arXiv:2603.05328v1 [math.CV] 5 Mar 2026

¨黎曼球面中闭集的Teichmüller空间

XINLONG DONG、ARSHIYA FARHATH. G与SUDEB MITRA

献给*Yunping Jiang*教授，祝贺其*65*岁生日

Abstract. 黎曼球面中一个闭集的Teichm¨üller空间是一个单连通复 Banach 流形。其复结构由*Lieb*同构得出。本文证明Lieb同构的共形自然性。随后，我们研究这些Teichm¨üller空间的Douady-Earle截面。特别地，我们研究经典Teichm¨üller空间的Douady-Earle截面的实解析性。我们给出单连通复 Banach 流形上极大全纯运动的两个显式例子。作为黎曼曲面的经典Teichm¨üller空间的Douady-Earle截面实解析性的一个应用，我们证明了一个新结果：只要Jordan 曲线上有限个标记点在同一参数空间上全纯地变化，则一族Jordan 曲线便在一个单连通复 Banach 流形上实解析地变化，并且是基点处那一条曲线的拟共形像。

1. Introduction

记号。我们将使用以下记号： $\mathbb{C}$ 表示复^平面， $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 表示黎曼球面， Δ 表示开单位圆盘 $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$。

^对于球面中的每个闭集 E in $\mathbb{C}$，都有一个与之关联的 Teichm¨uller 空间$T(E)$，它是该集合 E全纯运动的通用参数空间。G. S. Lieb 在其 1990年康奈尔大学博士论文中首次研究了这个空间；参见 [19]。我们将在 §3.1 和 §3.2 中给出精确定义。 $T(E)$ 的复解析结构由*Lieb*同构得出；精确定义见 §3.4。本文的定理 A 展示了 Lieb 同构的共形自然性；

2020 数学主题分类。主要分类 32G15、30C62；次要分类 37F31。关键词和短语。全纯运动、Teichm¨uller 空间、共形自然性、Douady-Earle截面、若尔当曲线的全纯族。第一作者和第三作者获得 PSC-CUNY科研资助。

参见 §§3.5、3.6 和 3.7。在 §4 中，我们讨论闭集 E的通用全纯运动。在第5节中，我们讨论经典 Teichm¨uller 空间、乘积 Teichm¨uller 空间以及 Teichm¨uller 空间 $T(E)$ 的*Douady-Earle*截面。特别地，我们利用 [6]中的一些事实，证明经典 Teichm¨uller 空间的 Douady-Earle 截面具有实解析性。这一重要事实在论文 [6]中并未明确阐述。我们还提出了一个未解问题。最后，我们研究 Douady-Earle 截面的实解析性在若干有限维 Teichm¨uller 空间中的两个应用。在 §6 中，我们研究一个有限集 E 在其 Teichm¨uller 空间上的极大全纯运动的具体例子，这就是本文的定理 B（极大全纯运动的定义见 §4）。在 §7 中，我们回顾若干关于 Jordan 曲线全纯族的结果。随后，我们陈述并证明定理 C，它是 Douady-Earle 截面的实解析性在黎曼曲面经典 Teichm¨uller 空间中的一项应用。定理 C 断言：一个 Jordan 曲线族在单连通复 Banach 流形上实解析地变化，并且是基点处那条曲线的拟共形像；前提是每条 Jordan 曲线上的有限个标记点都全纯地依赖于同一个参数空间。

致谢。我们要感谢审稿人细致地审阅本文，并提出了若干极其重要的建议，这些建议极大地帮助我们改进了本文。我们还要感谢 Yunping Jiang教授进行了富有启发性且有帮助的讨论，使我们得以澄清本文中的若干微妙问题。

2. Quasiconformal mappings

定义 1。定义在 $\mathbb{C}$ 中的区域 Ω 上的复值函数 $w = f(z)$，如果它是 Ω 到其像的保向同胚，且其复分布导数

$$w_z = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \text{ and } w_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)$$

是勒贝格可测且局部平方可积的函数，并且在 Ω 中几乎处处满足不等式 $|w_z| \leq k|w_z|$ ，其中某个实数 k 满足 $0 \leq k < 1$。

如果 $w = f(z)$ 是定义在区域 Ω 上的拟共形映射，那么已知函数 w_z 在 Ω 上几乎处处非零。

因此，函数

$$\mu_f = \frac{w_{\overline{z}}}{w_z}$$

是 Ω 上定义良好的 L^∞ 函数，称为 f 的复伸缩率或贝尔特拉米系数。每个贝尔特拉米系数的 L^∞ 范数都小于一。

正数

$$K(f) = \frac{1 + \|\mu_f\|_\infty}{1 - \|\mu_f\|_\infty}$$

称为 f 的伸缩率。如果 f 是拟共形映射，且 f 是拟共形映射，并且 $K(f) \leq K$，则称 f 为 K-拟共形的。

^如果一个 $\mathbb{C}$ 同胚固定点 0、1 和 ∞，我们就称它是标准化的。

令 $M(\mathbb{C})$ 表示复巴拿赫空间$L^\infty(\mathbb{C})$的开单位球。 $M(\mathbb{C})$的基点是零函数。对于每个 $\mu \in M(\mathbb{C})$，存在唯一一个标准化的拟共形同胚^映射，它将 $\mathbb{C}$ 映到自身，且其贝尔特拉米系数为 μ；我们将这个^拟共形映射记为 w^μ。此外，对于每个固定的 $z \in \mathbb{C}$，从 $M(\mathbb{C})$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $\mu \mapsto w^\mu(z)$ 是全纯的；参见 [1] 和 [2]。

3. Conformal naturality of Lieb isomorphism

^**3.1. 闭集的¨黎曼球面上的 Teichm** $\mathbb{C}$。 闭集¨的 Teichmüller 空间^，记作 E，在研究该集合的全纯运动 E时有重要应用。本节研究***Lieb***同构的共形自然性；参见**定理 A**。

^设 E 为黎曼球面 $\mathbb{C}$上的一个闭集，其中 0、1 和∞ 属于 E。

定义 2。 若两个黎曼球面上的正规化拟共形自映射 f 和 g^ $\mathbb{C}$ 满足 $f^{-1} \circ g$相对于 E同伦于恒等映射，则称它们是 E-等价的。$Teichm¨$ ***üller*** 空间 $T(E)$ 是黎曼球面 $\mathbb{C}$上所有正规化拟共形自映射^的 E-等价类的集合。

读者应注意，我们所说的“$f^{-1} \circ g$ 与恒等映射在 E 上同伦”，是指在同伦的每个阶段， $f^{-1} \circ g$都将集合E 逐点保持不动。

$T(E)$ 的基点是恒等映射的 E-等价类。

3.2. $T(E)$ 作为复流形。 设 $M(\mathbb{C})$ 为复巴拿赫空间 $L^\infty(\mathbb{C})$ 的开单位球。$M(\mathbb{C})$ 中的每个 μ 都是 $\mathbb{C}$ 到自身的唯一标准化拟共形映射 w^μ 的贝尔特拉米系数。$M(\mathbb{C})$ 的基点是零函数。

我们定义商映射 P_E: $M(\mathbb{C}) \to T(E)$，令 $P_E(\mu)$ 等于 w^μ 的 E-等价类，记作 $[w^\mu]_E$。显然，P_E将 $M(\mathbb{C})$ 的基点映射到 $T(E)$ 的基点。

在其博士论文（[19]）中，G. Lieb 证明了 $T(E)$ 是一个复巴拿赫流形，并且投影映射 P_E: $M(\mathbb{C}) \to T(E)$ 是全纯分裂淹没映射。更多详情请参见 §3.4。

3.3. Teichmüller 闭集上的 Teichmüller 度量 $T(E)$。令 E 和 E 为 $\mathbb{C}$ 中的两个闭集，使得 0、1 和 ∞ 同时属于 E 和 E。令 g 为一个莫比乌斯变换，使得 $g(E) = E$。令 $S = \mathbb{C} \setminus E$ 和 $S = \mathbb{C} \setminus E$。因此我们有 $g(S) = S$。

令 $\{S_i\}$ 为 S 的连通分支，$\{S_i\}$ 为 S的连通分支。映射 g 诱导出一个双全纯映射

$$F_g : T(E) \to T(\widetilde{E})$$

如下:

$$F_g([w^\mu]_E) = [\widehat{g} \circ w^\mu \circ g^{-1}]_{\widetilde{E}} \qquad \text{for } \mu \in M(\mathbb{C})$$

其中，$\widehat{g}$ 是唯一的 Möbius 变换，使得 $\widehat{g} \circ w^\mu \circ g^{-1}$固定 0、1 和 ∞。

根据 [9], 第2.2节，存在一个双射 $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得$g(S_i) = S_{\alpha(i)}$ 对每个 $i \in \mathbb{N}$都成立。Möbius 变换 g 诱导出一个双全纯映射

$$(\rho_g)_i : Teich(S_i) \to Teich(\widetilde{S}_{\alpha(i)})$$

使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} M(S_i) & \xrightarrow{(\sigma_g)_i} & M(\widetilde{S}_{\alpha(i)}) \\ \downarrow \Phi_i & & \downarrow \widetilde{\Phi}_{\alpha(i)} \\ Teich(S_i) & \xrightarrow{(\rho_g)_i} & Teich(\widetilde{S}_{\alpha(i)}) \end{array}$$

这里，$(\rho_g)_i([w]) = [w \circ g^{-1}]$，其中 $[w]$ 是定义在 S_i 上的拟共形映射 w 的 Teichmüller 等价类，而 $[w \circ g^{-1}]$ 是定义在 $S_{\alpha(i)}$上的拟共形映射 $w \circ g^{-1}$ 的 Teichmüller 等价类。（映射 $(\sigma_g)_i$ 将 w的贝尔特拉米系数映射为 $w \circ g^{-1}$的贝尔特拉米系数。）

~由 g 诱导的双全纯映射 ρ_g： $Teich(S) \to Teich(S)$由下式定义：

$$\rho_g(x) = \{(\rho_g)_i(x_i)\} \qquad \text{for all } x = \{x_i\} \in Teich(S) \text{ and } i \in \mathbb{N}.$$

~我们还有标准映射 g_*: $M(E) \to M(E)$, 定义如下：

$$g_*(\mu) = \nu \qquad \text{where } \mu = (\nu \circ g)\frac{\bar{g'}}{g'}.$$

参见 [6]中的公式（6.5）。

根据我们在 §3.4 中的讨论，有以下*Lieb*映射：

~ ~ ~ ~$\mathcal{L}$: $T(E) \to Teich(E^c) \times M(E)$, 以及 $\mathcal{L}$: $T(E) \to Teich(E^c) \times M(E)$。现在我们可以陈述本文的第一个主要定理。

定理 A。以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} T(E) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & Teich(E^c) \times M(E) \\ \downarrow F_g & & \downarrow (\rho_g \times g_*) \\ T(\widetilde{E}) & \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{L}}} & Teich(\widetilde{E}^c) \times M(\widetilde{E}) \end{array}$$

^3.4. **Lieb同构**。我们假设 E 是 $\mathbb{C}$ 中的一个闭集, ^且其补集 $E^c = \mathbb{C} \setminus E$ 非空。设 $\{S_n\}$ 为 E^c 的连通分支。每个 S_n 都是双曲黎曼曲面；用 $Teich(S_n)$ 表示其 Teichmüller空间。如果连通分支的数目有限，则按定义， $Teich(E^c)$ 是空间 $Teich(S_n)$ 的笛卡尔积。如果连通分支有无限多个，我们定义乘积 ***Teichm¨uller*** 空间 $Teich(E^c)$ 如下。

对于每个 $n \geq 1$, 令 0_n 为 Teichm¨uller 空间$Teich(S_n)$ 的基点，并令 d_n为 $Teich(S_n)$ 上的 Teichm¨uller 度量。对每个 $n \geq 1$, 以 $M(S_n)$ 表示复巴拿赫空间 $L^\infty(S_n)$ 的开单位球。根据定义，积 ***Teichm¨uller*** 空间 $Teich(E^c)$ 是由满足以下条件的序列 $t = \{t_n\}_{n=1}^\infty$ 构成的集合：对每个 $n \geq 1$, t_n 属于 $Teich(S_n)$, 并且

$$\sup\{d_n(0_n, t_n) : n \geq 1\} < \infty. \tag{3.1}$$

$Teich(E^c)$ 的基点是序列 $0 = \{0_n\}$, 其第 n 项为 $Teich(S_n)$ 的基点。

令 $L^\infty(E^c)$为由满足以下条件的序列 $\mu = \{\mu_n\}$构成的复巴拿赫空间：对每个 $n \geq 1$, μ_n 属于 $L^\infty(S_n)$, 且范数 $\|\mu\|_\infty$ =sup$\{\|\mu_n\|_\infty$: $n \geq 1\}$ 有限。令 $M(E^c)$ 为 $L^\infty(E^c)$ 的开单位球。注意，若 μ 属于 $M(E^c)$, 则对所有 $n \geq 1$, μ_n 都属于 $M(S_n)$（但反过来不成立）。

对每个 $n \geq 1$，令 Φ_n 为从 $M(S_n)$到$Teich(S_n)$的标准投影；关于经典特希米勒空间的标准事实，参见 [15] 或 [22] 。对于 $M(E^c)$中的 μ，令 $\Phi(\mu)$为序列 $\{\Phi_n(\mu_n)\}$。容易看出，$\Phi(\mu)$属于 $Teich(E^c)$，且映射 Φ 是满射。我们称 Φ 为 $M(E^c)$到 $Teich(E^c)$的标准投影 。文献 [19]证明了 $Teich(E^c)$是一个复巴拿赫流形，且映射 Φ 是全纯分裂淹没映射（另见 [12]）。

设 $M(E)$ 为 $L^\infty(E)$ 中的开单位球。乘积 $Teich(E^c)\times M(E)$ 是一个复巴拿赫流形。（如果 E 的面积为零，则 $M(E)$ 只包含一个点，此时 $Teich(E^c) \times M(E)$ 与$Teich(E^c)$ 同构。）

对于 $L^\infty(\mathbb{C})$ 中的 μ，令 $\mu|E^c$ 和 $\mu|E$ 分别为 μ 在 E^c~和 E 上的限制。我们用公式定义从 $M(\mathbb{C})$ 到$Teich(E^c) \times M(E)$ 的投影映射 P_E：

$$\widetilde{P}_E(\mu) = (\Phi(\mu|E^c), \mu|E) \qquad \text{for all } \mu \in M(\mathbb{C}).$$

命题 1.（*Lieb*同构定理。）对于所有 μ 和 ν，只要~ ~$M(\mathbb{C})$，我们有 $P_E(\mu) = P_E(\nu)$ 当且仅当 $P_E(\mu) = P_E(\nu)$。

完整证明见 [12] 第7.9节。

定义3。由命题 1 可知，存在定义良好的~双射 $\mathcal{L}$: $T(E) \to Teich(E^c) \times M(E)$，使得 $\mathcal{L} \circ P_E = P_E$，且 $T(E)$ 具有唯一的复流形结构，使得 P_E 是全纯分裂淹没映射。我们称双全纯映射 $\mathcal{L}$为*Lieb*同构。

~3.5. **定理 A 的陈述**。设 E 和 E 是

^ ~$\mathbb{C}$ 中的两个闭集，使得 0、1 和 ∞ 同时属于 E 和 E。设 g 是一个 M¨obius~ ^ ~ ^ ~变换，使得 $g(E) = E$。设 $S = \mathbb{C} \setminus E$和 $S = \mathbb{C} \setminus E$。因此~我们有 $g(S) = S$。

~令 $\{S_i\}$ 为 S 的连通分支，$\{S_i\}$ 为 S的连通分支。映射 g 诱导出一个双全纯映射

$$F_g : T(E) \to T(\widetilde{E})$$

如下：

$$F_g([w^\mu]_E) = [\widehat{g} \circ w^\mu \circ g^{-1}]_{\widetilde{E}} \qquad \text{for } \mu \in M(\mathbb{C})$$

其中，$\widehat{g}$ 是唯一的 Möbius 变换，使得 $\widehat{g} \circ w^\mu \circ g^{-1}$固定 0、1 和 ∞。

根据 [9], 第2.2节，存在一个双射 $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得~$g(S_i) = S_{\alpha(i)}$ 对每个 $i \in \mathbb{N}$都成立。莫比乌斯变换 g 诱导出一个

双全纯映射

$$(\rho_g)_i : Teich(S_i) \to Teich(\widetilde{S}_{\alpha(i)})$$

使下图交换:

$$\begin{array}{ccc} M(S_i) & \xrightarrow{(\sigma_g)_i} & M(\widetilde{S}_{\alpha(i)}) \\ \downarrow \Phi_i & & \downarrow \widetilde{\Phi}_{\alpha(i)} \\ Teich(S_i) & \xrightarrow{(\rho_g)_i} & Teich(\widetilde{S}_{\alpha(i)}) \end{array}$$

其中，$(\rho_g)_i([w]) = [w \circ g^{-1}]$，$[w]$ 是拟共形映射 w 的 Teichmüller等价类，其区域为 S_i；$[w \circ g^{-1}]$ 是拟共形映射 $w \circ g^{-1}$ 的 Teichmüller等价类，其~区域为 $S_{\alpha(i)}$。（并且，映射 $(\sigma_g)_i$ 将 w 的贝尔特拉米系数映射为 $w \circ g^{-1}$的贝尔特拉米系数。）

~由 g 诱导的双全纯映射 ρ_g： $Teich(S) \to Teich(S)$ 定义如下:

$$\rho_g(x) = \{(\rho_g)_i(x_i)\} \qquad \text{for all } x = \{x_i\} \in Teich(S) \text{ and } i \in \mathbb{N}.$$

~我们还有标准映射 g_*： $M(E) \to M(E)$，其定义为

$$g_*(\mu) = \nu \qquad \text{where } \mu = (\nu \circ g)\frac{\bar{g'}}{g'}.$$

参见 [6]中的公式（6.5）。

根据我们在 §3.4 中的讨论，可得以下 *Lieb*映射:

$$\mathcal{L} : T(E) \to Teich(E^c) \times M(E^c)$$

and

$$\widetilde{\mathcal{L}} : T(\widetilde{E}) \to Teich(\widetilde{E}^c) \times M(\widetilde{E}).$$

现在我们可以陈述本文的第一个主要定理。

定理 A.下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} T(E) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & Teich(E^c) \times M(E) \\ \downarrow F_g & & \downarrow (\rho_g \times g_*) \\ T(\widetilde{E}) & \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{L}}} & Teich(\widetilde{E}^c) \times M(\widetilde{E}) \end{array}$$

3.6. 定理 A 的证明。 对于 $\mu \in M(\mathbb{C})$，令 $[w^\mu] \in T(E)$。我们有~双全纯映射 $F_g: T(E) \to T(E)$，其定义如下：

$$F_g([w^\mu]_E) = [\widehat{g} \circ w^\mu \circ g^{-1}]_{\widetilde{E}}$$

其中 $\widehat{g}$ 是唯一的M¨obius变换，使得 $\widehat{g} \circ w^\mu \circ g^{-1}$固定0、1和 ∞。令 $w^\nu := \widehat{g} \circ w^\mu \circ g^{-1}$。我们有

$$F_g([w^\mu]_E) = [w^\nu]_{\widetilde{E}} \qquad \text{where } \mu = (\nu \circ g)\frac{\bar{g'}}{g'}.$$

~ ~因此，$g_*(\mu|E) = \nu|E$且 $g_*: M(E) \to M(E)$。

~接下来，由§3.5回顾可知，对每个 $i \in \mathbb{N}$，$g(S_i) = S_{\alpha(i)}$。对每个 $i \in \mathbb{N}$，令 $\mu|S_i = \mu_i$。由下面的图

$$\begin{array}{ccc} M(S_i) & \xrightarrow{(\sigma_g)_i} & M(\widetilde{S}_{\alpha(i)}) \\ \downarrow \Phi_i & & \downarrow \widetilde{\Phi}_{\alpha(i)} \\ Teich(S_i) & \xrightarrow{(\rho_g)_i} & Teich(\widetilde{S}_{\alpha(i)}) \end{array}$$

~显然，对每个 $i \in \mathbb{N}$，$(\rho_g)_i(\Phi_i(\mu_i)) = \Phi_{\alpha(i)}(\nu_{\alpha(i)})$。

Now,

$$\widetilde{\mathcal{L}}\big(F_g([w^\mu]_E\big) = \widetilde{\mathcal{L}}([w^\nu]_{\widetilde{E}}) = \big(\widetilde{\Phi}(\nu|\widetilde{S}), \nu|\widetilde{E}\big) = \big(\{\widetilde{\Phi}_{\alpha(i)}(\nu_{\alpha(i)})\}, \nu|\widetilde{E}\big).$$

Also,

$$(\rho_g \circ \mathcal{L})\big([w^\mu]_E\big) = \rho_g\big(\Phi(\mu|S)\big) = \rho_g\big(\{\Phi_i(\mu_i)\}\big) = \{(\rho_g)_i\big(\Phi_i(\mu_i)\big)\} = \{\widetilde{\Phi}_{\alpha(i)}(\nu_{\alpha(i)})\}.$$

最后，

$$\Big((\rho_g \times g_*) \circ \mathcal{L}\Big)\big([w^\mu]_E\big) = \Big(\{\widetilde{\Phi}_{\alpha(i)}(\nu_{\alpha(i)})\}, g_*(\mu|E)\Big) = \big(\{\widetilde{\Phi}_{\alpha(i)}(\nu_{\alpha(i)})\}, \nu|\widetilde{E}\big).$$

This proves Theorem A. □

3.7. () 的共形自然性 $T(E)$。设 G 是 PSL(2，$\mathbb{C}$) 的一个子群，并假设 E 在 G 作用下保持不变（这意味着，对于所有 $g \in G$，$g(E) = E$）。我们定义如下：

$$\text{(i) } T(E)^G = \{\tau \in T(E) : F_g(\tau) = \tau\},$$

$$\text{(ii) } Teich(S)^G = \{x \in Teich(S) : \rho_g(x) = x\},$$

and

$$\text{(iii) } M(E)^G = \{\mu|E : (\mu \circ g)\frac{\bar{g'}}{g'} = \mu\}.$$

于是我们得到如下

推论1. *Lieb*同构是共形自然的，这意味着，

$$T(E)^G = Teich(S)^G \times M(E)^G.$$

证明。该推论容易由定理 A 通过取 $E = \sim E$ 得出。□

4. Universal holomorphic motion of a closed set.

定义 4。设 $E \subset \mathbb{C}$，且 X 是一个带基点 x_0的连通豪斯多夫空间。X 上的运动 E 是一个映射 $\phi : X \times E \to \mathbb{C}$，满足

(i) $\phi(x_0, z) = z$，对所有 $z \in E$均成立，且

(ii) 对所有 $x \in X$，映射 $\phi(x, \cdot) : E \to \mathbb{C}$ 是单射。

我们称 X 为运动 ϕ的参数空间。

Define $\phi_x(\cdot) = \phi(x, \cdot)$ and $\phi^z(\cdot) = \phi(\cdot, z)$.

我们始终假设 0、1 和 ∞ 属于 E，且运动 ϕ是规范化的；也就是说，对于每个属于 X的 x，映射$\phi_x(\cdot)$的固定点均为 0、1 和 ∞。经过适当的坐标变换总能做到这一点：在 E中选取三个互不相同的点 a、b、c。对于每个 $x \in X$，令 M_x 为将 $\phi_x(a)$、$\sim\phi_x(b)$、$\phi_x(c)$分别映射到 0、1、∞ 的 Möbius 变换。令 $E = M_{x_0}(E)$。那么映射 $\phi : X \times E \to \mathbb{C}$ 定义为

$$\widehat{\phi}(x, M_{x_0}(z)) = M_x(\phi(x, z))$$

是一个标准化运动。

若 E是 E和 ϕ的真子集，且 $X \times E \to \mathbb{C}$和 $\phi : X \times E \to \mathbb{C}$是两个运动，则称 ϕ 扩张 ϕ，如果对所有 $(x, z) \in X \times E$，都有 $\phi(x, z) = \phi(x, z)$。

定义 5。设 V是一个以$\sim x_0$为基点的连通复流形。E 在 V上的全纯运动 是指一个运动 $\phi : V \times E \to \mathbb{C}$，它将$\sim E$ 定义在 V 上，并且对每个 $z \in E$，映射 $\phi^z(\cdot) : V \to \mathbb{C}$ 都是全纯的。

如引言中所述，全纯运动最初是在参数空间 Δ上研究的，其动机是研究有理映射的动力学。令 $V = \Delta$。我们可以将 Δ 视为“时间参数”的空间。

例。固定 $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ 使得 $\|\mu\|_\infty = 1$。对于每个 $t \text{in} \sim \Delta$，令 $\phi(t, z) = w^{t\mu}(z)$ 对所有 $z \in \mathbb{C}$ 成立，其中 $w^{t\mu}$ 是 $\mathbb{C}$ 的（归一化）拟共形自映射，固定点 0、1 和 ∞。于是，根据 [2]，映射

$$\phi(t, z) = w^{t\mu}(z)$$

是 $\mathbb{C}$ 在 Δ 上的全纯运动。另请参见 [1] 中 Earle 和 Kra 所著章节“A Supplement to Ahlfors's Lectures”的 §1.3。

Ma˜n´e、Sad 和 Sullivan 的经典 λ-引理 [21]指出了全纯运动的三个令人惊讶的性质。

定理 λ-引理。设 ϕ: $\Delta \times E \to \mathbb{C}$是一个全纯运动。则 (i) ϕ 是从 $\Delta \times E$ 到 $\mathbb{C}$的连续映射；(ii) 映射 $z \mapsto \phi(\lambda, z)$ 是球面上的一个拟共形映射在 E 上的限制。(iii) ϕ 可扩张为定义在 E的闭包 E 上的全纯运动 ϕ 。 —

Slodkowski 扩张定理。设 ϕ : $\Delta \times E \to \mathbb{C}$ 是一个全纯运动。则存在一个全纯运动 ϕ :$\Delta \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, 使得 ϕ 扩张为 ϕ。

完整证明见论文 [4], [5], [13], [24], 和专著 [15] 。论文 [18] 使用Teichm¨uller空间给出了另一种证明。

Slodkowski定理通常不适用于高维参数空间。根据定义，若不存在全纯运动 ϕ: $B \times E \to \mathbb{C}$ 使得 E 是 E 的真子集，且 ϕ 延拓 ϕ，则称全纯运动 ϕ: $B \times E \to \mathbb{C}$ 为极大的。以下例子见 [12]。

例子。令 B 为区域

$$B = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 : |e^{i\alpha}| + |\beta| < 1\}$$

其基点为（i，0），并令

$$E = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| \geq 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq e^{-1}\}.$$

那么，$\phi((\alpha, \beta)\ z) = z$当$(\alpha, \beta) \in B$，$z \in E$时，且 $|z| \geq 1$，并且

$$\phi((\alpha, \beta), z) = e^{i\alpha}ez + \beta, \text{ if } (\alpha, \beta) \in B, z \in E, \text{ and } |z| \leq e^{-1}$$

定义了一个极大全纯运动 ϕ: $B \times E \to \mathbb{C}$。

参见 [12]中的定理 8.1。

定理 1. 设 E_0 是 $\mathbb{C}$的任意子集，不一定是闭集；按照惯例，我们假设 0、1和 ∞ 属于 E_0。设 E 是 E_0的闭包。设 ϕ: $V \times E_0 \to \mathbb{C}$ 是一个全纯运动，其中 V 是带有一个基点的连通复*Banach*流形。存在一个全纯运动 ϕ: $V \times E \to \mathbb{C}$，它扩展了 ϕ。

参见 [16]中的定理 2。对于任意连通复Banach流形，这是一个广义的 λ-引理。

注记 1. 此后，在本文中，我们始终假设 E 是$\widehat{\ }$ $\mathbb{C}$中的一个闭集，并且如通常所设，0、1 和 ∞属于 E，且对每个 $x \in V$，它们都是 $\phi_x(\cdot)$的不动点。

4.1. **的泛全纯运动.** 在 T上以 E 为参数的泛全纯运动 Ψ_E (E) 定义如下:

$$\Psi_E(P_E(\mu), z) = w^\mu(z) \text{ for } \mu \in M(\mathbb{C}) \text{ and } z \in E.$$

上述 P_E 的定义保证了 Ψ_E 定义良好。它是一个全纯运动，因为 P_E 是一个全纯分裂淹没映射，并且对于每个固定的 $z \in \widehat{\ }\mathbb{C}$ ，$\widehat{\ }$ $\mu \mapsto w^\mu(z)$ 都是从 $M(\mathbb{C})$ 到 $\mathbb{C}$ 的全纯映射（见文献 [2] 中的定理 11）。这个全纯运动具有以下“泛性”:

$\widehat{\ }$**定理 2。** 设 ϕ： $V \times E \to \mathbb{C}$ 是一个全纯运动，其中 V 是一个带基点 x_0 的单连通复 *Banach* 流形。那么，存在唯一的保基点全纯映射 f： $V \to T(E)$，使得 $f^*(\Psi_E) = \phi$；这意味着，对于所有 $(x, z) \in V \times E$，都有 $\phi(x, z) = \Psi_E(f(x)\ z)$。

证明见 [20] 中的 §14。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$**4.2. 当** $E = \mathbb{C}$ **时。** 当 $E = \mathbb{C}$ 时，空间 $T(\mathbb{C})$ 由 $\mathbb{C}$ 的所有正规化拟共形自映射$\widehat{\ }$组成，而映射

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }\ \widehat{\ }P_{\widehat{\mathbb{C}}}$从 $M(\mathbb{C})$ 到 $T(\mathbb{C})$ 是双射。我们利用它将 $T(\mathbb{C})$ 与 $M(\mathbb{C})$ 双全纯地等同起来。通过 $P_{\widehat{\mathbb{C}}}$ 将 $\Psi_{\widehat{\mathbb{C}}}$ 拉回到 $M(\mathbb{C})$ 所得的拉回 $\Psi_{\widehat{\mathbb{C}}}$ 满足

$$\widetilde{\Psi}_{\widehat{\mathbb{C}}}(\mu, z) = \Psi_{\widehat{\mathbb{C}}}(P_{\widehat{\mathbb{C}}}(\mu), z) = w^\mu(z), \qquad (\mu, z) \in M(\mathbb{C}) \times \widehat{\mathbb{C}}.$$

$\widehat{\ }$因此， $\mathbb{C}$ 的泛全纯运动变为映射

$$\Psi_{\widehat{\mathbb{C}}}(\mu, z) = w^\mu(z) \tag{4.1}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$从 $M(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$特别地，若 ϕ： $V \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个全纯运动，且 V 是一个单连通复 Banach 流形，则定理 2 给出唯一的保基点全纯映射 f： $V \to M(\mathbb{C})$，使得

$$\phi(x, z) = \Psi_{\widehat{\mathbb{C}}}(f(x), z) = w^{f(x)}(z)$$

对于所有的 x 属于 $V\widehat{\ }$且 z 属于 $\mathbb{C}$。换言之，对于每个 x 属于 V， $f(x)$ 都是拟共形映射 $\phi_x(z)$ 的贝尔特拉米系数。

注记 2。 映射 $f: V \to M(\mathbb{C})$ 将 x 属于 V 映射为 $\phi_x(z)$ 的贝尔特拉米系数。对于每个全纯运动 $\phi: V \times \prec \quad \prec \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，该映射都有定义。根据定理 2，当 V 是单连通复巴拿赫流形时，该映射是全纯的。由此可直接推出，对于每个连通复流形 V， f 都是全纯的。参见 [7] 中的定理4。关于 $V = \Delta$，参见 [3] 中的定理 2。

5. Douady-Earle section

5.1. 背景。 我们简要介绍经典 Teich-m¨uller 空间中的 ***Douady-Earle*截面**（有时称为**重心截面**）；详情请参见 [6] 。

令 $M(\Delta)$ 表示复巴拿赫空间$L^\infty(\Delta, \mathbb{C})$ 的开单位球。对于每个 $\mu \in M(\Delta)$, 存在唯一的拟共形映射 f^μ ，它将 Δ 映到自身，并固定点 1、 i 和 -1。令 φ^μ 表示 f^μ 在单位圆 S^1 上的限制。令 $ex(\varphi^\mu) : \Delta \to \Delta$ 表示 φ^μ 的 Douady-Earle 延拓。根据 [6]中的定理 2， $ex(\varphi^\mu)$ 是拟共形的，因此其复伸缩率属于 $M(\Delta)$。这确定了一个映射 $\sigma: M(\Delta) \to M(\Delta)$，它将 μ 映到 $ex(\varphi^\mu)$ 的贝尔特拉米系数；更确切地说，我们有：

$$\sigma : \mu \mapsto ex(\varphi^\mu)_{\overline{z}}/ex(\varphi^\mu)_z \tag{5.1}$$

从 $M(\Delta)$ 到 $M(\Delta)$。详见 [6] 的 §6。在 [6] 的 §6 中证明了映射 σ 是共形自然的。

设 G 为 Δ 的全体共形自同构所成的群。设 Γ 为一个福克斯群（ G 的离散子群）。设 $M(\Gamma)$ 为 $M(\Delta)$ 中的 Γ-不变元， $Teich(\Gamma)$ 为 Γ 的 Teichm¨uller 空间，并且 $\pi: M(\Gamma) \to Teich(\Gamma)$ 为通常投影。以下定义是标准的；详见 [6] 的 §7。

$$M(\Gamma) = \{\mu \in M(\mathbb{C}) : \mu = (\mu \circ g)\frac{\overline{g}'}{g'}\}.$$

Teichm¨uller 空间 $Teich(\Gamma)$ 定义为

$$Teich(\Gamma) = \{\varphi \in \mathcal{H}(S^1); \varphi = \varphi^\mu \text{ for some } \mu \in M(\Gamma)\}.$$

此处， $\mathcal{H}(S^1)$ 表示所有同胚 $\varphi: S^1 \to S^1$ 的集合。设$\pi: M(\Gamma) \to Teich(\Gamma)$ 由 $\pi(\mu) = \varphi^\mu$ 给出。

在 [6] 的引理 5 中证明了：

(i) σ 将 $M(\Gamma)$映射到自身，(ii) 存在一个连续映射 $s: Teich(\Gamma) \to M(\Gamma)$，使得$s \circ \pi = \sigma: M(\Gamma) \to M(\Gamma)$，并且 (iii) $\pi \circ \sigma = \pi: M(\Gamma) \to Teich(\Gamma)$。

我们将连续映射 s: $Teich$(Γ) $\to M$(Γ) 称为 π 的 Teichm¨uller 空间 $Teich$(Γ) 的 ***Douady-Earle*截面** 。

5.2. **Douady-Earle截面的实解析性¨空间**。 [6] 中的定理4表明，映射 σ具有一项极其重要的性质：它是实解析的。由于 π： M(Γ) $\to Teich$(Γ)是全纯的分裂下沉映射（这意味着 π 有局部全纯截面），且 σ 是实解析的，因此显然可以从第5.1节的讨论得出，映射 s: $Teich$(Γ) $\to M$(Γ)是实解析的。

注3。***Douady-Earle*截面**一词最早用于论文[17]。论文 [6]并未明确说明Douady-Earle截面的实解析性。对于万能Teichmüller空间，文献 [11]证明了其实解析性；参见该文的命题3.9（作者称之为“重心截面”）。为方便读者，也为了使本文自成一体，我们将讨论经典Teichmüller空间的情形。第三作者与Yunping Jiang教授的一篇后续论文将给出更多细节。

设 X 为双曲黎曼曲面，并设 $X = \Delta/\Gamma$ ，其中Γ 是 X的一致化Fuchsian群。对Aut(Δ)中的任意 g ，令Γ$_g = g^{-1}\Gamma g$。设 g_*： M(Γ) $\to M$(Γ$_g$)为由下式定义的诱导映射

$$g_*(\mu) = (\mu \circ g)\frac{\overline{g'}}{g'} \qquad \text{for } \mu \in M(\Gamma).$$

众所周知， g_* 是双全纯的，并且 g_* 诱导一个双全纯映射 $\widehat{g}$： $Teich$(Γ) $\to Teich$(Γ$_g$)。

照例，设 M(X)表示Belt(X)的开单位球，即 X上Beltrami形式的复Banach空间。设 $Teich$(X)表示 X的Teichm¨uller空间，并设 Φ： M(X) $\to Teich$(X)为标准投影。众所周知， Φ 是全纯分裂淹没映射。在Teichm¨uller理论中，标准结论是存在典范双全纯映射 ρ: M(X) $\to M$(Γ)以及 ρ_*： $Teich$(X) $\to Teich$(Γ)；例如，全部细节见 [22] 中第2.1.4节和第2.2.6节，特别是 [8]中的§§3.3、4、7。论文 [8], 基于作者1992年在华威的讲座，以及随后2025年1月在印度Harish-Chandra研究所的讲座，包含详细讨论。

我们有标准投影

$$\pi : M(\Gamma) \to Teich(\Gamma)$$

and

$$\pi_g : M(\Gamma_g) \to Teich(\Gamma_g)$$

（它们是全纯分裂浸没）；令 s_π 表示 π 的 Douady-Earle截面，并令 s_{π_g} 表示 π_g 的 Douady-Earle截面。根据我们在 §5.2 中的讨论，映射 s_π 和 s_{π_g} 都是实解析的。

Douady-Earle截面 $S\colon\ Teich(X) \to M(X)$ 定义如下：$S = \rho^{-1} \circ s_\pi \circ \rho_*$。注意，$\Phi \circ S$是 $Teich(X)$上的恒等映射。

下面的命题表明，Douady-Earle截面 $S : Teich(X) \to M(X)$ 定义良好，这意味着它与覆盖变换无关。

命题2。 $g_* \circ s_\pi = s_{\pi_g} \circ \widehat{g}$。

证明。 我们有如下图表。

$$\begin{array}{ccccc} M(X) & \xrightarrow{\ \rho\ } & M(\Gamma) & \xrightarrow{\ g_*\ } & M(\Gamma_g) \\ \Phi\downarrow\ \uparrow S & & \pi\downarrow\ \uparrow s_\pi & & \pi_g\downarrow\ \uparrow s_{\pi_g} \\ Teich(X) & \xrightarrow[\ \rho_*\ ]{} & Teich(\Gamma) & \xrightarrow[\ \widehat{g}\ ]{} & Teich(\Gamma_g) \end{array}$$

设 $\tau \in Teich(\Gamma)$，其中 $\tau = \pi(\mu)$对于 $\mu \in M(\Gamma)$成立。此外，设 $g_*(\mu) = \widetilde{\mu} \in M(\Gamma_g)$。我们有

$$g_*(s_\pi(\tau)) = g_*(s_\pi(\pi(\mu))) = g_*(\sigma(\mu)).$$

我们还有

$$s_{\pi_g}(\widehat{g}(\tau)) = s_{\pi_g}(\widehat{g}(\pi(\mu))) = s_{\pi_g}(\pi_g(g_*)) = s_{\pi_g}(\pi_g(\widetilde{\mu})) = \sigma(\widetilde{\mu}).$$

最后，由于映射 σ 的共形自然性，我们有

$$g_*(\sigma(\mu)) = (\sigma(\mu) \circ g)\frac{\overline{g}'}{g'} = \sigma((\mu \circ g)\frac{\overline{g}'}{g'}) = \sigma(\widetilde{\mu}).$$

因此，我们得出

$$g_*(s_\pi(\tau)) = s_{\pi_g}(\widehat{g}(\tau)) \qquad \text{for } \tau \in Teich(\Gamma).$$

□

5.3. **用于乘积 Teichm¨uller 空间的 Douady-Earle截面**。 现在我们研究 §3.4 中定义的乘积 Teichm¨uller 空间$Teich(E^c)$ 的 Douady-Earle截面。

命题 3. 存在一个连续保基点映射 $\widehat{s}$，从$Teich(E^c)$到 $M(E^c)$，使得 $\Phi \circ \widehat{s}$是 $Teich(E^c)$上的恒等映射。

证明。设 $\tau \in Teich(E^c)$，其中 $\tau = \Phi(\mu)$ 对于 $\mu \in M(E^c)$ 成立。根据我们在 §3.4 中的讨论，$\tau = \{\tau_n\}$ 其中 $\tau_n = \Phi_n(\mu_n) \in Teich(S_n)$，其中 $\mu_n \in M(S_n)$ 对每个 $n \geq 1$ 都成立。根据引理 5 中的 [6]（以及上述讨论），对于每个 $n \geq 1$，存在一个连续保基点映射 $\widehat{s_n}$，从 $Teich(S_n)$ 到 $M(S_n)$，使得 $\Phi_n \circ \widehat{s_n}$是 $Teich(S_n)$ 上的恒等映射。令 σ_n 表示连续映射 $\widehat{s_n} \circ \Phi_n$，它从$M(S_n)$ 映到自身。

由于 $\tau \in Teich(E^c)$，由 (3.1) 可得，$\sup\{d_n(0_n, \tau_n) : n \geq 1\} < \infty$。令 $\|\mu_n\|_\infty \leq k$ 对所有 $n \geq 1$成立。于是，根据 [6], 中的命题7，存在 $0 \leq c(k) < 1$，其中 $c(k)$ 仅取决于 k，而与 n无关，使得

$$\|\sigma_n(\mu_n)\|_\infty \leq c(k) \text{ for all } n \geq 1.$$

定义 $\sigma(\mu) := \{\sigma_n(\mu_n)\}$。容易验证，$\sigma$ 是从 $M(E^c)$ 到其自身的连续映射（例如，参见 [12]中的命题7.11）。此外，存在唯一且定义良好的映射 $\widehat{s}$，从 $Teich(E^c)$ 到 $M(E^c)$，使得 $\sigma = \widehat{s} \circ \Phi$。由于 σ 连续，且 Φ 是全纯分裂淹没映射，因此 $\widehat{s}$ 连续。容易验证，$\Phi \circ \widehat{s}$是 $Teich(E^c)$ 上的恒等映射。□

定义6. 从 $Teich(E^c)$ 到 $M(E^c)$ 的映射 $\widehat{s}$ 称为乘积 Teichmüller 空间 $Teich(E^c)$ 上的 Φ ***Douady-Earle*截面** 。

5.4. **() 上的 Douady-Earle截面**。最后，我们介绍 §§3.1、3.2 中定义的闭集 $T(E)$ 的 Teichmüller 空间上的 Douady-Earle 截面。

命题4. 存在连续保基点映射 s，从$T(E)$到 $M(\mathbb{C})$，使得 $P_E \circ s$ 是 $T(E)$ 上的恒等映射。

证明。由命题 3，存在连续保基点映射 $\widehat{s}$，从 $Teich(E^c)$ 到 $M(E^c)$，使得 $\Phi \circ \widehat{s}$ 是 $Teich(E^c)$ 上的恒等映射。令 $\widetilde{s}$ 为从 $Teich(E^c) \times M(E)$ 到 $M(\mathbb{C})$ 的映射，使得对于每个属于 $\backsim Teich(E^c) \times M(E)$ 的 (τ, ν)，$\widetilde{s}(\tau, \nu)$ 在 E^c 中等于 $\widehat{s}(\tau)$，并且在 E 中等于 ν。显然，$P_E \circ \widetilde{s}$ 是 $Teich(E^c) \times M(E)$ 上的恒等映射。我们定义 $s = \widetilde{s} \circ \mathcal{L}$，其中 $\mathcal{L}$ 是定义3中给出的从$T(E)$ 到 $Teich(E^c) \times M(E)$ 的双全纯映射。由此可得，s:$T(E) \to M(\mathbb{C})$ 是连续保基点映射，且$P_E \circ s$ 是 $T(E)$ 上的恒等映射。□

定义 7. 从 $T(E)$ 到 $M(\mathbb{C})$ 的映射 s 称为 Teichm¨uller 空间 $T(E)$ 的 P_E 的***Douady- Earle*** **截面** 。

由于 $M(\mathbb{C})$ 是可缩的，我们有如下结论

推论 2. ***Teichmüller*** **空间** $T(E)$ **是可缩的。**

注 4. 令 $t \in T(E)$ 和 $P_E(\mu) = t$ 对 $\mu \in M(\mathbb{C})$。根据命题 1，我们有

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(P_E(\mu)) = \widetilde{P_E}(\mu) = \Big(\Phi(\mu|E^c), \mu|E\Big).$$

令 $\Phi(\mu|E^c)$ 记作 τ。根据命题 3，$s(t) = \widetilde{s}(\mathcal{L}(t))$，在 E^c 上等于 $\widehat{s}(\tau)$，在 E 上等于 μ。根据命题 3，我们有 $\widehat{s}(\tau) = \widehat{s}(\Phi(\mu|E^c)) = \sigma(\mu)$，在 E^c 上成立。因此，对于 $T(E)$ 中的 $t = P_E(\mu)$，$s(t)$ 在 E^c 上等于 $\sigma(\mu)$，在 E 上等于 μ。若 $\|\mu\|_\infty = k$，则 $\|s(t)\|_\infty \leq \max(k, c(k))$，其中 $c(k)$ 仅取决于 k，且 $0 \leq c(k) < 1$。

推论 3. 对于 t 在 $T(E)$中，$\|s(t)\|_\infty$ 的上界为介于0和1之间的一个数，该数仅取决于 $d_{T(E)}(0, t)$。

证明。给定 $t \in T(E)$，选取一个极值元 $\mu \in M(\mathbb{C})$，使得 $P_E(\mu) = t$。于是

$$d_{T(E)}(0, t) = \frac{1}{2} \log K \text{ where } K = \frac{1+k}{1-k} \text{ and } k = \|\mu\|_\infty.$$

由注 4 可知，$\|s(t)\|_\infty \leq \max(c(k)\ k)$。 □

5.5. **()的Douady-Earle截面的共形自然性** $T(E)$。本文不需要讨论 $T(E)$的Douady-Earle截面的共形自然性；不过，简要讨论一下仍有价值。详情见 [17] 中的§3.4。

如§3.7所述，设 G 是一个将E 映到自身的Möbius变换群。对每个 $g \in G$，存在一个双全纯映射 $F_g : T(E) \to T(E)$，其定义如下：对每个 $\mu \in M(\mathbb{C})$，

$$F_g([w^\mu]_E) = [\widehat{g} \circ w^\mu \circ g^{-1}]_E \tag{5.2}$$

其中 $\widehat{g}$ 是唯一一个使 $\widehat{g} \circ w^\mu \circ g^{-1}$固定点0、1和 ∞的Möbius变换。关于 $T(E)$的“几何同构”，参见 [9] 中的注 3.4。

根据定义，对于每个 g in G，F_g 都保持基点。

定义 8. 我们定义 $M(\mathbb{C})^G$ 和 $T(E)^G$ 如下：

$$M(\mathbb{C})^G := \{\mu \in M(\mathbb{C}) : (\mu \circ g)\frac{\bar{g}'}{g'} = \mu \text{ a.e. on } \mathbb{C} \text{ for each } g \in G\}$$

and

$$T(E)^G := \{t \in T(E) : F_g(t) = t \text{ for each } g \in G\}.$$

下一个命题展示了 Douady-Earle 截面的共形自然性 s：$T(E) \to M(\mathbb{C})$。正如我们将看到的，它在全纯运动中有重要应用。

命题5。若 $t \in T(E)^G$，则 $s(t) \in M(\mathbb{C})^G$。

参见 [17]中的命题3.9。

未解问题。 Douady-Earle截面 s：$T(E) \to M(\mathbb{C})$ 是否实解析? 肯定地回答这一问题，再加上 s的共形自然性，将对全纯运动和几何函数论中的一些问题产生若干应用。本文的第三位作者和Yunping Jiang教授目前正在研究这一问题。

6. A MAXIMAL HOLOMORPHIC MOTION

我们从一个一般引理开始。设 E_1 和 E_2 是 $\mathbb{C}$ 中的闭子集，且 E_1 是 E_2的真子集，并且照例，0，1，∞属于 E_1。若 μ属于 $M(\mathbb{C})$，则 w^μ 的 E_2-等价类包含于 w^μ的 E_1-等价类。因此，存在一个定义良好的"遗忘映射"$p_{E_2,\ E_1}$，从 $T(E_2)$映射到 $T(E_1)$，使得$P_{E_1} = p_{E_2,\ E_1} \circ P_{E_2}$。容易看出，这个遗忘映射是一个保持基点的全纯分裂淹没映射。我们还有全纯运动的通用族 $\widehat{\Psi}_{E_1}$：$T(E_1)\times E_1 \to \mathbb{C}$ 和 Ψ_{E_2}：$T(E_2)\times E_2 \to \mathbb{C}$。我们需要以下引理。

引理 1。 设 V 是一个带有基点 x_0 的连通复*Banach*流形，并设 f 和 g 分别是从V 到 $T(E_1)$ 和 $T(E_2)$ 的保持基点全纯映射。则 $p_{E_2,\ E_1} \circ g = f$ 当且仅当 $g^*(\Psi_{E_2})$ 延拓为 $f^*(\Psi_{E_1})$。

完整证明参见 [20] 中的命题 13.1。

对于有限集 E，其补集 $\mathbb{C}\setminus E = \Omega$ 是一个在 E 中各点处带有 punctures 的黎曼球面。$T(E)$ 与经典的 Teichm¨uller 空间 $Teich(\Omega)$ 存在自然的识别（即，在 E 中各点处带有 punctures 的球面的 Teichm¨uller 空间）。详情参见 [20] 。这也可由*Lieb*同构轻易得到。

定理 B。 设 E 是有限集 $\{0, 1, \infty, \zeta_1, \cdots, \zeta_n\}$，其中 $\zeta_i \neq \zeta_j$ 对于 $i \neq j$ 和 $n \geq 2$。考虑通用全纯运动 Ψ_E： $T(E) \times E \to \mathbb{C}$。则以下结论成立：

(i) 映射 $\widetilde{\Psi}_E$ 是连续的。

(ii) 由公式定义的映射 Ψ_E：$T(E) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\widetilde{\Psi}_E(t, z) = w^{s(t)}(z), \qquad (t, z) \in T(E) \times \widehat{\mathbb{C}}$$

延拓了全纯运动 Ψ_E。

(iii) 贝尔特拉米系数 $s(t)$ 在 $T(E)$ 上实解析地变化。

(iv) 泛全纯运动 $\Psi_E\colon T(E)\times E\to\mathbb{C}$ 是极大全纯运动。

定理 B 的证明。
首先注意到

$$\Psi_E(t,z)=\Psi_E(P_E(s(t)),z)=w^{s(t)}(z)=\widetilde{\Psi}_E(t,z)$$

对于所有 $(t,\ z)\in T(E)\times E$。因此，Ψ_E 扩展了 Ψ_E。

[2], 的连续性由 [2], 的引理 17 得出，该引理指出，当 $\mu_n\to\mu$ 属于 $M(\mathbb{C})$时，$w^{\mu_n}\to w^{\mu}$ 在球面度量下是一致的。

根据 Ψ_E的构造，对每个 $t\in T(E)$，映射 $(\Psi_E)_t\colon\mathbb{C}\to\widehat{\mathbb{C}}:=w^{s(t)}\colon\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$显然是一个拟共形映射，其 Beltrami 系数为 $s(t)$；根据我们在§5.2中的讨论，$s(t)$关于 t实解析地依赖。还要注意，根据推论 3，$s(t)$的 L^∞ 范数仅取决于 $d_{T(E)}(0,\ t)$。

最后，令 $E=\{0,1,\infty,\zeta_1,\cdots,\zeta_n,\zeta_{n+1}\}$，其中 ζ_{n+1}是$\mathbb{C}\setminus\{0,1,\infty\}$ 中的任意一点，且不同于集合 E中的所有点。（沿用经典记号，我们用 $Teich(g,\ n)$表示亏格为 g 且有 n 个 punctures 的黎曼曲面的 Teichmüller 空间。因此，在本例中，$T(E)$是$Teich(0,\ n+3)$，而 $T(E)$是 $Teich(0,\ n+4)$。）

注意，在这种情况下，$p_{\widehat{E},E}$ 是 Teichm¨uller 理论中通常的忘却 puncture 映射，已知它是一个保持基点的全纯分裂淹没映射（参见 [22]）。

考虑泛全纯运动

$$\Psi_E:T(E)\times E\to\widehat{\mathbb{C}}.$$

令 $i\colon T(E)\to T(E)$ 为恒等映射，显然这是一个保持基点的全纯映射。令 $\phi\colon T(E)\times E\to\mathbb{C}$ 为全纯运动 $i^*(\Psi_E)$（这与 Ψ_E 相同）。假设 ϕ 延拓为全纯运动 $\phi\colon T(E)\times E\to\mathbb{C}$。那么，由于 $T(E)$ 是单连通的（见推论 2），根据定理 2，存在唯一的保基点全纯映射 $f\colon T(E)\to T(E)$，使得 $f^*(\Psi_{\widehat{E}})=\phi$，其中 $\Psi_{\widehat{E}}\colon T(E)\times E\to\mathbb{C}$ 是 E 的泛全纯运动。由于 ϕ 延拓 ϕ，根据引理 1 可知，$p_{\widehat{E},E}\circ f=i$。这意味着，映射 $p_{\widehat{E},E}$ 有一个全纯截面 f。这与 Earle 和 Kra 在 [10] 中的一个结果矛盾。因此，我们得出结论：泛全纯运动 $\Psi_E\colon T(E)\times E\to\mathbb{C}$ 是极大全纯运动。□

7. Holomorphic families of Jordan curves

定理 C. 令 V 为一个带有基点 x_0 的单连通复 Banach 流形。令 γ_{x_0} 为一条闭若尔当曲线，E 为 γ_{x_0} 的一个有限子集，其中包含点 0、1 和 ∞。令 $\phi\colon V\times E\to\widehat{\mathbb{C}}$ 为一个全纯运动，并令 $E_x := \phi_x(E)$。则有如下结论：

(i) 对于 ϕ_x 中的每个 $\widehat{\mathbb{C}}$，都存在一个拟共形映射 $\widetilde{\phi_x}$ 使得 $\widetilde{\phi_x}(E) = E_x$。并且 $\phi_x(\gamma_{x_0})$ 是一条闭若尔当曲线 γ_x，且 $E_x \subset \gamma_x$。

(ii) ϕ_x 的贝尔特拉米系数 μ_x 在 V 上实解析地变化。

(iii) μ_x 的 L^∞ 范数有一个小于 1 的上界，该上界仅取决于从 x 到 x_0 的小林距离，记为 $\rho_V(x,\ x_0)$。

定理 C 的证明。根据定理 2，存在唯一的全纯映射 $f\colon V\to T(E)$，使得 $f^*(\Psi_E) = \phi$，其中 $\Psi_E\colon T(E)\times E\to\mathbb{C}$ 是 §4.1 中定义的 E 的泛全纯运动。根据我们在 §5.2 中的讨论，存在一个实解析映射 $s\colon T(E)\to M(\mathbb{C})$，使得 $P_E\circ s$ 是 $T(E)$ 上的恒等映射。令 $\widehat{f} = s\circ f$。定义映射 $\widetilde{\phi}\colon V\times\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ 如下：

$$\widetilde{\phi}(x,z) := \widetilde{\phi}_x(z) = w^{\widetilde{f(x)}}(z) \qquad \text{for all } z\in\widehat{\mathbb{C}}.$$

于是，对于每个 z in E，有

$$\phi_x(z) = \phi(x,z) = \Psi_E(f(x),z) = \Psi_E(P_E(\widehat{f}(x)),z) = w^{\widetilde{f(x)}}(z) = \widetilde{\phi}_x(z).$$

因此，对于每个 x in V，$\phi_x(E) = \phi_x(E) = E_x$。由于对于每个 x in V，$\widetilde{\phi}_x\colon\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ 是一个同胚，$\phi(\gamma_{x_0}) = \gamma_x$ 是一条若尔当曲线，并且显然有 $E_x\subset\gamma_x$。这就证明了 (i) 和 (ii)。

最后，令 x 属于 V，其中 $x\neq x_0$。由于 $T(E)$ 上的 Teichm¨üller 度量与其 Kobayashi 度量相同（见 §3.3），因此有 $d_{T(E)}(0,\ t) \le \rho_V(x_0,\ x)$，其中 $f(x) = t$，而 0 表示 $T(E)$ 中的基点。选择 μ 在 $M(\mathbb{C})$ 中的一个极值对象，使得 $P_E(\mu) = f(x)$。这意味着 $d_{T(E)}(0,\ P_E(\mu)) = d_M(0_M,\ \mu)$，其中 0_M 表示 $M(\mathbb{C})$ 中的基点。我们有

$$d_{T(E)}(f(x_0),f(x)) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\|\mu\|_\infty}{1-\|\mu\|_\infty} \le \rho_V(x_0,x)$$

由此得到

$$\|\mu\|_\infty \le \frac{\exp(2\rho_V(x_0,x))-1}{\exp(2\rho_V(x_0,x))+1} < 1.$$

由于 $\widetilde{\phi}_x(z) = w^{\widetilde{f}(x)}(z)$，由推论 3 可知，$\|\widetilde{f}(x)\|_\infty$ 有一个介于 0 和 1 之间的上界，该上界仅取决于 $\rho_V(x_0, x)$。这就证明了 (iii)。□

注记 5。映射 $\phi : V \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是连续的。事实上，假设 $(x_n, z_n) \to (x, z)$，其中 x_n、x 属于 V，而 z_n、z 属于 $\mathbb{C}$。由于 $f : V \to M(\mathbb{C})$ 是实解析的，因而连续，所以我们有 $f(x_n) \to f(x)$。ϕ 的连续性现在可完全仿照定理 B 中 (ii) 的证明得出。

7.1. **一些历史评论**。设 γ_0 是 $\mathbb{C}$ 中的一条闭若尔当曲线，并设 ϕ: $\Delta \times \gamma_0 \to \mathbb{C}$ 是一个全纯运动；显然，参数空间 Δ 的基点是 0。对每个 $\lambda \in \Delta$，由 λ-引理，

$$\gamma_\lambda = \{\phi_\lambda(z) : z \in \gamma_0\}$$

是 $\mathbb{C}$ 中的一条闭若尔当曲线。

考虑由全纯运动 ϕ：$\Delta \times \gamma_0 \to \mathbb{C}$ 生成的族 $\{\gamma_\lambda : \lambda \in \Delta\}$。在 [14], 中证明了：若 γ_0 是拟圆，则每个 γ_λ 也是拟圆。后来，作者在 [23]，中证明了如下推广。

定理3 (**Pommerenke 和 Rodin)**。设 $\{\gamma_\lambda : \lambda \in \Delta\}$ 由 γ_0 的全纯运动生成。对每个 $\lambda \in \Delta$，存在 $\mathbb{C}$ 的一个拟共形同胚，它将 γ_0 映射到 γ_λ。

参见 [23]中的定理 2。

下面是 Pommerenke 和 Rodin 这一定理的一个强得多的版本。

定理4. 设 V 是具有基点 x_0 的单连通复 *Banach* 流形。设 γ_{x_0} 是一条闭若尔当曲线，并设 $\phi : V \times \gamma_{x_0} \to \mathbb{C}$ 是一个全纯运动。设 $\{\gamma_x : x \in V\}$ 由全纯运动 ϕ 生成。则我们有如下结论：

(i) 对于每个 $x \in V$，都存在一个拟共形映射 $\phi_x : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，它将 γ_{x_0} 映射到 γ_x。(ii) ϕ_x 的贝尔特拉米系数 μ_x 随着 x 在 V 中变化而连续变化。(iii) μ_x 的 L^∞ 范数有一个小于 *1* 的上界，该上界仅取决于 x 到 x_0 的小林距离，记作 $\rho_V(x, x_0)$。

其证明与定理 C 的证明完全类似。

注记6. 如果对第5节末尾提出的未解问题给出肯定回答，就能证明 ϕ_x 的贝尔特拉米系数 μ_x 在 V 上实解析地变化。这将大幅改进定理3，也将改进定理4。

˜注 7. 当 $V = \Delta$时， ϕ_x 的贝尔特拉米系数 μ_x 关于 V中的 x 全纯地变化，并且 $\|\mu_x\|_\infty \leq |x|$。这是Slodkowski定理的一个推论。

References

[1] L. V. Ahlfors，《拟共形映射讲义》，第二版，增补章节由 C. J. Earle、I. Kra、M. Shishikura 和 J. H. Hubbard 撰写，美国数学会，大学讲座丛书第38卷（2006）。[2] L. V. Ahlfors 和 L. Bers，〈可变度量下的黎曼映射定理〉，《数学年刊》72（1960），385–404。[3] L. Bers 和 H. L. Royden，〈单射的全纯族〉，《数学学报》157（1986），259–286。[4] K. Astala 和 G. J. Martin，〈全纯运动〉，《分析论文集》；《于韦斯屈莱大学报告》83（2001），27–40。[5] E.M. Chirka，〈关于全纯运动的延拓〉，《数学文献》70(1)（2004），516–519。[6] A. Douady 和 C. J. Earle，〈圆周同胚的保角自然延拓〉，《数学学报》157（1986），23–48。[7] C. J. Earle，〈一些极大全纯运动〉，《当代数学》211（1997），183–192。[8] C. J. Earle，作为复流形的 Teichm ¨uller 空间：华威 1992，Te-ichm ¨uller 理论与模问题；《拉马努金数学学会讲义丛书》10（2010），5–33。[9] C. J. Earle、F. P. Gardiner 和 N. Lakic，〈广义 Teichm ¨uller 空间之间的同构〉，《当代数学》240（1999），97–110。[10] C. J. Earle 和 I. Kra，〈关于 Teichm ¨uller 空间之间的全纯映射〉，《分析学贡献》，学术出版社，纽约（1974），107–124。[11] C. J. Earle 和 A. Marden，〈黎曼曲面的全纯族〉，《当代数学》573（2012），67–97。[12] C. J. Earle 和 S. Mitra，〈全纯运动下模的变化〉，《当代数学》256（2000），39–67。[13] F. P. Gardiner、Y. Jiang 和 Z. Wang，〈全纯运动及相关主题〉，《黎曼曲面的几何》，伦敦数学学会讲义丛书368，剑桥大学出版社，剑桥，2010，156–193。[14] F. W. Gehring 和 Ch. Pommerenke，〈关于 Nehari 单叶性判据和拟圆〉，《瑞士数学评论》59（1984），226–242。[15] J. H. Hubbard，《Teichm ¨uller 理论及其在几何、拓扑和动力学中的应用》；第1卷，Matrix出版社，伊萨卡，纽约州，2006。[16] Y. Jiang 和 S. Mitra，〈泛全纯运动的一些应用〉，《古代数学杂志》30(1)（2007），85–96。[17] Y. Jiang 和 S. Mitra，〈Douady-Earle截面、全纯运动及其若干应用〉，《当代数学》575（2012），219–251。

[18]Y. Jiang、S. Mitra 和 Z. Wang，全纯映射到 *Te-ichm ¨uller* 空间的提升，《古代数学杂志》**32** （2009），547–563。[19] G.Lieb，全纯运动与 *Teichm ¨uller* 空间，博士论文，康奈尔大学，1990年。[20] S. Mitra，Teichm¨uller 空间与全纯运动，《数学分析杂志》**81**（2000），1–33。[21] R. Ma˜n´e、P. Sad 和 D. P. Sullivan，关于有理映射的动力学，《高等师范学校科学年刊》16（1983），193–217。[22] S. Nag，*Teichm ¨uller* 空间的复解析理论，加拿大数学会专著与高级教材，Wiley-Interscience（1988）。[23] Ch. Pommerenke 和 B. Rodin，黎曼映射函数的全纯族，《京都大学数学杂志》**26-1** （1986），13–22。[24] Z. Slodkowski，全纯运动与多项式包，《美国数学会会刊》**111** （1991），347–355。

(董) Department of Mathematics and Computer Science, Kingsborough Community College of the City University of New York,Brooklyn, NY 11235–2398, USA
电子邮箱地址: Xinlong.Dong@kbcc.cuny.edu

(Farhath) Department of Mathematics, Graduate Center of the City University of New York, New York, NY 10016, USA电子邮箱地址, Farhath: agulamdasthagir@gradcenter.cuny.edu

（Mitra） Department of Mathematics, Queens College of the City University of New York, Flushing, NY 11367-1597, USA, and, Department of Mathematics, Graduate Center of the City University of New York New York, NY 10016, USA
电子邮件地址，Mitra：sudeb.mitra@qc.cuny.edu