arXiv:2603.05316v1 [math.PR] 5 Mar 2026

若尔当曲线上的戴森布朗运动

Vladislav Guskov*、Mingchang Liu†、Fredrik Viklund‡

2026年3月6日

摘要

Zabrodin 最近提出了戴森布朗运动的一种推广，将其应用于粒子被限制在平面上的光滑若尔当曲线这一情形。本文讨论了如何在可求长乔丹曲线上严格构造这一过程，并研究其若干基本性质。在进一步的光滑性假设下，我们推导出相应的福克-普朗克-科尔莫戈罗夫方程，证明其收敛至平稳库仑气体分布，研究低温下的大偏差，并在多粒子极限下推导出极限平均场麦基恩–弗拉索夫方程。

目录

1 引言 **2**
1.1 背景.2 1.2 主要结果.3 1.3 讨论.7

2 存在性 10
2.1 强解.10 2.1.1 强局部解.11 2.1.2 强全局解.12 2.2 回到曲线.15

3 转移概率函数 17
3.1 福克-普朗克-科尔莫戈罗夫方程.17 3.2 参数化过程.19 3.3 商参数化过程.23

4 收敛到平稳分布 24
4.1 庞加莱型不等式.25 4.2 指数收敛速率.26

*KTH 皇家理工学院，电子邮箱：vguskov@kth.se。
†首都师范大学，电子邮箱：liumc_prob@163.com。
‡KTH 皇家理工学院，电子邮箱：frejo@kth.se。

5 大偏差 as $\beta \to +\infty$ **285.1 Dyson 型扩散.28 5.2 推广至时间区间 $[0, +\infty)$.30**

6 流体力学极限 **32**

A 带梯度漂移的平稳 FPK 方程 **36**

1 引言

1.1 背景

在一篇重要的 1962 年论文 [15], 中，Dyson 提出了一种“布朗运动气体”模型，现称为戴森布朗运动。粗略地说，这是一个随机过程，描述 $N < \infty$ 生活在单位圆或实数轴上、通过对数势两两相互作用的相斥布朗粒子,

$$-\beta \sum_{1 \le i < j \le N} \log |z_i - z_j|, \quad \beta > 0. \tag{1.1}$$

这里 β 是逆温度参数。Dyson 的过程在物理学和数学中都受到了相当多的关注，部分原因在于它与随机矩阵理论的联系。例如，在实数轴上，它描述了厄米随机矩阵特征值的动力学, 该矩阵的元素作为独立布朗运动而演化。参见例如 [9], [10] 及其中的参考文献。

最近，Zabrodin [29] 提出了戴森布朗运动的一种推广，将粒子限制在复平面 $\mathbb{C}$中的一般光滑若尔当曲线 Γ 上。在这一一般情形下，人们并不期待它与随机矩阵动力学有直接联系，但 [29]曾预测，该过程的平稳分布等于限制在曲线上的平面库仑气体的密度。也就是说, 在 $\Gamma^N = \Gamma \times \cdots \times \Gamma$ 上由以下密度给出的概率测度

$$\frac{1}{Z_{\beta,N}(\gamma) N!} \prod_{1 \le i \ne j \le N} |z_i - z_j|^{\beta/2}, \qquad z_i \in \Gamma, \qquad \beta > 0, \tag{1.2}$$

其中 $Z_{\beta,\ N}(\gamma)$ 是库仑气体配分函数,

$$Z_{\beta,N}(\gamma) = \frac{1}{N!} \int_{\Gamma^N} \prod_{1 \le i \ne j \le N} |z_i - z_j|^{\beta/2} \prod_{i=1}^{N} |dz_i|. \tag{1.3}$$

这一事实将在定理 1.12 中证明，它推广了经典戴森布朗运动在单位圆上的类似性质；在某种意义上，也可以将其视为该过程的定义性性质。

本文旨在讨论如何在满足最小正则性假设的若尔当曲线上严格构造 Zabrodin 的过程, 并研究其一些基本性质。除了这一对象本身颇具自然且内在的研究价值之外，我们的研究动机还来自近期关于受限平面库仑气体和费克特点分布的工作 [12], [23], [24], [28] ； 本文研究的模型是曲线上的库仑

气体的自然动力学版本。我们将在一篇后续论文中讨论若尔当弧上的戴森布朗运动 [19]。

1.2 主要结果

存在性

设 Γ 为一条可求长乔丹曲线。我们始终假设 Γ 是 $\mathbb{C}$中的一条曲线。根据拉德马赫定理，Γ 允许按弧长参数化，我们将该参数化记为 $(\gamma(s))_{s\in[0,l)}$，其中 $l = l(\Gamma)$ 是 Γ 的长度。为方便起见，将 γ 的区域延拓到 $\mathbb{R}/l(\Gamma)\mathbb{Z}$，从而使 γ 成为实数轴上的 l-周期函数。设

$$\rho_{\beta,N}(x) = \frac{1}{Z_{\beta,N}(\gamma)} \prod_{i\neq j} |\gamma(x_i) - \gamma(x_j)|^{\beta/2}, \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad \beta > 0, \tag{1.4}$$

其中 $Z_{\beta,\,N}$ 如 (1.3) 中所示，并且我们在记号中省略了附加条件 $1 \le i,\ j \le N$。

定义 1.1（参数化过程）。设 Γ为一条可求长乔丹曲线，并固定逆温度参数 $\beta > 0$。Γ 上戴森布朗运动的参数化过程是 $\mathbb{R}^N$ 中的一个连续强马尔可夫过程 $X = (X_1(t) \dots,\ X_N(t))_{t\ge0}$，其扩散矩阵为单位矩阵，漂移项由 $\frac{1}{2}\nabla \log \rho_{\beta,\,N}$ 的弱梯度给出，其中$\rho_{\beta,\,N}$ 如 (1.4) 中所示，并且使得对所有 $t \ge 0$，几乎必然，

$$X_1(t) \le X_2(t) \le \cdots \le X_N(t) \le X_1(t) + l.$$

注 1.2. 设

$$D = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_1 + l\}. \tag{1.5}$$

定义 1.1 中的排序条件可以表述为：取值于 $\mathbb{R}^N$ 的过程 X 永远不会离开 D 的闭包。

注 1.3. 我们有时写作 $X = X^x$，以强调起点 $x \in D$。

给定参数化过程，我们通过弧长参数化进行迁移，从而定义 Γ 上的戴森布朗运动。

定义 1.4（若尔当曲线上的戴森布朗运动）。设 Γ 是一条可求长的若尔当曲线。Γ 上的戴森布朗运动是连续的强马尔可夫过程 $\boldsymbol{Z} = (\gamma(X_1) \dots, \gamma(X_N))$，其取值于 Γ^N，其中 $X = (X_1, \dots, X_N)$ 是定义 1.1 中的参数化过程。

事先并不明显定义 1.4 中的过程是否存在。下面的结果给出了非碰撞区域中的存在性。

定理 1.5（存在性，对于 $\beta \ge 1$）。设 Γ 为一条可求长乔丹曲线。对于任意 $\beta \ge 1$ 以及 Γ上的任意点集 $\boldsymbol{z} = \{z_1, \dots, z_N\}$（按逆时针排列且满足 $z_i \neq z_j$），存在一个参数化过程 $X = (X_1(t) \dots\dots,\ X_N(t))_{t\ge0}$，其中 $z_i = \gamma(X_i(0))$，对应于 Γ上的戴森布朗运动。

该过程是随机微分方程（*SDE*）的唯一强解

$$dX(t) = dB(t) + \frac{1}{2}\nabla \log \rho_{\beta,N}(X(t))dt,$$

其中 $B = (B_1(t) \ldots, B_N(t)_{t\geq 0}$ 是 N 维标准布朗运动。此外，对于所有 $t \geq 0$，几乎必然有，

$$X_1(t) < X_2(t) < \cdots < X_N(t) < X_1(t) + l.$$

令

$$\boldsymbol{Z} = (\gamma(X_1(t)), \ldots, \gamma(X_N(t)))_{t\geq 0}$$

定义了 Γ上的戴森布朗运动。

定理 1.5 在第 2 节中证明。

注 1.6。 选择 $\gamma(s) = e^{is}$ 可还原经典戴森布朗运动在单位圆上的角过程 $\theta = (\theta_1(t) \ldots, \theta_N(t))_{t\geq 0}$：

$$d\theta_i(t) = dB_i(t) + \frac{\beta}{2}\sum_{j:j\neq i}\frac{1}{2}\cot\left(\frac{\theta_i(t) - \theta_j(t)}{2}\right)dt.$$

Th选择 $\gamma(s) = s$ 可还原实数轴上的经典戴森布朗运动:

$$dX_i(t) = dB_i(t) + \frac{\beta}{2}\sum_{j:j\neq i}\frac{1}{X_i(t) - X_j(t)}dt.$$

注 1.7. 若 $\gamma \in C^2$，我们可以对 $Z(t) = \gamma(X(t))$ 应用伊藤公式，从而看到我们的定义与 Zabrodin 在 [29], 中的过程一致，见下文 (1.11)。

注 1.8. 应用确定性时间变换 $t \to \beta t/2$ ，并利用布朗运动的尺度性质，可以等价地考虑以下随机微分方程

$$dX(t) = \sqrt{\kappa}dB(t) - \nabla V(X(t))dt,$$

其中

$$V(x) = -\sum_{i<j}\log|\gamma(x_i) - \gamma(x_j)|, \tag{1.6}$$

以构造参数化过程。逆温度 β 与扩散参数 κ 之间的关系为

$$\kappa = \frac{2}{\beta}.$$

我们将在下文讨论大偏差时使用这种参数化。

注 1.9. 在 $0 < \beta < 1$ 这一情形下，建立参数化过程的存在性在技术上更为困难，因为必须考虑粒子碰撞。也就是说，过程 X^x 会在有限时间内撞上边界 ∂D （其中 D 与 (1.5) 中的定义相同），并且必须反射回区域 D内。在假设曲线 Γ 可求长的一般条件下，必须求解一个在非光滑域 D中带有可测漂移项且在边界处奇异的反射边界条件随机微分方程。这是一个有趣的问题，但我们在此不予讨论；进一步讨论请参见 [18] 。

FPK 方程与库仑气体密度

接下来，我们讨论与定理 1.5 中构造的过程相对应的福克–普朗克–柯尔莫哥洛夫（FPK）方程。令

$$b_{\beta,N} = \frac{1}{2}\nabla \log \rho_{\beta,N}.$$

我们定义微分算子

$$Lf = \frac{1}{2}\Delta f + b_{\beta,N} \cdot \nabla f, \qquad f \in C_0^\infty(D), \tag{1.7}$$

并将其形式伴随算子记为 L^*，

$$L^* f = \frac{1}{2}\Delta f - \nabla \cdot (b_{\beta,N} f)\,. \tag{1.8}$$

定理 1.10（福克-普朗克-科尔莫戈罗夫方程）。设 Γ 是一条可求长乔丹曲线。参数化过程 $X = X^x$ 的转移概率函数 $P(x,t,dy)$ 以 D 为状态空间，并由 (1.5) 定义；对于每个 $t > 0$，该函数都具有正的局部赫尔德连续密度 $p(x,t,y)$。该密度满足带反射边界条件的福克-普朗克-科尔莫戈罗夫方程，即

$$\begin{aligned} &\partial_t p(x,t,\bullet) = L^* p(x,t,\bullet) \ \textit{weakly in } D, \\ &n \cdot \left(-\frac{1}{2}\rho_{\beta,N} \frac{\nabla p(x,t,\bullet)}{\rho_{\beta,N}} \right) = 0 \ \textit{weakly on } \partial D. \end{aligned}$$

其中，n 是单位内法向量。

定理 1.10 在第 3.1 节中得到证明。

注 1.11。在额外的光滑性假设 $\gamma \in C^2$ 下，我们将在命题 3.9 中证明，参数化过程 $X = X^x$ 是柯尔莫哥洛夫意义下的扩散过程，即

(1.) $\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_{B(x,\delta)^c} p(x,h,y)dy = 0$, (2.) $\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_{B(x,\delta)} (y-x) p(x,h,y)dy = b_{\beta,N}(x)$, (3.) $\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_{B(x,\delta)} ((y-x)\cdot z)^2 p(x,h,y)dy = |z|^2$.

映射 $g\colon D \to \Gamma^N$ 定义如下

$$g(x) = (\gamma(x_1), \ldots, \gamma(x_N))$$

将参数化过程 X 转换为曲线 Γ 上的戴森布朗运动 $\boldsymbol{Z}$。根据定理 1.5，X 和 $\boldsymbol{Z}$ 都是连续强马尔可夫过程。令 $P(x,t,dy)$ 和 $Q(\boldsymbol{z},t,|d\boldsymbol{w}|)$ 分别表示这两个过程的转移概率函数。若 $f(x) = \boldsymbol{z}$，则转移概率函数满足以下关系

$$Q(\boldsymbol{z},t,\mathcal{V}) = P(x,t,g^{-1}(\mathcal{V})), \qquad \mathcal{V} \in \mathcal{B}_S,$$

其中，$\mathcal{B}_S$ 是 S上的 Borel σ代数。

下一个结果涉及向平稳分布的收敛。该定理促使我们将定理 1.5 中的过程称为“戴森布朗运动”。

定理 1.12 （向库仑气体密度的收敛）. 假设 $\gamma \in C^\infty$。设 $Q(\boldsymbol{z}, t, |d\boldsymbol{w}|)$为从 $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_N)$出发的戴森布朗运动的转移概率函数。则当 $t \to +\infty$ 时，测度 $Q(\boldsymbol{z}, t, |d\boldsymbol{w}|)$ 以指数速度弱收敛到 $(S, \mathcal{B}_S)$ 上由库仑气体密度给出的唯一平稳分布

$$\varrho_{\beta,N}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{Z_{\beta,N}(\gamma)} \prod_{i \neq j} |z_i - z_j|^{\beta/2}, \qquad \boldsymbol{z} \in S. \tag{1.9}$$

我们在第 4 节中证明这一结果。

大偏差

在下一陈述中，我们考虑如注 1.8 中那样、以 $\kappa = 2/\beta$ 为参数的时间变换过程。当 $\kappa \to 0+$, 等价地 $\beta \to +\infty$ 时，该系统收敛到确定性梯度流，我们关注这一极限的大偏差。为陈述该结果，令 $\boldsymbol{Z} = (Z_1(t) \ldots, Z_N(t))_{t \geq 0}$ 为从$\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_N)$出发的（时间重参数化的）戴森布朗运动。该过程由 $Z_i(t) = \gamma(X_i(t))$ 给出，其中参数化过程$X = (X_1(t) \ldots, X_N(t))_{t \geq 0}$ 是随机微分方程的强解

$$dX(t) = \sqrt{\kappa} dB(t) - \nabla V(X(t)) dt,$$

其中 $V(x)$ 如 (1.6) 中所定义。回顾 $S = f(D) \subset \Gamma^N$。令 $C_{\boldsymbol{z}}(\mathbb{R}_+, S)$ 为从 $\boldsymbol{z} \in S$ 出发的连续函数空间。我们在该空间上配备局部一致收敛拓扑。

定理 1.13 （大偏差，当 $\kappa \to 0+$）。假设 $\gamma \in C^3$。过程 $\boldsymbol{Z}$ 在 $C_{\boldsymbol{z}}(\mathbb{R}_+, S)$ 中满足大偏差原理，当 $\kappa \to 0+$ 时，速率为 $1/\kappa$，良好速率函数为

$$J(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \sum_{i=1}^N \left| \mathrm{Re} \left\{ \left(\dot{w}_i - \sum_{j: j \neq i} \frac{w_i - w_j}{|w_i - w_j|^2} \right) \overline{\tau(w_i)} \right\} \right|^2 dt,$$

对于绝对连续的 $\boldsymbol{w} = (w_1(t) \ldots\ldots, w_N(t))_{t \geq 0}$，否则取为 $+\infty$。

定理 1.13 的证明直接由收缩原理得出，见 [13], ，在给定参数化过程的大偏差原理的条件下。[1] 的主要结果适用于我们的设定，并给出了参数化过程限制在任意紧时间区间 $[0, T]$ 上的大偏差原理。在定理 5.4 中，我们将大偏差原理推广到无限时间区间 $[0, +\infty)$。更确切地说，我们有如下结果。

定理 1.14. 假设 $\gamma \in C^3$。从 $x \in D$ 出发的时间重参数化参数化过程 X^x在 $C_x(\mathbb{R}_+, D)$ 中满足大偏差原理，速率为 $1/\kappa$，良好速率函数为

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \sum_{i=1}^N \left| \dot{u}_i(t) - \sum_{j: j \neq i} \mathrm{Re} \left\{ \frac{\gamma'(u_i(t))}{\gamma(u_i(t)) - \gamma(u_j(t))} \right\} \right|^2 dt,$$

对于绝对连续的 $u = (u_1(t) \ldots\ldots, u_N(t))_{t \geq 0}$，否则设为 $+\infty$。

注1.15. 大偏差结果意味着

$$\inf_{u\in C_x(\mathbb{R}_+,D)} I(u) = 0.$$

特别地，$u = (u_1(t)\dots,u_N(t))_{t\geq 0}$ 满足 $I(u) = 0$，如果它是梯度系统的解

$$\dot{u}(t) = -\nabla V(u(t)).$$

该梯度流与曲线上的费克特点分布有关。参见第 1.3 节。

流体力学极限

为了陈述下一个结果，我们需要一些额外的记号。令 $\boldsymbol{Z} = (Z_1,\dots,Z_N)$ 表示 Γ 上的戴森布朗运动，如定理 1.5 所述。对于 $t \geq 0$，记

$$\mu_t^{(N)}(dz) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{Z_i(t/N)}(dz)$$

在 Γ 上的经验概率测度，它可以被视为 $\Gamma\times\mathbb{R}_+$上的测度。我们允许初始条件 $\boldsymbol{Z}(0) = (Z_1(0)\dots,Z_N(0))$ 随机选取，因此 $\mu_0^{(N)}$ 是 Γ上的随机概率测度。我们假设存在某个极限分布 μ_0，使得当粒子数为 $N\to+\infty$时，$\mu_0^{(N)}\to\mu_0$ 弱收敛。最自然的选择或许是按照平稳库仑气体分布启动过程 $\boldsymbol{Z}$，这样 $\mu_0^{(N)}$ 在极限下收敛到 Γ上的静电平衡测度。令 $\tau:\Gamma\to\partial\mathbb{D}$ 为切向映射，即，$\tau(z)$ 是点 z处 Γ 的单位切向量，方向为逆时针。下述定理表明，在多粒子极限 $N\to+\infty$下，该系统趋近于一个依赖于曲线的平均场 McKean–Vlasov 方程。

定理 1.16 (流体力学极限)。设 $\gamma\in C^2$。令 μ_0 为定义在 Γ上的概率测度，并假设当 $N\to+\infty$时，$\mu_0^{(N)}\to\mu_0$ 在弱意义下成立。那么，族 $\{(\mu_t^{(N)})_{t\geq 0}\}_{N\geq 1}$是紧的，且任意子序列极限 $\mu = (\mu_t)_{t\geq 0}$ 满足

$$d\mu_t(f) = \frac{\beta}{4}\int_\Gamma\int_\Gamma \left(\partial_s f(z)\,\mathrm{Re}\,\frac{\tau(z)}{z-w} - \partial_s f(w)\,\mathrm{Re}\,\frac{\tau(w)}{z-w}\right)\mu_t(dz)\mu_t(dw)dt,$$

对所有在 Γ 的某个邻域内光滑的测试函数 f，

我们在第 6 节证明定理 1.16。

1.3 讨论

Zabrodin 的方法

我们简要介绍一下 [29], 的主要结果，正是这些结果启发了本文的研究。令 $\gamma\in C^2$，其中 $\tau:\Gamma\to\partial\mathbb{D}$ 为切向映射。令 $\nu = -i\tau:\Gamma\to\partial D$ 为向外单位法向映射。最后，$k:\Gamma\to\mathbb{R}$ 是 Γ的曲率映射，也就是说，$k(z)$是 Γ在点 z 处的曲率，定义为

$$k(z) = \frac{d\arg\tau(z)}{d|z|}. \tag{1.10}$$

借助这些量，Zabrodin [29] 提出构造一个过程 $\boldsymbol{Z}$，使其成为以下随机微分方程组的解

$$dZ_i = \sqrt{\kappa}\tau(Z_i)dB_i + \left(\tau(Z_i)(\partial_{s_i}E)(\boldsymbol{Z}) - \frac{\kappa}{2}\nu(Z_i)k(Z_i)\right)dt, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{1.11}$$

这里 $B = (B_1, \ldots, B_N)$ 是 N 维标准布朗运动，而 $E\colon \Gamma^N \to \mathbb{R}$ 是定义在粒子构型 $\boldsymbol{Z}$ 上的实值能量泛函，定义如下

$$E(\boldsymbol{z}) = 2\sum_{i<j}\log|z_i - z_j| + \sum_i W(z_i), \tag{1.12}$$

其中 $W\colon \mathcal{N}(\Gamma) \to \mathbb{R}$ 是定义在曲线邻域 $\mathcal{N}(\Gamma)$ 内的实值外部势。我们的设定中没有外部势；因此，Zabrodin 的设定稍微更一般一些。量 $\partial_{s_i}E$ 指能量泛函关于变量 z_i 的切向导数。

对于定义在曲线邻域内的 $f\colon \mathcal{N}(\Gamma) \to \mathbb{R}$，切向导数为

$$(\partial_s f)(z) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z+\tau(z)h) - f(z)}{h} = 2\,\mathrm{Re}\,\left(\tau(z)\partial_z f(z)\right), \quad z \in \Gamma. \tag{1.13}$$

对于定义在 Γ^N 上的函数 $f(\boldsymbol{z}) = f(z_1, \ldots, z_N)$，$\partial_{s_i}f$ 指关于变量 i^{th} 的切向导数，而 $\partial_z f(z)$ 指全纯导数。

对于由 (1.12) 给出的 E，切向导数为

$$(\partial_{s_i}E)(\boldsymbol{z}) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{j:j\neq i}\frac{\tau(z_i)}{z_i - z_j}\right\} + 2\,\mathrm{Re}\,\{\tau(z_i)(\partial W)(z_i)\}.$$

在此设定下，[29] 提出将光滑若尔当曲线 Γ 上的戴森扩散过程 $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots\ldots, Z_N)$ 定义为随机微分方程 (1.11) 组的解。接下来，若 $\kappa = 2/\beta$，则由 $u\colon \Gamma^N \to [0,\infty)$ 定义的函数为

$$u(\boldsymbol{z}) = \prod_{i\neq j}|z_i - z_j|^\beta \prod_i e^{\beta W(z_i)}.$$

据称是定态福克-普朗克-柯尔莫戈罗夫方程 $L^*u = 0$的解，其中 L^* 是生成元的（形式）伴随算子

$$L = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\kappa}{2}\partial_{s_i}^2 + (\partial_{s_i}E)\partial_{s_i}\right).$$

这些论断在 [29]中并未给出数学证明。

请注意，[29]中的记号与我们的记号不同：Zabrodin 的 β参数等于我们的 β参数的 $1/2$ 倍。我们选择采用 [12], [24], 的约定，在该约定下，行列式模型对应于 $\beta = 2$。

我们来检验一下，我们的构造是否与刚才描述的构造一致。对于以逆时针方向描绘曲线 Γ 的弧长参数化 γ，我们回顾一下平面曲线的切向量和曲率的基本表达式：

$$\tau(\gamma(t)) = \gamma'(t), \quad -k(\gamma(t))\nu(\gamma(t)) = \gamma''(t).$$

伊藤公式可应用于此，因为我们假设 $\gamma \in C^2$。对于实值过程 X_i，该公式表明

$$d\gamma(X_i(t)) = \gamma'(X_i(t))dX_i(t) + \tfrac{1}{2}\gamma''(X_i(t))d\langle X_i, X_i\rangle(t),$$

根据上述方程，这可以改写为关于 $Z_i(t) = \gamma(X_i(t))$ a 的形式 s

$$dZ_i(t) = \tau(Z_i)dX_i(t) - \tfrac{1}{2}k(Z_i)\nu(Z_i)d\langle X_i, X_i\rangle(t).$$

为了与 (1.11) 相匹配，我们看到应取

$$dX_i(t) = \sqrt{\kappa}\, dB_i(t) + (\partial_{s_i} E)(\boldsymbol{Z})\, dt.$$

对该过程作线性时间变换后，并令 $W \equiv 0$，这一选择便与 (1.1) 相匹配，因为

$$\partial_{x_i} \log \rho_{\beta,N}(X) = \beta \sum_{j:j\neq i} \mathrm{Re}\left(\frac{\gamma'(X_i)}{\gamma(X_i) - \gamma(X_j)}\right) = \beta \sum_{j:j\neq i} \mathrm{Re}\left(\frac{\tau(Z_i)}{Z_i - Z_j}\right).$$

梯度流与费克特点

对于 $u\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}^N$，考虑梯度系统

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -\nabla V(u(t)), \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \in D, \end{cases} \tag{1.14}$$

其中 V 与 (1.6) 中相同。势函数 $V(x) \to +\infty$ 为 $x \to \partial D$。梯度系统 (1.14) 的解不会到达边界 ∂D，因为 $t \to V(u(t))$ 是一个非递增函数：

$$\frac{d}{dt}V(u(t)) = \nabla V(u(t)) \cdot \frac{du(t)}{dt} = -|\nabla V(u(t))|^2 \leq 0.$$

特别是，它始终处于集合 $\{x \in D \text{ 内：} \ V(x) \leq V(u_0)\}$。$V$在 $\hat{}e = (1,\ldots,1)^T$上的局部有界性和 l-周期性意味着解不会在有限时间内爆破。平稳解满足

$$\nabla V(u(t)) \equiv 0, \qquad t \geq 0.$$

一类特别有趣的平稳解是费克特点。回顾一下，Γ的第 N 层费克特点是一个由 N 个点组成的 $\{z_1^*, \ldots, z_N^*\}$ 元组，它使判别式最大化，等价地说，使对数能量最小化，

$$\Delta_N(\Gamma) := \prod_{k\neq\ell} |z_k^* - z_\ell^*| = \max_{z_1,\ldots,z_N\in\Gamma} \prod_{k\neq\ell} |z_k - z_\ell|.$$

最简单的例子是 $\Gamma = \mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ 的情形。在这种情况下，任意由 N 个等距点组成的元组都是费克特点，因此它们并不唯一。此外，$\Delta_N(\mathbb{T}) = N^N$。一个经典结果表明

$$\lim_{N\to\infty} \Delta_N(\Gamma)^{1/(N(N-1))} = \mathrm{cap}(\Gamma),$$

也就是说，超越直径等于 Γ 的对数容量。已知在一般情形下（对于含有无穷多个点的紧集），当 $N \to +\infty$ 时，费克特点的经验测度会收敛到静电平衡测度。更多信息请参见例如 [20, 第 285] 页和 [27] 。

致谢

V.G. 感谢戈兰·古斯塔夫松自然科学与医学研究基金会的资助。M.L. 感谢克努特和爱丽丝·瓦伦堡基金会的资助。F.V. 感谢克努特和爱丽丝·瓦伦堡基金会、戈兰·古斯塔夫松自然科学与医学研究基金会以及西蒙斯基金会的资助。我们感谢 Tom Alberts 和 Kurt Johansson 对论文早期版本所作的讨论和评论。

2 存在性

本节旨在证明定义 1.4 中所述过程的存在性。我们证明，在 $\beta \geq 1$ 的情形下，存在一个参数化过程，它是某个随机微分方程的唯一强解；将其移植到曲线 Γ 上并采用弧长参数化后，可得到一个连续的强马尔可夫过程。也就是说，我们证明定理 1.5。然而，在 $0 < \beta < 1$的情形下，戴森布朗运动的存在性仍是一个开放问题。

2.1 强解

首先，我们证明参数化过程作为以下随机微分方程组的强解，其存在性与唯一性:

$$\begin{cases} dX(t) = dB(t) + b(X(t))dt, \ t \geq 0, \\ X(0) = x \in D. \end{cases} \tag{2.1}$$

Here

$$D = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_1 + l\},$$

是一个开且无界的凸区域，其边界除构成边界的超平面交点处外均光滑。 $B =$(${B_1}$、.....、${B_N}$) 是 N 维标准布朗运动。漂移项

$$b = \frac{1}{2} \nabla \log \rho_{\beta,N}$$

由密度的对数梯度给出

$$\rho_{\beta,N}(x) = \frac{1}{Z_{\beta,N}(\gamma)} \prod_{i \neq j} |\gamma(x_i) - \gamma(x_j)|^{\beta/2}, \quad \beta > 0.$$

梯度按弱意义理解。漂移项的第 i 个分量几乎处处由下式给出

$$b_i(x) = \frac{\beta}{2} \sum_{j:j \neq i} \mathrm{Re} \left\{ \frac{\gamma'(x_i)}{\gamma(x_i) - \gamma(x_j)} \right\}.$$

对于一般的可求长乔丹曲线， Γ 漂移项 b是 D中的局部有界可测函数，并且当 $x \to \partial D$时， $|b(x)| \to +\infty$ 。事实上，在其有定义处， $|\gamma'| = 1$ 。

2.1.1 强局部解

利用 [25] 中的结果，我们可以构造一个唯一的强解，直到该过程到达区域 D的边界为止；也就是说，直到曲线上任意两个粒子发生首次碰撞为止。将区域 D 的退出时刻记为

$$\tau_{\partial D}(X) = \inf\{t \geq 0 : X(t) \notin D\}.$$

为了定义对所有 $t \geq 0$ 都有定义的过程，我们可以对状态空间 D 进行 Alexandrov 紧化。设 $* \notin D$ 为某个点，将其邻域定义为 D 中闭有界子集 D 的补集。于是， $D' = D \cup \{*\}$ 是一个紧拓扑空间。

设 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq s}, \mathbb{P})$ 是满足通常条件的完备滤过概率空间（滤过右连续，且 $\mathcal{F}_0$ 包含所有零测集）。设 $B = (B(t))_{t\geq 0}$ 为相对于滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 适应的 N 维标准布朗运动。

根据 [25, 定理 2.1、2.5], , 对于任意 $x \in D$ 和 $s \geq 0$, 存在一个连续的 D' 值过程 $X \equiv X^{s,x} = (X^{s,x}(t))_{t\geq s}$, 满足 $X^{s,x}(s) = x$, 使得

(1.) X 是适应于该滤过的;

(2.) 对任意 $t \geq s$, 在事件 $\{t \geq \tau_{\partial D}(X)\}$ 上

$$X(t) = * \text{ a.s.};$$

(3.) 对任意 $t \geq s$, 在事件 $\{t < \tau_{\partial D}(X)\}$ 上

$$\int_s^t |b(X(r))|^2 dr < \infty \quad \text{a.s.}$$

and

$$dX(t) = dB(t) + b(X(t))dt \quad \text{a.s.};$$

(4.) 路径唯一性成立;

(5.) X 在 $C([s,\infty), D')$ 上的分布由漂移项 b 唯一确定;

(6.) 令 $\mathbb{P}_{s,x}$ 为 $X^{s,x}$ 在 $C([s,\infty), D')$ 上的概率分布。定义滤过

$$\mathcal{G}_t = \sigma\left\{(\omega(r))_{r\in[s,t]} : \omega \in C([s,\infty), D')\right\}.$$

该过程

$$\mathbb{M}_{s,x} = (C([s,\infty), D'), (\mathcal{G}_t)_{t\geq s}, (X(t))_{t\geq s}, \mathbb{P}_{s,x})$$

是一个强马尔可夫过程;

（7.）对于 D' 和 $T > 0$ 上的任意有界博雷尔函数 f , 函数

$$(s,x) \to \mathbb{E}\left[f(X^{s,x}(T-s))\right]$$

在 $[0,T] \times D$ 上连续。

2.1.2 强全局解

如上所述，存在唯一的强解 $dX(t) = dB(t) + b(X(t))dt, \quad X(0) = x \in D$，其定义范围截至区域 D 的退出时刻。然而，漂移项具有这样的性质：$|b(x)| \to +\infty$ 当 $x \to \partial D$ 时，这倾向于使过程远离边界。对于实数轴和圆的情形，任意 $\beta > 0$ 下，过程都不会离开 D；而对于 $\beta \geq 1$，过程永远不会到达 ∂D，参见 [9], [10]。对于一般的可求长曲线 Γ，我们不知道有类似结果能够涵盖 $\beta > 0$ 的整个范围。不过，对密度施加某些充分条件，即可确保过程永远不会到达边界。在这种情况下，局部解便成为全局解。

注 2.1. 在 [25] 中，针对梯度漂移 $b = -\nabla\psi$ 的情形，已经给出了关于漂移项 b 的一个充分条件，使得该过程永不触及边界 ∂D。充分条件是：势函数 ψ 对某个 $\varepsilon \in [0, 2)$ 以及一个连续函数 h： $D \to \mathbb{R}$ 满足不等式 $\Delta\psi \leq he^{\varepsilon\psi}$，并且对所有 $\sigma > 0$，它关于某个 $r = r(\sigma) > 1$ 是 $L^r(D, e^{-\sigma|x|^2}dx)$- 可积的。应用到我们的设定中，若 $\gamma \in C^2$ 且 $\beta > 1$，则该判据几乎必然给出粒子的不碰撞，从而在这些假设下得到一个强全局解，这将涵盖 [29] 中所考虑的情形。

设 $D' = D \cup \{*\}$ 为 D 的 Alexandrov 紧化。设 $x \in D$ 与 X^x 为具有初始条件 $X^x(0) = x$ 的唯一强局部解。用 $\mathbb{P}_x$ 表示 X^x 在

$$\tilde{\Omega} := \{\omega \in C(\mathbb{R}_+, D') : \omega(t) = * \text{ for } t \geq \zeta(\omega)\},$$

其中 $\zeta(\omega) = \inf\{t \geq 0 : \omega(t) \notin D\}$ 是该过程的生存时间。

$$\mathbb{M} = (\tilde{\Omega}, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, (X(t))_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in D})$$

是一个强马尔可夫过程。这是定理 2.1 和 2.5]。

我们要证明，对于所有 $x \in D$，过程 X^x 几乎必然不会到达边界 ∂D。换言之，对于

$$\tilde{\Omega}_0 = \{\omega \in \tilde{\Omega} : \omega(0) \in D,\ \zeta(\omega) = \infty\}$$

我们要证明

$$\mathbb{P}_x[\tilde{\Omega}_0] = 1 \text{ for all } x \in D.$$

按照 [3, 第 4], 节，我们可以通过狄利克雷型理论找到一个具有此性质的扩散过程，随后可如下面所述将这一性质转移到强局部解上。

狄利克雷型

令 $\mathcal{E}$ 为一个非负定的对称双线性型，其定义为

$$\mathcal{E}(f, g) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_D \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\rho_{\beta,N}(x)dx, \qquad f, g \in C_0^\infty(D),$$

其中，$C_0^\infty(D)$表示 D中的紧支撑光滑函数空间。 $C_0^\infty(D)$是 $L^2(D, \mu)$的稠密线性子空间。

双线性型 $\mathcal{E}$ 可闭，是指对于 $C_0^\infty(D)$ 中的任意序列（f_n），若 $\lim_{n\to\infty} ||f_n||_{L^2(D,\ \mu)}$ 且 $\lim_{n,\ m\to\infty} \mathcal{E}(f_n - f_m,\ f_n - f_m) = 0$，则有 $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(f_n,\ f_n) = 0$。

引理 2.2。双线性型 $(\mathcal{E},\ C_0^\infty(D))$ 在 $L^2(D,\ \mu)$ 上可闭。

证明。由于 $D=\{\rho_{\beta,N}>0\}$ 和 $x\to\rho_{\beta,\ N}(x)$ 连续，故由 [26, 第二节 II.2.a]中的推导可得该引理。 □

型 $\mathcal{E}$ 可闭是存在闭延拓的充要条件，见 [17, 章]。记 $(\mathcal{E},\ \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ 为 $(\mathcal{E},\ C_0^\infty(D))$ 在 $L^2(D,\ \mu)$ 上的闭包，即$\mathcal{D}(\mathcal{E})$ 关于内积 $\mathcal{E}(f,\ g)+(f,\ g)_{L^2(D,\ \mu)}$ 是一个希尔伯特空间。

Lemma 2.3. $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ 是 $L^2(D,\mu)$ 上的对称、强局部正则狄利克雷型 .

证明。参见 [4,定理 4.1.4] 或 [5, 命题4.2]的证明及其中的参考文献。 □

容量

关于型 $(\mathcal{E},\ \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ 的集合容量定义如下：对于开集 $A\subset D$,

$$\mathrm{Cap}_{\mathcal{E}}(A):=\inf\{\mathcal{E}(f,f)+(f,f)_{L^2}:f\in\mathcal{D}(\mathcal{E}),\ f\geq 1\ \mu\text{-a.e.}\},$$

并且，对于任意集合 $B\subset D$，有

$$\mathrm{Cap}_{\mathcal{E}}(B):=\inf\{\mathrm{Cap}_{\mathcal{E}}(A):A\text{ is open and }B\subset A\}.$$

命题 2.4。对于 $\beta\geq 1$，容量$\varepsilon(\{\rho_{\beta,N}(x)=0\})=0$。

证明。密度 $\rho_{\beta,\ N}(x)$ 有界，且

$$\rho_{\beta,N}(x)=\frac{1}{Z_{\beta,N}(\gamma)}\prod_{i\neq j}|\gamma(x_i)-\gamma(x_j)|^{\beta/2}\leq\frac{1}{Z_{\beta,N}(\gamma)}\prod_{i<j}h(|x_i-x_j|),$$

其中 $h(r):=\min(r,\ l-r)^\beta$, $r\in[0,l]$。函数 h 满足以下可积性条件：对于任意 $\beta\geq 1$,

$$\int_{0+}\frac{1}{h(r)}dr=+\infty\quad\text{ and }\quad\int^{l-}\frac{1}{h(r)}dr=+\infty.$$

密度上的这一可积性条件意味着集合 $\{\rho_{\beta,N}=0\}$ 的容量（相对于狄利克雷型）为零。该结论的推导与命题 2.1] 的证明基本相同，仅做了少量修改。

□

回忆

$$\tilde{\Omega}:=\{\omega\in C(\mathbb{R}_+,D'):\omega(t)=*\text{ for }t\geq\zeta(\omega)\},$$
$$\tilde{\Omega}_0:=\{\omega\in\tilde{\Omega}:\omega(0)\in D,\ \zeta(\omega)=\infty\},$$

其中 $\zeta(\omega)=\inf\{t\geq 0:\ \omega(t)\notin D\}$ 是该过程的生存时间。正则狄利克雷型理论为扩散过程的存在性提供了保证，该扩散过程与（$\mathcal{E},\ \mathcal{D}(\mathcal{E})$）相关联,

$$\mathbb{M}_x=\{\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{G}},(\tilde{\mathcal{G}}_t)_{t\geq 0},(X(t))_{t\geq 0},\tilde{\mathbb{P}}_x\}$$

对于拟处处起点 $x\in D$，即 D 中除例外集之外的点，..... D'。例外集相当小——相对于狄利克雷型而言，它的容量为零——但通常无法明确描述。关于狄利克雷型方法的更多内容，请参见 [17], [26] 。

注 2.5。 正则狄利克雷型理论为例外集之外的起点 $x \in D$ 提供分布 $\mathbb{P}_x$ 。例外集相当小——相对于狄利克雷型而言，其容量为零（见下文）——但通常无法明确描述。不过，测度 $\mu(dx) = \rho_{\beta,N}(x)dx$ 不会给容量为零的集合赋予正测度。这使得与 $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ 相关联的过程可以从一个随机点开始

对于 $\mu(dx) = \rho_{\beta,N}(x)dx$，定义

$$\mathbb{P}_\mu := \int_D \mathbb{P}_x \ \mu(dx) \text{ and } \tilde{\mathbb{P}}_\mu := \int_D \tilde{\mathbb{P}}_x \ \mu(dx).$$

由命题 2.4 及 [26],

$$\tilde{\mathbb{P}}_\mu[\tilde{\Omega}_0] = 1.$$

引理 2.6。

$$\tilde{\mathbb{P}}_\mu = \mathbb{P}_\mu.$$

证明。 证明沿用 [3, 引理 4.2]。设 $(P_t)_{t\geq 0}$ 为 $\mathbb{M}$的转移半群。由于 $\tilde{\mathbb{M}}$ 与狄利克雷型 $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ 相关联，其转移半群 $(P_t)_{t\geq 0}$ 与 $(P_t)_{t\geq 0}$ 的关系如下： $\tilde{P}_t f$ 是 $f \in L^2(D, \mu)$ 上 $P_t f$ 的一个 μ-版本，参见 [26, 备注 2.5 (ii)]。

设 $A_i, i = 0、.....、 n$ 是 D 中的博雷尔可测集。设 $0 < s_1 < \cdots < s_n$。由马尔可夫性质，参见 [17, 引理 4.1.2], ，可得

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbb{P}}_\mu[X(0) \in A_0, X(s_1) \in A_1, \ldots X(s_n) \in A_n] \\
&= \int_D \tilde{\mathbb{P}}_x[X(0) \in A_0, X(s_1) \in A_1, \ldots X(s_n) \in A_n]\mu(dx) \\
&= \int_D \mathbb{1}_{A_0}(x)(\tilde{P}_{s_1}\mathbb{1}_{A_1} \ldots \mathbb{1}_{A_{n-1}}(\tilde{P}_{s_n - s_{n-1}}\mathbb{1}_{A_n}))(x)\mu(dx) \\
&= \int_D \mathbb{1}_{A_0}(x)(P_{s_1}\mathbb{1}_{A_1} \ldots \mathbb{1}_{A_{n-1}}(P_{s_n - s_{n-1}}\mathbb{1}_{A_n}))(x)\mu(dx) \\
&= \mathbb{P}_\mu[X(0) \in A_0, X(s_1) \in A_1, \ldots X(s_n) \in A_n].
\end{aligned}$$

□

引理 2.7。 $\mathbb{P}_x[\Omega_0] = 1$ 对所有 $x \in D = \{\rho > 0\}$。

证明。 由于 $\mathbb{P}_\mu[\tilde{\Omega} \setminus \tilde{\Omega}_0] = \int_D \mathbb{P}_x[\tilde{\Omega} \setminus \tilde{\Omega}_0]\mu(dx) = 0$ 以及 $\mu(dx) = \rho_{\beta,N}(x)dx$ 满足 $\rho_{\beta,N} > 0$ 在 $\tilde{D}$上，因此 $\mathbb{P}_x[\Omega \setminus \Omega_0] = 0$ 在 D 上几乎处处成立。我们证明它处处成立。

令 $\theta_s : \tilde{\Omega} \to \tilde{\Omega}$ 表示平移算子 $\theta_s(\omega) := (\omega(t+s))_{t\geq 0}$。于是， $\theta_s^{-1}\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}$ 且 $\theta_s^{-1}\tilde{\Omega}_0 = \tilde{\Omega}_0$。固定 $x \in D$。根据条件期望的望远镜性质，

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(\tilde{\Omega} \setminus \tilde{\Omega}_0) &= \mathbb{P}_x(\theta_s^{-1}(\tilde{\Omega} \setminus \tilde{\Omega}_0)) \\
&= \int_{\tilde{\Omega}} \mathbb{1}_{\{\tilde{\Omega}\setminus\tilde{\Omega}_0\}}(\theta_s\omega)\mathbb{P}_x(d\omega) \\
&= \int_{\tilde{\Omega}} \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{\{\tilde{\Omega}\setminus\tilde{\Omega}_0\}}(\theta_s\tilde{\omega})\middle|\mathcal{G}_s\right)(\omega)\mathbb{P}_x(d\omega).
\end{aligned}$$

根据马尔可夫性质，

$$\mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{\{\tilde{\Omega}\setminus\tilde{\Omega}_0\}}(\theta_s\tilde{\omega})\middle|\mathcal{G}_s\right)(\omega) = \mathbb{P}_{\omega(s)}\left(\tilde{\Omega} \setminus \tilde{\Omega}_0\right),$$

其中 $\omega(0) = x$。 X^x 的转移概率函数关于勒贝格测度绝对连续；我们将在命题 3.7 中证明这一事实。由此得到恒等式

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(\tilde{\Omega} \setminus \tilde{\Omega}_0) &= \int_{\tilde{\Omega}} \mathbb{P}_{\omega(s)}(\tilde{\Omega} \setminus \tilde{\Omega}_0)\mathbb{P}_x(d\omega) \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X^x(s)}(\tilde{\Omega} \setminus \tilde{\Omega}_0)\right] \\ &= \int_D \mathbb{P}_y(\tilde{\Omega} \setminus \tilde{\Omega}_0)P(x,s,dy) \\ &= \int_D \mathbb{P}_y(\tilde{\Omega} \setminus \tilde{\Omega}_0)p(x,s,y)dy \\ &= 0.\end{aligned}$$

Since $x \in D$ 是任意一个不动点，因此对每个 $x \in D$，都有 $\mathbb{P}_x[\Omega_0] = 1$。 □

这就完成了对该随机微分方程存在唯一强解的证明

$$dX(t) = dB(t) + \frac{1}{2}\nabla \log \rho_{\beta,N}(X(t))dt,$$

对于任意初始点 $x \in D$，在 $\beta \geq 1$ 的情形下。

2.2 回到曲线

设 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ 是一个完备滤过概率空间，在其上定义了参数化过程 $X^{s,x} = (X^{s,x}(t))_{t\geq s}$，其起点为 $X^{s,s}{}^{x} = x \in D$。记 $\mathcal{B}_D$ 为 D 上的 Borel σ-代数。 $X^{s,x}$ 是一个取值于 D 的连续时齐强马尔可夫过程，其转移概率函数为

$$P(s,x,t,B) = \mathbb{P}\left[X^{s,x}(t) \in B\right],\ t \geq s,\ B \in \mathcal{B}_D,$$

它们由以下关系确定

$$P(x,t,B) = P(0,x,t,B),\ t \geq 0,\ B \in \mathcal{B}_D.$$

记 $X^x = X^{0,x}$。那么，$(X^x, \mathbb{P})$ 是状态空间 $(D, \mathcal{B}_D)$ 上的时齐强马尔可夫过程，其中

$$D = \left\{x \in \mathbb{R}^N : x_1 < \cdots < x_N < x_1 + l\right\},$$

其转移概率函数为 $P(x,t,B)$。

商参数化过程

参数化过程定义在无界区域 D 上。本节中，我们将该过程重新定义在一个紧“圆柱体”上。虽然将此作为中间步骤并非把该过程移植到曲线上的必要条件，但我们将在第 4 节中利用这一构造。

令 $f\colon\ D \to \mathbb{R}^N$ 为如下定义的映射：

$$f(x) = x - (x_1 - (|x_1| \bmod l))\hat{e}, \tag{2.2}$$

其中 $\hat{e}=(1,\ldots,1)^T$。 D 在 f 下的像为

$$E=f(D)=\{x\in\mathbb{R}^N:0\le x_1<\cdots<x_N<x_1+l<2l\}.$$

可以通过 $\partial E\cap\{x_1=0\}$ 和 $\partial E\cap\{x_1=l\}$来识别边界的两部分上的点,

$$\begin{pmatrix}0\\x_2\\\cdots\\x_N\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}l\\x_2+l\\\cdots\\x_N+l\end{pmatrix},$$

从而使空间 E在配备商拓扑后成为一个"圆柱体"。于是， $f:\ D\to E$是一个连续满射。

对于 $k\in\mathbb{Z}$，集合 $\{E+kl\hat{e}\}=\{x+kl\hat{e}:\ x\in E\}$ 构成了 D的一个分解:

$$D=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\{E+kl\hat{e}\}.$$

对于子集 $V\subset E$，有

$$f^{-1}(V)=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\{V+kl\hat{e}\}.$$

参数化过程的强唯一性意味着，$(X^x+kl\hat{e})_{t\ge0}$和$(X^{x+kl\hat{e}})_{t\ge0}$ 的路径几乎必然重合。特别地，对于 $V\in\mathcal{B}_E$

$$\mathbb{P}\left[X^{x+kl\hat{e}}(t)\in f^{-1}(V)\right]=\mathbb{P}\left[X^x(t)\in\{f^{-1}(V)-kl\hat{e}\}\right].$$

由于上述分解性质，原像 $f^{-1}(V)$在沿向量 $l\hat{e}$平移时保持不变，也就是说，作为集合， $f^{-1}(V)-kl\hat{e}=f^{-1}(V)$。我们得到过程 X的转移概率函数满足以下关系：对于所有 $V\in\underline{\mathcal{B}_E}$, 以及满足 $f(x)=f(\tilde{x})$的 $x,\ \tilde{x}\in D$

$$P(x,t,f^{-1}(V))=P(\tilde{x},t,f^{-1}(V)).\tag{2.3}$$

定义 2.8 （商参数化过程）。 从 $x\in E$ 开始的商参数化过程是由 E 给出的一个过程

$$\tilde{X}^x(t)=f(X^x(t)),$$

w此处 f 与式 (2.2) 中相同，而 X^x 是一个从 $x\in E\subset$开始的参数化过程 D.

˜ ˜根据 [14, 定理 10.13], ，可以构造一个滤过概率空间 $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\ge0},\ \mathbb{P})$，使得˜ ˜$(X^x,\mathbb{P})$ 是状态空间 $(E,\ \mathcal{B}_E)$ 上的强马尔可夫-费勒过程，初始于 $x\in E$，其转移概率函数为

$$\tilde{P}(x,t,V)=P(x,t,f^{-1}(V))=\sum_{k=-\infty}^{\infty}P(x,t,V+kl\hat{e}).$$

曲线上的过程

令 $\boldsymbol{z}=(z_1,\ \ldots\ldots,\ z_N)$ 表示 $\mathbb{C}^N$ 中的一个点。曲线上的戴森布朗运动是过程$\boldsymbol{Z}=(Z_1(t),\ \ldots\ldots,\ Z_N(t))_{t\geq 0}$，定义为

$$Z_i(t)=\gamma(\tilde{X}_i^x(t)),$$

在状态空间中

$$S=\{(z_1,\ldots,z_N)\in\Gamma^N : z_i=\gamma(x_i),\quad x\in E\}.$$

记映射 $g: E\to\Gamma^N$

$$g(x)=(\gamma(x_1),\ldots,\gamma(x_N)).$$

若 $S=g(E)$，则 $g:\ E\to S$ 是连续双射。根据 [14, 定理 10.13]，可以构造一个滤过概率空间 $(\Omega,\ (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0},\ \mathbb{Q})$，使得 $(\boldsymbol{Z},\ \mathbb{Q})$ 是状态空间 $(S,\ \mathcal{B}_S)$ 上的强马尔可夫-费勒过程，从 $\boldsymbol{z}=f(x)\ \in S$ 开始，其转移概率函数为

$$Q(\boldsymbol{z},t,\mathcal{V})=\tilde{P}(x,t,g^{-1}(\mathcal{V}))=P(x,t,f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{V}))),\quad \mathcal{V}\in\mathcal{B}_S.$$

定理 1.5 的证明至此完成。

3 转移概率函数

本节考虑 Dyson 布朗运动的参数化过程，并研究其转移概率函数。

3.1 福克-普朗克-科尔莫戈罗夫方程

设 $\Omega\ \subset\mathbb{R}^N$为一个区域，$b=(b_1、\ \ldots\ldots、\ b_N)$ 是 Ω 上的博雷尔向量场，$A=(a_{ij})$ 是 Ω 上的矩阵值映射，使得 a_{ij} 均为博雷尔可测，$a_{ij}=a_{ji}$，且 $A\geq 0$。定义 $L_{A,\ b}$为作用于 $\varphi\in C_0^\infty((0,\ T)\times\Omega)$ 上的微分算子，其定义为

$$L_{A,b}\varphi=\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^N b_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},$$

并将其形式伴随算子记为 $L^*_{A,\ b}$。

定义 3.1。(a) 定义在区域 $(0,\ T)\times\Omega$ 上的局部有限博雷尔测度 μ 满足福克-普朗克-科尔莫戈罗夫方程 $\partial_t\mu=L^*_{A,\ b}\mu$，如果 $a_{ij},\ b_i\in L^1_{loc}(|\mu|)$ 且

$$\int_{(0,T)\times\Omega}(\partial_t\varphi+L_{A,b}\varphi)d\mu=0\quad\forall\varphi\in C_0^\infty((0,T)\times\Omega).$$

(b) 区域 Ω 上的局部有限博雷尔测度 μ 满足平稳福克–普朗克–柯尔莫哥洛夫方程 $L^*_{A,\ b}\mu=0$ 当且仅当 $a_{ij},\ b_i\in L^1_{loc}(|\mu|)$ 且

$$\int_\Omega(L_{A,b}\varphi)(x)\mu(dx)=0\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

在下文中，我们取 $A = \frac{1}{2}I$并记为$L = L_{\frac{1}{2}I,\ b}$，其中 $\underline{b} = \frac{1}{2}\nabla \log\ \rho$。微分算子 L 定义为

$$Lf = \frac{1}{2}\Delta f + b \cdot \nabla f, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega),$$

且 L^* 表示其形式伴随算子

$$L^* f = \frac{1}{2}\Delta f - \nabla \cdot (bf).$$

在特殊情形 $d\mu = \mu_t(dy)dt$下，可以考虑一个柯西问题。

定义 3.2 （柯西问题）。设 ν 是区域 Ω 上局部有界的测度。若测度 $d\mu = \mu_t(dy)dt$ 满足初始条件 $\mu_0 = \nu$，则称其解了一个柯西问题:

$$\int_0^T \int_\Omega (\partial_t \varphi + L\varphi)\mu_t(dy)dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty((0,T) \times \Omega) \tag{3.1}$$

and

$$\int_\Omega \varphi(x)\nu(dx) = \lim_{t \to 0+, t \in I_\varphi} \int_\Omega \varphi(x)\mu_t(dx) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{3.2}$$

其中集合 $I_\varphi \subset (0,T)$具有满测度 $|I_\varphi| = T$

备注 3.3。一般来说， I_φ 取决于测试函数。然而，当$t \to \int_\Omega \varphi d\mu_t$ 对所有测试函数都是连续的时——对于 $\mu_t(dy)$是费勒过程的转移概率的情形便是如此——可以取 $I_\varphi = (0,T)$。

备注 3.4。柯西问题 (3.1)、(3.2) 的一个等价定义是 s

$$\int_\Omega \varphi d\mu_t = \int_\Omega \varphi d\nu + \int_0^t \int_\Omega L\varphi d\mu_s ds \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

对于初始分布 $\nu = \delta_x$，即 $x \in \Omega$ 处的点质量，变为

$$\int_\Omega \varphi d\mu_t = \varphi(x) + \int_0^t \int_\Omega L\varphi d\mu_s ds \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.3}$$

引理3.5. 若 $\rho \in W^{1}_{,loc}{}^{1}(\Omega)$，则测度 $\mu(dx) = \rho(x)dx$ 满足定态福克-普朗克-柯尔莫戈罗夫方程 $L^*\mu = 0$，其漂移项为 $b = \frac{1}{2}\nabla \log\ \rho$，其中梯度按弱意义理解，并且当 $\rho(x) = 0$ 时， $b(x) = 0$ 。

证明。 事实上，由于 $\rho \in W^{1}_{,loc}{}^{1}(\Omega)$，对于任意紧子集 $K \subset \Omega$，我们有

$$\int_K |b(x)||\mu|(dx) = \frac{1}{2}\int_K |\nabla \rho| dx < \infty,$$

即 i s， $b^i \in L^1_{loc}(|\mu|)$ 对所有 $i = 1, \ldots, N$。由分部积分，对所有 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ，

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\Delta\varphi + b \cdot \nabla\varphi\right) \rho\ dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\rho\ dx + \int_\Omega \frac{\nabla\rho}{2\rho} \cdot \nabla\varphi\rho\ dx = 0. \qquad \square$$

推论 3.5.1. 对任意可求长乔丹曲线 Γ，测度 $\mu(dx) = \rho_{\beta,N}(x)dx$ 在任意区域 $\Omega \subseteq D$ 上，具有密度

$$\rho_{\beta,N}(x) = \frac{1}{Z_{\beta,N}(\gamma)} \prod_{i \neq j} |\gamma(x_i) - \gamma(x_j)|^{\beta/2},$$

是一个解，满足定态福克-普朗克-柯尔莫戈罗夫方程 $L^*\mu = 0$，其漂 ft

$$b_i(x) = \frac{1}{2\rho_{\beta,N}} \frac{\partial \rho_{\beta,N}}{\partial x_i}(x) = \frac{\beta}{2} \sum_{j:j\neq i} \mathrm{Re} \left\{ \frac{\gamma'(x_i)}{\gamma(x_i) - \gamma(x_j)} \right\},$$

其中，参数化的导数按弱意义理解，因为它几乎处处存在。

注 3.6. 请注意，一般而言，对于梯度漂移，即使在概率测度类中，定态福克-普朗克-柯尔莫戈罗夫方程也可能存在无穷多个解。参见 [7, 第790]页的一个例子。在附录的命题 A.1 中，我们证明，至少当密度 ρ 在 D中光滑时，定态福克-普朗克-柯尔莫戈罗夫方程的任何正解都必须等于 ρ 乘以一个常数。

3.2 参数化过程

福克-普朗克-柯尔莫戈罗夫方程

在下述命题中，我们证明参数化过程的转移概率函数具有密度，并满足福克-普朗克-科尔莫戈罗夫方程。

命题 3.7. 参数化过程的转移概率函数 $P(x,t,dy)\, X^x$ 满足柯西问题 (3.3)，其中 $\rho = \rho_{\beta,N}$。此外，转移概率测度关于勒贝格测度绝对连续

$$P(x,t,dy) = p(x,t,y)dy,$$

$(t,y) \to p(x,t,y)$ 在 $(0,+\infty) \times D$上为正且局部赫尔德连续，并且该密度满足带反射边界条件的福克-普朗克-科尔莫戈罗夫方程

$$\begin{aligned} &\partial_t p(x,t,\bullet) = L^* p(x,t,\bullet) \ \textit{weakly in } D, \\ &n \cdot \left(-\frac{1}{2} \rho_{\beta,N} \nabla \frac{p}{\rho_{\beta,N}} \right) = 0 \ \textit{weakly on } \partial D. \end{aligned}$$

在命题 3.7 的证明中，我们将使用以下关于福克-普朗克-科尔莫戈罗夫方程的测度值解的密度存在性的结果。

引理 3.8 ([8])。设 $d\mu = \mu_t(dy)dt$ 是 $(0,T) \times \Omega$ 上的局部有限非负博雷尔测度，它求解福克-普朗克-科尔莫戈罗夫方程 $\partial_t \mu = L^*\mu$，且 $b_i \in L^\infty_{loc}(\Omega)$。则$d\mu = p(t,y)dydt$，其中 $p \in L^r_{loc}((0,T) \times \Omega)$ 对任意 $r \in [1, 1 + \frac{1}{N+1}]$。密度 p是 $(0,T) \times \Omega$ 上的非负局部赫尔德连续函数。

命题 *3.7* 的证明。 1°. 漂移项 $b = \frac{1}{2}\nabla \log \rho_{\beta,N}$ 在 D 中局部有界，因此特别地$b_i \in L^1_{loc}(P(x,t,dy))$。由伊藤公式，对任意 $\varphi \in C^2(D)$，几乎必然

$$\varphi(X^x(t)) = \varphi(x) + \int_0^t (L\varphi)(X^x(s))ds + \int_0^t \nabla\varphi(X^x(s)) \cdot dB(s).$$

取期望表明， $P(x,t,dy)$ 是柯西问题的解

$$\int_D \varphi(y)P(x,t,dy) = \varphi(x) + \int_0^t \int_D (L\varphi)(y)P(x,t,dy).$$

特别地，对时间变量求导给出福克-普朗克-科尔莫戈罗夫方程的弱形式

$$\frac{d}{dt}\int_D \varphi(y)P(x,t,dy) = \int_D (L\varphi)(y)P(x,t,dy).$$

2°. 由引理 3.8，测度 $P(x,t,dy)dt$ 具有关于 $dydt$ 的密度，该密度在 $(0,T) \times D$ 上为正且局部赫尔德连续。这表明 $P(x,t,dy) \ll dy$对几乎每一个 $t \in (0,T)$ 成立。由于该过程是费勒的，函数 $t \to P(x,t,B)$ 对任意 $B \in \mathcal{B}_D$ 是右连续的。因此， $P(x,t,dy) \ll dy$对所有 $t \in (0,T)$ 成立，并且由于它对任意$T > 0$成立，转移概率 $P(x,t,dy)$ 对所有 $t > 0$ 具有密度：

$$P(x,t,dy) = p(x,t,y)dt.$$

3°. $L^*p(x,\ t,\ \bullet)$ 在弱意义下由恒等式定义

$$\int_D \varphi(L^*p)dy = \int_D (L\varphi)pdy \quad \forall \varphi \in C_0^2(D).$$

因此，由 1°. 可知， $\partial_t p = L^*p$ 在 D 中弱成立。令 K 为 D 的一个具有 Lipschitz 边界的紧子集。根据格林恒等式

$$\int_K (Lf)gdy + \frac{1}{2}\int_{\partial K} (n \cdot \nabla f)gdS = \int_K f(L^*g)dy + \int_{\partial K} fn \cdot \left(-\frac{1}{2}\nabla g + \frac{\nabla\rho}{2\rho}g\right)d\sigma \quad \forall g, f \in C^2(K).$$

一般而言， $J = -\frac{1}{2}\rho\nabla\frac{p}{\rho}$ 可能在逐点意义下无定义，但 $n \cdot J|_{\partial K}$ 可以通过以下方式在弱意义下定义：

$$\int_{\partial K} f(n \cdot J)d\sigma = \int_K (Lf)pdy - \int_K f(L^*p)dy + \frac{1}{2}\int_{\partial K} (n \cdot \nabla f)pd\sigma \quad \forall f \in C^2(K).$$

设 $f \in C^2(\overline{D})$且 $n \cdot \nabla f = 0$ 在 ∂D 上。然后，考虑到 $\partial_t p = L^*p$ 在 D 中弱成立，取极限可得 $K \uparrow D$

$$\lim_{K\uparrow D}\int_{\partial K} f(n \cdot J)d\sigma = \int_D (Lf)pdy - \int_D f(\partial_t p)dy + \frac{1}{2}\int_{\partial D} (n \cdot \nabla f)pd\sigma.$$

前两项由于 1°.而相互抵消，最后一项则因测试函数的选取而为零。因此，反射边界条件 $n \cdot J|_{\partial D} = 0$ 可理解为

$$\lim_{K\uparrow D}\int_{\partial K} f(n \cdot J)d\sigma = 0 \quad \forall f \in C^2(\overline{D}).$$

□

柯尔莫哥洛夫型扩散

本节将证明，参数化过程满足柯尔莫哥洛夫对扩散的定义，即它是一个转移概率函数为 $P(x, t, dy)$ 的马尔可夫过程，并存在一个函数 $b\colon D \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^N$，称为漂移系数，以及一个矩阵值函数 $a(x,t)$，称为扩散系数；对于所有满足 $B(x,\delta) \subset D$ 的 $\delta > 0, x, z \in D$，均有

(1.) $\lim\limits_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_{B(x,\delta)^c} p(x,h,y)dy = 0,$

(2.) $\lim\limits_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_{B(x,\delta)} (y-x)p(x,h,y)dy = b(x,t),$

(3.) $\lim\limits_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_{B(x,\delta)} ((y-x)\cdot z)^2 p(x,h,y)dy = a(x,t)z\cdot z.$

命题 3.9. 假设 $\gamma \in C^2$。那么，参数化过程 X^x 是柯尔莫哥洛夫意义下的扩散过程，其扩散矩阵为单位矩阵，漂移项系数由 $b = \frac{1}{2}\nabla$ 对数 $\rho_{\beta,\ N}$ 给出。

证明。 1°. 令 $f \in C^\infty(D)$。$(P_t f)(x) = \mathbb{E}[X^x(t)]$ 在 $t = 0$ 处的时间导数可写为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_D f(y)P(x,t,dy)\Big|_{t=0} &= \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\left(\int_D f(y)P(x,h,dy) - \int_D f(y')P(x,0,dy')\right)\\ &= \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\left(\int_D f(y)P(x,h,dy) - f(x)\right)\\ &= \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_D (f(y)-f(x))\,P(x,h,dy).\end{aligned}$$

另一方面，与命题 3.7 的证明相同，由伊藤公式可得

$$\frac{d}{dt}\int_D f(y)P(x,t,dy)\Big|_{t=0} = \int_D (Lf)(y)P(x,t,dy)\Big|_{t=0} = (Lf)(x).$$

我们得到恒等式

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_D (f(y)-f(x))\,P(x,h,dy) = (Lf)(x) \quad \forall f \in C^\infty(D).$$

取 $f_k(y) = y_k$，得到

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_D (y_k - x_k)\,P(x,h,dy) = (Lf_k)(x) = b_k(x).$$

代入 $f_{ij}(y) = (y_i - x_i)(y_j - x_j)z_i z_j$ 可得

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_D (y_i-x_i)(y_j-x_j)z_i z_j P(x,h,dy) = (Lf_{ij})(x) = z_i^2\delta_{ij}.$$

2°. 接下来我们证明转移概率函数的随机连续性，也就是说，对于所有满足 $B(x,\delta) \subset D$ 的 $x \in D$ 和 $\delta > 0$，以下极限成立

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}P(x,h,B(x,\delta)^c) = 0.$$

根据伊藤公式，对于 $p>2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X^x(t)-x|^p\right] =& p\frac{N+p-2}{2}\int_0^t \mathbb{E}\left[|X^x(s)-x|^{p-2}\right] ds \\ &+ p\int_0^t \mathbb{E}\left[|X^x(s)-x|^{p-2}\sum_{i=1}^N b_i(X^x(s))((X^x(s))_i - x_i)\right] ds.\end{aligned}$$

第二项中的和可以写成

$$\sum_{i=1}^N b_i(y)(y_i-x_i) = \sum_{i=1}^N (b_i(y)-b_i(x))(y_i-x_i) + \sum_{i=1}^N (y_i-x_i)b_i(x).$$

现在我们将证明右端的第一项有上界。

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^N (b_i(y)-b_i(x))(y_i-x_i)\\ &= \frac{\beta}{2}\sum_{i=1}^N (y_i-x_i)\sum_{j:j\neq i}\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma'(y_i)}{\gamma(y_i)-\gamma(y_j)} - \frac{\gamma'(x_i)}{\gamma(x_i)-\gamma(x_j)}\right\}\\ &= \frac{\beta}{2}\sum_{i<j}\mathrm{Re}\left\{\frac{(y_i-x_i)\gamma'(y_i)-(y_j-x_j)\gamma'(y_j)}{\gamma(y_i)-\gamma(y_j)}\right\} + \frac{\beta}{2}\sum_{i<j}\mathrm{Re}\left\{\frac{(x_i-y_i)\gamma'(x_i)-(x_j-y_j)\gamma'(x_j)}{\gamma(x_i)-\gamma(x_j)}\right\}.\end{aligned}$$

现在我们仔细考察第一项，它可以分解为

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{(y_i-x_i)\gamma'(y_i)-(y_j-x_j)\gamma'(y_j)}{\gamma(y_i)-\gamma(y_j)}\right\} \tag{3.4}$$

$$= (y_i-x_i)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma'(y_i)-\gamma'(y_j)}{\gamma(y_i)-\gamma(y_j)}\right\} + \left(1-\frac{x_j-x_i}{y_j-y_i}\right)\mathrm{Re}\left\{\gamma'(y_j)\frac{y_i-y_j}{\gamma(y_i)-\gamma(y_j)}\right\}. \tag{3.5}$$

由于 $x,\ y\in D$，因此对于 $i<j$，有 $x_i<x_j$ 和 $y_i<y_j$，且项 $\frac{x_i-x_j}{y_i-y_j}$ 始终为正。如果 $y_j-y_i\to 0+$，则表达式（3.5）只能趋于 $-\infty$，因为在假设 $\gamma\in C^2$ 下

$$\lim_{y_j-y_i\to 0+}\mathrm{Re}\left\{\gamma'(y_j)\frac{y_i-y_j}{\gamma(y_i)-\gamma(y_j)}\right\} = 1$$

and

$$\lim_{y_j-y_i\to 0+}\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma'(y_i)-\gamma'(y_j)}{\gamma(y_i)-\gamma(y_j)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma''(y_j)}{\gamma'(y_j)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\gamma''(y_j)\overline{\gamma'(y_j)}\right\} = 0.$$

相同　　结论在 $y_j-y_i\to l$ 时成立，因为表达式（3.5）可以改写为　　s

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left\{\frac{(y_i-x_i)\gamma'(y_i)-(y_j-x_j)\gamma'(y_j)}{\gamma(y_i)-\gamma(y_j)}\right\}\\ &= (y_i-x_i)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma'(y_i)-\gamma'(y_j)}{\gamma(y_i)-\gamma(y_j)}\right\} + \left(1-\frac{l+x_i-x_j}{l+y_i-y_j}\right)\mathrm{Re}\left\{\gamma'(y_j)\frac{l+y_i-y_j}{\gamma(y_i)-\gamma(y_j)}\right\}.\end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{y\to\partial D}(b(x)-b(y))\cdot(x-y)=-\infty,$$

对于 $x\to\partial D$, 情况也类似。存在常数 $C=C(\gamma,N)>0$，使得 t

$$\sum_{i=1}^{N}(b_i(y)-b_i(x))(y_i-x_i)<C(\gamma,N).$$

因此，存在正常数 c_1,c_2，它们取决于 $N,p,C(\gamma,N)$ $|b(x)|,\beta$，使得

$$\mathbb{E}\left[|X^x(h)-x|^p\right]\le c_1\int_0^h\mathbb{E}\left[|X^x(s)-x|^{p-2}\right]ds+c_2\int_0^h\mathbb{E}\left[|X^x(s)-x|^{p-1}\right]ds.$$

这意味着

$$\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\mathbb{E}\left[|X^x(h)-x|^p\right]=0.$$

由切比雪夫不等式

$$P(x,h,B(x,\delta)^c)=\mathbb{P}[|X^x(h)-x|\ge\delta]\le\delta^{-p}\mathbb{E}\left[|X^x(h)-x|^p\right].$$

因此，对于所有满足 $B(x,\delta)\subset D$ 的 $x\in\overline{D}$ 和 $\delta>0$，有

$$\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}P(x,h,B(x,\delta)^c)=0.$$

因此，结合随机连续性与 $1^\circ.$ 的结果，可得命题的第 1. 和第 2.项。方程 $1.-3.$ 可以写成转移概率 $P(x,t,dy)$的密度形式，这一事实由命题 3.7 得出。

□

3.3 商参数化过程

˜令 X^x 为第 2.2 节中定义的商参数化过程，其状态空间为

$$E=\{x\in\mathbb{R}^N:0\le x_1<\cdots<x_N<x_1+l<2l\},\tag{3.6}$$

˜，起点为 $x\in E$。 X^x 的转移概率函数由下式给出

$$\tilde{P}(x,t,B)=P(x,t,f^{-1}(B)),\quad B\in\mathcal{B}_E,$$

其中， $P(x,\ t,\ dy)$ 是参数化过程的转移概率函数。

˜**命题 3.10**。 转移概率函数 P（$x,\ t,\ dy$） 在 E上满足带漂移项 $b_{\beta,\ N}=\frac{1}{2}\nabla\log\rho_{\beta,\ N}$的福克-普朗克-科尔莫戈罗夫方程的柯西问题。此外，˜P（$x,\ t,\ dy$） 具有正的局部赫尔德连续密度

$$\tilde{P}(x,t,dy)=\rho_t(x,y)dy$$

对每个 $t>0$。

证明。 对于任意 $\varphi \in C_0^\infty(E)$，映射

$$y \to \varphi(f(y)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(y - kl\hat{e})\mathbb{1}_{\{E+kl\hat{e}\}}(y)$$

是 $C^\infty(D)$，并且满足以下结合律

$$(L\varphi) \circ f = L(\varphi \circ f),$$

其中 $L = \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\nabla \log \rho_{\beta,\ N} \cdot \nabla$。借助命题 3.7 和变量替换公式，我们得到

$$\begin{aligned}
\int_E \varphi(\tilde{y})\tilde{P}(x,t,d\tilde{y}) &= \int_D (\varphi \circ f)(y)P(x,t,dy) \\
&= (\varphi \circ f)(x) + \int_0^t \int_D (L(\varphi \circ f))(y)P(x,s,dy)ds \\
&= \varphi(x) + \int_0^t \int_D ((L\varphi) \circ f)(y)P(x,s,dy)ds \\
&= \varphi(x) + \int_0^t \int_E (L\varphi)(\tilde{y})\tilde{P}(x,s,d\tilde{y})ds.
\end{aligned}$$

因此，转移概率函数 $P(x,\ t,\ dy)$ 是FPK 方程在 E 上的柯西问题的解，其初始分布为 δ_x。由于过程 X^x 是费勒过程，如同命题 3.7 的证明中那样，转移概率 $P(x,\ t,\ dy)$ 具有正的局部赫尔德连续密度

$$\tilde{P}(x,t,dy) = \rho_t(x,y)dy$$

对每个 $t > 0$ 均成立。 □

注 3.11。 如果参数化为 $\gamma \in C^\infty$，那么漂移系数 $b_{\beta,\ N} = \frac{1}{2}\nabla \log \rho_{\beta,\ N}$在 E 上是光滑的。因此，根据韦伊正则性，密度 $(t,\ y) \to \rho_t(x,\ y)$ 作为具有光滑系数的 FPK 方程的解，本身在 E 上光滑，并且逐点满足 FPK 方程

$$\partial_t \rho_t = \nabla_y \cdot \left(-\frac{1}{2}\rho_{\beta,N}\nabla_y \frac{\rho_t}{\rho_{\beta,N}} \right).$$

4 收敛到平稳分布

本节证明定理 1.12，即 Dyson 布朗运动的转移概率以指数速度收敛于库仑气体密度 $\rho_{\beta,\ N}$所给出的平稳分布，其中 $t \to +\infty$。首先，我们证明第 2.2 节定义的商参数化过程 X^x的转移概率满足庞加莱型不等式。随后，利用该不等式和福克-普朗克-柯尔莫哥洛夫方程，我们证明其收敛性并估计收敛速率。

4.1 Poincaré 型不等式

引理 4.1。 设 γ 为 C^1，且 E 如(3.6)中所定义。那么，存在常数 $C = C(\beta, \gamma, N) > 0$，使得对任意满足 $\int_E f(y)\rho_{\beta,\ N}(y)dy = 0$ 的 $f \in C^1(E)$，以下庞加莱型不等式成立

$$\int_E f^2(y)\rho_{\beta,N}(y)dy \le C\int_E |\nabla f(t)|^2 \rho_{\beta,N}(y)dy.$$

证明。 由詹森不等式可得,

$$\begin{aligned}\int_E f(y)^2\rho_{\beta,N}(y)dy &= \int_E \left(f(y) - \int_E f(\tilde{y})\rho_{\beta,N}(\tilde{y})d\tilde{y}\right)^2 \rho_{\beta,N}(y)dy \\ &\le \iint_{E\times E} (f(y) - f(\tilde{y}))^2 \rho_{\beta,N}(y)\rho_{\beta,N}(\tilde{y})dyd\tilde{y} \\ &= 2\iint_{E\times E} (f(y) - f(\tilde{y}))^2 \rho_{\beta,N}(y)\rho_{\beta,N}(\tilde{y})\mathbb{1}_{\{y_1<\tilde{y}_1\}}dyd\tilde{y},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(y) - f(\tilde{y}) =& f(y_1,\dots,y_N) - f(\tilde{y}_1,y_2,\dots,y_N) \\ &+ f(\tilde{y}_1,y_2,\dots,y_N) - f(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,y_3,\dots,y_N) \\ &+ \qquad\qquad \dots \\ &+ f(\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_{N-1},y_N) - f(\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_{N-1},\tilde{y}_N).\end{aligned}$$

对于 $i = 1,$ ....., $N,$ 记

$$\begin{aligned}a_i :&= f(\tilde{y}_1,\dots\tilde{y}_{i-1},y_i,y_{i+1},\dots,y_N) - f(\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_{i-1},\tilde{y}_i,y_{i+1},\dots,y_N) \\ &= \int_{\tilde{y}_i}^{y_i} \partial_{r_i} f(\tilde{y}_1,\dots\tilde{y}_{i-1},r_i,y_{i+1},\dots,y_N)dr_i.\end{aligned}$$

于是,

$$\int_E f(y)^2\rho_{\beta,N}(y)dy \le 2N\sum_{i=1}^N \iint_{E\times E} (a_i)^2\rho_{\beta,N}(y)\rho_{\beta,N}(\tilde{y})\mathbb{1}_{\{y_1<\tilde{y}_1\}}dyd\tilde{y}$$

由柯西-施瓦茨不等式,

$$\begin{aligned}(a_i)^2 &= \left(\int_{\tilde{y}_i}^{y_i} \partial_{r_i} f(\tilde{y}_1,\dots\tilde{y}_{i-1},r_i,y_{i+1},\dots,y_N)dr_i\right)^2 \\ &\le \int_{\tilde{y}_i}^{y_i} |\nabla f(\tilde{y}_1,\dots\tilde{y}_{i-1},r_i,y_{i+1},\dots,y_N)|^2\rho_{\beta,N}(\tilde{y}_1,\dots\tilde{y}_{i-1},r_i,y_{i+1},\dots,y_N)dr_i\times \\ &\qquad\qquad \times \int_{\tilde{y}_i}^{y_i} \frac{1}{\rho_{\beta,N}(\tilde{y}_1,\dots\tilde{y}_{i-1},r_i',y_{i+1},\dots,y_N)}dr_i'.\end{aligned}$$

$$J(y,\tilde{y},r_i,r_i') := \frac{|\nabla f(\tilde{y}_1,\dots\tilde{y}_{i-1},r_i,y_{i+1},\dots,y_N)|^2\rho_{\beta,N}(\tilde{y}_1,\dots\tilde{y}_{i-1},r_i,y_{i+1},\dots,y_N)}{\rho_{\beta,N}(\tilde{y}_1,\dots\tilde{y}_{i-1},r_i',y_{i+1},\dots,y_N)}\rho_{\beta,N}(y)\rho_{\beta,N}(\tilde{y}).$$

考虑到 $y_1 < \tilde{y}_1$,

$$\begin{aligned}
&\iint_{E\times E}(a_i)^2\rho_{\beta,N}(y)\rho_{\beta,N}(\tilde{y})\mathbb{1}_{\{y_1<\tilde{y}_1\}}dyd\tilde{y}\\
&\le \int_0^l dy_1\int_{y_1}^l d\tilde{y}_1\cdots\int_{y_{i-1}}^{y_1+l}dy_i\int_{\tilde{y}_{i-1}}^{\tilde{y}_1+l}d\tilde{y}_i\int_{\tilde{y}_i}^{y_i}dr_i\int_{\tilde{y}_i}^{y_i}d\tilde{r}_i\times\\
&\qquad\times\int_{y_i}^{y_1+l}dy_{i+1}\int_{\tilde{y}_i}^{\tilde{y}_1+l}d\tilde{y}_{i+1}\cdots\int_{y_{N-1}}^{y_1+l}dy_N\int_{\tilde{y}_{N-1}}^{\tilde{y}_1+l}d\tilde{y}_N J(y,\tilde{y},r_i,r_i')\\
&\le \int_0^l dy_1\int_{y_1}^l d\tilde{y}_1\cdots\int_{y_{i-1}}^{y_1+l}dy_i\int_{\tilde{y}_{i-1}}^{\tilde{y}_1+l}d\tilde{y}_i\int_{\boldsymbol{\tilde{y}_{i-1}}}^{\boldsymbol{\tilde{y}_1+l}}dr_i\int_{\tilde{y}_i}^{y_i}d\tilde{r}_i\times\\
&\qquad\times\int_{\boldsymbol{r_i}}^{\boldsymbol{\tilde{y}_1+l}}dy_{i+1}\int_{\tilde{y}_i}^{\tilde{y}_1+l}d\tilde{y}_{i+1}\cdots\int_{y_{N-1}}^{\boldsymbol{\tilde{y}_1+l}}dy_N\int_{\tilde{y}_{N-1}}^{\tilde{y}_1+l}d\tilde{y}_N J(y,\tilde{y},r_i,r_i').
\end{aligned}$$

记 $v=(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_{i-1},r_i',y_{i+1},\ldots,y_N)$。

$$\begin{aligned}
&\int_E dv|\nabla f(v)|^2\rho_{\beta,N}(v)\times\\
&\times\int_0^l dy_1\cdots\int_{y_{i-1}}^{y_1+l}dy_i\int_{\tilde{y}_{i-1}}^{\tilde{y}_1+l}d\tilde{y}_i\int_{\tilde{y}_i}^{y_i}d\tilde{r}_i\int_{\tilde{y}_i}^{\tilde{y}_1+l}d\tilde{y}_{i+1}\cdots\int_{\tilde{y}_{N-1}}^{\tilde{y}_1+l}d\tilde{y}_N\frac{\rho_{\beta,N}(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_N)\rho_{\beta,N}(y_1,\ldots,y_N)}{\rho_{\beta,N}(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_{i-1},r_i',y_{i+1},\ldots,y_N)}.
\end{aligned}$$

内层被积函数等于

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_{\beta,N}(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_N)\rho_{\beta,N}(y_1,\ldots,y_N)}{\rho_{\beta,N}(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_{i-1},r_i',y_{i+1},\ldots,y_N)}=&\frac{1}{Z_{\beta,N}(\gamma)}\frac{\prod_{k:k\neq i}|\gamma(\tilde{y}_i)-\gamma(\tilde{y}_k)|^\beta\prod_{l:l\neq i}|\gamma(y_i)-\gamma(y_l)|^\beta}{\prod_{p:p<i}|\gamma(r_i')-\gamma(\tilde{y}_p)|^\beta\prod_{q:q>i}|\gamma(r_i')-\gamma(y_q)|^\beta}\times\\
&\times\prod_{i<\alpha<\eta}|\gamma(\tilde{y}_\alpha)-\gamma(\tilde{y}_\eta)|^\beta\prod_{\zeta<\theta<i}|\gamma(y_\zeta)-\gamma(y_\theta)|^\beta.
\end{aligned}$$

对于任意 $\beta>0$, 关于 $y_1,\ldots,y_i,\tilde{y}_i,r_i',\tilde{y}_{i+1},\ldots,\tilde{y}_N$ 的积分关于其余变量一致有界，其上界为某个常数 $c=c(\beta,\gamma,N)>0$。因此,

$$\int_E f(y)^2\rho_{\beta,N}(y)dy\le 2N^2c(\beta,\gamma,N)\int_E|\nabla f(v)|dv^2\rho_{\beta,N}(v).\qquad\square$$

推论 4.1.1. 假设 $\gamma\in C^\infty$。设 $\rho_t(x,y)$ 为 E 中商参数化过程 X^x 的转移概率˜函数的密度。那么，存在常数 $C=C(\beta,\gamma,N)>0$，使得以下庞加莱型不等式成立

$$\int_E\left(\frac{\rho_t(x,y)}{\rho_{\beta,N}(y)}-1\right)^2\rho_{\beta,N}(y)dy\le C\int_E\left|\nabla_y\frac{\rho_t(x,y)}{\rho_{\beta,N}(y)}\right|^2\rho_{\beta,N}(y)dy.$$

证明。 由引理 4.1 取 $f(y)=\rho_t(x,y)\,\rho(y)-1$ 即得结论。 —— □

4.2 指数收敛速率

命题 4.2。 设 $\gamma\in C^\infty$。令 $\rho_t(x,y)$ 为商参数化过程 X^x 在 E中的转移概率˜函数的密度。那么，存在一个常数 $C=$

$C(\beta,\gamma,N)>0$使得

$$\int_E\left(\frac{\rho_t(x,y)}{\rho_{\beta,N}(y)}-1\right)^2\rho_{\beta,N}(y)dy\le\exp\left(-\frac{t}{C}\right). \tag{4.1}$$

˜特别地，转移概率函数 $P(x,t,dy)$ 当 $t\to+\infty$时弱收敛于平稳分布$\rho_{\beta,N}(y)dy$，其在$(E,\mathcal{B}_E)$上由密度给出

$$\rho_{\beta,N}(y)=\frac{1}{Z_{\beta,N}(\gamma)}\prod_{i\neq j}|\gamma(y_i)-\gamma(y_j)|^{\frac{\beta}{2}}.$$

证明。 在证明过程中， $\nabla\rho_t$ 表示对第二个空间变量取梯度。将不等式(4.1)的左端对时间求导，得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_E\left(\frac{\rho_t}{\rho_{\beta,N}}-1\right)^2\rho_{\beta,N}dy&=2\int_E\left(\frac{\rho_t}{\rho_{\beta,N}}-1\right)\partial_t\rho_t dy\\&=-\int_E\left(\frac{\rho_t}{\rho_{\beta,N}}-1\right)\nabla\cdot\left(\rho_{\beta,N}\nabla\frac{\rho_t}{\rho_{\beta,N}}\right)dy,\end{aligned}$$

其中，在最后一个等式中，我们利用了密度 ρ_t 在E中逐点满足FPK 方程。分部积分后，右端等于

$$-\frac{1}{2}\int_E\left|\nabla\frac{\rho_t}{\rho_{\beta,N}}\right|^2\rho_{\beta,N}dy-\frac{1}{2}\int_{\partial E}\left(\frac{\rho_t}{\rho_{\beta,N}}-1\right)n\cdot\rho_{\beta,N}\nabla\frac{\rho_t}{\rho_{\beta,N}}d\sigma.$$

边界项消失，这是因为$n\cdot\rho_{\beta,N}\nabla\frac{\rho_t}{\rho_{\beta,N}}$在边界 ∂E与~~∂D~~ 相交的那一部分上因反射边界条件而为零，而在边界的其余部分上， $\{x_1=0\}\cap\partial E$ 与 $\{x_1=l\}\cap\partial E$ 处的被积函数由于 ρ_t和$\rho_{\beta,N}$沿ˆe的l-周期性而取相反的值，并且因为对 $x\in\{x_1=0\}$有 $n(x)=(1,0,\ldots,0)$，对 $x\in\{x_1=l\}$有 $n(x)=(-1,0,\ldots,0)$。

$$\frac{d}{dt}\int_E\left(\frac{\rho_t}{\rho_{\beta,N}}-1\right)^2\rho_{\beta,N}dy=-\int_E\left|\nabla\frac{\rho_t}{\rho_{\beta,N}}\right|^2\rho_{\beta,N}dy.$$

引理 4.1 中的庞加莱不等式推出

$$\frac{d}{dt}\int_E\left(\frac{\rho_t}{\rho_{\beta,N}}-1\right)^2\rho_{\beta,N}dy\le-\frac{1}{C}\int_E\left(\frac{\rho_t}{\rho_{\beta,N}}-1\right)^2\rho_{\beta,N}dy,$$

积分后即可得到该命题的结论。 □

这个结果可直接推广到戴森布朗运动的转移概率函数 $Q(\boldsymbol{z},\ t,\ |d\boldsymbol{w}|)$，该函数由密度给出

$$\varrho_t(z,w)=\rho_t\left(\gamma^{-1}(z_1),\ldots,\gamma^{-1}(z_N),\gamma^{-1}(w_1),\ldots,\gamma^{-1}(w_N)\right).$$

推论 4.2.1。 假设 $\gamma \in C^\infty$。存在常数 $C = C(\beta,\ \gamma,\ N) > 0$，使得

$$\int_S \left(\frac{\varrho_t(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})}{\varrho_{\beta,N}(\boldsymbol{w})} - 1 \right)^2 \varrho_{\beta,N}(\boldsymbol{w}) |d\boldsymbol{w}| \leq \exp\left(-\frac{t}{C} \right).$$

特别地，转移概率函数 $Q(\boldsymbol{z}, t, |d\boldsymbol{w}|)$ 在 $t \to +\infty$时弱收敛到平稳分布$\varrho_{\beta,N}(\boldsymbol{w})|d\boldsymbol{w}|$，该分布定义在$(S, \mathcal{B}_S)$ 上，并由密度给出

$$\varrho_{\beta,N}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{Z_{\beta,N}(\gamma)} \prod_{i \neq j} |z_i - z_j|^{\frac{\beta}{2}}.$$

证明。 命题 4.2 与变量替换公式，利用 $\gamma' = 1$，立即推出该推论。

□

至此，定理 1.12 的证明完成。

5 当 $\beta \to +\infty$时的大偏差

现在我们将研究戴森布朗运动在 Γ 上随逆温度参数 $\beta \to +\infty$变化时的行为。由于曲线上的过程是参数化过程的连续像，因此只需研究该系统

$$dX(t) = dB(t) + \frac{1}{2} \nabla \rho_{\beta,N}(X(t)) dt.$$

经过确定性时间变换后，这变为

$$dX(t) = \sqrt{\kappa} dB(t) + \nabla \rho_{1,N}(X(t)) dt$$

其中小参数 $\kappa > 0$ 与 $\beta > 0$ 的关系为

$$\kappa = \frac{2}{\beta}.$$

我们关注 $\kappa \to 0$ 时的大偏差。近期文章 [1] 为粒子位于单位圆上的“Dyson 型”扩散过程建立了大偏差原理，并将过程限制在任意紧时间区间 $[0, T]$ 上。正如我们将看到的，在对曲线 Γ 作出适当正则性假设后，这也涵盖了参数化过程。首先，我们回顾 [1] 中 Dyson 型势函数的定义，并证明：若假设曲线 $\gamma \in C^3$，则在经过确定性时间变换后，式 (2.1) 中定义的参数化过程 X 是 Dyson 型扩散过程。随后，我们给出（经时间变换的）参数化过程 $X^x = （X^x（t）$ 在空间 $C_x（[0, +\infty)$ D 中的大偏差原理；该空间由从 x 出发的连续 D 值函数组成，并赋予局部一致收敛拓扑。

5.1 Dyson 型扩散

定义 5.1 ([1]). 若存在常数 $a > 0$ 和 $B > 0$，使得对所有 $x \in D$，函数 $U \in C^2(D, \mathbb{R})$ 都称为 Dyson 型势

$$-B \leq a\Delta U \leq |\nabla U|^2 + B. \tag{5.1}$$

命题 5.2. 设 $\gamma \in C^3$。那么，函数

$$V(x) = -\log \rho_{1,N}(x) = -\sum_{i<j} \log|\gamma(x_i) - \gamma(x_j)|$$

是一个 *Dyson* 型势函数，其中某些 $B = B(\gamma, N) > 0$ 以及任意 $a \le 1$。

证明。 在证明过程中，我们令 $\rho \equiv \rho_{1,N}$。 V 的拉普拉斯算子等于

$$\Delta V = -\frac{\Delta\rho}{\rho} + \left|\frac{\nabla\rho}{\rho}\right|^2.$$

用 ρ 表示，条件 (5.1) 可写为

$$-\frac{B}{a} + \frac{a-1}{a}\left|\frac{\nabla\rho}{\rho}\right|^2 \le \frac{\Delta\rho}{\rho} \le \left|\frac{\nabla\rho}{\rho}\right|^2 + \frac{B}{a}.$$

首先，我们计算对数导数的平方:

$$\left|\frac{\nabla\rho}{\rho}\right|^2 = \sum_i^N \left(\sum_{j:j\neq i} \mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma'(x_i)}{\gamma(x_i)-\gamma(x_j)}\right\}\right)^2.$$

于是， $\Delta\rho/\rho$ 的表达式可写为

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \left|\frac{\nabla\rho}{\rho}\right|^2 - \sum_{i\neq j}\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{\gamma'(x_i)}{\gamma(x_i)-\gamma(x_j)}\right)^2\right\} + \sum_{i\neq j}\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma''(x_i)}{\gamma(x_i)-\gamma(x_j)}\right\}.$$

1°. **U 上界**。 定义以下依赖于曲线的常数:

$$C_1(\gamma) := \sup_{x_1<x_2<x_1+l}\left|\mathrm{Im}\left\{\frac{\gamma'(x_1)}{\gamma(x_1)-\gamma(x_2)}\right\}\right|,$$
$$C_2(\gamma) := \sup_{x_1<x_2<x_1+l}\left|\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma''(x_1)-\gamma''(x_2)}{\gamma(x_1)-\gamma(x_2)}\right\}\right|.$$

那么， $\Delta\rho/\rho$ 有如下上界

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\rho}{\rho} &\le \left|\frac{\nabla\rho}{\rho}\right|^2 + \sum_{i\neq j}\mathrm{Im}\left\{\frac{\gamma'(x_i)}{\gamma(x_i)-\gamma(x_j)}\right\}^2 + \sum_{i\neq j}\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma''(x_i)}{\gamma(x_i)-\gamma(x_j)}\right\}\\ &\le \left|\frac{\nabla\rho}{\rho}\right|^2 + N^2(C_1^2 + C_2).\end{aligned}$$

2°. **下界**。 我们希望确定 $a > 0$ 的取值，使得右端的两个中间项有下界，

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{a-1}{a}\left|\frac{\nabla\rho}{\rho}\right|^2 + \frac{1}{a}\left|\frac{\nabla\rho}{\rho}\right|^2 - \sum_{i\neq j}\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{\gamma'(x_i)}{\gamma(x_i)-\gamma(x_j)}\right)^2\right\} + \sum_{i\neq j}\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma''(x_i)}{\gamma(x_i)-\gamma(x_j)}\right\}.$$

也就是说，对于某个 $A>0$

$$\frac{1}{a}\left|\frac{\nabla\rho}{\rho}\right|^2-\sum_{i\neq j}\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma'(x_i)}{\gamma(x_i)-\gamma(x_j)}\right\}^2\geq-\frac{A}{a},$$

由此得到条件

$$\frac{1}{a}\geq\sup_{x\in D}\frac{\sum\limits_{i\neq j}\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma'(x_i)}{\gamma(x_i)-\gamma(x_j)}\right\}^2-\sum\limits_{i\neq j}\mathrm{Im}\left\{\frac{\gamma'(x_i)}{\gamma(x_i)-\gamma(x_j)}\right\}^2}{\sum\limits_{i\neq j}\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma'(x_i)}{\gamma(x_i)-\gamma(x_j)}\right\}^2+\sum\limits_{i\neq j\neq k}\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma'(x_i)}{\gamma(x_i)-\gamma(x_j)}\right\}\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma'(x_i)}{\gamma(x_i)-\gamma(x_k)}\right\}+A}.$$

定义如下依赖于曲线的常数:

$$\begin{aligned}C_3(\gamma):=\sup_{x_1<x_2<x_3<x_1+l}\Bigg|&\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma'(x_1)}{\gamma(x_1)-\gamma(x_2)}\right\}\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma'(x_1)}{\gamma(x_1)-\gamma(x_3)}\right\}\\&+\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma'(x_2)}{\gamma(x_2)-\gamma(x_1)}\right\}\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma'(x_2)}{\gamma(x_2)-\gamma(x_3)}\right\}\\&+\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma'(x_3)}{\gamma(x_3)-\gamma(x_1)}\right\}\mathrm{Re}\left\{\frac{\gamma'(x_3)}{\gamma(x_3)-\gamma(x_2)}\right\}\Bigg|.\end{aligned}$$

取 $A=N^3C_3$，我们推得 $a>0$ 可以取为 $a\leq 1$，从而下列不等式成立:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}\geq\frac{a-1}{a}\left|\frac{\nabla\rho}{\rho}\right|^2-N^3C_3-N^2C_2.$$

3°. 对于 $\gamma\in C^3$，所有常数 $C_i(\gamma)$、$i=1,2,3$均为有限，且该结论在$B=\max\{N^2(C_1^2+C_2)$ $N^3C_3\}$以及任意 $0<a\leq 1$下成立。 □

5.2 延拓到时间区间 $[0,+\infty)$

设 $C_x([0,+\infty)\ D)$为从 $x\in D$出发的连续 D值函数空间，并配备局部一致收敛拓扑，即对每个 $T>0$在 $[0,T]$ 上的一致收敛。定义 $I:\ C_x([0,+\infty)\ D)\to[0,+\infty]$ 为

$$I(f)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sum_{i=1}^N\left|\dot f_i(t)+\partial_iV(f(t))\right|^2dt$$

若 f绝对连续，否则设为 $+\infty$。并定义截断的 I_T：由下式给出的 $C_x([0,T],D)\to[0,+\infty]$

$$I_T(f)=\frac{1}{2}\int_0^{T}\sum_{i=1}^N\left|\dot f_i(t)+\partial_iV(f(t))\right|^2dt$$

若 f在 $[0,T]$ 上绝对连续，否则设为 $+\infty$。

Lemma 5.3. 泛函 $I:\ C_x([0,+\infty)\ D)\to[0,+\infty]$ 是一个良好速率函数 .

证明。 对于 $f \in C_x([0,+\infty)\ D)$，根据 [1, 推论 2.13], 的证明，以下不等式成立

$$I(f) \geq \mathcal{D}(f) - V(x),$$

其中 $\mathcal{D}(f)$ 是函数 f 的狄利克雷能量，由下式给出

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \dot{f}_i(t)^2 dt$$

若 f 绝对连续，否则设为 $+\infty$ 。

设 $c > 0$。上述不等式表明，子集 $\{I(f) \leq c\} \subset C_x([0,+\infty)\ D)$ 包含于 $\{\mathcal{D}(f) \leq c + V(x)\}$。后者是紧的，因为狄利克雷能量 $\mathcal{D}$:$C_x([0,+\infty)\ D) \to [0,+\infty]$ 是一个良好速率函数，见 [13, 第??章]。因此，任一序列 $(f_n) \subset \{I(f) \leq c\}$ 都有一个收敛子序列 (f_{n_k})，因为它同样包含在紧集 $\{\mathcal{D}(f) \leq c + V(x)\}$ 中；将其子序列极限记为 f^*。

由于截断泛函 I_T: $C_x([0,T],D) \to [0,+\infty]$ 是一个良好速率函数，见 [1,引理2.15], , 故它是下半连续的。

$$I(f^*) = \lim_{T\to+\infty} I_T(f^*) \leq \lim_{T\to+\infty} \lim_{k\to+\infty} I_T(f_{n_k}) \leq c.$$

因此， $f^* \in \{I(f) \leq c\}$。由此可知，对于每个 $c > 0$，水平集 $\{I(f) \leq c\}$ 是$C_x([0,+\infty)\ D)$的紧子集，因此泛函 I 是一个良好速率函数。 □

在 $C_x([0,+\infty)\ D)$ 上定义概率测度如下:

$$\mathbb{Q}_\kappa(E) = \mathbb{P}[X^x \in E], \quad E \subset C_x([0,+\infty), D).$$

对于 $T > 0$，由 $\mathbb{Q}_\kappa^T(E) = \mathbb{P}[(X^x(t))_{t\in[0,T]} \in E]$ 给出的、定义在 $C_x([0,T],\ D)$ 上的概率测度族 $(\mathbb{Q}_\kappa^T)_{\kappa>0}$，当 $\kappa \to 0+$ 时满足大偏差原理，其良好速率函数由泛函 I_T: $C_x([0,T],\ D) \to [0,+\infty]$ 给出，见 [1, 定理 1.8]。

定理 5.4。 概率测度族$(\mathbb{Q}_\kappa)_{\kappa>0}$定义在 $C_x([0,+\infty)\ D)$ 上，赋予局部一致收敛拓扑后，满足大偏差原理，其良好速率函数为 I: $C_x([0,+\infty)\ D) \to [0,+\infty]$。

证明。对于 $T > 0$，令 $C_x([0,T],D)$ 表示从 $x \in D$ 开始的连续 D 值函数空间，并赋予一致收敛拓扑。对于 $T' \geq T$，令 $\pi_{T'},_T$: $C_x([0,T'],D) \to C_x([0,T],D)$ 为限制映射，即 $\pi_{T'},_T((f(t))_{t\in[0,T']}) = (f(t))_{t\in[0,T]}$。映射 $\pi_{T'},_T$ 连续且满射，$\pi_{T},_T$ 是恒等映射，并且对于 $T \leq T' \leq T''$，有 $\pi_{T''},_T = \pi_{T'},_T \circ \pi_{T''},_{T'}$。令 π_T: $C_x([0,+\infty)\ D) \to C_x([0,T],D)$ 为限制映射。则对于 $T \leq T'$，有 $\pi_T = \pi_{T'},_T \circ \pi_{T'}$。局部一致收敛拓扑是使映射$\pi_T$连续的最弱拓扑。集合 $(C_x([0,T],D)\ \pi_{T'},_T)_{T\leq T'}$ 构成一个射影系统。

根据 [2, 定理 4], , $(\mathbb{Q}_\kappa^T)_{\kappa>0}$ 的大偏差原理可延拓至$(\mathbb{Q}_\kappa)_{\kappa>0}$，如果

(1.) 对每个 $T > 0$，族 $\mathbb{Q}_\kappa^T = \mathbb{Q}_\kappa \circ \pi_T^{-1}$ 在 $C_x([0,T],D)$ 上满足大偏差原理，其速率函数为 I_T: $C_x([0,T],D) \to [0,+\infty]$。(2.) 存在一个泛函 I: $C_x([0,+\infty)\ D) \to [0,+\infty]$，它具有紧水平集，并且对所有 $T > 0$ 和 $f^T \in C_x([0,T],D)$ 都满足以下恒等式

$$I_T(f^T) = \inf\{I(f) : f \in \pi_T^{-1}(f^T)\}.$$

第一项是 [1, 定理 1.8] 的内容。第二项由泛函I：$C_x([0,+\infty)\ D) \to [0,+\infty]$ 给出：

$$I(f) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{N} \left|\dot{f}_i(t) + \partial_i V(f(t))\right|^2 dt$$

若 f 绝对连续，则设为 $+\infty$ 。引理 5.3 表明它具有紧水平集。

现在证明所需的恒等式。任意 $f^T \in C_x([0,T],\ D)$ 都可以扩展为 $C_x([0,+\infty)\ D)$ 中的一个函数，方法如下：

$$f(t) = f^T(t)\mathbb{1}_{[0,T)}(t) + \hat{f}^T(t-T)\mathbb{1}_{[T,+\infty)}(t),$$

其中 $\hat{}\ f^T$ 是梯度系统的一个解

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -\nabla V(u(t)), \quad t > 0, \\ u(0) = f^T(T). \end{cases}$$

根据皮亚诺存在定理，梯度系统的解局部存在。全局存在性基于以下两个事实：(1) $t \to V(g(t))$ 单调不增，因为

$$\frac{d}{dt}V(u(t)) = \nabla V(u(t)) \cdot \dot{u}(t) = -|\nabla V(u(t))|^2 \le 0.$$

$V(x) \to +\infty$ 当 $x \to \partial D$ 时，因此，以 $u(0) = x \in D$ 为初值的梯度系统解始终处于 $D_{V(x)} = \{y \in D$ 内：$V(y) \le V(x)\}$，尤其不会到达边界∂D。(2) 梯度 ∇V 在 $D_{V(x)}$ 上有界，因为它连续且沿 $\hat{}e = (1, \ldots, 1)^T$ 方向具有 l 周期性，这意味着存在以下线性增长界

$$|u(t)| \le |x| + \int_0^t |\nabla V(u(s))|ds \le |x| + (\sup_{y \in D_{V(x)}} |\nabla V(y)|)t.$$

按此方式延拓的函数 f 满足 $I(f) = I_T(f^T) + I(\hat{}f^T)$，其中第二项

$$I(\hat{f}^T) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{N} \left|\partial_t \hat{f}_i^T(t) + \partial_i V(\hat{f}^T(t))\right|^2 dt$$

由于 $\partial_t \hat{}f^T = -\nabla V(\hat{}f^T)$ 而消失。因此，我们得到恒等式

$$I_T(f^T) = I(f) = \inf\{I(\tilde{f}) : \tilde{f} \in \pi_T^{-1}(f^T)\}. \qquad \square$$

这就完成了定理 1.14 的证明。

6 流体力学极限

现在我们将研究该过程的一个特定多粒子极限。设 $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_N)$ 为按照定义 1.4 定义的 Γ 上的戴森布朗运动。考虑曲线上的粒子的经验测度

$$\mu_t^{(N)}(dz) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{Z_i(t/N)}(dz),$$

并记

$$\mu_t^{(N)}(f) = \int_\Gamma f(z)\mu_t^{(N)}(dz) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(Z_i(\tfrac{t}{N})).$$

定理 6.1（紧性与流体力学极限）. 假设 $\gamma \in C^2$。设 μ_0 为 Γ 上的概率测度，并假设粒子的初始分布选取使得 $\mu_0^{(N)} \to \mu_0$，当 $N \to +\infty$ 时弱收敛。则族 $\{(\mu_t^{(N)})_{t\geq 0}\}_{N\geq 1}$ 是紧的，且任一子序列极限$\mu = (\mu_t)_{t\geq 0}$ 满足

$$\mu_t(f) = \mu_0(f) + \frac{\beta}{4}\int_0^t \int_\Gamma \int_\Gamma \left(\partial_s f(z)\,\mathrm{Re}\,\frac{\tau(z)}{z-w} - \partial_s f(w)\,\mathrm{Re}\,\frac{\tau(w)}{z-w}\right)\mu_t(dz)\mu_t(dw)dt, \quad (6.1)$$

对在 Γ 的某邻域内光滑的所有函数 f。

证明. 该证明将 [9, 定理4.1]与 [21, 定理3.6]中的论证改编到我们的设定中。设 $\mathcal{P}(\Gamma)$ 为 Γ 上配备弱收敛拓扑的概率测度空间；此外， $\mathcal{P}(\Gamma)$ 可度量化。设 $\mathcal{M}_T = C([0,T], \mathcal{P}(\Gamma))$ 为配备一致收敛拓扑的连续测度值过程 $(\mu_t)_{t\in[0,T]}$ 的空间。在证明过程中， $\mu_\bullet^{(N)}$指族 $(\mu_t^{(N)})_{t\in[0,T]}$。

我们证明，对于任意 $T > 0$，随机族 $\{\mu_\bullet^{(N)}\}_{N\geq 1} \subset \mathcal{M}_T$ 都是紧的。这是由随机变量 $\left\{\mu_\bullet^{(N)}(f)\right\}_{N\geq 1}$ 在 $C([0,T],\ \mathbb{R})$ 中的紧性得出的，其中 $f \in C^2(\mathcal{N}(\Gamma))$ 取任意实值。

记 $E(z) = \frac{1}{2}\log \varrho_{\beta,\ N}(z)$，其中密度 $\varrho_{\beta,\ N}$ 在 (1.9) 中定义。对于任意实值的 $f \in C^2(\mathcal{N}(\Gamma))$，对函数 $f \circ \gamma$ 应用伊藤公式可得

$$f(Z_i(t)) = f(Z_i(0)) + \int_0^t \left(\frac{1}{2}\partial_s^2 f(Z_i(s)) + (\partial_{s_i} E)(\boldsymbol{Z}(s))\partial_s f(Z_i(s))\right)ds + \int_0^t \partial_s f(Z_i(s))dB_i(s).$$

进而，通过变量替换，我们有

$$\mu_t^{(N)}(f) = \mu_0^{(N)}(f) + \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t \left(\frac{1}{2}\partial_s^2 f(Z_i(\tfrac{s}{N})) + (\partial_{s_i}E)(\boldsymbol{Z}(\tfrac{s}{N}))\partial_s f(Z_i(\tfrac{s}{N}))\right)ds + M^{(N)}(t), \quad (6.2)$$

其中

$$M^{(N)}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t \partial_s f(Z_i(\tfrac{s}{N}))dB_i(\tfrac{s}{N})$$

是一个连续鞅，且

$$\mathbb{E}[|M^{(N)}(t)|^2] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t \mathbb{E}[|\partial_s f(Z_i(\tfrac{s}{N}))|^2]ds.$$

对于式 (6.2) 中含有二阶切向导数的项，我们有如下确定性界

$$\left|\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t \frac{1}{2}\partial_s^2 f(Z_i(\tfrac{s}{N}))ds\right| \leq \frac{T}{2N}\max_{z\in\Gamma}\left|\partial_s^2 f(z)\right|. \quad (6.3)$$

式 (6.2) 中含有相互作用势 E 的项可以表示为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}(\partial_{s_i}E)(\boldsymbol{Z})\partial_s f(Z_i)\\
&=\frac{\beta}{2N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\partial_s f(Z_i)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\tau(Z_i)}{Z_i-Z_j}\right\}\\
&=\frac{\beta}{4N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\partial_s f(Z_i)\left(\partial_s f(Z_i)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\tau(Z_i)}{Z_i-Z_j}\right\}-\partial_s f(Z_j)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\tau(Z_j)}{Z_i-Z_j}\right\}\right)\\
&=\frac{\beta}{4}\iint_{(\Gamma\times\Gamma)\setminus\{z=w\}}\left(\partial_s f(z)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\tau(z)}{z-w}\right\}-\partial_s f(w)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\tau(w)}{z-w}\right\}\right)\mu_\cdot^{(N)}(dz)\mu_\cdot^{(N)}(dw).
\end{aligned}$$

对于 z，$w\in\Gamma$ 和 $w\to z$，我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{w\to z}\left(\partial_s f(z)\,\mathrm{Re}\,\frac{\tau(z)}{z-w}-\partial_s f(w)\,\mathrm{Re}\,\frac{\tau(w)}{z-w}\right) && (6.4)\\
&=\lim_{w\to z}\mathrm{Re}\left\{\tau(z)\frac{\partial_s f(z)-\partial_s f(w)}{z-w}\right\}+\lim_{w\to z}\mathrm{Re}\left\{\frac{\tau(z)-\tau(w)}{z-w}\partial_s f(w)\right\} && (6.5)\\
&=\text{实部}\ \{\tau(z)\partial_z\partial_s f(z)\}+\text{实部}\ \{-ik(z)\partial_s f(z)\} && (6.6)\\
&=\partial_s^2 f(z), && (6.7)
\end{aligned}$$

其中，$k(z)$ 是曲线在点 $z\in\Gamma$ 处的曲率。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}(\partial_{s_i}E)(\boldsymbol{Z})\partial_s f(Z_i) && (6.8)\\
&=\frac{\beta}{4}\int_\Gamma\int_\Gamma\left(\partial_s f(z)\,\mathrm{Re}\,\frac{\tau(z)}{z-w}-\partial_s f(w)\,\mathrm{Re}\,\frac{\tau(w)}{z-w}\right)\mu_\cdot^{(N)}(dz)\mu_\cdot^{(N)}(dw) && (6.9)\\
&\qquad\qquad -\frac{\beta}{4N}\int_\Gamma\partial_s^2 f(z)\mu_\cdot^{(N)}(dz) && (6.10)\\
&\le\frac{\beta}{4}\sup_{(z,w)\in\Gamma\times\Gamma}\left|\partial_s f(z)\,\mathrm{Re}\,\frac{\tau(z)}{z-w}-\partial_s f(w)\,\mathrm{Re}\,\frac{\tau(w)}{z-w}\right|+\frac{\beta}{4N}\max_{z\in\Gamma}|\partial_s^2 f(z)|. && (6.11)
\end{aligned}$$

由于 $f\in C^2$ 以及 (6.4)-(6.7)，以下常数均为有限值：

$$\begin{aligned}
C_1(\Gamma,f)&:=\sup_{(z,w)\in\Gamma\times\Gamma}\left|\partial_s f(z)\,\mathrm{Re}\,\frac{\tau(z)}{z-w}-\partial_s f(w)\,\mathrm{Re}\,\frac{\tau(w)}{z-w}\right|,\\
C_2(\Gamma,f)&:=\max_{z\in\Gamma}|\partial_s^2 f(z)|.
\end{aligned}$$

将 (6.2)–(6.8) 合并起来，我们得到

$$|\mu_t^{(N)}(f)-\mu_s^{(N)}(f)|\le(t-s)\frac{\beta C_1(\Gamma,f)}{4}+\frac{T(1+\beta/2)C_2(\Gamma,f)}{2N}+2\max_{0\le t\le T}|M^{(N)}(t)|,$$

and

$$\mathbb{P}\left[\sup_{|t-s|<\delta}|\mu_t^{(N)}(f)-\mu_s^{(N)}(f)|>\eta\right]$$
$$\leq \mathbb{P}\left[\max_{0\leq t\leq T}|M^{(N)}(t)|>\frac{\eta}{2}-\frac{\delta\beta C_1(\Gamma,f)}{8}-\frac{T(1+\beta/2)C_2(\Gamma,f)}{4N}\right].$$

对于每个 $\varepsilon>0$，根据 Doob鞅不等式，我们可以将 $N_0=N_0(\varepsilon)$ 取得足够大，使得对所有 $N\geq N_0$

$$\mathbb{P}\left[\max_{0\leq t\leq T}\left|M^{(N)}(t)\right|\geq\varepsilon\right]\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\left|M^{(N)}(T)\right|^2\right] \tag{6.12}$$
$$=\frac{1}{\varepsilon^2N^2}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left[\int_0^T|\partial_s f(Z_i(\tfrac{s}{N}))|^2ds\right] \tag{6.13}$$
$$\leq\frac{T\max_{z\in\Gamma}|\partial_s f(z)|^2}{\varepsilon^2N} \tag{6.14}$$
$$\leq\varepsilon. \tag{6.15}$$

由此可知，对每个 $\varepsilon,\eta>0$ 存在 $\delta>0$ 和 $N_0\in\mathbb{N}$，使得

$$\mathbb{P}\left[\sup_{|t-s|<\delta}|\mu_t^{(N)}(f)-\mu_s^{(N)}(f)|>\eta\right]\leq\varepsilon\qquad\forall N\geq N_0.$$

根据Arzelà-Ascoli定理，见 [6, 定理7.3]，， $C([0,T],\mathbb{R})$中随机过程的序列 $\{\mu_\bullet^{(N)}(f)\}_{N\geq1}$ 是紧的，因此对任意$T>0$， $\mathcal{M}_T$中的序列 $\{\mu_\bullet^{(N)}\}_{N\geq1}$ 是紧的。

此外，该证明表明

$$\begin{aligned}\mu_t^{(N)}(f)=&\mu_0^{(N)}(f)\\&+\int_0^t\frac{\beta}{4}\int_\Gamma\int_\Gamma\left(\partial_s f(z)\operatorname{Re}\frac{\tau(z)}{z-w}-\partial_s f(w)\operatorname{Re}\frac{\tau(w)}{z-w}\right)\mu_s^{(N)}(dz)\mu_s^{(N)}(dw)ds\\&+R^{(N)}(t),\end{aligned}$$

其中，对任意 $T>0$，当 $N\to+\infty$时，$\sup_{t\in[0,T]}|R^{(N)}(t)|\to0$几乎必然成立。因此，任一子序列极限 $\mu_\bullet$ 是确定性的（因为初始条件是确定性的），并满足(6.1)。

□

注6.2. 设 $\gamma\in C^\infty$。假设对每个 N， $\mu_0^{(N)}$ 是对应于按 Γ上戴森布朗运动的平稳分布(1.9)分布的初始构型的经验测度。则当 $N\to+\infty$时， $\mu_0^{(N)}$ 弱收敛到 Γ上的静电平衡测度 ν_{eq}，即从 ∞看去的 Γ上的调和测度。事实上，这由 [11]的推论1.4推出。根据定理 6.1，若 f 是 Γ某邻域上的光滑函数，则我们因此有

$$\int_\Gamma\int_\Gamma\left(\partial_s f(x)\operatorname{Re}\frac{\tau(x)}{x-y}-\partial_s f(y)\operatorname{Re}\frac{\tau(y)}{x-y}\right)\nu_{\mathrm{eq}}(dz)\nu_{\mathrm{eq}}(dw)=0. \tag{6.16}$$

因此，静电平衡测度 ν_{eq} 是方程 (6.16) 的一个平稳解。我们预期，在适当的正则性假设下，ν_{eq} 是唯一的平稳解。

具有梯度漂移的平稳 FPK 方程

命题 A.1. 设 $\rho \in C^\infty(D)$ 且 $\rho > 0$ 在 D上。如果 $u: D \to \mathbb{R}$ 是定态福克-普朗克-柯尔莫戈罗夫方程的一个非负解

$$div\left(\frac{1}{2}\nabla u - u\frac{\nabla \rho}{2\rho}\right) = 0$$

在 D 中，具有反射边界条件，则存在常数 $c > 0$，使得 $u = c\rho$。

命题 *A.1* 的证明。 1° ρ 上的假设蕴含 $\frac{\nabla \rho}{2\rho} \in C^\infty(D)$。设 u 是 $L^* u = 0$ 的一个解，它可以改写为

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\nabla u - u\frac{\nabla \rho}{2\rho}\right) = 0.$$

由于该方程的系数在 D 中是光滑的，Weyl 正则性定理（见 [8, 第一章], ）表明，解 u 必须是 $C^\infty(D)$。其弱形式写为

$$\int_D \nabla \phi \cdot \rho \nabla\left(\frac{u}{\rho}\right) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(D).$$

设 $f(t) = \frac{-1}{1+t}$，$\psi \in C_0^\infty(D)$ 和 $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$，则我们可以取 $\varphi = f(\frac{u}{\rho})\psi\xi$ 作为测试函数。

$$\int_D \left|\nabla \frac{u}{\rho}\right|^2 f'\left(\frac{u}{\rho}\right)\psi \rho dx = -\int_D f\left(\frac{u}{\rho}\right)\rho \nabla \frac{u}{\rho} \cdot \xi \nabla \psi dx - \int_D f\left(\frac{u}{\rho}\right)\rho \nabla \frac{u}{\rho} \cdot \psi \nabla \xi dx.$$

2°. 设 $\xi = \xi_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 由 $\xi_R(x) = \eta(\frac{x}{R})$ 给出，其中某个 $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$、$0 \le \eta \le 1$ 和 $\eta(x) = 1$ 对于 $|x| < R$ 成立。令 $D_\delta = \{x \in D : \operatorname{dist}(x, \partial D) \ge \delta\}$、$K_{\delta, R'} = D_\delta \cap B_{R'}$，其中 $B_{R'}$ 是一个以原点为中心、半径为 R' 的球。$K_{\delta, R'}$ 是 D 的一个具有 Lipschitz 边界的紧子集。令 $\psi = \psi_\varepsilon = \mathbb{1}_{K_\delta} * \alpha_\varepsilon$ 是示性函数的光滑化。

序列 ψ_ε 逼近示性函数 $\mathbb{1}_{K_{\delta, R'}}$。测度 $-\nabla \psi_\varepsilon dx$ 弱收敛到 $\partial K_{\delta, R'}$ 上的表面测度，其中 n 是指向内部的单位法向量，[16, 第 5] 章：

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int g \cdot \nabla \psi_\varepsilon dx = -\int_{\partial K_{\delta, R'}} g \cdot n dS \quad \forall g \in C_b(U(\partial K_{\delta, R'})),$$

其中 $U(\partial K_{\delta, R'})$ 是 $\partial K_{\delta, R'}$ 的一个开邻域。函数 $f(u/\rho)\ \rho \nabla (u/\rho)\ \xi_R$ 在 D上光滑，因此可得

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_D f\left(\frac{u}{\rho}\right)\rho \nabla \frac{u}{\rho} \cdot \xi \nabla \psi_\varepsilon dx = -\int_{\partial K_{\delta, R'}} f\left(\frac{u}{\rho}\right)\rho n \cdot \nabla\left(\frac{u}{\rho}\right)\xi_R d\sigma.$$

以及等式

$$\int_{K_{\delta, R'}} \left|\nabla \frac{u}{\rho}\right|^2 f\left(\frac{u}{\rho}\right)^2 \rho dx = \int_{\partial K_{\delta, R'}} f\left(\frac{u}{\rho}\right) n \cdot \rho \nabla \frac{u}{\rho} \xi_R d\sigma - \int_{K_{\delta, R'}} f\left(\frac{u}{\rho}\right)\rho \nabla \frac{u}{\rho} \cdot \nabla \xi_R dx.$$

最后一项可估计为

$$\left|\int_{K_{\delta,R'}} f\left(\frac{u}{\rho}\right)\rho\nabla\frac{u}{\rho}\cdot\nabla\xi_R dx\right| \le \frac{||\eta||_\infty}{R}\left(\int_{K_{\delta,R'}} f\left(\frac{u}{\rho}\right)^2\left|\nabla\frac{u}{\rho}\right|^2\rho dx\right)^{1/2}\left(\int_{K_{\delta,R'}}\rho dx\right)^{1/2}.$$

积分 $\int_{K_{\delta,R'}}\rho dx$ 的阶为 R'。取 $R'=cR$，其中 $c>1$，我们可以找到一个常数$C>0$，使得

$$\int_{K_{\delta,R'}} f\left(\frac{u}{\rho}\right)^2\left|\nabla\frac{u}{\rho}\right|^2\rho dx \le \left|\int_{\partial K_{\delta,R'}} f\left(\frac{u}{\rho}\right)n\cdot\rho\nabla\frac{u}{\rho}\xi_R d\sigma\right| + \frac{C}{\sqrt{R}}\left(\int_{K_{\delta,R'}} f\left(\frac{u}{\rho}\right)^2\left|\nabla\frac{u}{\rho}\right|^2\rho dx\right)^{1/2}.$$

因此,

$$\int_{K_{\delta,R'}} f\left(\frac{u}{\rho}\right)^2\left|\nabla\frac{u}{\rho}\right|^2\rho dx \le \frac{1}{4}\left(\frac{C}{\sqrt{R}}+\sqrt{\frac{C^2}{R}+4\left|\int_{\partial K_{\delta,R'}} f\left(\frac{u}{\rho}\right)n\cdot\rho\nabla\frac{u}{\rho}d\sigma\right|}\right)^2.$$

取极限 $R\to\infty$

$$\int_{D_\delta} f\left(\frac{u}{\rho}\right)^2\left|\nabla\frac{u}{\rho}\right|^2\rho dx \le \left|\int_{\partial D_\delta} f\left(\frac{u}{\rho}\right)n\cdot\rho\nabla\frac{u}{\rho}d\sigma\right|.$$

3°. 反射边界条件

$$\lim_{K\uparrow D}\int_{\partial K}\varphi\left(n\cdot\rho\nabla\frac{u}{\rho}\right)d\sigma = 0 \quad \forall\varphi\in C^2(\overline{D})$$

得到

$$\int_D\left|\nabla\frac{u}{\rho}\right|^2\frac{1}{(1+u/\rho)^2}\rho dx = 0.$$

因此， u/ρ在 D 上必为常数。 □

参考文献

[1] O. Abuzaid、V. Healey Olsiewski 和 E. Peltola，《圆上的戴森布朗运动与多径向SLE的大偏差》，2025。arXiv：2407.13762。[2] A. de Acosta，《大偏差理论中的指数紧性与投影系统》，载于*Lucien Le Cam* 纪念文集：概率与统计研究论文集，Springer，1997，第143–156页。[3] S. Albeverio、Y. Kondratiev 和 M. Röckner，《扭曲布朗运动的强费勒性质及其在具有奇异相互作用的有限粒子系统中的应用》，当代数学，第317卷，第15–36页，2003。[4] B. Baur，椭圆边值问题与具有奇异漂移和反射的 *Lp*-强 *Feller* 过程的构造。Springer，2014。

[5] B. Baur、M. Grothaus 和 P. Stilgenbauer，《通过狄利克雷型构造 L^p-强 Feller 过程及其在椭圆扩散中的应用》，*Potential Analysis*，第38卷，第4期，第1233–1258页，2013。[6] P. Billingsley，概率测度的收敛。John Wiley & Sons，2013。[7] V. I. Bogachev、A. I. Kirillov 和 S. V. Shaposhnikov，《具有梯度漂移的扩散过程的不变测度》，*Doklady Mathematics*，第82卷，第2期，第790–793页，2010。[8] V. I. Bogachev、N. V. Krylov、M. Röckner 和 S. V. Shaposhnikov，福克–普朗克–柯尔莫哥洛夫方程。美国数学会，2015。[9] E. Cépa 和 D. Lépingle，《具有静电排斥的扩散粒子》，《概率论及相关领域》，第107卷，第4期，第429–449页，1997。[10] E. Cépa 和 D. Lépingle，《圆上的静电排斥布朗粒子：重新审视酉随机矩阵的 Dyson 模型》，*ESAIM: Probability and Statistics*，第5卷，第203–224页，2001。[11] K. Courteaut 和 K. Johansson，《若尔当曲线上的二维库仑气体配分函数》，*Annales Fennici Mathematici*，第50卷，第1期，第109–144页，2025。[12] K. Courteaut、K. Johansson 和 F. Viklund，《任意温度下若尔当弧上的平面库仑气体》，2025。arXiv：2504.19887。[13] A. Dembo 和 O. Zeitouni，大偏差技术与应用。Springer，2009。[14] E. B. Dynkin，马尔可夫过程：第一卷。Springer，1965。[15] F. J. Dyson，《随机矩阵特征值的布朗运动模型》，*Journalof Mathematical Physics*，第3卷，第6期，第1191–1198页，1962。[16] L. C. Evans 和 R. F. Gariepy，测度论与函数的精细性质，第二版。CRC Press，2025。[17] M. Fukushima、Y. Oshima 和 M. Takeda，狄利克雷型与对称马尔可夫过程。Walter de Gruyter，2011，第19卷。[18] V. Guskov，随机共形几何中的大偏差及相关主题。博士论文，KTH 皇家理工学院，2026。[19] V. Guskov、M. Liu 和 F. Viklund，《若尔当弧上的戴森布朗运动》，2026，准备中。[20] E. Hille，解析函数论：第二卷。波士顿：Ginn and Company，1962。[21] I. Hotta 和 S. Schleißinger，《径向多重 SLE 的极限与 Burgers–Loewner 微分方程》，*Journal of Theoretical Probability*，第34卷，2021。[22] K. Inukai，《相互作用布朗粒子的碰撞或不碰撞问题》，*Proc.Japan Acad.*，A辑，第82卷，2006。[23] K. Johansson，《若尔当曲线上的强 Szegő 定理》，载于*Toeplitz* 算子与随机矩阵：纪念 *Harold Widom*，Springer，2022，第427–461页。[24] K. Johansson 和 F. Viklund，《具有角点的若尔当区域上的库仑气体与 Grunsky 算子》，*Inventiones Mathematicae*，即将出版，2026。

[25] N. V. Krylov 和 M. Röckner，《具有奇异时变漂移项的随机方程强解》，《概率论及相关领域》，第 131 卷，第 154–196 页，2005 年。[26] Z.-M. Ma 和 M. Röckner，《（非对称）狄利克雷型理论导论》。Springer，1992 年。[27] C. Pommerenke，《Fekete 点的分布》，《数学年刊》，第 168 卷，第 1 期，第 11–27 页，1967 年。[28] P. Wiegmann 和 A. Zabrodin，《曲线轮廓上的 Dyson 气体》，《物理学杂志*A*》，第 55 卷，第 16 期，第 165–202 页，2022 年。[29] A. V. Zabrodin，《曲线轮廓上的 Dyson 扩散》，《理论与数学物理》，第 216 卷，第 2 期，第 1104–1109 页，2023 年。