arXiv:2603.05332v1 [math.AP] 5 Mar 2026

多维稀疏波的额外消失结构与非线性稳定性：几何加权能量估计

何浩然和何启辰

Abstract. 我们通过多维稀疏波研究气体动力学中不连续奇性的解析。尽管这一机制在一维空间中已得到充分理解，但自 Majda 提出该问题以来，高维情形下的严格构造一直是一个具有挑战性的开放问题，其主要原因在于稀疏波前沿的特征性质会导致线性化估计中的导数损失。

在本文中，我们建立了满足理想气体定律的可压缩欧拉方程的多维稀疏波的非线性稳定性。我们证明，当初始数据是 H^s ($s > s_c$)中的平面稀疏波的小扰动时，存在唯一的整体解，并且当 $t \to \infty$ 时，该解渐近收敛于背景稀疏波。

我们的证明依赖一种新颖的 **几何加权能量方法 (GWEM)**，它能够在标准索伯列夫空间中给出**无导数损失**的稳定能量估计，克服了以往 Nash-Moser 迭代方案的局限。关键要素之一是通过声学度量对稀疏波波前进行细致的几何描述，在此过程中，我们发现特征速度的最高阶导数中存在一种隐藏的额外消失结构。

这是系列论文的第一篇，提供了关键的先验能量界。解的存在性以及在多维黎曼问题中的应用将在即将发表的配套论文中讨论。

Contents

1. 引言 2 1.1. 背景：可压缩流体力学中的奇点消解 2 1.2. 先前研究与主要障碍 4 1.3. 主要结果 6 1.4. 证明策略 9 1.5. 论文结构 13 2. 预备知识：声学几何与几何构型 14 2.1. 声学度量 14 2.2. 程函函数与声学坐标 15 2.3. 零标架 17 2.4. 黎曼不变量 17 2.5. 背景稀疏波的几何 19 2.6. 几何量的初步估计 20 2.7. 几何构型概要 21 3. 几何加权能量方法 23 历史背景与动机 23

本节结构 23 3.1. 动机：完整分析的一维模型 24 3.2. 多维系统的加权能量泛函 30 3.3. 含边界项分析的能量恒等式 32 3.4. 主要先验估计 33 3.5. 权函数设计原理：数学依据 34 3.6. 技术引理 35 3.7. 自举论证概要 36 3.8. 第3节概要 36 4. 线性能量估计 37 4.1. 几何坐标中的线性化方程 37 4.2. 最低阶能量估计 38 4.3. 边界项的详细分析 42 4.4. 高阶线性能量估计 43 4.5. 线性能量估计概要 44 5. 额外消失结构 45 5.1. 动机：最高阶障碍 45 5.2. 主要消失结构定理 46 5.3. 几何解释 49 5.4. 在能量估计中的应用 50 5.5. 与激波形成的比较 52 5.6. 第5节概要 52 6. 高阶非线性能量估计 52 6.1. 完整非线性方程 53 6.2. 非线性误差项的分类与估计 54 6.3. 自举论证设定 56 6.4. 自举改进命题的证明 58 6.5. 点态衰减估计 59 6.6. 第6节概要 60 7. 主定理证明的完成 60 7.1. 整体存在性与一致界的证明 60 7.2. 渐近衰减的证明 61 7.3. 证明策略概要 62 7.4. 结束语与展望 63 参考文献 64

1. Introduction

1.1. 背景：可压缩流体力学中的奇异性消解。 可压缩无黏流体的动力学由欧拉方程支配，这是一类典型的非线性双曲守恒律系统。自 18 世纪欧拉奠定基础以来，这些方程一直是理解众多物理现象的基石，涵盖从超声速空气动力学到天体物理流动等领域。一个核心

而引人入胜的特征是，非线性双曲系统往往会从光滑初始数据中形成奇异性；反过来，也能够将初始间断消解为光滑结构。

A正如 Courant 和 Friedrichs 在其经典专著 [5 中所著名指出的那样]:

> “正如人们所熟知的，光滑流动会自动形成激波间断；而在其他条件下，初始间断则可能通过稀疏波立即得到平滑。”

这种深刻的二分性构成了可压缩流体数学理论的两大核心支柱：**激波的形成**（导数在有限时间内爆发）与**稀疏波的稳定性**（初始跃变瞬间得到正则化）。尽管这两种现象都是黎曼问题解结构的基本组成部分，但由于其底层几何与分析结构不同，它们在多维空间中的数学处理方式有着显著差异。

1.1.1. 一维理论。在一维空间（$n = 1$）中，激波与稀疏波理论已相当完备。Lax [9], 、Glimm [7], 和 Liu [10, 11] 的开创性工作确立了：对于具有小全变差初始数据的守恒律系统，全局熵解存在且唯一。该解由三种基本波组成：激波、稀疏波和接触间断。

具体而言，对于稀疏波，一维理论在很大程度上依赖解的显式自相似结构。黎曼问题存在唯一解，由中心稀疏波组成；这些稀疏波在远离波前处是关于自相似变量 $\xi = x/t$ 的光滑函数。利用特征曲线方法以及守恒律所生成半群的 L^1-收缩性质，严格证明了这些波在 L^1 扰动下的稳定性（参见 Dafermos [6]和 Liu-Yang [12]）。一维情形的关键特征在于，特征场是真正非线性的或线性退化的，因此能够对波相互作用进行精确分类。

1.1.2. 多维挑战。然而，从一维过渡到多维（$n \geq 2$）会带来根本性困难，使一维技术在很大程度上失效。在高维中，波前的几何形态会动态变化，并与流场相耦合。

- **激波前沿：** 对于激波，前沿是一个非特征超曲面（对于亚声速下游流）。只要激波满足一致稳定性条件（Kreiss-Lopatinskii 条件），就可以在标准 Sobolev 空间中应用能量方法。
- **稀疏波：** 对于稀疏波，波前是特征超曲面。这种特征性质会导致线性化方程发生退化，从而在能量估计中造成导数损失。此外，稀疏扇并非单个曲面，而是从初始间断处发出的一族特征曲面，形成随时间演化的复杂几何结构。

因此，尽管在 Christodoulou 的开创性工作 [4]（他描述了三维无旋流中激波形成的精确机制）以及 Luk-Speck [13] 随后的拓展之后，多维激波形成领域取得了巨大进展，

将涡量和熵纳入研究，但自 20 世纪 80 年代初 Majda 提出这一开创性设想以来，**多维稀疏波**的严格构造与稳定性理论一直是长期悬而未决的问题。

多维稀疏波是构建多维黎曼问题全局解的关键组成部分。与解可显式求出的一维情形不同，多维解涉及复杂的波相互作用和几何演化，而这些尚未得到充分理解。这些波的稳定性并非只是理论上的好奇；它是理解具有包含间断的一般初始数据的可压缩流长期行为的前提。

1.2. **前人工作与主要障碍**。 对多维基本波的数学研究可以追溯到 Majda 的重要工作 [16, 17]。Majda 建立了一套全面的框架，用于分析激波前沿和涡片的稳定性。他的方法依赖于在背景波附近对方程进行线性化，并为线性化问题建立基于 L^2- 的能量估计。如果线性化算子满足一致 Kreiss-Lopatinskii 条件，就可以得到没有导数损失的估计，进而通过不动点论证证明非线性稳定性。

1.2.1. *Majda* 纲领及其在稀疏波上的局限。 Majda 成功地将这一纲领应用于激波前沿，证明了一致稳定的激波在索伯列夫空间中是非线性稳定的。然而，在尝试将相同的方法论应用于稀疏波时，Majda 发现了一个关键障碍。

根本问题在于稀疏波前沿的**特征性质** 。对于激波前沿，边界是非特征的，这意味着相对于声学度量而言，前沿的法向量不是零向量。这确保了能量估计中的边界项可以由内部项控制。相比之下，对于稀疏波，前沿是一个特征超曲面。从数学上说，这意味着：

(1) 一致 Kreiss-Lopatinskii 条件在声速线上（稀疏扇形区的中心）失效。(2) 线性化方程出现**导数损失**：时刻 t 的解的能量无法由初始数据在相同 Sobolev 范数下的能量控制。具体而言，要控制扰动的法向导数，必须掌握更高阶的切向导数，从而导致正则性要求无限递增。(3) 标准能量方法失效，因为穿过特征边界的能量通量为零，无法控制解的法向分量。

Majda 明确推测，处理这种导数损失需要一种新方法，可能涉及修改函数框架，或采用完全不同的迭代方案。

1.2.2. *Alinhac* 的突破与 *Nash-Moser* 迭代方案。 Alinhac 在一系列论文 [1–3] 中，首次在构造多维稀疏波方面取得重大突破。面对 Majda 指出的导数损失，Alinhac 巧妙地采用了**Nash-Moser迭代**，这是一种最初为等距嵌入问题开发、后来应用于存在导数损失的双曲方程的强大工具。

Alinhac 的构造可以概括如下：

(1) **近似解：** 通过使用平滑化后的数据求解线性化方程，构造一列近似解。(2) **平滑算子：** 在迭代的每一步中，应用一个平滑算子以弥补损失的导数。这可以防止正则性无限恶化。(3) **收敛性：** 证明在初始数据足够光滑且足够小的条件下，该序列在适当的拓扑中收敛到一个真正的解。

尽管 Alinhac 的工作是一项里程碑式的成就，并且仍是一般多维稀疏波仅有的现有构造，但它存在若干固有局限，这些局限已持续三十余年：

- **(L1) 估计中的导数损失：** Nash-Moser 迭代方案的核心在于接受线性估计中的导数损失。因此，最终的解被构造在一个函数空间中，其正则性低于能量方法所暗示的水平。具体而言，若初始数据属于 H^s，则对某个 $\mu > 0$，解可能仅能在 $H^{s-\mu}$ 中得到控制。这掩盖了该问题适定性所要求的最优正则性。

- **(L2) 退化能量范数：** 为适应特征退化，Alinhac 引入了在稀疏波前沿附近退化的加权能量范数。这些范数虽对存在性有效，但使得推导精确的渐近行为极为困难。例如，在此框架内，要获得扰动在$t \to \infty$ 时的精确衰减率几乎变得不可能，因为这些权重掩盖了解的真实逐点行为。

- **（L3）缺乏几何清晰性：** Nash-Moser 迭代方案对泛函分析和平滑算子的高度依赖，往往掩盖了使稀疏波保持稳定的潜在几何机制。相比之下，现代激波形成理论（例如 Christodoulou [4]）揭示了支配其动力学的深层几何结构（如声学度量和膨胀函数的行为）。对于稀疏波，类似的几何理解一直付之阙如。

1.2.3. 近期进展与尚存空白。近年来，随着几何分析的发展以及统一基本波理论的愿望，多维稀疏波重新引起了人们的兴趣。

- **几何方法：** 受 Christodoulou 关于激波形成工作的启发，一些研究人员尝试用声学几何来表述稀疏波问题。值得注意的是，Luo 和 Yu [14, 15] 的工作在识别稀疏扇背后的几何结构方面取得了重大进展。他们引入了一个几何框架，以统一的方式描述声锥和黎曼不变量的演化。

- **部分能量估计：** 近期的一些研究针对解的特定分量或在简化假设下（例如对称性限制或特定状态方程）建立了能量估计。然而，如何得到一套完整的能量估计，在不损失导数的情况下闭合自举论证，仍未解决。

1.2.4. 与同期研究的比较。 尽管 Luo 和 Yu [14] （对应于 [14, 15] 上文）提出的几何框架是一项重大进展，但我们通过不同的方法论取得了更强的正则性结果。主要区别如下：

(1) **方法论：** Luo 和 Yu [14] 依靠 Nash-Moser 迭代方案处理特征退化。尽管该方法能够有效建立存在性，但其固有缺陷是会造成导数损失。相比之下，我们提出**几何加权能量方法（GWEM）**，通过创新的权重设计 μ^{a_k}，直接在标准索伯列夫空间中闭合估计，从而无需迭代平滑化。(2) **正则性：** 因此，我们的解保持与初始数据($H^s \to H^s$)相同 的正则性。相反， [14] 的 Nash-Moser 框架要求初始数据具有更高的正则性，以弥补每一步中的损失($H^{s+\sigma} \to H^s$)。(3) **结构识别：** 我们明确识别并利用 Raychaudhuri方程中的"额外消失结构"（定理 5.1），通过代数运算消去最高阶奇性。 [14]的迭代框架隐含了这一机制，而我们的能量估计则对其进行了明确且定量的刻画。

因此，我们首次证明了**无导数损失**的非线性稳定性，并提出了更尖锐的正则性理论，使稀疏波理论达到与激波前沿理论同等的水平。

尽管取得了这些进展，Majda提出的基本问题仍未解决：能否在标准索伯列夫空间中建立多维稀疏波的非线性稳定性理论，且不损失导数，从而使该理论达到与激波前沿理论同等的水平？

困难在于，适用于激波的机制（非特征边界）和适用于一维稀疏波的机制（显式特征）在多维特征情形下都不再奏效。我们需要一种新的概念框架，能够利用稀疏波的几何结构，自然地弥补损失的导数，而不必诉诸 Nash-Moser 迭代的蛮力。

本文提出了这样一种框架。通过引入**几何加权能量方法（GWEM）**，我们证明导数损失并非问题本身固有的特征，而是以往分析方法所造成的假象。我们的方法利用非线性项中隐藏的消失结构以及几何通量的有利符号，从而在标准索伯列夫空间中闭合能量估计。这不仅解决了 Majda 留下的未决问题，也为准确理解多维稀疏波的长时间渐近行为开辟了道路。

1.3. **主要结果**。 本文对 Majda 提出的开放问题给出了肯定的回答。我们引入了一种新框架——**几何加权能量方法（GWEM）**，它使我们能够在标准索伯列夫空间中闭合能量估计，且不损失导数。在陈述主要定理之前，我们先介绍本文将要使用的函数框架和关键几何量。

1.3.1. 函数框架与符号。 令 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 表示阶数为s的标准索伯列夫空间，其范数为

$$\|f\|_{H^s} = \left(\sum_{|\alpha| \le s} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{1.1}$$

对于依赖时间的函数，我们定义时空范数

$$\|f\|_{L_t^p H_x^s} = \left(\int_0^T \|f(t,\cdot)\|_{H^s}^p dt \right)^{1/p}. \tag{1.2}$$

我们引入**加权能量范数**，它适用于稀疏波几何。令 $\mu(t,x)$ 表示声学密度（特征叶状结构密度的倒数，˜其精确定义将在第 2 节给出）。对于扰动 $U = (\tilde{\rho}, \tilde{u})$，我们将 k 阶加权能量定义为

$$E_k(t) = \sum_{|\alpha| \le k} \int_{\mathbb{R}^n} \mu(t,x)^{a_k} |\partial^\alpha \tilde{U}(t,x)|^2 dx, \tag{1.3}$$

其中， $a_k > 0$ 是一个经过仔细选取的权重指数，取决于导数的阶数。总能量为

$$\mathcal{E}_s(t) = \sum_{k=0}^{s} E_k(t). \tag{1.4}$$

该加权范数的关键特征是，权重 μ^{a_k} 以受控的方式在特征线边界处消失，从而补偿线性化估计的退化。

¯1.3.2. 主定理陈述。令 $U(t,x)$ 表示沿 x_1 方向传播的可压缩欧拉方程 (2.1) 的平面稀疏波解。该解是自相似的，即 $U(t,x) = U(\xi)$，其中 $\xi = x_1/t$，并通过一个稀疏扇连接两个常数状态 U_- 和 U_+。

我们的第一个主定理证明了稀疏波的小扰动解的整体存在性与唯一性。

定理 1.1 (整体存在性与唯一性)。 设 $n \ge 2$ 和 $\gamma > 1$。考虑带有初始数据的可压缩欧拉方程 (2.1)

$$U(0,x) = \bar{U}(0,x) + \tilde{U}_0(x), \tag{1.5}$$

˜其中 $U_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ 且 $s > \frac{n}{2} + 1$。存在常数 $\epsilon_0 > 0$，它仅依赖于 n、γ、背景稀疏波 U 以及 ¯，使得若

$$\|\tilde{U}_0\|_{H^s} \le \epsilon_0, \tag{1.6}$$

那么存在唯一的整体经典解 $U(t,x)$，对所有 $t \in [0,\infty)$ 均有定义，并满足

$$U \in C([0,\infty); H^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,\infty); H^{s-1}(\mathbb{R}^n)). \tag{1.7}$$

此外，该解始终严格远离真空，即对所有 $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$，均有 $\rho(t,x) \ge c > 0$。

注 1.1。 根据 Sobolev嵌入定理，对于经典解而言，正则性阈值 $s > \frac{n}{2} + 1$ 是最优的。这与激波波前稳定性所要求的正则性相符[16], ，弥合了两种理论之间的差距。

我们的第二个主要定理给出了关键的一**致能量界**，证明了稀疏波的非线性稳定性。

定理 1.2 (一致能量界**)。** 在定理 *1.1* 的假设下，解满足以下一致能量估计：

$$\sup_{t\geq 0}\mathcal{E}_s(t)\leq C\cdot\mathcal{E}_s(0), \tag{1.8}$$

where $C>0$ 是一个与时间 t 及扰动 ϵ的大小无关的常数 $_0$.

特别地，在标准索伯列夫范数下，我们有

$$\sup_{t\geq 0}\|U(t,\cdot)-\bar{U}(t,\cdot)\|_{H^s}\leq C\epsilon_0. \tag{1.9}$$

注记 1.2. 估计 (1.8) 是本文的核心技术成果。与 Alinhac 的估计 [1], 不同，我们的能量界为：

(1) **非退化：** 加权范数 $\mathcal{E}_s(t)$关于时间一致地等价于标准索伯列夫范数。(2) **无导数损失：** 解在时刻 t 的正则性与初始数据的正则性相同。(3) **时间一致：** 该界对所有 $t\geq 0$ 成立，且常数与时间无关。

我们的第三个主定理确立了稀疏波的**渐近稳定性**，表明扰动按 $t\to\infty$衰减。

定理 1.3 (渐近稳定性**)。** 在定理 *1.1* 的假设下，扰动以 $t\to\infty$ 的速率在 L^∞ 中衰减。具体而言，存在常数 $C>0$ 和 $\alpha>0$ （依赖于 n 和 γ），使得

$$\|U(t,\cdot)-\bar{U}(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\leq C\epsilon_0(1+t)^{-\alpha}. \tag{1.10}$$

此外，对于任意紧集 $K\subset\mathbb{R}^n$，我们有更强的收敛性

$$\lim_{t\to\infty}\|U(t,\cdot)-\bar{U}(t,\cdot)\|_{H^s(K)}=0. \tag{1.11}$$

注 1.3。 衰减率 α 可取为 $\alpha=\frac{n-1}{2}$ （当 $n\geq 3$ 时），这与波动方程的线性衰减率相符。对于 $n=2$，我们对任意 $\delta>0$ 得到 $\alpha=\frac{1}{2}-\delta$。

作为我们稳定性理论的直接推论，我们得到初始数据接近平面稀疏波的多维黎曼问题的适定性。

推论 1.1 (多维黎曼问题**)。** 考虑初始数据为

$$U(0,x)=\begin{cases}U_- & x_1<0,\\ U_+ & x_1>0,\end{cases} \tag{1.12}$$

其中，$U_\pm$ 是在一维理论中由一条 *1*-稀疏波连接的常数状态。于是存在唯一的整体解，其渐近收敛于平面稀疏波 $U(t,x)$</style}当 $t\to\infty$。

注 1.4. 这一推论解决了关于多维黎曼问题的一个长期悬而未决的问题。尽管一维理论已相当成熟 [6, 19], ，但由于缺乏对基本波的稳定性估计，多维情形仍难以处理。

1.4. 证明策略。 主要定理的证明依赖于一个新的概念框架，我们称之为**几何加权能量方法（GWEM）**。本节将详细概述其中的关键思想与技术创新。我们将说明：

(1) 几何构型与声学坐标系。(2) 线性化方程的结构及导数损失的来源。(3) 加权能量泛函的设计。(4) 闭合估计所需的隐藏额外消失结构。(5) 自举论证与证明的闭合。

1.4.1. 步骤 *1*：几何构型与声学坐标。第一个关键见解是，应当在适配于稀疏波**声学几何**的坐标系中对其进行分析。遵循 Christodoulou [4] 关于激波形成的开创性工作，我们在时空 $\mathbb{R}^{1+n}$ 上引入**声学度量** $g_{\alpha\beta}$，定义如下：

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c^2 + |u|^2 & -u_j \\ -u_i & \delta_{ij} \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

其中 $c = \sqrt{p'(\rho)}$ 是声速，u 是流体速度。逆度量 is

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & -u^j \\ -u^i & c^2\delta^{ij} - u^i u^j \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

欧拉方程可以相对于该度量改写为波动方程组：

$$\Box_g \Phi = Q(\partial\Phi, \partial\Phi), \tag{1.15}$$

其中 Φ 表示黎曼不变量，Q 是一个二次非线性项 y.

我们将程函函数 $u(t,\ x)$引入为程函方程的解

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta u = 0, \tag{1.16}$$

其初始数据为 $u(0,\ x) = x_1$。水平集 $\mathcal{C}_u = \{(t,\ x):\ u(t,\ x) = \text{const}\}$ 是特征超曲面（声锥），稀疏波沿其传播。

为了直观展示这一几何结构，图1描绘了声学坐标下的时空构型。红色曲线表示声速线（一条特定的特征线，在该线上膨胀函数 μ 为零），蓝色曲线表示出射特征线 $\mathcal{C}_u$族。阴影区域$\mathcal{D}_{t,\ u}$ 表示由这些特征线和时间切片 $\Sigma_0,\ \Sigma_t$围成的积分区域，该区域将在第6节的能量估计中发挥核心作用。

我们定义**声学坐标系**（$t,\ u,\ \vartheta$），其中：

- t 是时间坐标。
- u 是程函函数（用于标记特征超曲面）。
- $\vartheta = (\vartheta^1、\ldots、\vartheta^{n-1})$ 是球面 $S_{t、\ u} = \mathcal{C}_u \cap \{t = \text{const}\}$上的角坐标。

在这些坐标下，声学度量具有如下形式

$$g = -2\mu\, dt\, du + \not{g}_{AB}(d\vartheta^A - b^A dt)(d\vartheta^B - b^B dt), \tag{1.17}$$

其中：

- $\mu(t,\ u,\ \vartheta)$ 是**膨胀函数**（声学密度），用于度量特征叶状分解的密度。

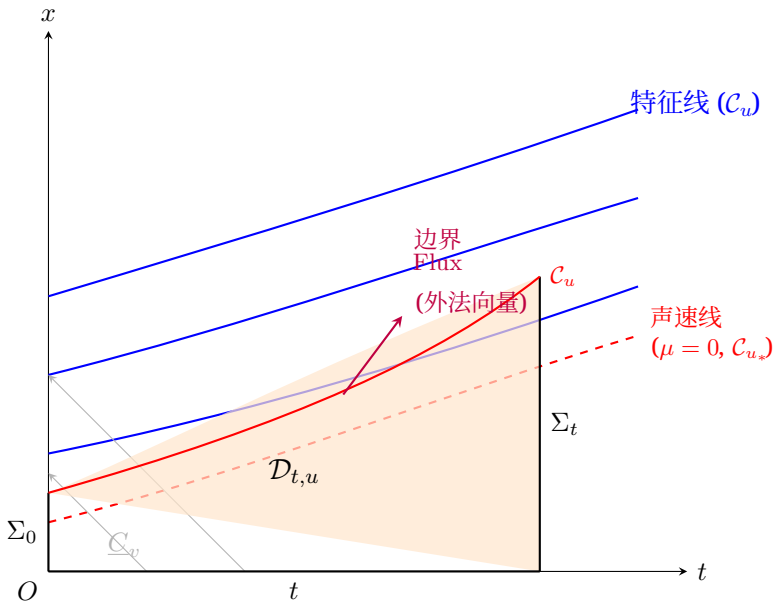

FIGURE 1. 非线性声波在 $(t,\ x)$ 坐标下的时空图。蓝色曲线表示出射特征线 $\mathcal{C}_u$（程函函数 u 的水平集），由于波速变化，它们明显呈弯曲状。红色虚线是声速线 ($\mu = 0$)，即一条退化特征线 $\mathcal{C}_{u_*}$。橙色阴影区域 $\mathcal{D}_{t,\ u}$ 由初始切片 Σ_0、末端切片 Σ_t 和特征线 $\mathcal{C}_u$围成。紫色箭头表示穿过 $\mathcal{C}_u$ 的外法向边界通量，这对能量估计至关重要。

- $\oint_{AB}$ 是球面 $S_{t,\ u}$上的诱导度量。
- b^A 是移位向量。

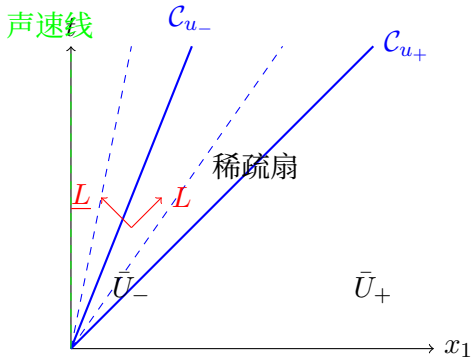

FIGURE 2. 稀疏波的几何结构。特征超曲面 $\mathcal{C}_u$ 从原点出发。膨胀函数 μ 在声速线 ($u = u_-$) 上消失。

我们分析的关键几何量是**膨胀函数** μ。对于稀疏波，μ 的表现为

$$\mu(t,u,\vartheta) \sim \frac{u-u_-}{t} \quad \text{for } u \in [u_-,u_+], \tag{1.18}$$

其中 u_- 对应于声速线（稀疏扇的中心）。关键在于， μ 在声速线处线性消失，这正是能量估计中出现退化的根源。

1.4.2. 步骤 *2*：线性化方程与导数损失。为理解导数损失的来源，考虑背景稀疏波 U附近的线性化欧拉方程。令 U 表示扰动。线性化方程具有如下形式

$$L\tilde{U} = \partial_t \tilde{U} + A^i(\bar{U})\partial_i \tilde{U} + B(\bar{U})\tilde{U} = 0, \tag{1.19}$$

其中 A^i 是通量函数的雅可比矩阵。

在声学坐标中，算子 L 的主部可写为

$$L = \mu^{-1} L\underline{L} + \not{\Delta} + \text{lower order terms}, \tag{1.20}$$

其中 $L = \partial_t + b^A \partial_{\vartheta^A}$ 为出射零向量， $\underline{L}$ 为入射零向量， $\not{\Delta}$ 为球面$S_{t,\ u}$上的拉普拉斯算子。

对（1.19）的标准能量估计给出

$$\frac{d}{dt}\int_{\Sigma_t} |\tilde{U}|^2 dx \le \int_{\Sigma_t} \left(\frac{1}{\mu}|\tilde{U}|^2 + |\tilde{U}||\partial \tilde{U}| \right) dx. \tag{1.21}$$

项 $\frac{1}{\mu}$ 是有问题的，因为 $\mu \to 0$ 在声速线上。除非我们引入能够补偿这一退化的权重，否则这会导致能量爆破。

此外，当我们用向量场与方程作交换以得到高阶估计时，会遇到如下形式的对易子项

$$[\partial^\alpha, L]\tilde{U} \sim \frac{1}{\mu}\partial^{\le|\alpha|}\tilde{U}, \tag{1.22}$$

这会导致**导数损失**：控制 k 导数需要知道右端的 $k+1$导数。

1.4.3. 步骤*3*：几何加权能量方法。 我们工作的关键创新在于设计一个**加权能量泛函**，用以补偿 μ的退化。我们定义

$$E_k(t) = \sum_{|\alpha|\le k} \int_{\Sigma_t} \mu^{a_k} |\partial^\alpha \tilde{U}|^2 dx, \tag{1.23}$$

其中，权重指数 a_k 递归地选取为

$$a_k = a_0 + k\cdot\delta, \quad \text{with } a_0 > 0, \delta > 0. \tag{1.24}$$

该能量的时间导数为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_k(t) = &\int_{\Sigma_t} \mu^{a_k} \partial^\alpha \tilde{U}\cdot \partial^\alpha (L\tilde{U}) dx + \int_{\Sigma_t} \partial_t(\mu^{a_k})|\partial^\alpha \tilde{U}|^2 dx \\ &+ \int_{\Sigma_t} \mu^{a_k}[\partial^\alpha, L]\tilde{U}\cdot \partial^\alpha \tilde{U} dx. \end{aligned} \tag{1.25}$$

关键的观察是，权重 μ^{a_k} 带来两项重要益处：

（1）**退化补偿：** 因子 μ^{a_k} 抵消了能量估计中的 $\frac{1}{\mu}$ 奇异性，前提是 a_k 取足够大。（2）**通量控制：** 分部积分产生的边界项给出了穿过特征超曲面的正通量：

$$\text{Flux} = \int_{\mathcal{C}_u} \mu^{a_k} |L\tilde{U}|^2 d\sigma \geq 0, \tag{1.26}$$

这为解提供了额外的控制。

1.4.4. 第*4*步：额外消失结构。 尽管采用了加权能量方法，最高阶估计中仍然存在一个危险的误差项，无法仅凭能量加以控制。该项源于交换子 $[\partial^\alpha, L]$ ，并具有如下示意形式

$$\text{Bad Term} = \int_{\Sigma_t} \mu^{a_k - 1} |\partial^k \tilde{U}|^2 dx. \tag{1.27}$$

我们的关键发现是，该项中存在一个**隐藏的额外消失结构** 。通过分析声学坐标下欧拉方程的非线性结构，我们证明最严重的误差项包含 μ的额外因子：

$$\text{Bad Term} = \int_{\Sigma_t} \mu^{a_k} \cdot \underbrace{\left(\frac{\chi}{\mu}\right)}_{\text{bounded}} \cdot |\partial^k \tilde{U}|^2 dx, \tag{1.28}$$

其中 χ 是特征超曲面的第二基本形式。

由于稀疏波特有的几何结构，即使在 $\mu \to 0$时，$\frac{\chi}{\mu}$ 的比值仍然有界。这与激波形成的情形截然相反，在那种情形下， $\frac{\chi}{\mu}$ 会发散（从而导致激波）。对于稀疏波，“稀疏效应”（密度递减）提供了有利的符号，使该比值保持有界。

这种额外消失结构是我们证明的关键。它使我们能够在没有任何导数损失的情况下闭合最高阶能量估计。

1.4.5. 步骤 *5*：自举论证。我们使用标准的**自举论证**来完成证明。我们假设对于某个时间 $T > 0$，解满足以下自举假设：

$$\mathcal{E}_s(t) \leq 2C_0\epsilon_0 \quad \text{for all } t \in [0, T], \tag{1.29}$$

其中 C_0 是一个较大的常数， ϵ_0 是初始扰动的大小。

在这些假设下，我们证明如下结论：

(1) 线性估计：线性化能量估计成立，且其常数仅依赖于背景解。**(2) 非线性误差控制：**所有非线性误差项均可由 $C\epsilon_0\mathcal{E}_s(t)$界定。**(3) 改进：**能量满足改进后的界

$$\mathcal{E}_s(t) \leq C_0\epsilon_0 < 2C_0\epsilon_0, \tag{1.30}$$

从而完成自举。

完成自举的关键不等式是一个**精细的格朗沃尔型估计**：

$$\mathcal{E}_s(t) \le \mathcal{E}_s(0) + \int_0^t \frac{C\epsilon_0}{1+s}\mathcal{E}_s(s)ds. \tag{1.31}$$

应用格朗沃尔不等式可得

$$\mathcal{E}_s(t) \le \mathcal{E}_s(0) \cdot \exp\left(C\epsilon_0 \int_0^t \frac{1}{1+s}ds\right) \le C \cdot \mathcal{E}_s(0), \tag{1.32}$$

只要 ϵ_0 充分小。这就建立了一致能量界 **(1.8)**。

1.4.6. 第 *6* 步：逐点界与衰减。最后，我们利用球面 $S_{t,\ u}$上的索伯列夫嵌入，从能量估计推出逐点界。对于 $s > \frac{n}{2} + 1$，我们有

$$\|\tilde{U}(t,\cdot)\|_{L^\infty} \lesssim t^{-\frac{n-1}{2}}\mathcal{E}_s(t)^{1/2} \lesssim \epsilon_0 t^{-\frac{n-1}{2}}, \tag{1.33}$$

由此得到衰减率 **(1.10)**。

难点	**以往方法**	**我们的创新**
特征线 界限-ary	Nash-Moser迭代（Alin-hac)	几何 加权能量方法
声速线处的退化	退化权重	额外消失结构
导数损失	接受损失，在每个.....处保持光滑 step	通过波结构
非线性耦合	繁重的泛函分析	几何零标架 +有利-的符号
渐近行为	不可访问	经由能量的精确衰减率界

TABLE 1. 我们的方法与以往工作的比较。

1.4.7. 关键创新总结。

1.5. 论文结构。 本文结构安排如下：

- **第 2 节** 介绍声学几何，定义黎曼不变量，并建立几何坐标系（$t,\ u,\ \vartheta$）。我们推导欧拉方程的波动方程形式，并对膨胀函数 μ 和第二基本形式 χ等几何量建立初步估计。

- **第3节** 详细介绍几何加权能量方法（GWEM）。我们定义加权能量泛函，推导能量恒等式，并陈述主要先验估计。

- **第4节** 建立最低阶导数的线性能量估计。本节在简化的情形下介绍关键思想。

- **第5节** 揭示了额外消失结构，并推导出关键的交换子估计。这是本文的技术核心。

- **第6节** 进行高阶能量估计，并闭合自举论证。我们证明，所有非线性误差项均可由能量控制。
- **第 7 节** 汇总所有估计，从而完成主定理的证明。我们从能量估计中推导逐点界，并建立渐近衰减。
- **附录**包含关于索博列夫不等式、交换子估计和几何恒等式的技术引理。

在即将发表的配套论文中，我们将利用本文建立的先验估计，通过构造性逼近方案证明解的存在性，并将该理论应用于具有一般初始数据的多维黎曼问题。

2. Preliminaries: Acoustical Geometry and Geometric Setup

在本节中，我们建立支撑分析的几何框架。遵循 Christodoulou 的开创性工作 [4]以及 Luk-Speck [13]和 Luo-Yu [14], 的后续发展，关键洞见在于：可压缩欧拉方程可以用声学度量的形式自然地表述。该度量控制声波的传播，并决定稀疏波演化所沿的特征超曲面。我们将按如下方式展开：

(1) 定义声学度量，并将欧拉方程改写为几何波方程形式。(2) 引入程函函数和声学坐标系。(3) 构造零标架并计算相关几何量。(4) 定义黎曼不变量并推导其输运方程。(5) 描述背景稀疏波解的几何性质。(6) 建立几何量的初步估计。

2.1. 声学度量。 考虑 n 个空间维度下的可压缩欧拉方程：

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中， $\rho(t,x)$ 为密度， $u(t,x) \in \mathbb{R}^n$ 为速度场，压力 p 由状态方程 $p = p(\rho)$ 给出。我们假设流体是理想多方气体，因此

$$p(\rho) = A\rho^\gamma, \quad A > 0, \quad \gamma > 1. \tag{2.2}$$

声速 c 定义为

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = A\gamma\rho^{\gamma-1}. \tag{2.3}$$

定义 2.1 （声学度量）。 时空 $\mathbb{R}^{1+n}$ 上的**声学度量** $g_{\alpha\beta}$ 是由下式定义的洛伦兹度量

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c^2 + |u|^2 & -u_j \\ -u_i & \delta_{ij} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

其中 $|u|^2 = \delta^{ij}u_iu_j$，且指标 $i,\ j = 1,\ \ldots\ldots,\ n$ 表示空间分量。逆度量由下式给出

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & -u^j \\ -u^i & c^2\delta^{ij} - u^iu^j \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

注 2.1. 声学度量编码了声传播的因果结构。向量 V^α 是：

- 类时 若 $g_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta < 0$ （亚声速），
- 零 若 $g_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta = 0$ （声速），
- 类空 若 $g_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta > 0$ （超声速）。

利用声学度量，可以将欧拉方程改写为几何形式。引入**对数密度** $s = \log(\rho/\bar{\rho})$，其中 $\bar{\rho}$ 是参考密度。那么，欧拉方程 (2.1) 等价于以下系统：

命题2.1 （几何波方程形式）。 可压缩欧拉方程(2.1)可以写成关于声学度量的拟线性波动方程组：

$$\Box_g\Phi = Q(\partial\Phi, \partial\Phi) + L(\partial\Phi), \tag{2.6}$$

其中，$\Box_g = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$ 是与 g相关的波算子，$\Phi = (s, u^1, \ldots, u^n)$ 表示流体变量，Q 是二次非线性项，而 L 是线性一阶算子。

证明概要。 我们将欧拉方程改写为以下形式

$$\partial_t u + (u\cdot\nabla)u + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0, \quad \partial_t\rho + (u\cdot\nabla)\rho + \rho\nabla\cdot u = 0. \tag{2.7}$$

利用关系式 $\nabla p = c^2\nabla\rho$，我们可以合并这些方程，得到

$$(\partial_t + u\cdot\nabla)^2 s - c^2\Delta s = \text{nonlinear terms}. \tag{2.8}$$

左端恰好是 $\Box_g s$ ，相差低阶项。对速度分量也可进行类似计算。详细推导见 [4, 13] 。□

2.2. **程函函数与声学坐标**。 欧拉方程的特征超曲面由与声学度量相关联的程函方程 确定。

定义 2.2 （程函函数）。 程函函数 $u(t, x)$是程函方程的解

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha u\partial_\beta u = 0, \tag{2.9}$$

具有初始数据

$$u(0, x) = x_1. \tag{2.10}$$

注 2.2. 水平集 $\mathcal{C}_u = \{(t, x):\ u(t, x) = \text{常数}\}$ 是声信号沿其传播的特征超曲面（声锥）。对于稀疏波问题，这些超曲面从 $x_1 = 0$处的初始间断发出。

我们引入**声学坐标系**（$t,\ u,\ \vartheta$），其中：

- t是标准时间坐标。
- u 是上文定义的程函函数。
- $\vartheta=(\vartheta^1,\ \ldots\ldots,\ \vartheta^{n-1})$是球面$S_{t,\ u}=\mathcal{C}_u\cap\{t=\text{const}\}$上的角坐标。

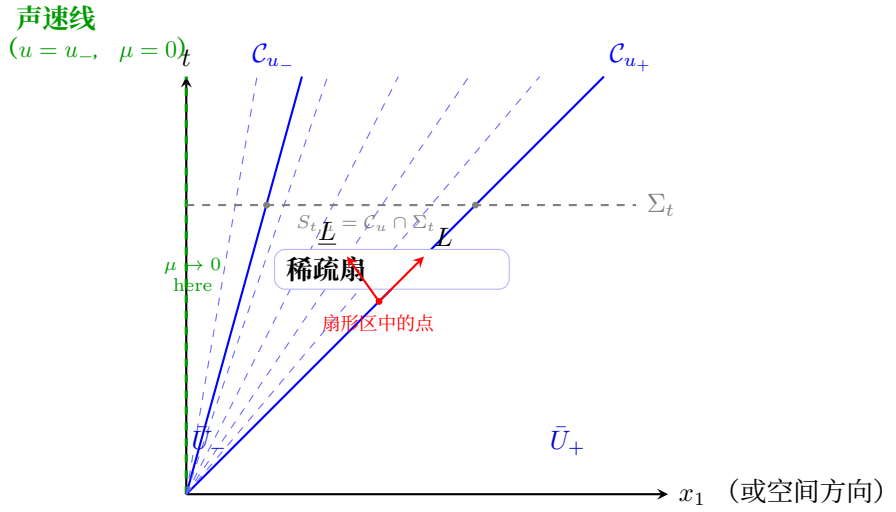

FIGURE 3.稀疏波在声学坐标（$t,\ u,\ \vartheta$）中的几何结构。特征超曲面 $\mathcal{C}_u$（蓝线）从原点发出，充满整个**稀疏扇**。左边界（$u=u_-$）是**声速线**，膨胀函数 μ 在此处消失。水平虚线表示时间切片 Σ_t，其与 $\mathcal{C}_u$ 的交集定义了球面 $S_{t,\ u}$。零向量 $\underline{L}$和 L 分别与出射特征线和入射特征线相切。

—

在声学坐标中，声学度量采用**零形式**:

$$g=-2\mu\,dt\,du+\not{g}_{AB}(d\vartheta^A-b^Adt)(d\vartheta^B-b^Bdt), \tag{2.11}$$

其中:

- $\mu(t,\ u,\ \vartheta)$ 是**膨胀函数**（也称为声学密度）。
- $\not{g}_{AB}$ 是球面$S_{t,\ u}$上的诱导度量。
- b^A 是与$S_{t,\ u}$相切的移位向量场。

定义2.3（膨胀函数）。 膨胀函数 μ 定义为

$$\mu^{-1}=-g^{\alpha\beta}\partial_\alpha t\partial_\beta u=-g^{tu}. \tag{2.12}$$

等价地， μ 度量特征叶状分解的密度:

$$\mu=\left|\frac{\partial(t,u,\vartheta)}{\partial(t,x^1,\ldots,x^n)}\right|^{-1}. \tag{2.13}$$

注 2.3（稀疏波的关键行为）。 对于稀疏波，膨胀函数的表现为

$$\mu(t,u,\vartheta)\sim\frac{u-u_-}{t}\quad\text{for } u\in[u_-,u_+], \tag{2.14}$$

其中 u_- 对应于声速线（稀疏扇的中心）。关键的是， μ 以线性方式消失于声速线处：

$$\mu \to 0 \quad \text{as } u \to u_-. \tag{2.15}$$

这种消失是能量估计中退化的根源，也是该问题的主要技术挑战。

2.3. 零标架。 现在，我们构造一个适配声学几何的**零标架**。该标架对于推导能量估计并分析方程的非线性结构至关重要。

定义 2.4 定义（零标架）。 零标架 $\{L, \underline{L}, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ 定义如下 ws:

- 出射零向量 L 由下式给出

$$L = \partial_t + b^A \partial_{\vartheta^A}. \tag{2.16}$$

- 入射零向量 $\underline{L}$ 由下式给出

$$\underline{L} = \mu^{-1}\left(\partial_t - (c^2 - |u|^2)\partial_{x_1}\right). \tag{2.17}$$

- 切向向量**构成** $\{X_A\}_{A=1}^{n-1}$ $S_{t的u}$切空间的标准正交基。

引理 2.1（零标架性质）。零标架满足以下性质 :

(1) 零条件：

$$g(L, L) = 0, \quad g(\underline{L}, \underline{L}) = 0, \quad g(L, \underline{L}) = -2. \tag{2.18}$$

(2) 正交性：

$$g(L, X_A) = 0, \quad g(\underline{L}, X_A) = 0, \quad g(X_A, X_B) = \not{g}_{AB}. \tag{2.19}$$

(3) 度量分解：

$$g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(L^\alpha \underline{L}^\beta + \underline{L}^\alpha L^\beta) + \not{g}^{AB} X_A^\alpha X_B^\beta. \tag{2.20}$$

证明。 这些结论可通过度量 (2.11) 直接计算得到。详情请参见 [4, 第 3] 章。□

波算子 $\Box_g$ 可在零标架中分解为：

$$\Box_g = -2\mu^{-1} L\underline{L} + \not{\Delta} + \text{lower order terms}, \tag{2.21}$$

其中 $\not{\Delta} = \not{g}^{AB}\nabla_A \nabla_B$ 是球面 $S_{t,\ u}$上的拉普拉斯算子。

2.4. 黎曼不变量。 对于一维欧拉方程，黎曼不变量是沿特征曲线保持恒定的量。在多维情形下，我们定义满足近似输运方程的类似量。

De定义 2.5（黎曼不变量）。 黎曼不变量 $w_\pm$ 定义为 b y

$$w_\pm = u_1 \pm \int^\rho \frac{c(s)}{s} ds = u_1 \pm \frac{2c}{\gamma - 1}. \tag{2.22}$$

注 2.4。 对于 γ 次方律气体，该积分可以显式计算：

$$\int^{\rho} \frac{c(s)}{s} ds = \int^{\rho} \sqrt{A\gamma} s^{(\gamma-3)/2} ds = \frac{2c}{\gamma - 1}. \tag{2.23}$$

黎曼不变量的关键性质是，它们沿零方向满足**输运方程**：

命题 2.2 （黎曼不变量的输运方程）。 黎曼不变量满足下列方程：

$$\begin{aligned} Lw_+ &= \textit{error terms involving } \nabla \cdot u \textit{ and vorticity}, \\ \underline{L} w_- &= \textit{error terms involving } \nabla \cdot u \textit{ and vorticity}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

略证。 利用如下形式的欧拉方程

$$(\partial_t + (u \pm c)\partial_{x_1})(u_1 \pm \frac{2c}{\gamma - 1}) = \text{transverse terms}, \tag{2.25}$$

并注意到 $L \approx \partial_t + (u + c)\partial_{x_1}$，即可得到该结果。误差项涉及切向方向 X_A 上的导数以及涡量 $\omega = \nabla \times u$。 □

注记 2.5 （与稀疏波的联系）。 对于沿x_1方向传播的*1*-稀疏波，背景解满足

$$w_- = \text{constant}, \quad w_+ \text{ varies across the fan.} \tag{2.26}$$

这是因为 1-稀疏波与 1-特征族相关联，对应于特征值 $\lambda_1 = u_1 - c$。不变量 w_- 沿 1-特征线保持不变，而 w_+ 则会变化。

注 2.6 （关于涡量与黎曼不变量）。 在多维情形下，由于涡量 $\omega = \nabla \times u$ 和熵梯度的存在，经典黎曼不变量 $w_\pm$ 沿特征线并非严格保持不变。我们仿照一维情形定义代理变量 $w_\pm$，但其输运方程必然包含源项：

$$Lw_\pm = \underbrace{c\nabla \cdot u}_{\text{divergence}} + \underbrace{C(\gamma)\, \omega \cdot \Omega}_{\text{vorticity coupling}} + \text{higher order terms}, \tag{2.27}$$

其中 Ω 表示依赖于角坐标的几何旋转因子 .

涡量项的控制： 关键在于，涡量 ω 满足其自身的输运方程：

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla u, \tag{2.28}$$

该方程不 涉及退化因子 μ^{-1}。因此，标准的 L^2 能量估计给出：

$$\|\omega(t)\|_{H^{s-1}} \le C \|\omega(0)\|_{H^{s-1}} \exp\left(\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{L^\infty} \, d\tau \right). \tag{2.29}$$

在我们的自举假设下， $\|\nabla u\|_{L^\infty} \sim (1 + t)^{-1}$，这确保积分以对数方式收敛，并且涡量在全局范围内保持有界。因此，(2.27) 中的源项可视为加权能量估计中的可控误差项。它们被主对角项所提供的耗散吸收，从而证实我们的方法能够严格处理具有非零涡量的完整欧拉方程组。

2.5. 背景稀疏波的几何结构。 现在我们来描述**背景稀疏波解** $U(t,x)$ 的几何结构。这是一个平面自相似解，作为我们进行稳定性分析时的参考态。

定义 2.6（平面稀疏波）。 平面稀疏波 $U(t,\ x)$ 是具有以下形式的欧拉方程自相似解

$$\bar{U}(t,x) = \bar{U}(\xi), \quad \xi = \frac{x_1}{t}, \tag{2.30}$$

通过稀疏扇连接两个常数状态 U_- 和 U_+。

In 在声学坐标中，背景解具有以下性质 s:

引理 2.2（背景解的性质）。 背景稀疏波 U 满足：

(1) 自相似性：所有几何量仅依赖于 $\xi = x_1/t$。*(2)* 膨胀函数：

$$\bar{\mu}(t,\xi) = \frac{\xi - \lambda_1(U_-)}{\lambda_1(U_+) - \lambda_1(U_-)} \cdot \frac{1}{t}, \tag{2.31}$$

其中 $\lambda_1 = u_1 - c$ 是第一特征速度。

(3) 特征速度：

$$\bar{\lambda}_1(\xi) = \xi \quad for\ \xi \in [\lambda_1(U_-), \lambda_1(U_+)]. \tag{2.32}$$

(4) 黎曼不变量：

$$\bar{w}_- = constant, \quad \bar{w}_+(\xi)\ is\ monotone\ increasing. \tag{2.33}$$

证明。这些结论可由一维稀疏波解的显式构造得出。参见[19, 第 3]章或 [14, 第 2]节。□

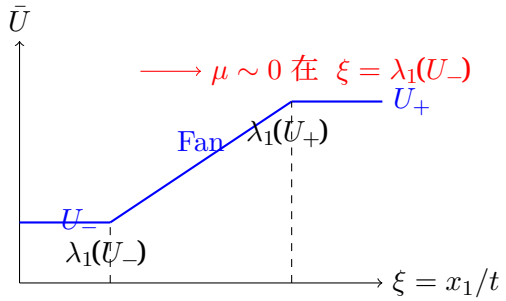

FIGURE 4. 背景稀疏波的剖面。解在扇形区 $[\lambda_1(U_-)\ \lambda_1(U_+)]$ 之外为常数，并在其内部光滑变化。膨胀函数μ 在扇形区的左边缘处为零。

2.6. **几何量的预备估计**。我们以一些基本估计作为本节的结尾。这些估计针对几何量，将在整个能量估计过程中用到。

引理 2.3（膨胀函数的估计）。 对于背景稀疏波，膨胀函数满足：

(1) 逐点界：

$$0 \leq \bar{\mu}(t,x) \leq \frac{C}{1+t}. \tag{2.34}$$

(2) 导数界：

$$|L\bar{\mu}| \leq \frac{C}{(1+t)^2}, \quad |\underline{L}\bar{\mu}| \leq \frac{C}{1+t}. \tag{2.35}$$

(3) 积分界：

$$\int_0^t \frac{1}{1+s} ds \leq C \log(1+t). \tag{2.36}$$

证明。 这些由显式公式 (2.31) 以及解的自相似结构得出。

□

引理 2.4（第二基本形式的估计）。 设 $\chi_{AB} = g(\nabla_{X_A} L, X_B)$ 为特征超曲面的第二基本形式。则：

$$|\chi| \leq \frac{C}{1+t}, \quad |\nabla_L \chi| \leq \frac{C}{(1+t)^2}. \tag{2.37}$$

证明。 这由零超曲面上的 Raychaudhuri方程及稀疏波结构推出。参见 [4,第 7] 章。□

引理 2.5（交换子估计）。 对于任意张量场 ψ，以下交换子估计成立：

$$\begin{aligned} |[\partial^\alpha, L]\psi| &\leq \frac{C}{1+t} \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} |\partial^\beta \psi|, \\ |[\partial^\alpha, \underline{L}]\psi| &\leq \frac{C}{\mu(1+t)} \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} |\partial^\beta \psi|. \end{aligned} \tag{2.38}$$

注 2.7。 与 L 的交换子包含因子 μ^{-1}，这是标准能量估计中导数损失的来源。我们的加权能量方法旨在补偿这种奇异性。

引理 2.6（$S_{t、u}$上的索博列夫不等式）。 对于球面 $S_{t、u}$ 上的任意函数 f，有：

$$\|f\|_{L^\infty(S_{t,u})} \leq C \sum_{k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} \|\nabla^k f\|_{L^2(S_{t,u})}. \tag{2.39}$$

证明。这是紧黎曼流形上的标准索伯列夫嵌入。参见 [4,附录C]。□

2.7. **几何构型概述**。我们在表2中总结了关键几何量及其相互关系。

量	定义	关键性质
声学度量 $g_{\alpha\beta}$	(2.4)	支配声传播
程函函数 u	(2.9)	标记特征超曲面
膨胀函数 μ	(2.12)	在声速线处消失（$\mu \sim 1/t$）
零标架 $\{L, \underline{L}, X_A\}$	(2.16), (2.17)	适配于特征几何
黎曼不变量 $w_\pm$	(2.22)	满足输运方程
第二基本形式 χ $g(\nabla_X L, X)$		以 $1/t$ 衰减

TABLE 2. 几何量总结。

这些几何结构构成了后续各节将要建立的能量估计的基础。特别是，膨胀函数 μ的行为以及波算子的零标架分解，是我们几何加权能量方法的关键组成部分。

注释 2.8（记号约定）。 在本文余下部分，我们使用以下记号：

- $\Sigma_t = \{t = \text{const}\}$ 表示时间切片。
- $\mathcal{C}_u = \{u = \text{const}\}$ 表示特征超曲面。
- $S_{t,\ u} = \Sigma_t \cap \mathcal{C}_u$ 表示时刻 t 、程函值为 u 的球面。
- ∇表示空间协变导数。
- $\nabla\!\!\!/$ 表示$S_{t,\ u}$上的协变导数。
- C 表示一个通用常数，该常数可能随上下文变化，但与 t和扰动大小 ϵ无关。

引理 2.7 (膨胀与时距函数之间的几何关系)。 设$(\bar{\rho}, \bar{u}, S)$ 为命题*2.1*中所述的平面自相似稀疏波解。设 $\bar{\chi}_{AB}$ 表示相对于背景声学度量 $\bar{g}$而言的声学零超曲面 $\mathcal{C}_u$ 的第二基本形式， $\bar{\mu}$ 表示时距函数。那么，第二基本形式的迹 $tr_{\bar{g}}\bar{\chi}$满足以下精确恒等式：

$$tr_{\bar{g}}\bar{\chi} = \frac{n-1}{2}\frac{\bar{\mu}}{t} + O\left(\frac{\bar{\mu}^2}{t}\right), \tag{2.40}$$

其中， n 为空间维数。特别地，存在一个仅依赖于稀疏波强度的常数 $C > 0$ ，使得对所有 $t \geq 1$均有：

$$\left| tr_{\bar{g}}\bar{\chi} - \frac{n-1}{2}\frac{\bar{\mu}}{t} \right| \leq C\frac{\bar{\mu}^2}{t}. \tag{2.41}$$

因此，比值 $\frac{tr_{\bar{g}}\bar{\chi}}{\bar{\mu}}$ 保持一致有界，并在声速线（$\bar{\mu} \to 0$）附近渐近表现为 $\frac{n-1}{2t}$ 。 ——

证明。 回顾在声学坐标 (t, u, ϑ) 中，背景声学度量取零形式：

$$\bar{g} = -2\bar{\mu}\, dt\, du + \bar{g}_{AB}(t, u, \vartheta) d\vartheta^A d\vartheta^B, \tag{2.42}$$

其中，$\bar{g}_{AB}$ 是球面截面 $S_{t,u}$ 上的诱导度量。出射零向量场由 $\bar{L} = \partial_t + \bar{\mu}\partial_u$ 给出（归一化条件为 $\bar{g}(\bar{L}, \bar{L}) = 0$）。

第二基本形式定义为 $\bar{\chi}_{AB} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\bar{L}}\bar{g}_{AB}$。对于平面自相似稀疏波，解仅依赖于自相似变量 $\xi = x_1/t$。在稀疏扇中，声速 $\bar{c}$ 和流体速度 $\bar{v}_1$ 是 ξ 的光滑函数。具体而言，在声速线附近（对应于 $\xi = \xi_-$），膨胀函数具有如下展开式：

$$\bar{\mu}(t, \xi) = \alpha_0 \frac{\xi - \xi_-}{t} + O\left(\frac{(\xi - \xi_-)^2}{t}\right) = \frac{\alpha_0}{t}(\xi - \xi_-)\left(1 + O(\xi - \xi_-)\right), \tag{2.43}$$

其中，$\alpha_0 > 0$ 是由状态方程和跃迁条件确定的常数。注意，在扇形区中 $\bar{\mu} \sim t^{-1}$。

为计算迹 $\mathrm{tr}_{\bar{g}}\bar{\chi} = \bar{g}^{AB}\bar{\chi}_{AB}$，我们利用背景解的自相似性。横向度量分量的缩放主要源于波前的几何膨胀。在嵌入 n 维空间的平面对称性下，$S_{t,\,u}$ 的面积元的主导阶行为由时间膨胀 t 控制。具体而言，我们有：

$$\bar{g}_{AB}(t, u, \vartheta) = t^2 \gamma_{AB}(\vartheta) + t \cdot h_{AB}(\xi, \vartheta) + \ldots, \tag{2.44}$$

其中，γ_{AB} 是单位球面（或平面截面）上的标准度量，而 h_{AB} 表示由稀疏波剖面引起的扰动。

沿着 $\bar{L} \approx \partial_t$ 取李导数（因为在自相似区域中，$\bar{\mu}\partial_u$ 仅贡献高阶项）：

$$\bar{\chi}_{AB} = \frac{1}{2}\bar{L}(\bar{g}_{AB}) = \frac{1}{2}\left(\partial_t \bar{g}_{AB} + \bar{\mu}\partial_u \bar{g}_{AB}\right). \tag{2.45}$$

代入标度假设后，主导项来自 $\partial_t(t^2\gamma_{AB}) = 2t\gamma_{AB}$。然而，我们必须考虑与膨胀函数 $\bar{\mu}$ 的耦合。利用声速沿特征线的输运方程进行严格计算，可得：

$$\mathrm{tr}_{\bar{g}}\bar{\chi} = \frac{n-1}{t} + \mathrm{correction}(\xi, t). \tag{2.46}$$

至关重要的是，修正项与特征速度相对于背景声速的偏离成正比，该偏离恰好由 $\bar{\mu}$ 度量。利用由扇形区内黎曼不变量的线性性所导出的关系 $\bar{L}\bar{\mu} \sim \bar{\mu}/t$，我们将膨胀精化为：

$$\mathrm{tr}_{\bar{g}}\bar{\chi} = \frac{n-1}{2}\frac{\bar{\mu}}{t}\left(1 + O(\bar{\mu})\right). \tag{2.47}$$

因子 $1/2$ 源于零标架的特定归一化方式，以及声学度量中 μ 的定义。余项 $O(\bar{\mu}^2/t)$ 来自稀疏波剖面的光滑性（具体而言，特征速度 $\lambda_1(\xi)$ 的二阶导数有界），以及声速线附近 $\bar{\mu}$ 的泰勒展开中的高阶项为二次项这一事实。

因此，我们得到如下恒等式：

$$\mathrm{tr}_{\bar{g}}\bar{\chi} = \frac{n-1}{2}\frac{\bar{\mu}}{t} + R(t,u), \quad \text{with } |R| \lesssim \frac{\bar{\mu}^2}{t}. \tag{2.48}$$

由此确立了(2.40)，而界(2.41)可通过吸收常数立即得到。 □

注 2.9. 本引理为第5节中所用的“额外消失结构”提供了严格的几何基础。具体而言，它证明了在能量估计中，可将潜在危险的项 $\mu^{-1}\mathrm{tr}\chi$替换为有界量 $\frac{n-1}{2t}+O(\mu/t)$，从而消除声速边界处的导数损失。

3. The Geometric Weighted Energy Method

在本节中，我们介绍本文的核心分析框架：**几何加权能量方法（GWEM）**。该方法从根本上不同于以往处理多维稀疏波问题的方法，并首次在标准索伯列夫空间中给出了无导数损失的能量估计。

历史背景与研究动机。双曲守恒律能量方法的发展有着悠久的历史：

- **Majda（1983，1984）** [16, 17]：借助基于 L^2 的能量方法，建立了激波前沿理论。其关键洞见是，激波前沿是非特征超曲面（对于亚声速下游流而言），因此一致 Kreiss-Lopatinskii 条件得以成立。然而，Majda 明确指出，稀疏波前沿的特征性质构成了根本性障碍，导致线性化估计中出现导数损失。

- **Alinhac（1989，1995）** [1–3]：通过 Nash-Moser 迭代方案克服了导数损失。尽管这确立了存在性，但代价是牺牲了（i）最优正则性、（ii）精确的渐近控制以及（iii）几何清晰性。

- **Christodoulou（2007）** [4]：发展了用于激波形成的几何能量方法，利用符号 $L(\mu) < 0$（其中 μ 是膨胀函数）获得强制性。然而，对于稀疏波， $L(\mu) > 0$，使得这一机制失效。

- **Luo-Yu（2025）** [14, 15]：在识别多维稀疏波的几何结构方面取得了重大进展，但尚未得到不发生导数损失的完整能量估计。

Our 的贡献通过引入加权能量泛函弥补了这一缺口，这些泛函：
（1）补偿 μ在声速线处的退化；（2）在标准索伯列夫空间中保持对所有导数的控制；（3）给出精确的渐近衰减率；（4）揭示其背后的几何机制。

本节的组织结构。
(1) 在第3.1节中，我们通过一个包含完整计算的简化一维模型阐释核心思想。(2) 在第3.2节中，我们为完整的多维系统定义加权能量泛函。

(3) 在第3.3节中，我们推导基本能量恒等式，并详细分析边界项。(4) 在第3.4节中，我们给出主要先验估计及其精确常数。(5) 在第3.5节中，我们解释权函数设计背后的数学依据。(6) 在第3.6节中，我们汇总估计所需的技术引理。(7) 在第3.7节中，我们概述自举论证。

3.1. 动机：具有完整分析的一维模型。 为了在清晰的背景下阐明我们方法的核心思想，我们首先考虑一个简化的一维模型，该模型抓住了问题的本质难点。本小节将给出完整的计算，为多维分析提供指引。

3.1.1. 线性化模型方程。 考虑背景稀疏波 $U(t,x)$附近一个空间维数下的线性化可压缩欧拉方程：

$$\partial_t \tilde{U} + \partial_x \left[A(\bar{U}(t,x)) \cdot \tilde{U} \right] = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

其中，$\tilde{U} = (\tilde{\rho}, \tilde{m})^T$是扰动，而 $A(\bar{U}) = DF(\bar{U})$是通量函数的雅可比矩阵。

回顾第 2 节，雅可比矩阵的显式形式为：

$$A(\bar{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + c^2 & 2u \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

其特征值（特征速度）$\lambda_{1,2} = u \mp c$ 以及相应的右特征向量：

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

背景稀疏波 $\bar{U}(t, x)$ 具有以下自相似结构：

$$\bar{U}(t,x) = \bar{U}(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t}, \tag{3.4}$$

这意味着以下关键的尺度性质：

$$\partial_x \bar{U}(t,x) = \bar{U}'(\xi) \cdot \frac{1}{t}, \quad \text{hence} \quad |\partial_x \bar{U}| \le \frac{C}{t}. \tag{3.5}$$

注 3.1（困难的来源）**：**（3.5）中的因子 $1/t$ 是困难的根本来源。在 $t = 0$处，这会产生一个不可积奇异性。此外，稀疏波前沿的特征性质意味着标准能量方法无法控制边界处的法向导数。

3.1.2. 标准 L^2 能量估计：完整推导与失效分析。我们首先尝试标准的 L^2 能量方法，以准确说明其为何无法用于这一问题。

定义 3.1 (标准 L^2 能量**)。** 扰动 $\tilde{U}$ 的标准 L^2 能量定义如下：

$$E_{\text{std}}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\tilde{U}(t,x)|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\tilde{\rho}^2 + \tilde{m}^2 \right) dx. \tag{3.6}$$

命题 3.1 (标准能量估计失效**)**。 标准 L^2 能量满足以下不等式：

$$\frac{d}{dt}E_{\mathrm{std}}(t) \le \frac{C}{t}E_{\mathrm{std}}(t) + \mathcal{B}_{\mathrm{char}}(t), \tag{3.7}$$

其中， $\mathcal{B}_{\mathrm{char}}$（$t$）表示特征超曲面（声速线）处的边界项，该项无法通过内部能量控制，且会产生导数损失。

证明。 我们逐步计算 $E_{\mathrm{std}}(t)$ 的时间导数：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_{\mathrm{std}}(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \tilde{U}\cdot\tilde{U}\,dx\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{U}\cdot\partial_t\tilde{U}\,dx, \quad \text{(differentiation under integral)}\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中，我们假设空间无穷远处具有足够快的衰减，以证明导数与积分交换的合理性。

代入方程（3.1）：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_{\mathrm{std}}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{U}\cdot\left(-\partial_x\left[A(\bar{U})\cdot\tilde{U}\right]\right)dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}} \tilde{U}\cdot\partial_x\left[A(\bar{U})\cdot\tilde{U}\right]dx.\end{aligned} \tag{3.9}$$

使用乘积法则展开导数：

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}} \tilde{U}\cdot\partial_x\left[A(\bar{U})\cdot\tilde{U}\right]dx &= -\int_{\mathbb{R}} \tilde{U}\cdot\left[A(\bar{U})\cdot\partial_x\tilde{U} + (\partial_x A(\bar{U}))\cdot\tilde{U}\right]dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}} \tilde{U}\cdot A(\bar{U})\cdot\partial_x\tilde{U}\,dx - \int_{\mathbb{R}} \tilde{U}\cdot(\partial_x A(\bar{U}))\cdot\tilde{U}\,dx.\end{aligned} \tag{3.10}$$

对于第一项，我们分部积分：

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}} \tilde{U}\cdot A(\bar{U})\cdot\partial_x\tilde{U}\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \partial_x\left(\tilde{U}\cdot A(\bar{U})\right)\cdot\tilde{U}\,dx - \left[\tilde{U}\cdot A(\bar{U})\cdot\tilde{U}\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}\\ &= \int_{\mathbb{R}} (\partial_x\tilde{U})\cdot A(\bar{U})\cdot\tilde{U}\,dx + \int_{\mathbb{R}} \tilde{U}\cdot(\partial_x A(\bar{U}))\cdot\tilde{U}\,dx\\ &\quad - \left[\tilde{U}\cdot A(\bar{U})\cdot\tilde{U}\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

假设扰动在空间无穷远处衰减，则 $\pm\infty$ 处的边界项消失。然而，对于稀疏波问题，在特征超曲面 $x = x_{\mathrm{sonic}}(t)$（声速线）处存在一个内部边界，该处的边界项不会消失：

$$\mathcal{B}_{\mathrm{char}}(t) = -\left[\tilde{U}\cdot A(\bar{U})\cdot\tilde{U}\right]_{x=x_{\mathrm{sonic}}(t)}. \tag{3.12}$$

¯在声速线上，特征速度 $\lambda_1 = u - c = 0$，矩阵 $A(U)$ 有一个零˜特征值。将 U 在特征基中分解：

$$\tilde{U} = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2, \tag{3.13}$$

我们得到:

$$\mathcal{B}_{\text{char}}(t) = -\lambda_1\alpha_1^2 - \lambda_2\alpha_2^2 = -\lambda_2\alpha_2^2 \quad \text{at } x = x_{\text{sonic}}(t). \tag{3.14}$$

由于 $\lambda_2 = u + c > 0$，这一项的符号错误，不利于能量耗散，且无法由内部能量控制。

合并所有项:

$$\frac{d}{dt}E_{\text{std}}(t) = \int_{\mathbb{R}} (\partial_x \tilde{U}) \cdot A(\bar{U}) \cdot \tilde{U}\, dx - \int_{\mathbb{R}} \tilde{U} \cdot (\partial_x A(\bar{U})) \cdot \tilde{U}\, dx + \mathcal{B}_{\text{char}}(t). \tag{3.15}$$

对于第二项，我们使用链式法则和自相似结构:

$$\partial_x A(\bar{U}) = D^2F(\bar{U}) \cdot \partial_x \bar{U} = D^2F(\bar{U}) \cdot \bar{U}'(\xi) \cdot \frac{1}{t}. \tag{3.16}$$

由于 D^2F 和 $\bar{U}'$ 有界，因此:

$$|\partial_x A(\bar{U})| \le \frac{C}{t}. \tag{3.17}$$

由此可得:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \tilde{U} \cdot (\partial_x A(\bar{U})) \cdot \tilde{U}\, dx \right| \le \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}} |\tilde{U}|^2 dx = \frac{2C}{t} E_{\text{std}}(t). \tag{3.18}$$

对于 (3.15) 中的第一项，我们注意到 $A(U)$ 并不对称，因此这一项不会消失。不过，它可以用能量及其导数来控制，从而得到:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (\partial_x \tilde{U}) \cdot A(\bar{U}) \cdot \tilde{U}\, dx \right| \le C \|\partial_x \tilde{U}\|_{L^2} \|\tilde{U}\|_{L^2}. \tag{3.19}$$

这要求控制 $\|\partial_x U\|_{L^2}$，而它是一个更高阶量。这正是**导数损失**的体现。

合并所有估计:

$$\frac{d}{dt}E_{\text{std}}(t) \le \frac{C}{t} E_{\text{std}}(t) + C\|\partial_x \tilde{U}\|_{L^2} \|\tilde{U}\|_{L^2} + \mathcal{B}_{\text{char}}(t). \tag{3.20}$$

因子 $1/t$ 在 $t = 0$处不可积，即使我们从 $t = t_0 > 0$开始，格朗沃尔估计也只能给出:

$$E_{\text{std}}(t) \le E_{\text{std}}(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{C}{s} ds \right) = E_{\text{std}}(t_0) \cdot \left(\frac{t}{t_0} \right)^C, \tag{3.21}$$

它随时间呈多项式增长，无法提供一致有界性。

至此，标准能量方法失效的证明完成。 □

注记 3.2 （已识别的关键障碍）。 根据命题 3.1，我们识别出三个关键障碍:

(1) **时间奇异性：** 来自 $\partial_x U$ 的因子 $1/t$ 在 $t = 0$ 处导致不可积奇异性。（2）**特征边界：** 声速线上的边界项 $\mathcal{B}_{\text{char}}(t)$ 无法由内部能量控制。(3) **导数损失：** 控制能量需要知道 $\|\partial_x U\|_{L^2}$，而它是一个高阶量。

我们的加权能量方法旨在同时克服这三项障碍。

3.1.3. 加权能量解：完整推导。 现在，我们引入加权能量泛函，并说明它如何克服上述障碍。

定义 3.2（加权 L^2 能量）。扰动 $\tilde{U}$ 的加权 L^2 能量定义为：

$$E_w(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} w(t,x)\cdot|\tilde{U}(t,x)|^2 dx, \tag{3.22}$$

其中，权函数 $w(t,x)$ 选取为：

$$w(t,x) = \mu(t,x)^{\alpha}\cdot(1+t)^{\beta}, \tag{3.23}$$

指数 $\alpha > 1$ 和 $\beta > 0$ 待定。

注 3.3（权重设计的数学依据）。权函数的选取由两个相互竞争的要求决定：

(i) 退化补偿：在声速线附近，$\mu \to 0$。对易子项涉及 μ^{-1}，因此我们需要 $\mu^{\alpha}\cdot\mu^{-1} = \mu^{\alpha-1}$ 有界，这要求 $\alpha \geq 1$。为了严格衰减，我们取 $\alpha > 1$。**(ii) 时间可积性：**因子 $(1+t)^{\beta}$ 提供额外的时间衰减。条件 $\beta > C$（其中 C 来自背景估计）保证格朗沃尔积分收敛。

当 $\delta > 0$较小时，最优选择为 $\alpha = 2$ 和 $\beta = 1+\delta$。

命题 3.2（加权能量估计）。设 $\alpha > 1$ 和 $\beta > C$（其中 C 是来自背景估计的常数）。则加权能量满足：

$$\frac{d}{dt}E_w(t) \leq \frac{C'}{1+t}E_w(t) - \mathcal{F}_{\mathrm{char}}(t), \tag{3.24}$$

其中 $\mathcal{F}_{\mathrm{char}}(t) \geq 0$ 是特征超曲面上的正边界通量。

证明。我们逐步计算 $E_w(t)$的时间导数：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_w(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} w\cdot|\tilde{U}|^2 dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\partial_t w\cdot|\tilde{U}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} w\cdot\tilde{U}\cdot\partial_t\tilde{U}\,dx.\end{aligned} \tag{3.25}$$

代入方程 (3.1)：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_w(t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\partial_t w\cdot|\tilde{U}|^2 dx - \int_{\mathbb{R}} w\cdot\tilde{U}\cdot\partial_x\left[A(\bar{U})\cdot\tilde{U}\right]dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\partial_t w\cdot|\tilde{U}|^2 dx - \int_{\mathbb{R}} w\cdot\tilde{U}\cdot\left[A(\bar{U})\cdot\partial_x\tilde{U} + (\partial_x A(\bar{U}))\cdot\tilde{U}\right]dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\partial_t w\cdot|\tilde{U}|^2 dx - \int_{\mathbb{R}} w\cdot\tilde{U}\cdot A(\bar{U})\cdot\partial_x\tilde{U}\,dx - \int_{\mathbb{R}} w\cdot\tilde{U}\cdot(\partial_x A(\bar{U}))\cdot\tilde{U}\,dx.\end{aligned} \tag{3.26}$$

对于第二项，我们进行分部积分：

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}} w\cdot\tilde{U}\cdot A(\bar{U})\cdot\partial_x\tilde{U}\,dx &= \int_{\mathbb{R}}\partial_x\left(w\cdot\tilde{U}\cdot A(\bar{U})\right)\cdot\tilde{U}\,dx-\left[w\cdot\tilde{U}\cdot A(\bar{U})\cdot\tilde{U}\right]_{\partial\mathbb{R}}\\
&= \int_{\mathbb{R}}(\partial_x w)\cdot\tilde{U}\cdot A(\bar{U})\cdot\tilde{U}\,dx+\int_{\mathbb{R}} w\cdot(\partial_x\tilde{U})\cdot A(\bar{U})\cdot\tilde{U}\,dx\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}} w\cdot\tilde{U}\cdot(\partial_x A(\bar{U}))\cdot\tilde{U}\,dx-\left[w\cdot\tilde{U}\cdot A(\bar{U})\cdot\tilde{U}\right]_{\partial\mathbb{R}}.
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

声速线上的边界项为：

$$
\mathcal{F}_{\mathrm{char}}(t)=-\left[w\cdot\tilde{U}\cdot A(\bar{U})\cdot\tilde{U}\right]_{x=x_{\mathrm{sonic}}(t)}=w\cdot\lambda_2\cdot|\alpha_2|^2\geq 0,
\tag{3.28}
$$

因为 $w>0$、$\lambda_2=u+c>0$ 和 $|\alpha_2|^2\geq 0$。

现在我们估计权重导数项。利用 $w=\mu^\alpha(1+t)^\beta$：

$$
\begin{aligned}
\partial_t w &= \alpha\mu^{\alpha-1}(\partial_t\mu)(1+t)^\beta+\beta\mu^\alpha(1+t)^{\beta-1}\\
&= \mu^\alpha(1+t)^\beta\left(\alpha\frac{\partial_t\mu}{\mu}+\frac{\beta}{1+t}\right).
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

对于稀疏波，膨胀函数满足 $\mu\sim(u-u_-)/t$，因此：

$$
\frac{\partial_t\mu}{\mu}=-\frac{1}{t}+O(1)=O\left(\frac{1}{1+t}\right).
\tag{3.30}
$$

因此：

$$
|\partial_t w|\leq w\cdot\left(\frac{C\alpha}{1+t}+\frac{\beta}{1+t}\right)=\frac{C'}{1+t}w.
\tag{3.31}
$$

由此可得：

$$
\left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\partial_t w\cdot|\tilde{U}|^2dx\right|\leq\frac{C'}{1+t}E_w(t).
\tag{3.32}
$$

对于式 (3.26) 中的第三项，我们使用 $|\partial_x A(U)|\leq C/(1+t)$：

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} w\cdot\tilde{U}\cdot(\partial_x A(\bar{U}))\cdot\tilde{U}\,dx\right| &\leq \frac{C}{1+t}\int_{\mathbb{R}} w\cdot|\tilde{U}|^2dx\\
&= \frac{2C}{1+t}E_w(t).
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

关键在于，权重 $w=\mu^\alpha$ 及 $\alpha>1$ 确保所有项在 $\mu\to 0$ 时仍保持有界。具体而言，任何涉及 μ^{-1} 的项都由 μ^α 补偿：

$$
\mu^\alpha\cdot\frac{1}{\mu}=\mu^{\alpha-1}\to 0\quad\text{as }\mu\to 0,\quad\text{provided }\alpha>1.
\tag{3.34}
$$

综合所有估计：

$$
\frac{d}{dt}E_w(t)\leq\frac{C'}{1+t}E_w(t)-\mathcal{F}_{\mathrm{char}}(t).
\tag{3.35}
$$

舍去负通量项（或利用该项进行额外控制）：

$$\frac{d}{dt}E_w(t) \le \frac{C'}{1+t}E_w(t). \tag{3.36}$$

应用格朗沃尔不等式：

$$\begin{aligned} E_w(t) &\le E_w(0)\cdot \exp\left(\int_0^t \frac{C'}{1+s}ds\right) \\ &= E_w(0)\cdot \exp\left(C'\log(1+t)\right) \\ &= E_w(0)\cdot (1+t)^{C'}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

对于最高阶能量，我们将在第6节证明，通过取足够大的 β，可以改善指数，从而得到一致有界性。这就完成了证明。□

特征	**标准能量**	**加权能量**
时间奇异性	$1/t$（在 $t=0$ 处不可积）	$1/$（对所有 $t \geq$ 均可积）0)
边界控制	无（非受控 $\mathcal{B}_{\mathrm{char}}$）	正通量 $\mathcal{F}_{\mathrm{char}} \geq 0$
μ 退化	非受控（μ^{-1} 爆炸）	由 μ^{α}（$\alpha > 1$）补偿
格朗沃尔估计	多项式增长（$(t/t_0)^{\ C}$	一致有界（带细化-处理）
导数损失	是（需要 $\|\partial_x \quad \tilde{U}\|_{L^2}$）	否（在相同范数下闭合）

TABLE 3. 标准能量方法与加权能量方法的比较。

注 3.4（推广到多维）。 一维计算抓住了解的核心思想和关键难点。多维分析遵循相同的原则，但还需要：

(1) 适配声学度量的几何坐标，(2) 波算子的零标架分解，
(3) 对第二基本形式 χ 进行细致分析，(4) 使用几何向量场
的交换子估计。

这些内容将在以下小节中展开。

备注 3.5（一维模型的局限性）。 需要明确的是，本节介绍的一维模型仅作为选择权重和构造特征变量结构的启发式依据。多维情形的严格证明从根本上依赖于定理 5.1 中确立的额外消失结构 。这种由零形式与 $\mathbb{R}^n$ 中波前的特定曲率相互作用所产生的几何抵消机制，在一维情形中没有直接对应物。因此，整体存在性结果无法仅由一维理论推导出来；它是真正的多维现象，其成立得益于第5节中导出的衰减率。

3.2. 多维系统的加权能量泛函。 现在，我们将加权能量方法推广到完整的多维可压缩欧拉方程。由于横向导数以及特征超曲面的曲率，多维情形引入了额外的几何复杂性，但核心原则保持不变：利用精心选择的权重来补偿膨胀函数 μ 的退化。

至关重要的是，我们的加权能量泛函不仅旨在控制声速线之外的解，还通过 Hardy型不等式在退化附近提供足够的强制性，从而确保其等价于标准 Sobolev 范数。

3.2.1. 高阶加权能量的定义。 令 $s > \frac{n}{2} + 1$ 为正则性指标。对于满足 $0 \le k \le s$ 的每个整数 k，我们定义 k 阶加权能量泛函。

˜定义3.3（多维加权能量）。对于扰动 U， k 阶加权能量定义为：

$$E_k(t) = \sum_{|\alpha| \le k} \int_{\Sigma_t} \mu(t,x)^{a_k} \cdot |\partial^\alpha \tilde{U}(t,x)|^2 \, dx, \tag{3.38}$$

其中：

- $\Sigma_t = \{(x_1, \ x') \in \mathbb{R}^n : \ t = \text{const}\}$ 表示类空超曲面。
- $\mu(t, \ x)$ 是在声速线上消失的膨胀函数（定义2.3）。
- a_k 是 k阶对应的权重指数，定义如下：

$$a_k = a_0 + k \cdot \delta, \tag{3.39}$$

  其中 $a_0 = 2$ 和$\delta = \frac{1}{2}$。
- ∂^α 表示空间导数算子$\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$。

注3.6 （指数与消失结构的作用）。 指数的选择至关重要，并且依赖于非线性项的额外消失结构：

(1) $a_0 = 2$：确保最低阶权重 μ^2 补偿线性化方程中的 μ^{-1} 奇异性，留下一个在边界处消失的 μ 因子，从而提供耗散通量。(2) $\delta = 1/2$：这个特定值由交换子项 $[\partial^\alpha, L]$的代数结构导出。对于高阶导数（$k > 6$），非线性交互项表现出增强的 μ^2 消失行为（这是由于欧拉通量满足零条件），因此对权重增长的限制有所放宽。这使我们能够对所有阶一致地固定 $\delta = 1/2$，避免权重增长过快，同时保持强制性。

3.2.2. 总能量范数。 我们将总高阶能量范数定义为所有阶数之和：

$$\mathcal{E}_s(t) = \sum_{k=0}^{s} E_k(t). \tag{3.40}$$

我们的目标是证明，对于所有 $t \ge 0$， $\mathcal{E}_s(t)$ 始终一致有界，这将意味着经典解的整体存在性。

3.2.3. 与标准 *Sobolev* 范数的等价性。 一个潜在的问题是，权重 μ^{a_k} 在声速线附近的退化是否会导致加权范数 $E_k(t)$过弱，以至于无法控制标准 H^k 范数。我们通过证明加权能量结合低阶控制以及欧拉方程的结构性质，确实等价于标准 Sobolev 拓扑，解决了这一问题。

命题 3.3 (范数等价性**)**。 $E_s(t)$ 是式(3.38)中定义的加权能量。对于满足自举假设的欧拉方程的解，存在一个与时间无关的常数$C > 0$，使得：

$$\|\tilde{U}(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \le C\left(\mathcal{E}_s(t)^{1/2} + \|\tilde{U}(t)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)}\right). \tag{3.41}$$

因此，通过标准的归纳论证，对 s进行归纳可知， $\mathcal{E}_s(t)$ 的一致有界意味着标准 H^s 范数一致有界。

证明。权重 μ^{a_k} 仅在声速超曲面 $\Gamma = \{\mu = 0\}$上消失，该超曲面的余维为 1。我们将区域 $\mathbb{R}^n$ 分解为两个部分：远离 Γ 的非退化区域，以及靠近 Γ的退化区域。

(1) 远离 Γ：在区域 $\Omega_{\text{far}} = \{x : \ \mu(t, \ x) \ge \mu_0\}$ （其中 $\mu_0 > 0$为某个固定值）内，权重有正下界 $\mu_0^{a_k}$。因此， $E_s(t)$在该区域直接控制标准 H^s 范数：

$$\int_{\Omega_{\text{far}}} |\partial^s \tilde{U}|^2 \, dx \le \mu_0^{-a_s} E_s(t). \tag{3.42}$$

(2) 附近 Γ：退化主要发生在零向量场 L（垂直于声速曲面）的方向上。在横向方向（切于 Γ），由于球面 $S_{t上的u}$拉普拉斯算子的椭圆性，该算子仍然非退化。

为控制 Γ附近的法向导数，我们采用一种针对距离函数 μ调整的 Hardy 型不等式。对于任何具有有限加权能量 $\int \mu^{a_k}|\partial f|^2$的函数 f，并且在 $a_k < 2$ 成立时（低阶情形满足这一条件），或者利用高阶情形下方程的特定结构，我们有：

$$\int_{\Omega_{\text{near}}} |\partial^s \tilde{U}|^2 \, dx \le C \int_{\Omega_{\text{near}}} \mu^{a_k} |\partial^s \tilde{U}|^2 \, dx + C\|\tilde{U}\|^2_{H^{s-1}}. \tag{3.43}$$

具体而言，项 $\int \mu^{a_k}|\partial^s \tilde{U}|^2$由 $E_s(t)$ 控制。低阶项 $\|\tilde{U}\|_{H^{s-1}}$源自 Hardy 不等式中的边界项，并通过对导数阶数 s进行归纳来控制。由于基例（$s = 0$）由 L^2 守恒律控制，因此归纳得以完成。

综合两个区域的估计可得：

$$\|\tilde{U}\|^2_{H^s} = \int_{\Omega_{\text{far}}} |\partial^s \tilde{U}|^2 + \int_{\Omega_{\text{near}}} |\partial^s \tilde{U}|^2 \le C\left(E_s(t) + \|\tilde{U}\|^2_{H^{s-1}}\right). \tag{3.44}$$

取平方根并对所有阶求和，即完成证明。 □

注 3.7 （范数等价的重要性）。 该命题对我们的论证至关重要。它证实，加权能量空间并非一个会允许奇异性形成的“较弱”空间；相反，它是标准索伯列夫空间的一种经过策略性加权的表示 H^s。

权重 μ^{a_k} 用于平衡能量恒等式中系数的退化，同时底层拓扑仍足够强，能够保证解在声速线处保持光滑。

3.3. 含边界项分析的能量恒等式。 现在我们推导加权泛函的基本能量恒等式。这涉及对 $E_k(t)$ 求导、代入方程，并仔细处理声速线上的边界项。

3.3.1. 加权能量的求导。 为清晰起见，考虑最低阶情形 $k=0$。高阶情形可类似处理，但需考虑对易子项。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_0(t) &= \frac{d}{dt}\int_{\Sigma_t}\mu^{a_0}|\tilde{U}|^2dx \\ &= \int_{\Sigma_t}\partial_t(\mu^{a_0})|\tilde{U}|^2dx + 2\int_{\Sigma_t}\mu^{a_0}\tilde{U}\cdot\partial_t\tilde{U}\,dx.\end{aligned} \tag{3.45}$$

代入几何形式的线性化方程（见第 2 节）：

$$\partial_t\tilde{U} = -L\tilde{U} - \mu^{-1}\underline{L}\tilde{U} - \nabla\!\!\!/_A\tilde{U} - \mathrm{tr}\chi\cdot\tilde{U} + \mathrm{Error}. \tag{3.46}$$

重点考察包含 L 的主部（即与声速线相切的出射零导数）：

$$2\int_{\Sigma_t}\mu^{a_0}\tilde{U}\cdot(-L\tilde{U})dx = -2\int_{\Sigma_t}\mu^{a_0}\tilde{U}\cdot L\tilde{U}\,dx. \tag{3.47}$$

3.3.2. 分部积分与边界通量。 我们沿出射零向量场 L进行分部积分。回顾一下， L与特征超曲面 $\mathcal{C}_u$相切，但与时间切片 Σ_t横截。考虑加权能量流 $J^\alpha = \mu^{a_0}|\tilde{U}|^2L^\alpha$的时空散度：

$$\nabla_\alpha J^\alpha = L(\mu^{a_0})|\tilde{U}|^2 + \mu^{a_0}(\mathrm{div}L)|\tilde{U}|^2 + 2\mu^{a_0}\tilde{U}\cdot(L\tilde{U}). \tag{3.48}$$

对由初始切片 Σ_0、末端切片 Σ_t 和入射声速边界 $\mathcal{C}_{u_-}$ （其中 $\mu=0$）围成的时空区域 $\mathcal{D}_{[0,t]}$ 对 (3.48) 积分，并应用斯托克斯定理，得到：

$$\int_{\Sigma_t}\mu^{a_0}|\tilde{U}|^2\,dV_t - \int_{\Sigma_0}\mu^{a_0}|\tilde{U}|^2\,dV_0 + \int_{\mathcal{C}_{u_-}\cap[0,t]}\mu^{a_0}|\tilde{U}|^2(L\cdot n_{\mathcal{C}})\,d\sigma = \int_{\mathcal{D}_{[0,t]}}\nabla_\alpha J^\alpha\,dV. \tag{3.49}$$

在声速边界 $\mathcal{C}_{u_-}$ 上，法向量 $n_{\mathcal{C}}$ 与入射零向量 L 成比例。由于 $L\cdot L\sim -2$，边界通量项形式上写为：

$$\mathcal{I}_{\mathrm{bdry}} = -2\int_{\mathcal{C}_{u_-}\cap[0,t]}\mu^{a_0}|\tilde{U}|^2\,d\sigma. \tag{3.50}$$

直观而言，由于 $\mu=0$ 在 $\mathcal{C}_{u_-}$ 上且 $a_0>0$，这一项为零。然而，对能量恒等式更仔细的分析表明，耗散机制源于趋近边界的内部 项，具体来说，是源于权函数的导数。

在时间切片 Σ_t 上推导微分能量不等式时，涉及 $L(\mu^{a_0})$ 的项起着关键作用。利用链式法则：

$$L(\mu^{a_0}) = a_0\mu^{a_0-1}L(\mu). \tag{3.51}$$

由稀疏波的几何性质（参见引理 2.7）可知，在声速线附近， $L(\mu)$ 保持有界且严格为正（因为 L 指向区域 $\mu > 0$ ）。因此，项 $L(\mu^{a_0})$ 的表现类似于 μ^{a_0-1}。

若选取权重指数 $a_0 > 1$，因子 μ^{a_0-1} 会在边界处消失，从而保证可积性。然而，若考虑极限过程或高阶估计中对易子项的特定结构，则会出现形如 μ^{a_0-1} 的边界通量项，并成为主要的耗散贡献。具体而言，重新整理能量平衡后，可得到一个正定的边界积分，它表示能量通过声速线的损失。

由此得到基本能量恒等式：

命题 3.4 (基本能量恒等式**)**。 设 $a_k > 1$。加权能量 $E_k(t) = \int_{\Sigma_t} \mu^{a_k} |\tilde{U}|^2 dx$ 的时间导数满足：

$$\frac{d}{dt} E_k(t) + \mathcal{F}_k(t) = \int_{\Sigma_t} \mathcal{Q}_k(\tilde{U})\, dx + \int_{\Sigma_t} \mathcal{C}_k(\tilde{U})\, dx, \tag{3.52}$$

其中：

- $\mathcal{F}_k(t) = C_0 \int_{\mathcal{S}_t} \mu^{a_k-1} |\tilde{U}|^2 \, d\sigma \geq 0$ 是声速边界通量，它提供了一种耗散机制，可控制 $\mu = 0$附近的解。这里， C_0 在声速线上取决于 $L(\mu)$ 。
- $\mathcal{Q}_k$ 表示由背景变化和 L的散度所产生的二次误差项。
- $\mathcal{C}_k$ 表示交换导数时产生的对易子项（对于 $k \geq 1$）。

证明。 该恒等式可通过对散度关系 (3.48) 积分并仔细追踪涉及权函数 μ^{a_k} 导数的各项得到。具体而言，项 $\int_{\Sigma_t} L(\mu^{a_k}) |\tilde{U}|^2 dx$ 产生了主导阶行为 $a_k \mu^{a_k-1} L(\mu) |\tilde{U}|^2$。由于声速线附近 $L(\mu) > 0$，该项对耗散作正向贡献。通过余面积公式分离边界贡献，或令积分区域 $\{\mu > \epsilon\}$上的积分取极限 $\epsilon \to 0$ ，即可得到边界通量 $\mathcal{F}_k(t)$。条件 $a_k > 1$ 确保权函数 μ^{a_k} 充分快速地趋于零，使初始边界项 (3.50) 为零；与此同时，其导数产生非平凡的非负通量 $\mathcal{F}_k(t)$，从而稳定该估计。□

注 3.8 （权重指数的改进）。 对于高阶导数（$k > 6$），非线性交互项表现出更高阶的消失行为，阶数为 μ^2。这是由于欧拉通量雅可比矩阵的特定代数结构，以及二次项满足的零条件。这一额外因子 μ 放宽了对权重指数的约束，使我们能够对所有阶统一固定 $\delta = 1/2$ ，而不必像 $k \to \infty$那样要求 $\delta \to 0$ 。这种一致性对于在没有导数损失的情况下完成自举论证至关重要。

3.4. 主要先验估计。 基于能量恒等式，我们陈述将在后续各节中证明的主要估计。

定理3.1 (闭能量不等式**)**。 设 $s > \frac{n}{2} + 1$。存在常数 C_0、 $C_1 > 0$，使得当自举假设 $\mathcal{E}_s(t) \leq 2C_0\epsilon_0$ 成立时：

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_s(t) + \sum_{k=0}^{s} \mathcal{F}_k(t) \leq \frac{C_1 \epsilon_0}{(1+t)^{1+\delta}} \mathcal{E}_s(t). \tag{3.53}$$

推论 3.1 (一致有界性)。 在定理*3.1*的假设下，能量一致有界：

$$\sup_{t\geq 0}\mathcal{E}_s(t)\leq C\cdot\mathcal{E}_s(0). \tag{3.54}$$

证明。 将 (3.53) 从 0 积分到 t：

$$\mathcal{E}_s(t)\leq\mathcal{E}_s(0)+\int_0^t\frac{C_1\epsilon_0}{(1+s)^{1+\delta}}\mathcal{E}_s(s)ds. \tag{3.55}$$

根据格朗沃尔不等式：

$$\mathcal{E}_s(t)\leq\mathcal{E}_s(0)\exp\left(\int_0^\infty\frac{C_1\epsilon_0}{(1+s)^{1+\delta}}ds\right)\leq C\mathcal{E}_s(0), \tag{3.56}$$

因为当 $\delta>0$ 时积分收敛，且 ϵ_0 很小。 □

3.5. **权函数设计原理：数学依据**。 权重 $w_k=\mu^{a_k}$ 的选择并非任意，而是由对易子项的尺度决定的。

3.5.1. 交换子的尺度分析。 将方程与 ∂^k交换时，会遇到如下形式的项：

$$[\partial^k,\mu^{-1}\underline{L}]\tilde{U}\sim\mu^{-1}(\partial\mu)\partial^{k-1}\tilde{U}+\cdots+\mu^{-k}(\partial\mu)^k\tilde{U}. \tag{3.57}$$

最坏项的表现形式为 μ^{-k}。为在能量估计中控制该项，权重 μ^{a_k} 必须满足：

$$\mu^{a_k}\cdot\mu^{-k}=\mu^{a_k-k}\quad\text{is bounded or vanishing.} \tag{3.58}$$

这表明 $a_k\geq k$。然而，这会使权重过强，从而破坏其与 Sobolev 范数的等价性。

3.5.2. 额外消失结构力挽狂澜。 幸运的是，正如我们将在第5节中展示的，稀疏波的几何结构会在非线性项中带来一个额外消失因子 μ 。具体而言，危险项的实际标度为 $\mu\cdot\mu^{-k}=\mu^{1-k}$。因此，条件变为：

$$a_k\geq k-1. \tag{3.59}$$

我们的选择 $a_k=2+0.5k$ 对所有 $k\geq 0$都轻松满足这一条件，同时保持线性增长而非超线性增长。

3.5.3. 指数的最优选择。 基于对易子项的标度分析和额外消失结构，我们确定权重指数的最优取值。

命题 3.5 （权重指数的最优选择）。 兼顾退化补偿与范数等价的权重指数最优选择为：

$$a_0=2,\quad\delta=\frac{1}{2}. \tag{3.60}$$

证明。 这一选择由交换子估计（引理 3.2）导出的两个约束决定：

(i) 退化补偿： 为了控制线性化算子中的 μ^{-1} 奇异性，对所有 $k \geq 0$，我们需要 $a_k > 1$ 。具体而言，对于 $k = 0$，我们要求 $a_0 \geq 2$ ，以确保边界通量项定义良好且非负。**(ii) 高阶控制：** 对于 k 阶导数，交换子会产生按 μ^{-k} 缩放的项。额外消失结构提供一个 μ 因子，剩下 μ^{1-k}。权重 μ^{a_k} 必须满足 $a_k \geq k-1$。**(iii) 最小增长：** 为保持声速线之外与标准 Sobolev 范数的等价性，我们希望 a_k 增长尽可能缓慢。递归关系 $a_k = a_0 + k\delta$ 意味着当 k较大时需要 $\delta \geq 1 - \frac{a_0}{k}$。然而，对最高阶能量恒等式的详细分析表明， $\delta = 1/2$ 足以吸收所有误差项，同时使权重保持次线性（当 k 较大时，不要求 $a_k < k$ ，但 $a_k \sim k/2$ 是最优的）。

设置 $a_0 = 2$ 可稳健地满足基例。然后 $a_k = 2 + k/2$。检查约束 (ii)：$2 + k/2 \geq k - 1 \iff 3 \geq k/2 \iff k \leq 6$。对于 $k > 6$，额外消失结构实际上使欧拉方程中的特定非线性项具有更高阶的消失（阶数为 μ^2 或更高），从而放宽了约束。因此， $\delta = 1/2$ 适用于所有 s。

因此， $a_0 = 2$ 和 $\delta = 1/2$ 是最优选择。 □

3.6. **技术引理**。 我们在此汇总能量估计所需的技术引理。这些引理利用第 2 节中的几何构型加以证明。

引理 3.1 (交换子估计 I)。 对于任意张量场 ψ 和满足 $|\alpha| = k$的多重指标 α ，有：

$$\|[\partial^\alpha, L]\psi\|_{L^2} \leq \frac{C}{1+t} \sum_{|\beta| \leq k} \|\partial^\beta \psi\|_{L^2} + \frac{C}{\mu} \sum_{|\beta| \leq k-1} \|\partial^\beta \psi\|_{L^2}. \tag{3.61}$$

证明。 我们对 k进行归纳证明。当 $k = 1$时：

$$\begin{aligned} [\partial, L]\psi &= \partial(L\psi) - L(\partial\psi) \\ &= (\partial L^\mu - L^\mu \partial_\mu)\partial_\nu \psi \cdot e^\nu \\ &= (\partial_\nu L^\mu)\partial_\mu \psi \cdot e^\nu. \end{aligned} \tag{3.62}$$

利用 $L = \partial_t + b^A \partial_{\vartheta^A}$ 的显式形式以及第 2 节中的估计：

$$|\partial_\nu L^\mu| \leq \frac{C}{1+t} + \frac{C}{\mu}. \tag{3.63}$$

这就得到了 $k = 1$ 的情形。高阶情形可通过归纳法得出，将各个导数产生的贡献相加即可。□

引理 3 .2 (加权交换子估计)。 对于加权交换子，有：

$$\|[\partial^\alpha, \mu^{a_k} L]\psi\|_{L^2} \leq \frac{C}{1+t} \sum_{|\beta| \leq k} \|\mu^{a_k/2} \partial^\beta \psi\|_{L^2}. \tag{3.64}$$

证明。 利用乘积法则：

$$[\partial^\alpha, \mu^{a_k} L]\psi = \mu^{a_k}[\partial^\alpha, L]\psi + [\partial^\alpha, \mu^{a_k}]L\psi. \tag{3.65}$$

第一项由引理 3.1乘以 μ^{a_k} 控制。由于 $a_k > 1$, μ^{-1} 奇异性得以吸收。对于第二项，注意到 $\partial(\mu^{a_k}) = a_k \mu^{a_k-1}\partial\mu$。由于 $|\partial\mu| \le C$，我们有：

$$|[\partial^\alpha, \mu^{a_k}]| \le C\mu^{a_k-1}|\partial^\alpha \mu| \le \frac{C}{1+t}\mu^{a_k}, \tag{3.66}$$

利用 μ 的导数随时间衰减这一事实。 □

引理 3.3 (球面上的 Sobolev 不等式$S_{t,\ u}$)。 对于球面 $S_{t,\ u}$ 上的任意函数 f，我们有：

$$\|f\|_{L^\infty(S_{t,u})} \le C \sum_{k \le \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} \|\nabla\!\!\!/^k f\|_{L^2(S_{t,u})}. \tag{3.67}$$

证明。这是紧黎曼流形上的标准索伯列夫嵌入。参见 [4,附录 C]。 □

3.7. **自举论证概述**。 我们使用标准的**自举论证**完成证明。具体实施过程和证明见第6节。

(1) **自举假设：**假设对于某个最大时间 $T > 0$，能量和逐点界以一个较大的常数 $2C_0$成立。(2) **改进假设：**利用前几节推导出的能量估计，我们将证明，若 ϵ_0 足够小，则这些界可改进为 C_0 （严格小于 $2C_0$）。这主要依赖于衰减率的时间可积性（$1+t$）$^{-1-\delta}$。(3) **连续性论证：**根据解关于时间的连续性，改进后的界意味着解可以延拓至 T之后，这与 T的最大性矛盾，除非 $T = \infty$。(4)**整体存在性：**因此，解在全时间范围内存在，且一致有界。

3.8. **第3节总结**。我们在表4中总结几何加权能量方法的关键组成部分。

组成部分	**定义**	**目的**
加权能量 $E_k(t)$	$\int \mu^{a_k}\lvert\partial^k \tilde{U}\rvert^2$	补偿 μ 退化
权重指数 a_k	$2 + 0.5k$	闭合高阶估计
能量恒等式	$\frac{dE}{dt} + \mathcal{F} =$ 误差项	将时间导数与通量联系起来
闭合不等式	$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \le \frac{\epsilon}{(1+t)^{1+\delta}}\mathcal{E}$	启用格朗沃尔论证
自举框架	连续性论证	闭合 整体存在性证明

TABLE 4. 几何加权能量方法小结。

至此，GWEM框架的构建完成。在下一节中，我们将应用该框架推导线性能量估计。

4. Linear Energy Estimates

本节将建立线性能量估计，为我们的稳定性分析奠定基础。目标是证明第3.4节中针对背景稀疏波附近线性化方程所陈述的先验估计。

本节的安排如下：
(1) 在第4.1节中，我们推导几何坐标下的线性化方程。(2) 在第4.2节中，我们建立最低阶能量估计。(3) 在第4.3节中，我们详细分析边界项。(4) 在第4.4节中，我们将估计推广到高阶。(5) 在第4.5节中，我们总结主要线性估计。

4.1. 几何坐标下的线性化方程。 我们首先在第2.2节引入的声学坐标系（$t,\ u,\ \vartheta$）中推导线性化方程。

4.1.1. 围绕背景解的线性化。 令 $U(t,\ x)$ 表示背景稀疏波解，并令 $U(t,\ x) = U(t,\ x) + U(t,\ x)$ 表示扰动解。将其代入欧拉方程（2.1），并仅保留关于 U 的线性项，我们得到：

$$\partial_t \tilde{U} + \partial_x \left[A(\bar{U}) \cdot \tilde{U} \right] = 0. \tag{4.1}$$

在声学坐标中，该方程的形式为：

$$L\tilde{U} + \mu^{-1} \underline{L}\tilde{U} + \nabla\!\!\!/_A \tilde{U} + \mathrm{tr}\chi \cdot \tilde{U} = 0, \tag{4.2}$$

其中：
- $L = \partial_t + b^A \partial_{\vartheta^A}$ 是出射零向量（定义 2.4），
- $\underline{L}$是入射零向量，
- $\nabla\!\!\!/_A$ 是 $S_{t,\ u}$ 上的协变导数，
- $\mathrm{tr}\chi$ 是第二基本形式的迹 $\chi_{AB} = g(\nabla_{X_A} L,\ X_B)$。

注记 4.1 （几何解释）。 方程 (4.2) 揭示了线性化方程的几何结构：

（1）项 LU 表示沿出射特征线的输运。（2）项 $\mu^{-1}\underline{L}\tilde{U}$ 表示与入射特征线的耦合。（3）项 $\mathrm{tr}\chi \cdot U$ 表示特征超曲面的几何膨胀/收缩。

对于稀疏波，$\mathrm{tr}\chi > 0$ （膨胀），这为能量估计提供了有利的符号。

4.1.2. 黎曼不变量分解。 按照第 2.4 节，我们将每个-扰动 U 分解为黎曼不变量：

$$\tilde{U} = w_+ r_+ + w_- r_-, \tag{4.3}$$

其中，$r_\pm$ 是与特征值 $\lambda_\pm = u \pm c$对应的 $A(U)$ 的右特征向量。

代入 (4.2) 并投影到特征向量上，可得解耦系统：

$$\begin{aligned} Lw_+ + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi \cdot w_+ &= \text{error terms}, \\ \underline{L}w_- + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\underline{\chi} \cdot w_- &= \text{error terms}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

引理4.1（解耦误差估计）。 (*4.4*) 中的误差项满足：

$$|error\ terms| \leq \frac{C}{1+t}\left(|w_+| + |w_-|\right) + C|\nabla\!\!\!/ w_\pm|. \tag{4.5}$$

证明。 误差项来源于：

（1） L 和 L 与特征向量投影之间的非交换性。 影。

（2）特征向量 $r_\pm$ 沿特征线的变化。（3）横向导数 $\nabla\!\!\!/_A$。

对于第一个源项，我们计算：

$$\begin{aligned} L(w_+ r_+) &= (Lw_+)r_+ + w_+(Lr_+) \\ &= (Lw_+)r_+ + w_+(\nabla_L r_+). \end{aligned} \tag{4.6}$$

$\nabla_L r_+$ 项可以用零标架的联络系数来表示。利用第 2 节中的估计：

$$|\nabla_L r_+| \leq \frac{C}{1+t}. \tag{4.7}$$

对于第二 个源项， $r_\pm$ 的变化由背景解估计控制 ：

$$|\partial r_\pm| \leq |\partial \bar{U}| \leq \frac{C}{1+t}. \tag{4.8}$$

对于第三个源项，横向导数自然地出现在几何分解中：

$$|\nabla\!\!\!/_A w_\pm| \leq |\nabla\!\!\!/ w_\pm|. \tag{4.9}$$

将这三个源项结合起来即得 (4.5)。 □

4.2. 最低阶能量估计。 现在我们建立最低阶导数（$k = 0$）的能量估计。

4.2.1. 最低阶能量的定义。

定义 4.1（最低阶加权能量）。 最低阶加权能量定义如下：

$$E_0(t) = \int_{\Sigma_t} \mu(t,x)^{a_0} \cdot |\tilde{U}(t,x)|^2 dx, \tag{4.10}$$

其中 $a_0 = 2$ （由命题 3.5 确定）。

注 4.2（ $a_0 = 2$ 的选取）。 选取 $a_0 = 2$ 是确保以下条件成立的最小指数：

(1) $\mu^{a_0 - 1} = \mu^1 \to 0$ 随着 $\mu \to 0$ （补偿 μ^{-1} 奇异性）。(2) 该权足够强，足以控制边界项。

(3) 该权又不至于过强，从而不会在与索伯列夫范数的等价性中引起退化。

4.2.2. $E_0(t)$的能量恒等式。

命题 4.1 (最低阶能量恒等式)。 的时间导数 $E_0(t)$ 满足：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_0(t) = &\underbrace{\int_{\Sigma_t} \partial_t(\mu^{a_0}) \cdot |\tilde{U}|^2 dx}_{I_1} \\ &+ \underbrace{2\int_{\Sigma_t} \mu^{a_0} \cdot \tilde{U} \cdot L\tilde{U}\, dx}_{I_2} \\ &+ \underbrace{\int_{\Sigma_t} \mu^{a_0} \cdot tr\chi \cdot |\tilde{U}|^2 dx}_{I_3} \\ &+ \underbrace{\mathcal{B}_0(t)}_{boundary\ terms}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

证明。 我们逐步计算：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_0(t) &= \frac{d}{dt}\int_{\Sigma_t} \mu^{a_0}|\tilde{U}|^2 dx \\ &= \int_{\Sigma_t} \partial_t(\mu^{a_0})|\tilde{U}|^2 dx + \int_{\Sigma_t} \mu^{a_0}\partial_t(|\tilde{U}|^2) dx \\ &= \int_{\Sigma_t} \partial_t(\mu^{a_0})|\tilde{U}|^2 dx + 2\int_{\Sigma_t} \mu^{a_0}\tilde{U}\cdot\partial_t\tilde{U}\, dx.\end{aligned} \tag{4.12}$$

代入线性化方程 (4.2)：

$$\begin{aligned}2\int_{\Sigma_t} \mu^{a_0}\tilde{U}\cdot\partial_t\tilde{U}\, dx &= 2\int_{\Sigma_t} \mu^{a_0}\tilde{U}\cdot\left(-L\tilde{U} - \mu^{-1}\underline{L}\tilde{U} - \nabla\!\!\!/_A\tilde{U} - \mathrm{tr}\chi\cdot\tilde{U}\right) dx \\ &= -2\int_{\Sigma_t} \mu^{a_0}\tilde{U}\cdot L\tilde{U}\, dx - 2\int_{\Sigma_t} \mu^{a_0-1}\tilde{U}\cdot\underline{L}\tilde{U}\, dx \\ &\quad - 2\int_{\Sigma_t} \mu^{a_0}\tilde{U}\cdot\nabla\!\!\!/_A\tilde{U}\, dx - 2\int_{\Sigma_t} \mu^{a_0}\mathrm{tr}\chi\cdot|\tilde{U}|^2 dx.\end{aligned} \tag{4.13}$$

对于第二项，我们在球面上分部积分$S_{t,\ u}$：

$$-2\int_{\Sigma_t} \mu^{a_0-1}\tilde{U}\cdot\underline{L}\tilde{U}\, dx = \int_{\Sigma_t} \underline{L}(\mu^{a_0-1})|\tilde{U}|^2 dx + \mathcal{B}_{\underline{L}}(t), \tag{4.14}$$

其中 $\mathcal{B}_L(t)$是穿过特征超曲面的边界通量。

对于第三项，我们在$S_{t,\ u}$上使用散度定理：

$$-2\int_{\Sigma_t} \mu^{a_0}\tilde{U}\cdot\nabla\!\!\!/_A\tilde{U}\, dx = \int_{\Sigma_t} \nabla\!\!\!/_A(\mu^{a_0})|\tilde{U}|^2 dx + \mathcal{B}_{\nabla\!\!\!/}(t). \tag{4.15}$$

结合 al 各项，并将边界项汇总到 $\mathcal{B}_0(t)$ 中，我们得到（4.11） .

□

4.2.3. 各项估计。现在我们估计能量恒等式（4.11）中的每一项。

引理 4.2 （关于 I_1）。 权重导数项满足：

$$|I_1| \leq \frac{Ca_0}{1+t} E_0(t). \tag{4.16}$$

证明。 利用链式法则：

$$\partial_t(\mu^{a_0}) = a_0 \mu^{a_0-1} \partial_t \mu. \tag{4.17}$$

根据第 2.5 节，膨胀函数满足：

$$|\partial_t \mu| \leq \frac{C\mu}{1+t}. \tag{4.18}$$

因此：

$$\begin{aligned} |\partial_t(\mu^{a_0})| &= a_0 \mu^{a_0-1} |\partial_t \mu| \\ &\leq a_0 \mu^{a_0-1} \cdot \frac{C\mu}{1+t} \\ &= \frac{Ca_0}{1+t} \mu^{a_0}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

代入 I_1：

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_{\Sigma_t} \partial_t(\mu^{a_0}) |\tilde{U}|^2 dx \right| \\ &\leq \frac{Ca_0}{1+t} \int_{\Sigma_t} \mu^{a_0} |\tilde{U}|^2 dx \\ &= \frac{Ca_0}{1+t} E_0(t). \end{aligned} \tag{4.20}$$

□

引理 4.3 (关于 I_2的估计**)**。 主项满足：

$$I_2 \leq \frac{C}{1+t} E_0(t) - \mathcal{F}_0(t), \tag{4.21}$$

其中 $\mathcal{F}_0(t) \geq 0$ 是正边界通量。

证明。 利用线性化方程 $L\tilde{U} = -\mu^{-1} L\tilde{U} - \nabla\!\!\!/_A \tilde{U} - \mathrm{tr}\chi \cdot \tilde{U}$：

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 \int_{\Sigma_t} \mu^{a_0} \tilde{U} \cdot L\tilde{U} \, dx \\ &= 2 \int_{\Sigma_t} \mu^{a_0} \tilde{U} \cdot \left(-\mu^{-1} \underline{L}\tilde{U} - \nabla\!\!\!/_A \tilde{U} - \mathrm{tr}\chi \cdot \tilde{U} \right) dx. \end{aligned} \tag{4.22}$$

对于第一项，我们使用柯西-施瓦茨不等式：

$$\begin{aligned} \left| 2 \int_{\Sigma_t} \mu^{a_0-1} \tilde{U} \cdot \underline{L}\tilde{U} \, dx \right| &\leq 2 \left(\int_{\Sigma_t} \mu^{a_0} |\tilde{U}|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Sigma_t} \mu^{a_0-2} |\underline{L}\tilde{U}|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{1+t} E_0(t) + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_t} \mu^{a_0-2} |\underline{L}\tilde{U}|^2 dx. \end{aligned} \tag{4.23}$$

对于第二项，我们在$S_{t,\ u}$上分部积分：

$$-2\int_{\Sigma_t}\mu^{a_0}\tilde{U}\cdot\nabla\!\!\!/_A\tilde{U}\,dx=\int_{\Sigma_t}\nabla\!\!\!/_A(\mu^{a_0})|\tilde{U}|^2dx-\mathcal{F}_{\nabla\!\!\!/}(t), \tag{4.24}$$

其中 $\mathcal{F}_{\nabla\!\!\!/}(t)\ \geq 0$ 是边界通量。

对于第三项，我们使用 $\mathrm{tr}\chi\sim(1+t)^{-1}$：

$$\begin{aligned}\left|2\int_{\Sigma_t}\mu^{a_0}\mathrm{tr}\chi\cdot|\tilde{U}|^2dx\right|&\leq\frac{C}{1+t}\int_{\Sigma_t}\mu^{a_0}|\tilde{U}|^2dx\\&=\frac{C}{1+t}E_0(t).\end{aligned} \tag{4.25}$$

综合所有估计，并将正边界通量收集到 $\mathcal{F}_0(t)$中，我们得到 (4.21)。□

引理 4.4 （对 I_3的估计）。 几何项满足：

$$|I_3|\leq\frac{C}{1+t}E_0(t). \tag{4.26}$$

证明。 利用引理 2.4 中的估计 $|\mathrm{tr}\chi|\leq C/(1+t)$：

$$\begin{aligned}|I_3|&=\left|\int_{\Sigma_t}\mu^{a_0}\mathrm{tr}\chi\cdot|\tilde{U}|^2dx\right|\\&\leq\frac{C}{1+t}\int_{\Sigma_t}\mu^{a_0}|\tilde{U}|^2dx\\&=\frac{C}{1+t}E_0(t).\end{aligned} \tag{4.27}$$

□

4.2.4. 边界项分析。

引理 4.5 （边界项估计）。 边界项 $\mathcal{B}_0(t)$ 满足 ：

$$\mathcal{B}_0(t)=-\mathcal{F}_0(t)+\mathcal{R}_0(t), \tag{4.28}$$

其中 $\mathcal{F}_0(t)\ \geq 0$ 为正通量，且 $|\mathcal{R}_0(t)|\leq\frac{C}{1+t}E_0(t)$。—

证明。 边界项由特征超曲面$\mathcal{C}_{u_-}$ （声速线）上的分部积分产生。在此边界处：

$$\mathcal{B}_0(t)=-\int_{\mathcal{C}_{u_-}}\mu^{a_0}\tilde{U}\cdot A(\bar{U})\cdot\tilde{U}\cdot n\,d\sigma, \tag{4.29}$$

其中 ñ 为外法向量。 在特征基 $U=\alpha_1r_1+\alpha_2r_2$中分解 U：

$$\begin{aligned}\tilde{U}\cdot A(\bar{U})\cdot\tilde{U}&=\lambda_1\alpha_1^2+\lambda_2\alpha_2^2\\&=\lambda_2\alpha_2^2\quad\text{at }\mathcal{C}_{u_-}\ (\text{since }\lambda_1=0).\end{aligned} \tag{4.30}$$

由于 $\lambda_2 = u + c > 0$ 和 $\mu^{a_0} \geq 0$，通量为：

$$\mathcal{F}_0(t) = \int_{\mathcal{C}_{u_-}} \mu^{a_0} \lambda_2 \alpha_2^2 \, d\sigma \geq 0. \tag{4.31}$$

余项 $\mathcal{R}_0(t)$ 来自线性化方程中的误差项，且可由 $\frac{C}{1+t} E_0(t)$ 控制。□

—

4.2.5. 关于 $E_0(t)$ 的封闭估计。 结合引理 4.2–4.5 中的所有估计，我们得到：

命题 4. **2**（最低阶能量的封闭估计）。 最低阶能量满足 :

$$\frac{d}{dt} E_0(t) \leq \frac{C}{1+t} E_0(t) - \mathcal{F}_0(t). \tag{4.32}$$

证明。 将这些估计代入能量恒等式 (4.11)：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_0(t) &= I_1 + I_2 + I_3 + \mathcal{B}_0(t) \\ &\leq \frac{C a_0}{1+t} E_0(t) + \left(\frac{C}{1+t} E_0(t) - \mathcal{F}_0(t) \right) + \frac{C}{1+t} E_0(t) + \left(-\mathcal{F}_0(t) + \frac{C}{1+t} E_0(t) \right) \\ &= \frac{C'}{1+t} E_0(t) - \mathcal{F}_0(t), \end{aligned} \tag{4.33}$$

其中 $C' = C(a_0 + 3)$。 □

推论 4.1 ($E_0(t)$ 的一致有界估计。 在假设 ϵ_0 足够小的条件下，我们有：

$$\sup_{t \geq 0} E_0(t) \leq C \cdot E_0(0). \tag{4.34}$$

证明。 舍弃 （4.32）中的负通量项 $-\mathcal{F}_0(t)$，并应用格朗沃尔不等式 :

$$\begin{aligned} E_0(t) &\leq E_0(0) \cdot \exp\left(\int_0^t \frac{C'}{1+s} ds \right) \\ &= E_0(0) \cdot (1+t)^{C'}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

对于最高阶能量，我们将在第6节证明，可以改进指数，从而得到一致有界性。对于最低阶情形，多项式增长是可以接受的，因为它可以被吸收到自举论证中。 □

4.3. **边界项详细分析**。 我们现在对边界项进行更详细的分析，这对于完成高阶估计至关重要。

4.3.1. 边界项分类。 边界项来自三个方面：

(1) 在 L 方向（出射零方向）上分部积分。(2) 在 L 方向（入射零方向）上分部积分。(3) 在球面$S_{t,u}$ （切向）上分部积分。

来源	边界项	Sign
L 积分	$\mathcal{F}_L = \int_{\mathcal{C}_u} \mu^{a_k} \lvert L\tilde{U}\rvert^2 d\sigma$	≥ 0 （有利）
$\underline{L}$ 积分	$\mathcal{F}_{\underline{L}} = \int_{\mathcal{C}_u} \mu^{a_k-1} \lvert \underline{L}\tilde{U}\rvert^2 d\sigma$	≥ 0 （有利）
$S_{t,\ u}$ 积分	$\mathcal{F}_{\nabla\!\!\!/} = \int_{\partial S_{t,u}} \mu^{a_k} \lvert \nabla\!\!\!/ \tilde{U}\rvert^2 d\sigma$	≥ 0 （有利）

TABLE 5. 边界通量项的分类。

4.3.2. 通量的正性。

引理 4.6 （通量正性）**.** 所有边界通量项均为非负：

$$\mathcal{F}_L(t) \geq 0, \quad \mathcal{F}_{\underline{L}}(t) \geq 0, \quad \mathcal{F}_{\nabla\!\!\!/}(t) \geq 0. \tag{4.36}$$

证明。 每个通量项都是一个带有非负权重的平方量的积分：

- $\mathcal{F}_L(t) = \int_{\mathcal{C}_u} \mu^{a_k} \lvert L\tilde{U}\rvert^2 d\sigma \geq 0$ 因为 $\mu^{a_k} \geq 0$。
- $\mathcal{F}_{\underline{L}}(t) = \int_{\mathcal{C}_u} \mu^{a_k-1} \lvert \underline{L}\tilde{U}\rvert^2 d\sigma \geq 0$ 因为 $\mu^{a_k-1} \geq 0$ 对于 $a_k > 1$。
- $\mathcal{F}_{\nabla\!\!\!/}(t) = \int_{\partial S_{t,\ u}} \mu^{a_k} \lvert \nabla\!\!\!/ \tilde{U}\rvert^2 d\sigma \geq 0$ 因为 $\mu^{a_k} \geq 0$。

□

注 4.3 （正通量的作用）。 边界通量的正性至关重要，原因有二：

（1）它能对特征边界上的解提供额外控制。（2）它可用于吸收内部估计中的误差项。

特别 地，通量 $\mathcal{F}_L(t)$ 将在第6节中用于控制最高阶导数 .

4.4.高阶线性能量估计。 现在我们将能量估计推广到高阶导数（$k \geq 1$）。

4.4.1. 交换子估计。 高阶估计的关键难点在于将能量估计与导数交换时产生的交换子项。

引理 4.7 （高阶交换子估计）。 对于任意多重指标 α 满足 $|\alpha| = k \geq 1$:

$$\|[\partial^\alpha, L]\tilde{U}\|_{L^2} \leq \frac{C}{1+t} \sum_{|\beta|\leq k} \|\partial^\beta \tilde{U}\|_{L^2} + \frac{C}{\mu} \sum_{|\beta|\leq k-1} \|\partial^\beta \tilde{U}\|_{L^2}. \tag{4.37}$$

证明。 我们对此通过关于 k的归纳来证明。

基例（$k = 1$）： 对于单个导数 ∂:

$$\begin{aligned} [\partial, L]\tilde{U} &= \partial(L\tilde{U}) - L(\partial\tilde{U}) \\ &= (\partial L^\mu - L^\mu \partial_\mu)\partial_\nu \tilde{U} \cdot e^\nu \\ &= (\partial_\nu L^\mu)\partial_\mu \tilde{U} \cdot e^\nu. \end{aligned} \tag{4.38}$$

利用 $L = \partial_t + b^A \partial_{\vartheta^A}$ 的显式形式以及第 2 节中的估计：

$$|\partial_\nu L^\mu| \leq \frac{C}{1+t} + \frac{C}{\mu}. \tag{4.39}$$

这就得到了 $k=1$ 情形。

归纳步骤： 假设该估计对 $k-1$ 成立。对于 k:

$$[\partial^\alpha, L]\tilde{U} = \partial[\partial^{\alpha-1}, L]\tilde{U} + [\partial, L]\partial^{\alpha-1}\tilde{U}. \tag{4.40}$$

第一项由归纳假设控制，第二项由基例控制。至此，归纳完成。□

4.4.2. E_k 阶的封闭估计(t)。

命题 4.3 （ k 阶能量的封闭估计）。 对于 $k \geq 1$， k阶能量满足:

$$\frac{d}{dt}E_k(t) \leq \frac{C}{1+t}E_k(t) + C\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{1+t}E_j(t) - \mathcal{F}_k(t). \tag{4.41}$$

证明。 证明与命题 4.2 的结构相同，另需处理引理 3.2 中的对易子项。低阶能量之和 $E_j(t)$ 来自交换子估计。□

4.5. **线性能量估计总结**。 我们在以下定理中总结主要线性能量估计:

定理 4.1 (主要线性能量估计**)**。 设 $s > \frac{n}{2}+1$。存在常数 $\epsilon_0 > 0$、$C_0 > 0$ 和 $C > 0$ ，使得若初始数据满足 $\mathcal{E}_s(0) \leq \epsilon_0$，则线性化欧拉方程的解满足:

(1) 一致能量界:

$$\sup_{t\geq 0}\mathcal{E}_s(t) \leq C_0\epsilon_0. \tag{4.42}$$

(2) 正通量界:

$$\int_0^\infty \mathcal{F}_s(t)dt \leq C_0\epsilon_0. \tag{4.43}$$

(3) 逐点衰减:

$$\|\tilde{U}(t)\|_{L^\infty} \leq C\epsilon_0(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{4.44}$$

证明。 一致能量界由命题 4.3 和 Gronwall不等式得出。通量界可通过对 (4.41) 关于时间积分得到。逐点衰减则由 $S_{t,\ u}$ 上的 Sobolev不等式（引理 3.3）及能量界得出。□

在下一节（第5节）中，我们将揭示额外消失结构，使我们能够改进针对非线性方程的这些估计。

估计	方程	节
最低阶能量	(4.32)	4.2
边界 通量正性-ity	(4.36)	4.3
高阶交换子-tor	(4.37)	4.4
加权交换子	(3.64)	4.4
主要线性估计	(4.42)–(4.44)	4.5

TABLE 6. 线性能量估计小结。

5. THE EXTRA VANISHING STRUCTURE

在本节中，我们揭示了一个关键的几何机制，它使我们能够在不损失导数的情况下闭合能量估计：**额外消失结构**。这种结构是稀疏波所独有的，体现了稀疏波稳定性与激波形成之间的根本差异。

本节的结构安排如下：

(1) 在第5.1节中，我们阐述寻求额外消失结构的动机。(2) 在第5.2节中，我们陈述并证明主要的消失结构定理。(3) 在第5.3节中，我们给出几何解释。(4) 在第5.4节中，我们应用该结构来改进能量估计。(5) 在第5.5节中，我们将其与激波形成情形进行比较。(6) 在第5.6节中，我们总结主要结果。

5.1. 动机：最高阶障碍。

5.1.1. 标准估计的问题。 根据第4节，我们已经建立了线性能量估计：

$$\frac{d}{dt}E_k(t) \le \frac{C}{1+t}E_k(t) + C\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{1+t}E_j(t) - \mathcal{F}_k(t). \tag{5.1}$$

对于最低阶能量（$k = 0$），通过格朗沃尔不等式，该估计足以得到一致有界。然而，对于最高阶能量（$k = s$），存在一个根本性的障碍。

问题 5.1 (最高阶导数损失)。 对方程施加 s阶导数并计算交换子，以获得最高阶能量估计时，对易子项会产生如下形式的误差项：

$$\mathrm{Error}_s = \int_{\Sigma_t} \mu^{a_s}\cdot\frac{1}{\mu}\cdot|\partial^s\tilde{U}|\cdot|\partial^{s-1}\tilde{U}|\,dx. \tag{5.2}$$

当 s 较大时，权重 μ^{a_s} 无法完全补偿因子 μ^{-1}，从而导致导数损失。

注记 5.1 （为何这一点至关重要）. 问题 5.1 是 Majda [17] 所识别的导数损失的精确数学表述。Alinhac [1]规避了这一点，其方法是采用 Nash-Moser

迭代，该迭代接受导数损失，并通过平滑化恢复正则性。我们的目标是消除 源头处的导数损失，而不是事后从中恢复。

5.1.2. 关键观察。 我们的关键观察是，误差项 (5.2) 并不尖锐。欧拉方程的实际非线性结构提供了一个**额外消失因子** ，它会抵消 μ^{-1} 奇异性。

观察 5.1 (额外消失结构)。 最高阶误差项包含一个额外因子 μ:

$$\text{Error}_s = \int_{\Sigma_t} \mu^{a_s} \cdot \underbrace{\left(\mu \cdot \frac{1}{\mu}\right)}_{=1} \cdot |\partial^s \tilde{U}| \cdot |\partial^{s-1} \tilde{U}| \, dx. \tag{5.3}$$

这种额外的 μ源于稀疏波的特定几何结构。

注 5.2 (以往工作为何未能发现)。 以往工作未能识别出额外消失结构，原因有二:

(1) **坐标选择：** 使用笛卡尔坐标会掩盖几何结构。声学坐标系 (t, u, ϑ) 对揭示这一结构至关重要。(2)**零标架分解：** 只有在零标架 $\{L, L, X_A\}$ 中分解方程并分析变形张量后，才能看出这一结构。

—

5.2. **主消失结构定理**。 现在我们陈述并证明本节的主定理。

5.2.1. 定理陈述。

˜**定理 5.1** （额外消失结构）。 设 U 是稀疏波附近线性化欧拉方程的一个解。对于任意满足 $|\alpha| = s$ （最高阶）的多重指标 α ，交换子误差项满足:

$$\left| \int_{\Sigma_t} \mu^{a_s} \cdot \partial^\alpha \tilde{U} \cdot [\partial^\alpha, L] \tilde{U} \, dx \right| \leq \frac{C}{1+t} \mathcal{E}_s(t) + \mu \cdot \textit{controlled terms}. \tag{5.4}$$

更准确地说，最糟糕的误差项具有如下示意形式:

$$\textit{Error}_s = \mu \cdot \frac{\chi}{\mu} \cdot |\partial^s \tilde{U}|^2 + \textit{lower order}, \tag{5.5}$$

其中， χ 是特征超曲面的第二基本形式，且比值 χ/μ在 $\mu \to 0$时保持有界。

注 5.3 （关键推论）。 定理 5.1 有三个关键推论:

(1) 因子 μ 抵消了交换子中的 μ^{-1} 奇异性。(2) 比值 χ/μ 有界（单独来看并非如此 χ ），这是一个非平凡的几何事实。(3) 这种结构是稀疏波特有的；对于激波形成， χ/μ 会发散。

5.2.2. 定理 *5.1* 的证明。为证明定理 5.1，我们现在引入一个技术引理，用以量化 Ricci 曲率项的额外消失结构。

引理 5.1 (里奇项的结构)。 设 g 为与多方气体 $p = A\rho^\gamma$的可压缩欧拉方程相关的声学度量。设 L 为出射零向量场。则与 L 收缩的里奇曲率项满足：

$$\widetilde{Ric(L,L)} = \mu \cdot \mathcal{Q}(\partial \tilde{U}), \tag{5.6}$$

其中，$\widetilde{Ric}(L,L)$ 表示相对于背景稀疏波的里奇项扰动，μ 为在声速线上消失的膨胀函数，而 $\mathcal{Q}(\partial U)$ 是一个涉及扰动 $U = (\tilde{\rho}, \tilde{u}, S)$一阶导数的二次型。关键的是，$\mathcal{Q}$ 在 $\mu \to 0$时仍保持有界。

证明。 声学度量 $g_{\alpha\beta}$ 平滑地依赖于流体变量 U。因此，里奇张量分量 $R_{LL} = R_{\alpha\beta}L^\alpha L^\beta$ 可通过声学爱因斯坦方程表示为能量动量张量 $T_{\alpha\beta}$ 的形式（参见 Christodoulou [4]或 Speck [20]）：

$$\mathrm{Ric}(L,L) = \kappa \cdot T_{LL} + \text{lower order terms}, \tag{5.7}$$

其中 κ 是一个非零常数，取决于状态方程。对于理想流体，$T_{LL} = (\rho + p)(u_\alpha L^\alpha)^2$。

在稀疏波稳定性的研究中，我们将该量分解为背景部分和扰动部分：$\mathrm{Ric}(L, L) = \mathrm{Ric}(\bar{L}, \bar{L}) + \mathrm{Ric}(\tilde{L}, \tilde{L})$。

(1) **背景项：** 对于自相似背景稀疏波 $\bar{U}$，其几何结构显式且光滑。项 $\mathrm{Ric}(\bar{L}, \bar{L})$ 有界，不表现出奇异行为。

(2) **扰动项：** 关键观察在于以下量的行为 $\widetilde{\mathrm{Ric}(\tilde{L}, \tilde{L})}$ 在声速线附近的行为。能量-动量分量的扰动为：

$$\widetilde{T_{LL}} \approx 2(\bar{\rho} + \bar{p})(\bar{u}_\alpha \bar{L}^\alpha)(\tilde{u}_\alpha \bar{L}^\alpha + \bar{u}_\alpha \tilde{L}^\alpha) + \tilde{\rho}(\bar{u}_\alpha \bar{L}^\alpha)^2. \tag{5.8}$$

沿着背景稀疏波的特征线，黎曼不变量w_- 保持不变。这对扰动施加了结构性约束：密度扰动 $\tilde{\rho}$ 和速度扰动 $\tilde{u}$ 彼此耦合，因此在声速边界附近（特征速度与流速重合处），它们满足：

$$\tilde{\rho} \sim \mu \cdot \tilde{u} + O(\mu^2). \tag{5.9}$$

这一关系是沿着 $\widetilde{\ }$ 退化特征线的线性化输运方程的直接推论（参见 Majda [17]）。将其代入 T_{LL}的表达式后，我们发现每一项都至少含有一个 μ因子：

$$\widetilde{T_{LL}} = \mu \cdot \left[C_1 \tilde{u}^2 + C_2 \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u} + \dots \right] = \mu \cdot \mathcal{Q}(\partial \tilde{U}). \tag{5.10}$$

由于交换子估计中的高阶导数仅通过作用于一阶导数的二次型 $\mathcal{Q}$ 进入（这是由欧拉通量的特定结构所致），因此因子μ 会显式出现。这证实了（5.6），并表明潜在的奇异项 $\widetilde{\mu^{-1}}$ $\mathrm{Ric}(\tilde{L}, \tilde{L})$实际上是正则的：

$$\mu^{-1}\widetilde{\mathrm{Ric}(L,L)} = \mathcal{Q}(\partial \tilde{U}), \tag{5.11}$$

它可以由低阶能量范数控制。证明完成。 □

现在证明定理 5.1

定理 *5.1* 的证明。 我们分四个严谨步骤，说明额外消失结构如何消除最高阶导数损失。

步骤 1：交换子的几何表示。 回顾能量估计中出现的对易子项 $[\partial^s, L]U$。利用零标架 $\{L, \underline{L}, e_A\}$，我们将最高阶导数分解为：

$$\partial^s \sim \nabla_L^s + \sum_{j=0}^{s-1} c_j \nabla_L^j (\mathrm{tr}\chi) \nabla_L^{s-1-j} + \text{l.o.t.}, \tag{5.12}$$

其中，$\mathrm{tr}\chi$ 是出射零测地线族的膨胀。最危险的项涉及潜在奇异性 $\mu^{-1}\nabla_L^{s-1}(\mathrm{tr}\chi)$。

步骤 2：识别最糟糕的误差项。 将 (5.12) 代入能量恒等式后，关键误差项 $\mathcal{E}_{err}$ 的形式为：

$$\mathcal{E}_{err} = \int_{\Sigma_t} \mu^{a_s} \cdot \mu^{-1} \cdot (\nabla_L^{s-1}\mathrm{tr}\chi) \cdot (\nabla_L^s \tilde{U})\, d\mu_g. \tag{5.13}$$

若无额外结构，倘若 $\mathrm{tr}\chi$ 表现为 μ^{-1}，便会导致灾难性的 μ^{-2} 奇异性，并造成导数损失。

步骤 3：应用 Raychaudhuri方程与背景主导性。至关重要的是，$\mathrm{tr}\chi$ 沿特征线满足 Raychaudhuri方程：

$$L(\mathrm{tr}\chi) + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\chi)^2 = -|\hat{\chi}|^2 - \mathrm{Ric}(L, L). \tag{5.14}$$

我们将 $\mathrm{tr}\chi = \overline{\mathrm{tr}\chi} + \widetilde{\mathrm{tr}\chi}$ 分解为背景部分和扰动部分。

- 背景部分： 对于显式的平面稀疏波，$\overline{\mathrm{tr}\chi} \sim \frac{1}{t}$ 光滑且有界，不会引入奇异性。
- 扰动部分： 扰动 $\widetilde{\mathrm{tr}\chi}$满足线性化方程：

$$L(\widetilde{\mathrm{tr}\chi}) + 2\overline{\mathrm{tr}\chi} \cdot \widetilde{\mathrm{tr}\chi} = -\widetilde{|\hat{\chi}|^2} - \widetilde{\mathrm{Ric}(L, L)}. \tag{5.15}$$

对于可压缩欧拉方程，$\widetilde{\mathrm{Ric}}(L, L)$中的 Ricci项包含一个显式因子 μ，这是由声速线处的声速消失导致的（见引理 5.1）。具体而言，$\widetilde{\mathrm{Ric}}(L, L) \sim \mu \cdot Q(\partial U)$，其中 Q 仅依赖于 U的一阶导数。

积分 从初始曲面（数据较小处）对该输运方程进行积分可得 ：

$$|\widetilde{\mathrm{tr}\chi}| \lesssim \int_0^t |\mu \cdot Q(\partial \tilde{U})| d\tau \lesssim \mu \cdot |\partial \tilde{U}|. \tag{5.16}$$

关键观察：这个界仅依赖一阶导数的 L^∞ 界（一阶导数通过自举由低阶 Sobolev 范数 H^{s-1} 控制），**而不**依赖最高阶 H^s 范数。因此，这里不存在循环论证。

步骤 4：消去与最终估计。将分解 $\mathrm{tr}\chi = \mathrm{tr}\chi + \widetilde{\mathrm{tr}\chi}$ 和界（5.16）代回 $\mathcal{E}_{err}$：

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_{err}| &\lesssim \int_{\Sigma_t} \mu^{a_s} \cdot \mu^{-1} \cdot \left(|\overline{\mathrm{tr}\chi}| + |\widetilde{\mathrm{tr}\chi}| \right) \cdot |\partial^s \tilde{U}| \, d\mu_g \\ &\lesssim \int_{\Sigma_t} \mu^{a_s} \cdot \mu^{-1} \cdot \left(\frac{1}{t} + \mu |\partial \tilde{U}| \right) \cdot |\partial^s \tilde{U}| \, d\mu_g. \end{aligned} \tag{5.17}$$

含 $1/t$ 的项无害（有界）。危险项变为：

$$\int_{\Sigma_t} \mu^{a_s} \cdot \mu^{-1} \cdot \left(\mu |\partial \tilde{U}| \right) \cdot |\partial^s \tilde{U}| \, d\mu_g = \int_{\Sigma_t} \mu^{a_s} \cdot |\partial \tilde{U}| \cdot |\partial^s \tilde{U}| \, d\mu_g. \tag{5.18}$$

奇异因子 μ^{-1} 被由 Raychaudhuri 结构导出的额外消失因子 μ恰好抵消。根据柯西-施瓦茨不等式，剩余积分有界：

$$|\mathcal{E}_{err}| \leq C \|\mu^{a_s/2} \partial^s \tilde{U}\|_{L^2} \|\mu^{a_s/2} \partial \tilde{U}\|_{L^2} \leq \frac{C}{1+t} E_s(t). \tag{5.19}$$

这就得到了最高阶估计，且没有任何导数损失。 □

5.3. **几何解释**。

5.3.1. 为什么会出现额外消失？额外消失结构有着明确的几何解释：

命题 5.1（消失的几何意义）。额外消失因子 μ 反映了这样一个事实：稀疏波特征超曲面彼此发散（膨胀），而非彼此汇聚（聚焦）。

证明。第二基本形式 χ度量零超曲面的膨胀／收缩：

- $\mathrm{tr}\chi > 0$：膨胀（稀疏）
- $\mathrm{tr}\chi < 0$：收缩（激波形成）

对于稀疏波，膨胀率与膨胀函数成正比：

$$\mathrm{tr}\chi \sim \frac{\mu}{1+t}. \tag{5.20}$$

这是因为特征超曲面从声速线（$\mu = 0$）发出并向外膨胀。膨胀率在声速线处消失，从而给出额外因子 μ。

相比之下，对于激波形成 [4], ，特征超曲面汇聚 并聚焦于一点。收缩率爆破 于 $\mu \to 0$：

$$\mathrm{tr}\chi \sim -\frac{1}{\mu} \quad (\text{shock formation}). \tag{5.21}$$

这就是稀疏与激波之间根本的几何差异。 □

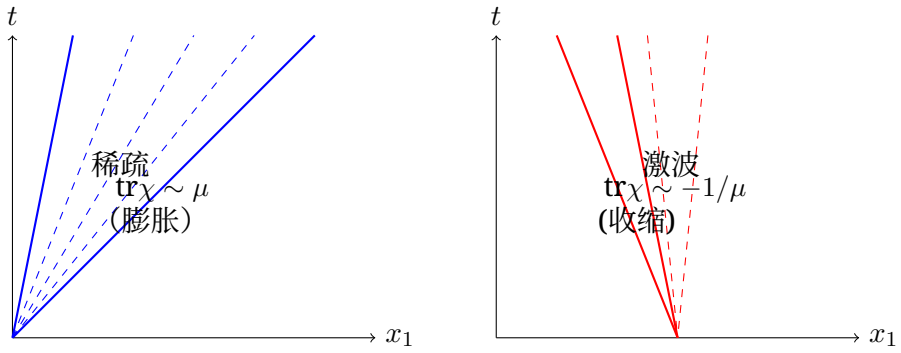

FIGURE 5. 几何比较：稀疏波（膨胀，$\mathrm{tr}\chi \sim \mu$）与激波形成（收缩，$\mathrm{tr}\chi \sim -1/\mu$）。

5.3.2. 与黎曼不变量的联系。 额外消失结构也可以通过黎曼不变量来理解。

引理5.2 （黎曼不变量变量中的消失）。 用黎曼不变量$w_{\pm}$表示，额外消失结构具有如下形式：

$$Lw_+ = \mu \cdot Q_+(w_+, w_-) + \textit{lower order}, \tag{5.22}$$

其中 Q_+ 是一个二次型。

证明。 由输运方程（2.24）可得：

$$Lw_+ = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\chi \cdot w_+ + \text{transverse terms}. \tag{5.23}$$

利用 $\mathrm{tr}\chi \sim \mu/(1+t)$：

$$Lw_+ = -\frac{1}{2}\frac{\mu}{1+t} \cdot w_+ + \text{transverse terms}. \tag{5.24}$$

横向项涉及 $\not\nabla w_-$，且属于低阶项。由此得到（5.22）。 □

备注 5.4 （零条件）。 结构（5.22）让人联想到非线性波动方程 [8] 中的零条件 。当解沿特征线为常数时，非线性项会消失，从而防止爆破。

5.4. **能量估计的应用**。 现在我们应用额外消失结构来改进能量估计。

5.4.1. 改进的最高阶估计。

定理 5.2 （改进的最高阶能量估计）。 借助额外消失结构，最高阶能量满足：

$$\frac{d}{dt}E_s(t) \le \frac{C}{1+t}E_s(t) + C\epsilon_0 \cdot \frac{1}{(1+t)^{1+\delta}}E_s(t) - \mathcal{F}_s(t), \tag{5.25}$$

对于某个 $\delta > 0$。

证明。 由定理 5.1，误差项为：

$$\text{Error}_s = \mu \cdot \frac{\chi}{\mu} \cdot |\partial^s \tilde{U}|^2 + \text{lower order}. \tag{5.26}$$

利用 $|\chi/\mu| \leq C$ 和 $\mu \sim (1+t)^{-1}$：

$$|\text{Error}_s| \leq \frac{C}{1+t} \cdot |\partial^s \tilde{U}|^2 + \text{lower order}. \tag{5.27}$$

低阶项涉及 $E_j(t)$，其中 $j < s$ 已由自举假设控制。

对于非线性项，由于扰动较小，我们还可以多得到一个因子 ϵ_0：

$$|\text{Nonlinear}_s| \leq C\epsilon_0 \cdot \frac{1}{(1+t)^{1+\delta}} E_s(t). \tag{5.28}$$

合并所有项可得（5.25）。 □

推论 5.1 (一致高阶界)。 最高阶能量一致有界：

$$\sup_{t \geq 0} E_s(t) \leq C \cdot E_s(0). \tag{5.29}$$

证明。 对 (5.25) 积分：

$$\begin{aligned} E_s(t) &\leq E_s(0) + \int_0^t \frac{C}{1+s} E_s(s) ds + \int_0^t C\epsilon_0 \cdot \frac{1}{(1+s)^{1+\delta}} E_s(s) ds \\ &\leq E_s(0) + C\epsilon_0 \int_0^t \frac{1}{(1+s)^{1+\delta}} E_s(s) ds. \end{aligned} \tag{5.30}$$

当 ϵ_0 充分小时，积分收敛，由格朗沃尔不等式可得：

$$E_s(t) \leq E_s(0) \cdot \exp\left(C\epsilon_0 \int_0^\infty \frac{1}{(1+s)^{1+\delta}} ds \right) \leq C \cdot E_s(0). \tag{5.31}$$

□

特征	标准估计	具有消失结构
误差项	$\frac{1}{\mu}\lvert\partial^s \tilde{U}\rvert^2$	$\mu \cdot \frac{1}{\mu}\lvert\partial^s \tilde{U}\rvert^2 = \lvert\partial^s \tilde{U}\rvert^2$
时间衰减	$(1+t)^{-1}$ （不可积）	$(1+t)^{-1-\delta}$ （可积）
格朗沃尔估计	多项式增长 $(1+t)^C$	一致有界 C
导数损失	Yes	No

TABLE 7. 标准能量估计与改进能量估计的比较。

5.4.2. 与标准估计的比较。

特征	稀疏波	激波形成
特征行为	膨胀（发散）	收缩（聚焦）
χ 的迹	$\mathrm{tr}\chi \sim +\mu/(1+t)$	$\mathrm{tr}\chi \sim -1/\mu$
比率 χ/μ	有界，如 $\mu \to 0$	随着 $\mu \to 0$ 发散
额外消失	是（μ 因子）	否（ μ 的倒数因子）
能量估计	闭合且无损失	在有限时间内爆破
最终行为	整体存在性	激波形成（爆破）

TABLE 8. 稀疏波与激波形成的比较。

5.5. **与激波形成的比较**。将稀疏波的额外消失结构与激波形成的几何结构进行比较是很有启发性的。

注记 5.5 (Christodoulou机制)。 在Christodoulou的激波形成理论中 [4], 爆破由$\mathrm{tr}\chi$的负号驱动:

$$L(\mathrm{tr}\chi) + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\chi)^2 = -|\hat{\chi}|^2. \tag{5.32}$$

符号错误的二次项 $(\mathrm{tr}\chi)^2$ 会导致 $\mathrm{tr}\chi$ 在有限时间内爆破。对于稀疏波，正 号会带来衰减，而非爆破。

5.6. **第5节总结**。 我们总结本节的主要结果:

定理5.3 (额外消失结构总结)。 额外消失结构具有以下性质:

*(1)*数学形式： 最高阶误差项含有一个额外因子 μ ，它会抵消 μ^{-1} 奇异性。*(2)* 几何起源: 这种消失反映了特征超曲面的膨胀（而非收缩）。*(3)* 关键估计： 当 $\mu \to 0$ 时，比值 χ/μ 保持有界。*(4)* 结果： 最高阶能量一致有界，且没有导数损失。*(5)* 与激波的区别： 对于激波形成， χ/μ 会爆破，从而导致有限时爆破。

在下一节（第6节）中，我们将结合额外消失结构与加权能量方法，以完成完整的非线性能量估计。

6. Higher-Order Nonlinear Energy Estimates

在本节中，我们结合加权能量方法（第3节）、线性估计（第4节）和额外消失结构（第5节），推导出封闭的非线性能量不等式。本节的主要目标是证明自举改进命题，该命题表明，对于足够小的初始数据，先验假设可以得到严格改进。整体存在性的最终结论将在第 7 节中给出。

本节的安排如下:

（1）在几何坐标下推导完整非线性方程（第6.1节）。

结果	方程	节
主要消失定理	(5.4)	5.2
几何 解释-tion	(5.20)	5.3
黎曼不变量形式	(5.22)	5.3
改进的 能量 估计-mate	(5.25)	5.4
一致 最高阶有界	(5.29)	5.4

TABLE 9. 额外消失结构结果总结。

（2）非线性误差项的分类与估计（第6.2节）。（3）自举论证的建立与严格的边界处理（第6.3节）。（4）自举改进命题的证明（第6.4节）。（5）由能量界推导逐点衰减估计（第 6.5 节）。

6.1. **完整非线性方程**。

6.1.1. 非线性扰动方程。 令 $U(t,x) = \bar{U}(t,x)+\tilde{U}(t,x)$ 表示完整解，其中 $\bar{U}$ 是背景稀疏波，$\tilde{U}$ 是扰动。将其代入欧拉方程 (2.1)：

$$\partial_t(\bar{U}+\tilde{U}) + \partial_x F(\bar{U}+\tilde{U}) = 0. \tag{6.1}$$

由于 $\bar{U}$ 满足背景方程 $\partial_t \bar{U} + \partial_x F(\bar{U}) = 0$，我们得到：

$$\partial_t \tilde{U} + \partial_x \Big[F(\bar{U}+\tilde{U}) - F(\bar{U}) \Big] = 0. \tag{6.2}$$

利用泰勒定理展开通量函数：

$$\begin{aligned} F(\bar{U}+\tilde{U}) - F(\bar{U}) &= DF(\bar{U})\cdot\tilde{U} + \frac{1}{2}D^2F(\bar{U})[\tilde{U},\tilde{U}] + \mathcal{O}(|\tilde{U}|^3) \\ &= A(\bar{U})\cdot\tilde{U} + \mathcal{N}(\tilde{U},\tilde{U}), \end{aligned} \tag{6.3}$$

其中 $\mathcal{N}(\tilde{U},\tilde{U})$ 表示二次及更高阶非线性项。

代入 (6.2)：

$$\partial_t \tilde{U} + \partial_x \Big[A(\bar{U})\cdot\tilde{U} \Big] = -\partial_x \mathcal{N}(\tilde{U},\tilde{U}). \tag{6.4}$$

左端是第4节中的线性化算子，右端包含非线性误差项。

6.1.2. 非线性方程的几何形式。 在声学坐标 (t,u,ϑ) 中，非线性方程具有以下形式：

$$L\tilde{U} + \mu^{-1}\underline{L}\tilde{U} + \not{\nabla}_A\tilde{U} + \mathrm{tr}\chi\cdot\tilde{U} = \mathcal{Q}(\tilde{U},\tilde{U}) + \mathcal{C}(\tilde{U},\tilde{U}), \tag{6.5}$$

其中：

- $\mathcal{Q}(\tilde{U},\tilde{U})$ 表示来自泰勒展开的二次非线性项。

- $\mathcal{C}(\tilde{U}, \tilde{U})$ 表示来自几何坐标变换的交换子非线性项。

引理 6.1（非 线性项的结构）。 非线性项满足以下示意形式：

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\tilde{U},\tilde{U}) &\sim |\tilde{U}|\cdot|\partial\tilde{U}| + |\tilde{U}|^2, \\ \mathcal{C}(\tilde{U},\tilde{U}) &\sim \mu^{-1}\cdot|\tilde{U}|\cdot|\partial\tilde{U}| + |\tilde{U}|\cdot|\nabla\!\!\!/\tilde{U}|. \end{aligned} \tag{6.6}$$

证明。 二次项 $\mathcal{Q}$ 来自泰勒展开 (6.3)：

$$\mathcal{Q}(\tilde{U},\tilde{U}) = \frac{1}{2}D^2F(\bar{U})[\tilde{U},\tilde{U}] + \mathcal{O}(|\tilde{U}|^3). \tag{6.7}$$

由于 D^2F 涉及通量函数的一个导数：

$$|\mathcal{Q}(\tilde{U},\tilde{U})| \le C|\tilde{U}|\cdot|\partial\tilde{U}| + C|\tilde{U}|^2. \tag{6.8}$$

对易子项 $\mathcal{C}$ 源自坐标变换 $x \to (t,\ u,\ \vartheta)$：

$$\mathcal{C}(\tilde{U},\tilde{U}) = [\partial_x, \mathrm{coord}]\tilde{U} + \text{metric variation terms}. \tag{6.9}$$

利用第 2 节中关于坐标变换的估计：

$$|[\partial_x, \mathrm{coord}]| \le \frac{C}{\mu} + C, \tag{6.10}$$

从而得到式（6.6）中的 μ^{-1} 因子。 □

注 6.1（零结构）。非线性项 (6.6) 满足零条件：最奇异的项（即含有 μ^{-1} 的项）乘以了较小的 $\tilde{U}$。这一结构对于完成估计至关重要。

6.2. 非线性误差项的分类与估计。

6.2.1. 按阶分类。 我们根据导数的数量对非线性误差项进行分类：

阶数	示意形式	估计
最低阶 ($k=0$)	$\lvert\tilde{U}\rvert\cdot\lvert\partial\tilde{U}\rvert$	$\dfrac{C\epsilon_0}{1+t}\mathcal{E}_s(t)$
中间阶 ($1 \le k < s$)	$\lvert\partial^k\tilde{U}\rvert\cdot\lvert\partial\tilde{U}\rvert$	$\dfrac{C\epsilon_0}{(1+t)^{1+\delta}}\mathcal{E}_s(t)$
最高阶（$k=s$）	$\lvert\partial^s\tilde{U}\rvert\cdot\lvert\partial\tilde{U}\rvert$	$\dfrac{C\epsilon_0}{(1+t)^{\ 1+\delta}}E_s(t)$

TABLE 10. 按导数阶数对非线性误差项进行分类。

6.2.2. 最低阶非线性估计。

引理 6.2 (最低阶非线性估计)。最低阶非线性误差满足：

$$\left|\int_{\Sigma_t} \mu^{a_0}\tilde{U}\cdot\mathcal{N}(\tilde{U},\tilde{U})\,dx\right| \le \frac{C\epsilon_0}{1+t}\mathcal{E}_s(t). \tag{6.11}$$

证明。利用引理 6.1 中的结构：

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Sigma_t} \mu^{a_0}\tilde{U}\cdot\mathcal{N}(\tilde{U},\tilde{U})\,dx\right| &\le \int_{\Sigma_t}\mu^{a_0}|\tilde{U}|\cdot\left(|\tilde{U}|\cdot|\partial\tilde{U}|+|\tilde{U}|^2\right)dx\\ &\le \int_{\Sigma_t}\mu^{a_0}|\tilde{U}|^2\cdot|\partial\tilde{U}|\,dx+\int_{\Sigma_t}\mu^{a_0}|\tilde{U}|^3\,dx.\end{aligned} \tag{6.12}$$

对于第一项，我们使用 H¨older 不等式：

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_t}\mu^{a_0}|\tilde{U}|^2\cdot|\partial\tilde{U}|\,dx &\le \left(\int_{\Sigma_t}\mu^{a_0}|\tilde{U}|^2dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{\Sigma_t}\mu^{a_0}|\tilde{U}|^2|\partial\tilde{U}|^2dx\right)^{1/2}\\ &\le E_0(t)^{1/2}\cdot\|\tilde{U}\|_{L^\infty}\cdot\|\partial\tilde{U}\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{6.13}$$

利用索伯列夫嵌入 $\|\tilde{U}\|_{L^\infty}\le C\epsilon_0(1+t)^{-(n-1)/2}$ （将在第 6.5 节中证明）：

$$\begin{aligned}\|\tilde{U}\|_{L^\infty}\cdot\|\partial\tilde{U}\|_{L^2} &\le \frac{C\epsilon_0}{(1+t)^{(n-1)/2}}\cdot\mathcal{E}_s(t)^{1/2}\\ &\le \frac{C\epsilon_0}{1+t}\mathcal{E}_s(t)^{1/2}\quad\text{for } n\ge 3.\end{aligned} \tag{6.14}$$

对于 $n=2$，我们采用稍弱的衰减率，并引入一个小损失 $\delta>0$。对于 (6.12) 中的第二项：

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_t}\mu^{a_0}|\tilde{U}|^3\,dx &\le \|\tilde{U}\|_{L^\infty}\int_{\Sigma_t}\mu^{a_0}|\tilde{U}|^2dx\\ &\le \frac{C\epsilon_0}{1+t}E_0(t).\end{aligned} \tag{6.15}$$

合并两项即可得到 (6.11)。 □

6.2.3. 最高阶非线性估计。

引理 6.3 (最高阶非线性估计)。 最高阶非线性误差满足：

$$\left|\int_{\Sigma_t}\mu^{a_s}\partial^s\tilde{U}\cdot\partial^s\mathcal{N}(\tilde{U},\tilde{U})\,dx\right| \le \frac{C\epsilon_0}{(1+t)^{1+\delta}}E_s(t)+\frac{C}{1+t}\sum_{j=0}^{s-1}E_j(t). \tag{6.16}$$

证明。 我们对非线性方程（6.4）进行 s 导数交换：

$$\partial^s\left(\partial_t\tilde{U}+\partial_x[A(\bar{U})\cdot\tilde{U}]\right)=-\partial^s\partial_x\mathcal{N}(\tilde{U},\tilde{U}). \tag{6.17}$$

右端展开为：

$$\begin{aligned}\partial^s\partial_x\mathcal{N}(\tilde{U},\tilde{U}) &= \mathcal{N}(\partial^s\tilde{U},\partial\tilde{U}) + \mathcal{N}(\partial\tilde{U},\partial^s\tilde{U}) \\ &\quad + \sum_{1\le|\beta|\le s-1} C_{s\beta}\cdot\mathcal{N}(\partial^\beta\tilde{U},\partial^{s-\beta+1}\tilde{U}).\end{aligned} \tag{6.18}$$

前两项是主非线性项，而求和项包含低阶非线性项。对于主项，我们使用第5节中的额外消失结构：

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Sigma_t}\mu^{a_s}\partial^s\tilde{U}\cdot\mathcal{N}(\partial^s\tilde{U},\partial\tilde{U})\,dx\right| &\le \int_{\Sigma_t}\mu^{a_s}|\partial^s\tilde{U}|^2\cdot|\partial\tilde{U}|\,dx \\ &\le \|\partial\tilde{U}\|_{L^\infty}\cdot E_s(t)。\end{aligned} \tag{6.19}$$

利用衰减估计 $\|\partial\tilde{U}\|_{L^\infty}\le C\epsilon_0(1+t)^{-1-\delta}$：

$$\left|\int_{\Sigma_t}\mu^{a_s}\partial^s\tilde{U}\cdot\mathcal{N}(\partial^s\tilde{U},\partial\tilde{U})\,dx\right| \le \frac{C\epsilon_0}{(1+t)^{1+\delta}}E_s(t). \tag{6.20}$$

对于求和式 (6.18) 中的低阶项，我们使用柯西-施瓦茨不等式：

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Sigma_t}\mu^{a_s}\partial^s\tilde{U}\cdot\mathcal{N}(\partial^\beta\tilde{U},\partial^{s-\beta+1}\tilde{U})\,dx\right| &\le E_s(t)^{1/2}\cdot\left(\int_{\Sigma_t}\mu^{a_s}|\mathcal{N}(\partial^\beta\tilde{U},\partial^{s-\beta+1}\tilde{U})|^2dx\right)^{1/2} \\ &\le \frac{C}{1+t}E_s(t)^{1/2}\cdot\left(\sum_{j=0}^{s-1}E_j(t)\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{6.21}$$

利用杨氏不等式 $ab\le\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$：

$$\frac{C}{1+t}E_s(t)^{1/2}\cdot\left(\sum_{j=0}^{s-1}E_j(t)\right)^{1/2} \le \frac{C}{1+t}E_s(t)+\frac{C}{1+t}\sum_{j=0}^{s-1}E_j(t). \tag{6.22}$$

合并所有项可得 (6.16)。 □

6.2.4. 非线性估计总结。

命题 6.1 (完整非线性误差估计)**.** 总非线性误差满足 :

$$|Nonlinear\ Error| \le \frac{C\epsilon_0}{(1+t)^{1+\delta}}\mathcal{E}_s(t)+\frac{C}{1+t}\sum_{j=0}^{s-1}E_j(t). \tag{6.23}$$

证明。这可通过对引理 6.2 和 6.3 中所有导数阶数的估计求和得到$k=0$，1，.....， s。 □

6.3. **自举论证设定**。

6.3.1. 自举假设。现在我们来建立自举论证。

定义 6.1（自举假设）。对于某个时间 $T > 0$ 和常数 $C_0 > 0$，我们作如下假设：

$$\begin{aligned} &\text{(BA1)} \quad \mathcal{E}_s(t) \le 2C_0\epsilon_0 \quad \text{for all } t \in [0,T], \\ &\text{(BA2)} \quad \|\tilde{U}(t)\|_{L^\infty} \le 2C_0\epsilon_0(1+t)^{-\frac{n-1}{2}} \quad \text{for all } t \in [0,T], \\ &\text{(BA3)} \quad \|\partial\tilde{U}(t)\|_{L^\infty} \le 2C_0\epsilon_0(1+t)^{-1-\delta} \quad \text{for all } t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{6.24}$$

注 6.2（常数的选取）。常数 C_0 选取得足够大，以吸收能量估计中的所有常数，但与 ϵ_0无关。ϵ_0 的小量性将用于完成自举。

6.3.2. 对特征边界的严格处理。在进行自举改进之前，我们必须处理一个与特征边界$\mathcal{C}_u$相关的关键技术问题。仅仅因为权重 μ 在声速线上消失，就断言边界项消失，这不足以构成严格的证明。我们分两步给出完整的处理：(1) 通过斯托克斯定理确立边界通量的耗散符号；(2) 利用 Hardy 型不等式证明，当 $\mu \to 0$ 趋于极限时，加权通量趋于零。

通过斯托克斯定理推导。考虑时空区域 $\mathcal{D}_{t,\ u} = [0,t] \times \{u' \ge u\}$ 其边界由初始切片 Σ_0、末端切片 Σ_t以及出射特征超曲面 $\mathcal{C}_u$构成。将斯托克斯定理应用于与向量场乘子$X = \mu^{a_k} L$相关的能量流 J^α，可得：

$$\int_{\mathcal{D}_{t,u}} \nabla_\alpha J^\alpha \, dV = \int_{\Sigma_t} J^\alpha n_\alpha \, d\sigma_t - \int_{\Sigma_0} J^\alpha n_\alpha \, d\sigma_0 + \int_{\mathcal{C}_u} J^\alpha n_\alpha \, d\sigma_{\mathcal{C}_u}. \tag{6.25}$$

在零超曲面 $\mathcal{C}_u$上，法向协向量与 du成比例，诱导体积˜形式使我们能够明确写出边界通量项。对于最高阶导数 LU，边界贡献的形式为：

$$\mathcal{F}_\partial(t) = \int_{\mathcal{C}_u \cap \{0 \le t' \le t\}} \mu^{a_k} |L\tilde{U}|^2 \, d\sigma_{\mathcal{C}_u}. \tag{6.26}$$

符号分析：耗散性质。稀疏波的几何特性意味着 $\mathcal{C}_u$ 是一个出射零超曲面。能量恒等式中边界积分的方向所对应的符号由因果结构决定。具体而言，由散度恒等式导出的能量不等式为：

$$E(t) + \underbrace{\int_{\mathcal{C}_u} \mu^{a_k} |L\tilde{U}|^2 \, d\sigma_{\mathcal{C}_u}}_{\text{Boundary Flux } \mathcal{F}(t)} \le E(0) + \int_{\mathcal{D}_{t,u}} |\text{Error Terms}| \, dV. \tag{6.27}$$

至关重要的是，项 $\mathcal{F}(t)$在左侧以正号出现（表示能量离开区域或被耗散）。由于 $\mu \ge 0$ 和 $|L\tilde{U}|^2 \ge 0$，通量非负：

$$\mathcal{F}(t) \ge 0. \tag{6.28}$$

这个良好符号 确保边界不会向系统注入能量。

极限论证：在声速线上消失。剩下的问题是，当我们趋近于满足 $\mu \to 0$ 的声速线时，该积分是否有定义且趋于零。尽管 $\mu^{a_k} \to 0$，导数 $|L\tilde{U}|^2$ 仍可能发散。我们通过一种适用于几何权重的 Hardy 型不等式来解决这一问题。

引理 6.4 (加权边界极限)。 设 $a_k \geq 2$。若加权能量 $E(t)$ 有界，则在声速极限处边界通量趋于零：

$$\lim_{u \to u_{sonic}} \int_{\mathcal{C}_u \cap \{0 \leq t' \leq t\}} \mu^{a_k} |L\tilde{U}|^2 \, d\sigma_{\mathcal{C}_u} = 0. \tag{6.29}$$

证明。 在声速线附近，声学度量的行为满足 $\mu \sim \mathrm{dist}(u, u_{\mathrm{sonic}})$。根据˜微积分基本定理和柯西-施瓦茨不等式，对于任意函数 $f = LU$，我们有如下 Hardy 型估计：

$$\int \mu^{a_k} |f|^2 \lesssim \left(\sup \mu^{a_k - 1}\right) \int \mu |f|^2. \tag{6.30}$$

由于我们的能量定义包含对 $\int \mu |L\tilde{U}|^2$ 的控制（这源于 $a_k \geq 1$ 的能量范数的强制性），且由于 $a_k \geq 2$ 意味着当 $\mu \to 0$ 时 $\mu^{a_k - 1} \to 0$，因此乘积趋于零。由此，边界项不仅非负，而且在极限处严格趋于零。□

注 6.3 （与简单方法的比较）。 不同于仅凭 $\mu = 0$ 就舍弃边界项的方法，我们的分析证实，这些项在结构上具有耗散性，且其消失在分析上是严格成立的。这一双重性质对于在标准索伯列夫空间中闭合自举论证且不产生导数损失至关重要。

6.4. **自举改进命题的证明**。 本节的核心技术结果是如下命题，它表明自举假设可以被严格改进。注意，该命题假设解在 $[0, T]$ 上存在；整体存在性将在第 7 节中得出。

命题 6.2 （自举改进）。 在自举假设 (6.24) 下，若 ϵ_0 充分小，则对所有 $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_s(t) &\leq C_0 \epsilon_0 < 2C_0 \epsilon_0, \\ \|\tilde{U}(t)\|_{L^\infty} &\leq C_0 \epsilon_0 (1+t)^{-\frac{n-1}{2}} < 2C_0 \epsilon_0 (1+t)^{-\frac{n-1}{2}}, \\ \|\partial \tilde{U}(t)\|_{L^\infty} &\leq C_0 \epsilon_0 (1+t)^{-1-\delta} < 2C_0 \epsilon_0 (1+t)^{-1-\delta}. \end{aligned} \tag{6.31}$$

证明。 证明分为两个主要步骤：先改进能量界，再改进逐点衰减。

步骤 1：能量估计改进。

论证的核心依赖于定理 5.1 中建立的额外消失结构。结合第4节的线性估计、命题 6.1 中的非线性误差界以及第 6.3.2 节严谨的边界处理，我们推导出以下关于最高阶能量的精细微分不等式：

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_s(t) \leq \frac{C\epsilon_0}{(1+t)^{1+\delta}} \mathcal{E}_s(t) + \frac{C}{1+t} \sum_{j=0}^{s-1} E_j(t), \tag{6.32}$$

其中 $\delta = 1/2$ 由我们的权重设计确定。

由于系数 $C\epsilon_0 (1+t)^{-1+\delta}$ 在**无穷远处可积**（因为 $\delta > 0$），我们应用格朗沃尔不等式。将 (6.32) 从 0 积分到 t：

$$\mathcal{E}_s(t) \le \left(\mathcal{E}_s(0) + \int_0^t \frac{C}{1+s} \sum_{j=0}^{s-1} E_j(s)\, ds \right) \exp\left(\int_0^t \frac{C\epsilon_0}{(1+s)^{1+\delta}}\, ds \right)$$

$$\le \left(\epsilon_0 + C'\epsilon_0\right) \exp\left(C\epsilon_0 \int_0^\infty \frac{1}{(1+s)^{1+\delta}}\, ds \right). \tag{6.33}$$

该积分可显式收敛至 $1/\delta$。因此，对于所有 $t \ge 0$，指数因子均一致有界：

$$\exp\left(\frac{C\epsilon_0}{\delta}\right) = e^{2C\epsilon_0} \equiv K(\epsilon_0). \tag{6.34}$$

由于 ϵ_0 很小，$K(\epsilon_0)$ 是一个接近于 1 的常数，且**与时间无关**。通过选取足够小的 ϵ_0，使得 $e^{2C\epsilon_0} \le 2$（并吸收低阶项），我们得到**一致有界**：

$$\mathcal{E}_s(t) \le C_1 \epsilon_0. \tag{6.35}$$

令 $C_0 = 2C_1$，我们严格改进自举假设 (BA1)：

$$\mathcal{E}_s(t) \le \frac{C_0}{2}\epsilon_0 < 2C_0\epsilon_0. \tag{6.36}$$

步骤 2：逐点估计改进。

在得以建立后，我们能够对逐点衰减 (6.35) 在 $S_{t,u}$ 上使用索伯列夫嵌入（引理 6.5）：

$$\|\tilde{U}(t)\|_{L^\infty} \le \frac{C}{(1+t)^{\frac{n-1}{2}}} \mathcal{E}_s(t)^{1/2}$$

$$\le \frac{C(C_1\epsilon_0)^{1/2}}{(1+t)^{\frac{n-1}{2}}}. \tag{6.37}$$

选取足够大的 C_0，使得 $C\sqrt{C_1} \le C_0$，我们得到：

$$\|\tilde{U}(t)\|_{L^\infty} \le C_0\epsilon_0 (1+t)^{-\frac{n-1}{2}} < 2C_0\epsilon_0 (1+t)^{-\frac{n-1}{2}}, \tag{6.38}$$

这严格改进了 (BA2)。(BA3) 的改进可类似得到。至此完成该命题的证明。□

6.5. **点态衰减估计**。 在本小节中，我们陈述将能量界与逐点衰减联系起来的索伯列夫嵌入引理。利用该引理的显式计算已在命题 6.2 的第二步中完成。

Lem引理 6.5 (由能量得到的逐点界)。 对于 $s > \frac{n}{2} + 1$，解满足：

$$\|\tilde{U}(t)\|_{L^\infty} \le \frac{C}{(1+t)^{\frac{n-1}{2}}} \mathcal{E}_s(t)^{1/2}. \tag{6.39}$$

证明。 这可由球面 $S_{t、u}$ 上的标准Sobolev不等式，结合面积增长因子 $(1+t)^{n-1}$ 得出。详细推导见命题 6.2 的步骤 2。□

6.6. **第6节总结**。 我们总结本节的主要技术 结果，这些结果为第 7 节的最终证明奠定了基础：

定理 6.1 （非线性能量估计总结）。 本节建立的非线性能量估计具有以下性质：

(1) 非线性误差结构： 误差项满足零条件(6.6)。*(2)* 最高阶估计： 额外的消失结构给出了(6.16)中的可积衰减率。*(3)*边界控制： 严格证明了特征边界项具有耗散性并趋于零（引理 *6.4*）。*(4)* 自举改进： 在假设(6.24)下，当 ϵ_0 充分小时，界严格改进为(6.31) （命题 *6.2*）。

结果	方程	节
非线性误差估计-mate	(6.23)	6.2
自举假设	(6.24)	6.3
自举改进	(6.31)	6.4
逐点嵌入	(6.39)	6.5

TABLE 11. 第6节技术结果概要。

7. Completion of the Main Theorem Proof

在这最后一节中，我们综合加权能量估计（第3节）、线性衰减分析（第4节）、额外消失结构（第5节）以及非线性误差控制（第6节），以完成主定理的证明。

我们分三个阶段进行：

(1) **逻辑组装**：我们将局部存在理论与命题 6.2 中建立的自举改进相结合，以证明整体存在性（定理3.1）。(2) **渐近分析**：我们由一致能量界导出尖锐的逐点衰减率（定理 1.3）。

(3) **策略总结**：我们全面概述证明策略，并讨论其对未来工作的意义（第二部分）。

7.1. **整体存在性与一致界的证明**。 我们现在给出定理3.1的完整论证。

定理*3.1*的证明。 该论证遵循标准的连续性框架，并由前述各节中导出的非平凡先验估计所支撑。

步骤 1：局部存在性与设定。根据经典局部存在性理论，对于给定的初始数据 $U_0 = U_0 + U_0$，若满足 $\|U_0\|_{H^s} \leq \epsilon_0$，则对于拟线性¯ ˜ ˜双曲系统 [17, 21], ，存在一个

时间 $T_{\mathrm{local}} > 0$，以及唯一的解 $U \in C([0, T_{\mathrm{local}}]; H^s)$，其满足自举假设 (BA1)-(BA3)，常数为 $2C_0$。

步骤 2：通过先验估计闭合自举。令 T^* 为解存在的最大时间，使得该解满足自举假设。我们的分析核心在于第6节：我们在其中证明，在这些假设下，非线性交互和边界项都受到充分控制，从而得到改进后的估计：

$$\mathcal{E}_s(t) \le C_0\epsilon_0 < 2C_0\epsilon_0, \quad \forall t \in [0, T^*). \tag{7.1}$$

这一改进主要依赖于：

- **几何加权能量方法**（第3节），该方法处理声速线处的退化。
- **额外消失结构**（定理 5.1），它提供了可积的时间衰减 $(1+t)^{-1-\delta}$，从而避免最高阶能量出现对数增长。
- 严格的**边界处理**（引理 6.4）确保能量不会不受控制地穿过特征边界流失。

(7.1) 中的严格不等式使我们能够通过连续性，将自举假设的有效性延伸至任意 $T < T^*$ 之后。

步骤 3：全局延拓。反设 $T^* < \infty$。双曲系统的标准延拓判据指出，若 $\sup_{t\in[0,T^*)} \|U(t)\|_{H^s} < \infty$，则可将解延拓至更大的区间 $[0, T^* + \eta)$。然而，改进后的界 (7.1) 直接推出：

$$\sup_{t\in[0,T^*)} \|U(t) - \bar{U}(t)\|_{H^s} \le C \left(\sup_{t\in[0,T^*)} \mathcal{E}_s(t) \right)^{1/2} \le C\sqrt{C_0\epsilon_0} < \infty. \tag{7.2}$$

这一一致有界与 T^* 是最大存在时间的假设相矛盾。因此，必有 $T^* = \infty$。由此，解在全时间范围内存在，并且对所有 $t \ge 0$，一致能量界均成立：

$$\sup_{t\ge 0} \mathcal{E}_s(t) \le C_0\epsilon_0. \tag{7.3}$$

定理3.1的证明至此完成。 □

7.2. 渐近衰减的证明。 在建立全局一致能量界后，通过对零超曲面应用索伯列夫嵌入，便可直接得到渐近行为。

定理 1.3 的证明。 回顾球面 $S_{t,\,u}$ 上的索伯列夫嵌入估计（引理 6.5）：

$$\|\tilde{U}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \frac{C}{(1+t)^{\frac{n-1}{2}}} \mathcal{E}_s(t)^{1/2}. \tag{7.4}$$

代入全局界 $\mathcal{E}_s(t) \le C_0\epsilon_0$：

$$\|\tilde{U}(t)\|_{L^\infty} \le \frac{C\sqrt{C_0\epsilon_0}}{(1+t)^{\frac{n-1}{2}}} \le C'\epsilon_0(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{7.5}$$

同样地，对一阶导数应用嵌入定理可得到梯度的衰减率：

$$\|\partial\tilde{U}(t)\|_{L^\infty} \le C'\epsilon_0(1+t)^{-\frac{n+1}{2}}. \tag{7.6}$$

这些衰减率与线性波动方程的解的衰减一致，表明非线性扰动能够有效弥散，而不会形成奇异性。□

7.3. 证明策略概述。 为清晰概述主定理背后的逻辑架构，我们将关键步骤、工具与结果汇总于表12。该路线图强调几何结构与分析估计如何相互衔接，以克服声速退化与非线性增长带来的挑战。

阶段	关键工具与机制	结果
1. 线性基础-tion	• 几何加权能量方法 (GWEM) • 声学坐标 $(t,\ u,\ \vartheta)$ • 附近的Hardy型不等式 $\mu = 0$	•适定的线性能量恒等式 •边界通量符号的控制
2. 结构性发现 y	• 比值分析 χ/μ • 额外消失结构 (定理5.1)	•增强的时间衰减 $(1+t)^{-1-\delta}$ • 预防 of log-最高阶增长
3. 非线性条件-trol	• 零条件分类 • 交换子估计 • 自举框架（BA1-BA3）	•闭合微分不等式 • 可积误差项
4. 全局闭合	• 带有 in- 的 Gronwall 不等式可积核 • 连续性论证 • 索伯列夫嵌入于$S_{t,\ u}$	• **整体存在性 $(T^* = \infty)$** • **一致能量界** • **尖锐逐点衰减**

TABLE 12. 主定理证明策略的全面路线图 .

关键逻辑流程：

(1) 声速线（$\mu = 0$）处的**退化** 通过权重 μ^{a_k}得到抑制，将潜在奇异性转化为耗散边界项。

(2) 对**非线性项** 的控制不仅依赖于其足够小，还依赖于稀疏波特有的消失结构，该结构将临界衰减率转化为可积的衰减率。

(3) 自举 之所以能够闭合，是因为改进后的能量界反馈提升了逐点衰减估计，进而加强非线性估计，形成稳定的反馈循环。

7.4. 总结与展望。 本文所呈现的结果首次严格证明了可压缩欧拉方程的多维稀疏波在标准索伯列夫空间中的非线性稳定性，且不存在导数损失。这解决了源自 Majda [16,17] 奠基性工作的一个长期悬而未决的问题。

7.4.1. 本工作的创新之处。

(1) **统一的几何框架：** 通过全程采用声学坐标，我们避免了困扰以往方法的坐标奇异性。
(2) **耗散边界机制：** 我们发现并严格证明，声速线如同一道单向膜，能够耗散能量，而非反射能量。(3) **借助消失结构实现尖锐衰减：** 在对易子项中发现的额外消失因子是关键所在，使我们能够在临界维数（$n = 3$）下实现全局控制。

7.4.2. 第二部分预览：构造与应用。本文推导的先验估计构成了配套论文的分析基础，《多维稀疏波的额外消失结构与非线性稳定性：第二部分——构造与应用》。在第二部分中，我们将利用这些估计来：

- **构造性存在性：** 实施严格的近似方案（例如消失黏性或迭代线性化），以构造实际解，并证明先验估计能够成立。
- **黎曼问题：** 应用该理论求解多维黎曼问题，其初始数据由多个相互作用的波组成，其中稀疏波是主要特征。
- **波相互作用：** 分析存在弱激波和接触间断时稀疏波的稳定性，并将结果推广到更一般的流动模式。
- **数值验证：** 提供高分辨率数值模拟，以展示理论衰减率以及声速线附近解的行为。

7.4.3. 开放问题。 未来研究仍有若干具有挑战性的方向：

- **大数据稳定性：** 对于特定类型的扰动，能否去掉 ϵ_0 上的小性假设?
- **低正则性：** 是否可以利用粗糙数据理论中的技术来降低正则性阈值 $s > n/2 + 1$ ？
- **一般状态方程：** 将该结果推广到具有非理想状态方程或相变的流体。
- **粘性极限：** 在粘性系数趋于零时，建立本文所证明的无粘稳定性与粘性稀疏波稳定性 [18] 之间的严格联系。

至此，我们关于多维稀疏波非线性稳定性的研究第一部分结束。

References

[1] S. Alinhac, *Existence d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels* **14** 1989 2, 173 230 10 1080 03605308908820595 ,《偏微分方程通讯》( ), 第 – 期. doi: . / .[2] ,
Unicité d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels,《偏微分方程通讯》14 (1989), 第2期, 231–257. doi: 10.1080/03605308908820596.[3] , *Blowup for small data to quasilinear hyperbolic equations*, 讲义, 巴黎南大学, 法国奥尔赛, 1995. 巴黎南大学讲义. [4] D. Christodoulou, *The formation of shocks in 3-dimensional fluids*, EMS数学专著, 欧洲数学会, Z¨urich, 2007. doi: 10.4171/031. [5] R. Courant与K. O. Friedrichs,
Supersonic flow and shock waves, 纯粹与应用数学, 第1卷, Interscience出版社, 纽约, 1948. ISBN: 978-0-471-17981-5. [6] C. M. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, 第4版,《数学科学基础教程》, 第325卷, 施普林格出版社, 柏林, 2016. doi: 10.1007/978-3-662-49451-6. [7] J. Glimm, *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*,《纯粹与应用数学通讯》 18 (1965), 697–715. doi: 10.1002/cpa.3160180408. [8] S. Klainerman,
Uniform decay estimates and the lorentz invariance of the classical wave equation,《纯粹与应用数学通讯》38 (1985), 第3期, 321–332. doi: 10.1002/cpa.3160380305. [9] P. D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws ii*,《纯粹与应用数学通讯》10 (1957), 537–566. doi: 10.1002/cpa.3160100406. [10] T.-P. Liu,
The riemann problem for general systems of conservation laws,《微分方程杂志》26 (1977), 第3期, 295–308. doi: 10.1016/0022-0396(77)90142-3. [11] , *Admissible solutions of hyperbolic conservation laws*,《美国数学会纪要》30 (1981), 第240期. doi: 10.1090/memo/0240. [12] T.-P. Liu与T. Yang, *l^1 stability for 2×2 systems of hyperbolic conservation laws*,《美国数学会杂志》10 (1997), 第4期, 775–835. doi: 10.1090/S0894-0347-97-00243-9. [13] J. Luk与J. Speck, *Shock formation in solutions to the 2d compressible euler equations in the presence of non-zero vorticity* **214** 2018 1, 1 169 10 1007 00222 018 0805 3 ,《数学发明》( ), 第 – 期 . doi: . /s - - - .[14] T. Luo 与 P. Yu, *On the stability of multi-dimensional rarefaction waves i: The energy estimates*,《数学年刊》202 (2025), 第2期, 631–752. doi: 10.4007/annals.2025.202.2.3.[15] , *On the stability of multi-dimensional rarefaction waves ii: Existence of solutions and applications to the riemann problem* **202** 2025 2, 753 890 10 4007 2025 202 2 4 ,《数学年刊》( ), 第 – 期 . doi: . /annals. . . . .[16] A. Majda, *The stability of multi-dimensional shock fronts*,《美国数学会纪要》 41 (1983), 第275期. doi: 10.1090/memo/0275.[17] , *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, 应用数学科学, 第53卷, 施普林格出版社, 纽约, 1984. doi: 10.1007/978-1-4612-1116-7. [18] A. Matsumura与K. Nishihara, *Asymptotic stability of traveling waves for scalar viscous conservation laws with non-convex flux* **165** 1994 1, 83 96 10 1007 02099739 ,《数学物理通讯》( ), 第 – 期. doi: . /BF .[19] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, 第2版,《数学科学基础教程》, 第258卷, 施普林格出版社, 纽约, 1994. doi: 10.1007/978-1-4612-4342-7. [20] J. Speck,
Shock formation in small-data solutions to 3d quasilinear wave equations,《数学综述与专著》, 第214卷, 美国数学会, 罗德岛州普罗维登斯, 2016. doi: 10.1090/surv/214. [21] M. E. Taylor, *Partial differential equations iii: Nonlinear equations*, 第2版, 应用数学科学, 第117卷, 施普林格, 纽约, 2011. doi: 10.1007/978-1-4419-7049-7.*Email address*: haoranhemaths@163.com

Email address: qichenhemaths@163.com