c$ *if* $c_n \to c$.

引理的证明 9.3。 仿照引理9.2 的证明可得，对于所有 $\varepsilon, A > 0$，存在$C_{\varepsilon,A} > 0$ 使得

$$\mathbb{P}\left(\operatorname*{argmax}_{\{(i,j):i<j\}} \left\{\frac{\eta_i + \eta_j}{\sqrt{2}} + cZ_{ij}\right\} \in [K] \times [K]\right) \geq 1 - \varepsilon \tag{9.11}$$

对于所有 $K \geq C_{\varepsilon,A}$ 以及$c \leq A$。

令 $\varepsilon \to 0$，即可由上式得到 (i)。为证明 (ii)，注意到

$$Y_{c_n}^{(M)} := \sup_{1 \leq i < j \leq M} \left\{\frac{\eta_i + \eta_j}{\sqrt{2}} + c_n Z_{ij}\right\}$$

几乎必然单调递增至Y_{c_n}，当$M \to \infty$时。因此，对每个$x \in \mathbb{R}$和$M \geq 1$,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Y_{c_n} \leq x\right) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Y_{c_n}^{(M)} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(Y_c^{(M)} \leq x\right),$$

其中最后一个等号由连续映射定理得出。令 $M \to \infty$，可推出 $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Y_{c_n} \leq x\right) \leq \mathbb{P}\left(Y_c \leq x\right)$。为证明另一方向，利用 (9.11)，取 $A = \sup_{n\geq 1} c_n$，可得对所有 $\varepsilon > 0$以及 M 充分大时，

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Y_{c_n} \leq x\right) \geq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Y_{c_n}^{M} \leq x\right) - \varepsilon \geq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Y_c^{M} \leq x\right) - \varepsilon.$$

先令$M \to \infty$，再令 $\varepsilon \to 0$，即可由此得到 (ii)。 □

致谢： JH的研究得到瑞典研究理事会资助（项目编号 VR-2023- 03577，项目名称“高维极值与随机矩阵结构”），以及 Verg-Foundation 的资助。

10 参考文献

R. Arratia、L. Goldstein 和 L. Gordon。两个矩足以进行泊松近似：陈-斯坦方法。充分。 *Ann. Probab.*, 17(1):9–25，1989。ISSN 0091-1798,2168- 894X。网址http://links.jstor.org/sici?sici=0091-1798(198901)17:1<9:TMSFPA>2.0.CO;2-X&origin=MSN。

P. Bastian、H. Dette 和 J. Heiny。通过对 U 统计量最大值进行自助法检验高维中实际显著的依赖关系。《统计年刊》，52(2):628–653，2024年。

Maxime Boucher、Didier Chauveau 和 Marguerite Zani。高维框架下非对角自相关系数的最大绝对值。统计论文，66(4):95，2025。

T. Cai。高维协方差结构的整体检验与大规模多重检验。统计学及其应用年度评论。，4:423–446，2017。

T. Cai、W. Liu 和 Y. Xia。高维和稀疏情形下的双样本协方差矩阵检验与支撑集恢复。美国统计学会杂志，108(501):265–277，2013。

Dan Cheng 与 Armin Schwartzman。随机场中峰值检测的局部极大值多重检验。《统计年刊》，45(2):529–556，2019。

Dan Cheng 与 Yimin Xiao。球面上高斯随机场的超越概率。伯努利，22(2):1113–1130，2016。Dan Cheng 与 Yimin Xiao。高斯向量场超越概率的期望欧拉示性数近似。《应用概率年刊》，34(6):5664–5693，2024年。Victor Chernozhukov、Denis Chetverikov 与 Yuta Koike。高维情形下近乎最优的中心极限定理与自助法近似。《应用概率年刊》，33(3):2374–2425，2023。Jian Ding、Ronen Eldan 与 Alex Zhai。关于高斯场上确界的多个峰值与中等偏差。《概率年刊》，43(6):3468–3493，2015。Paul Embrechts、Claudia Kl¨uppelberg 与 Thomas Mikosch。《保险与金融中极值事件的建模》，数学应用（纽约）第33卷。施普林格，柏林，1997年。ISBN 3-540-60931-8。J. Fan 与 T. Jiang。来自等相关正态总体的样本相关矩阵的最大元素。《概率年刊》，47(5):3321–3374，2019。Enkelejd Hashorva 与 J¨urg H¨usler。关于多元高斯尾部。《统计数学研究所年刊》，55(3):507–522，2003年9月。Johannes Heiny 与 Carolin Kleemann。高维随机向量对称函数的点过程收敛。极值，27(2):185–217，2024年。ISSN 1386-1999,1572-915X。doi: 10.1007/s10687-023-00482-w。URL https://doi.org/10.1007/s10687-023-00482-w。Johannes Heiny 与 Carolin Kleemann。高维随机向量的最大点间距离。伯努利，31(1):537–560，2025。Johannes Heiny、Thomas Mikosch 与 Jorge Yslas。样本协方差矩阵非对角元素的点过程收敛。《应用概率年刊》，31(2):538–560，2021。ISSN 1050-5164。doi: 10.1214/20-aap1597。URL https://doi.org/10.1214/20-aap1597。Norbert Henze 与 Timo Klein。对称 Kotz 样本最大点间距离的极限分布。《多元分析杂志》，57(2):228–239，1996。Peter Hoff。加性与乘性效应网络模型。统计科学，36(1):34–50，2021。Jianwei Hu、Jingfei Zhang、Hong Qin、Ting Yan 与 Ji Zhu。利用最大逐元素偏差检验随机区块模型的拟合优度。《美国统计学会杂志》，116(535):1373–1382，2021。Sreenivasa Rao Jammalamadaka 与 Svante Janson。球对称分布随机向量样本中最大点间距离的渐近分布。《应用概率年刊》，25(6):3571–3591，2015。T. Jiang。样本相关矩阵最大元素的渐近分布。《应用概率年刊》，14(2):865–880，2005。T. Jiang 与 T. Pham。依赖结构下最大皮尔逊相关系数的渐近分布。《统计年刊》，53(3):907–928，2025。Y. Koike。关于超矩形高维中心极限定理中维数依赖性的注记。《日本统计与数据科学杂志》，2020。

D. Li 和 A. Rosalsky。关于样本相关矩阵最大元素的一些强极限定理。《应用概率年刊》。，16:423–447，2006。D. Li、W-D. Liu 和 A. Rosalsky。样本相关矩阵最大元素渐近分布的充要条件。《概率论及相关领域》。，148: 5–35，2010。D. Li、Y. Qi 和 A. Rosalsky。关于样本相关矩阵最大元素的 Jiang 渐近分布。《多元分析杂志》*111 256–270*。，2012。W-D. Li、Z. Lin 和 Q-M. Shao。高维情形下用于独立性检验的新统计量的渐近分布及 Berry–Esseen 界，以及其在随机优化中的应用。《应用概率年刊》。，18(6):2337–2366，2008。P. Matthews 和 A. Rukhin。正态样本极差的渐近分布。《应用概率年刊》，3(2):454–466，1993。Q-M. Shao 和 W-X. Zhou。超高维随机矩阵相干性渐近分布的充要条件。《概率年刊》。*42 623–648*。，2014。Ping Tang、Rongrong Lu 和 Junshan Xie。高维数据最大点间距离的渐近分布。统计学与概率快报，190:109567，2022年。W. Zhou。相关矩阵最大非对角元素的渐近分布。《美国数学会汇刊》，359:5345–5363，2007。