arXiv:2603.05337v1 [physics.soc-ph] 5 Mar 2026

环面意见空间对意见两极化的影响

Frank P. Pijpers荷兰统计局 海牙 & 科特韦赫-德弗里斯数学研究所 阿姆斯特丹大学 阿姆斯特丹 f.p.pijpers[at]uva.nl

Benedikt V. Meylahn
科特韦赫-德弗里斯数学研究所，
物理研究所，
荷兰涌现现象研究所
阿姆斯特丹大学
阿姆斯特丹
b.v.meylahn[at]uva.nl

Michel R.H.Mandjes科特韦赫-德弗里斯数学研究所，阿姆斯特丹大学，阿姆斯特丹 & 莱顿大学数学研究所，莱顿
m.r.h.mandjes[at]uva.nl

2026年3月6日

摘要

许多意见动力学模型都包含意见间距离的度量。这类模型容易受到边界效应的影响，即意见空间拓扑的选择可能会影响动力学。本文研究一个遵循Axelrod开创性模型的意见动力学模型，旨在理解环面意见空间的效应。为此，我们系统地比较该模型的两个版本：一个采用环面意见空间，另一个采用立方意见空间。

在最基本的形式下，我们模型的两个版本会产生相似的动力学（最终达成共识）。然而，当我们纳入有界信任，并最终纳入对意见要素的按主体加权时，动力学变得相当不同。环面意见空间始终允许在稳态下存在比立方意见空间模型更多的群体。此外，与立方意见空间模型相比，环面意见空间模型中动力学的结果对纳入扩展更为敏感。

1 引言

意见动力学的程式化模型种类繁多、形式各异。这一文献脉络中的核心问题之一是：什么促成（甚至可能鼓励）意见极化。有关意见动力学建模的概述，我们建议感兴趣的读者参阅综述 [1, 2, 3, 4, 5]。

这些模型中采用的一项常见假设（尽管很少被明确讨论）是，主体持有的意见存在于一个具有边界和极值的空间中。这种空间可以是某种离散集合，例如$\{-1, 1\}$（比如 [6, 7, 8]），也可以是有限区间 $[-1, 1]$（例如 [9, 10, 11]中）。如果考虑一系列主题或意见要素（具有极值），就会得到一个多维意见空间，进而形成一个超立方体。

最近，一些研究者开始质疑这一关于极值的隐含假设。例如，Chan等人 [11]研究了意见形成，假设影响个体间交互结果的并非名义意见，而是彼此相对而言的意见。由此产生的动力学十分丰富，展现了共识形成、周期模式以及极化的可能性。Caponigro等人 [12] 和 Aydoˇgdu等人 [13], 将意见形成研究为微分方程，其中意见位于包括 $\mathbb{R}^2$、$\mathbb{S}^2$和 $\mathbb{T}^2$在内的一般流形上。通过丰富意见空间，他们发现了“舞动”平衡态的可能性：意见彼此之间保持不变，但作为整体却在球面上移动。

我们沿着这一研究思路继续探索，对 Axelrod [14] 模型的两个版本进行比较：一个版本中的观点向量嵌入在环面空间中，另一个则嵌入在立方空间中。环面意见空间消除了极端意见的概念。我们通过向两个模型中加入各种要素，并比较由此产生的动力学，系统地研究这一意见空间假设的影响。

我们的主要贡献是系统比较环面意见空间和立方意见空间中的动力学，旨在理解底层意见空间如何影响集体行为。我们发现，在没有模型扩展的情况下，这两种空间产生的动力学非常相似。然而，一旦引入扩展，两者的差异便会更加明显。具体而言，环面意见空间通常能支持更多样的稳态意见，这标志着结果不再像两个未扩展模型那样趋向共识。这些结果表明，意见空间的选择——在相关文献中往往是一种隐含的建模假设——可能会显著影响最终产生的动力学。

研究环面意见空间与立方空间之间的差异，也涉及我们人类有多灵活这一假设。在立方空间中，从一个极端跳到另一个极端只有一条可能的路径，即经过中心；而在环面意见空间中，则有两条路径可以到达那里。然而，这种额外的灵活性似乎并未像人们预期的那样带来更多共识。相反，它让主体能够躲开彼此，从而形成更多孤立群体。
下一节将介绍基本模型，讨论它如何受到 Axelrod 开创性研究的启发，同时又与之略有不同 [14]。§3 描述模型的扩展，并介绍由此产生的动力学。最后，我们将在 §4 讨论本研究及其意义。

2 模型

我们研究的模型深受 Robert Axelrod 关于文化形成的开创性模型影响 [14]。我们通过计算机模拟研究该模型。请注意，在模拟实验中，我们始终使用网格作为人口结构（或社会网络）。在任何其他人口结构上进行类似实验也不会有什么困难。网格是研究结构化种群的自然起点，并使我们能够专注于意见空间的影响，而不必将其与网络结构本身的影响区分开来。

我们这样做是谨记 [15] 的提醒：他们在研究 Banisch 和 Olbrich 的模型时 [16], 指出，主体间交互细节的微小变化也可能对全局动力学产生深远影响。事实上，这些影响可能比交互发生所依托的网络本身的具体特性更为重大。在该例中，使交互相对于主体对称，会使全局动力学从吸收态转变为遍历的，而网络的影响仅体现在时间尺度上。因此，我们旨在理解意见空间从立方体转变为环面的性质。网络拓扑的变化如何与这一转变相互作用，将留待未来研究。

2.1 基本模型

我们对一个由 N个主体组成的种群进行建模，其中每个主体 $i \in \{1, \ldots, N\}$ 都具有一个意见剖面 s_i（初始时随机均匀抽取）。意见剖面是一个长度为 M的向量，该向量的每个元素均取自集合 $\{1, 2, \ldots, q\}$中的整数值。因此 $s_i \in \{1, \ldots, q\}^M$。人口结构（在我们的例子中为网格）由邻接矩阵 A 表示，其中 $A_{ij} = 1$ 意味着主体 i和 j之间由一条边连接。

在我们的基础模型中，每个离散时间步：

- 随机均匀地选取一个主体 i。该主体再从其邻居中均匀随机地选取一个 j ($A_{ij} = 1$)。
- 计算它们意见之间的距离 d_{ij}。

- 以概率 $f(d_{ij})$，它们会互动，这意味着主体 i 会根据主体 j的意见调整自己的意见，使其更加接近对方的意见

$$s_i^k \leftarrow s_i^k \pm 1,$$

对于 k，两者意见之间的距离最大，且 d_{ij} 递减 .

函数 $f(\cdot)$定义为单调递减函数:

$$f(d) = 1 - \left(\frac{d}{qM - M}\right)^{\alpha}. \tag{1}$$

我们的模型与 Axelrod 的模型有几个重要区别。首先，我们将意见的相似度（以及由此得到的交互概率）定义为与它们之间的距离 相关，而非与共享观点的比例相关。在 Axelrod 模型中，交互概率是主体持有相同观点的意见要素数量的函数。另一个相关区别是观点更新机制。我们模型中的主体通过在某一意见要素上朝彼此的方向“迈步”来相互靠近，而 Axelrod 模型中的主体则会复制他们观点不同的某个要素的取值；我们会将此视为一次跳跃。然而，在 Axelrod 模型中，这不一定应被视为“跳跃”，因为该模型中的意见取值并非有序的。

在全文中，我们将系统地比较以立方体上的距离 d_{ij} 以及

$$d_{ij}^C := \sum_{k=1}^{M} |s_i^k - s_j^k|, \tag{2}$$

并且在环面上

$$d_{ij}^T := \sum_{k=1}^{M} \frac{q-1}{\lfloor q/2 \rfloor} \min(|s_i^k - s_j^k|, q - |s_i^k - s_j^k|). \tag{3}$$

环面距离中的因子 $\frac{q-1}{\lfloor q/2 \rfloor}$ 是一个归一化因子，用于使两个空间中的距离具有可比性。具体而言，该因子的选取使立方体空间和环面空间中的最大可达距离相同： $qM-M$。

按照设计，在式（1）中，当主体具有相同的观点向量时，交互概率为 1；然而，交互的结果不会改变系统状态（如果主体的观点已经完全相同，就不可能变得更加相似）。而当意见相距最远时（$d = qM - M$），则不会发生交互。我们认为，这种与 Axelrod 模型在定性上的相似性是可取的。只有当所有主体都具有相同的意见，或位于环面的“相对”两端时，动力学才会完全停止。在 Axelrod 模型中，可能的稳态更多：任何一种配置都可以成为稳态，只要其中每一对相邻边所共享的观点要么一个也没有，要么全部都有。稳态数量的大幅减少，是因为只要两个主体的观点并非相距最远，它们之间就有正概率发生交互。

2.2 模型扩展

为了全面比较环面和立方意见空间所产生的动力学，我们研究了两项扩展。第一项是有界信任（例如，参见 [17, 10] 以及 [18] 的 IV.B.5 节，其中提供了近期综述）：设定一个最大距离，超过该距离时，主体便认为彼此“相距过远”，因此不会相互施加社会影响（交互概率变为零）。第二项是进一步扩展意见空间，为每个主体加入个人观点元素加权。这样，每个主体在计算自己与邻居观点之间的距离时，都可以自行决定各意见要素的相对重要性。最后，为了检验结果对于不同网络拓扑是否稳健，我们加入了网络重连这一扩展。通过指定重连概率，并在模型动力学开始前按该概率对每条边进行重连，这一扩展会将二维网格转变为小世界网络。这些扩展将在论文中出现时逐一详细介绍。

主论文根据任意节点状态变化的概率来描述系统的动力学，并进行了概率模拟。近年来，统计物理学领域发展出的一些工具也被用于研究意见动力学问题。通过基于交互的哈密顿量构造跃迁概率，并采用格劳伯动力学 [19] 或 Metropolis-Hastings 算法 [20, 21], ，哈密顿动力系统的许多一般性结果便可以直接应用于这一新的研究框架。在附录 B 中，简要介绍了哪些哈密顿量会产生所使用的跃迁

概率，包括有界信任。尽管无需采用这一替代范式也能理解主论文的结果，但附录 B 所展示的哈密顿量方法提供了宝贵的额外见解。

3 结果

我们对上述模型进行模拟：100 个主体排列在一个 10×10 网格上，其意见为三维（$M = 3$），取值范围为 $\{1, \ldots, 8\}$（$q = 8$）。为考察由此产生的动力学的时间尺度，我们研究吸收时间 τ：

$$\tau := \min \left\{ t : \forall (i,j) \text{ with } A_{ij} = 1, \begin{cases} d_{ij}(t) = 0, \text{or} \\ d_{ij}(t) : f(d_{ij}) = 0 \end{cases} \right\}. \tag{4}$$

在 τ 之后，不会再发生任何动力学变化，因为对于所有相连的主体对，它们发生交互的概率为零，或者交互的结果不会改变系统状态。为研究意见两极分化的出现过程，我们考察随时间变化的“物种”数量 t：

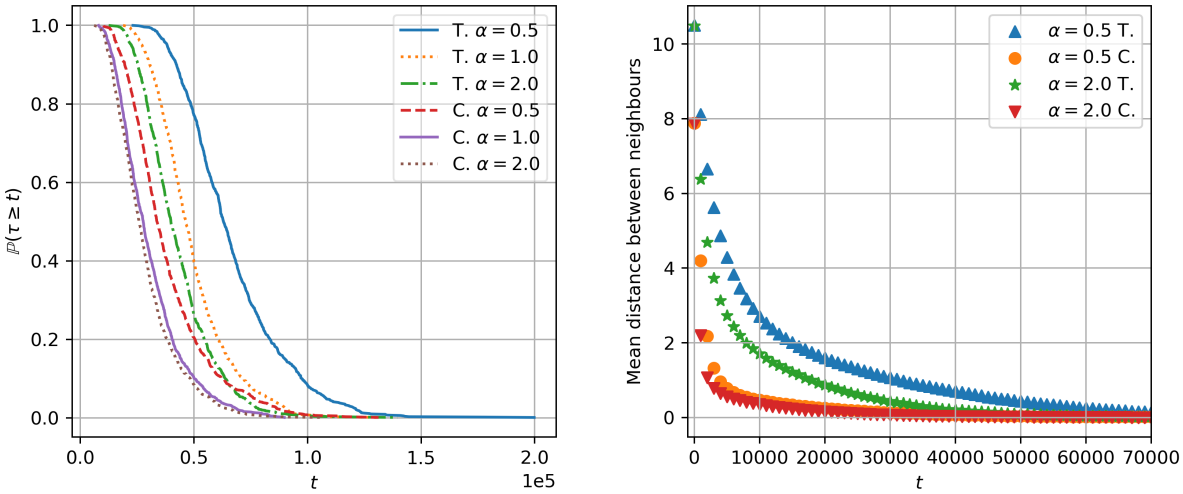
$$S(t) := |\{s_i(t) \mid i \in N\}|. \tag{5}$$

也就是说，在时间 t，种群中独特意见剖面的数量。当 $S(\tau) = 2$ 时，我们便知道意见两极分化正在发生。需要注意的是，尽管存在一项局限，这仍然是一个有用的衡量指标：它无法表明群体数量 $S(t)$ 是否彼此相连。吸收时间时出现 2 个物种，但它们分散在人口结构中，形成两个以上群体的情况虽有可能，但不太可能。

基本模型和扩展模型的所有参数设置均重复运行了 1000 次，最长模拟至 250000 个时间步。

3.1 基本模型

从图 1a 中绘制的生存概率可以清楚看出，在基本模型中，达到稳态所需的时间在立方意见空间中始终少于环面意见空间。然而，在图 1b 中，我们展示了网络中邻居之间平均距离随时间变化的平均值（对模拟运行取平均；平均值在每次模拟运行内部计算），可以看到，随着距离缩小至零，两个模型都收敛于共识（事实上，两个模型的全部 1000 次模拟运行均得到$S(\tau) = 1$）。从这两幅图中可以清楚看出，动力学在以下情况下更快达到稳态：(a) 在立方意见空间中，而不是环面意见空间中；(b) α 较高时，而不是 α较低时。图 2 中随时间变化的群体数量图再次说明了向共识的收敛 $S(t)$，该数量趋近于 1（为清晰起见，仅绘制 $\alpha = 2$）。



(a) 生存概率　　(b) 邻居间的平均距离

图 1：(a) 对于交互函数 (1) 中不同的 α 取值，环面（T.）和立方体（C.）意见空间的生存概率随时间的变化。(b) 每 1000 个时间步测量的邻居间平均距离随时间的变化，针对 $\alpha = 0.5$，2。每种参数设置均运行了 1000 次，最多模拟 250 000 个模拟时间步。

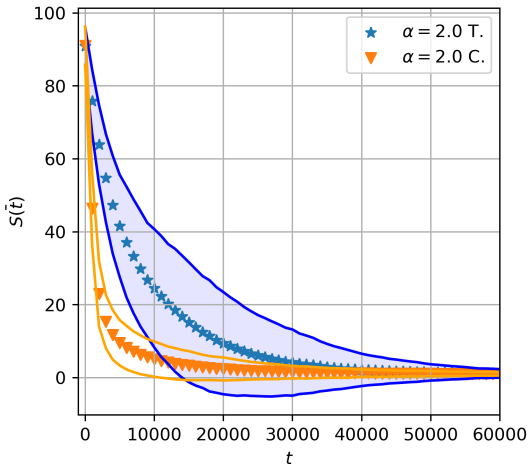
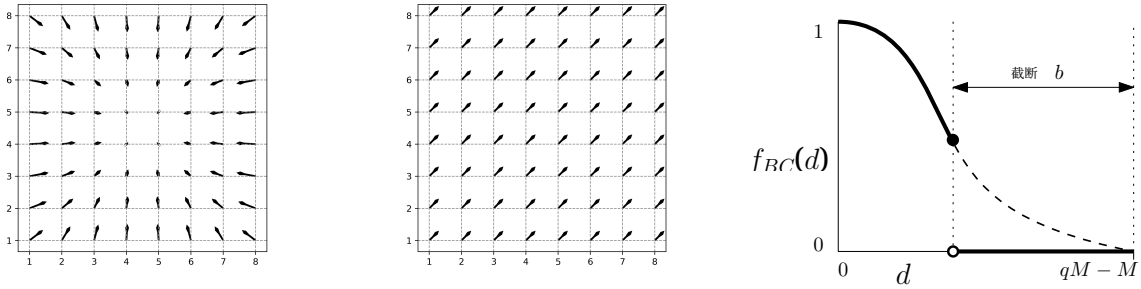


图 2： $\alpha = 0.2$ 条件下，环面意见空间与立方意见空间随时间变化的群体数量。图中的柱线表示样本均值加减 2 个标准差。可以看到，动力学差异在约 15 000 个时间步后消失。为便于阅读，图中仅显示至第 30 000 个时间步。

向共识的收敛可以通过交互函数进行启发式解释，该函数仅在达到最大距离时为零。初始意见均匀分布，主体一开始进行交互，就会彼此接近。所有主体都收敛到两个极端中的某一个的可能性极低。在环面空间中，可能存在更多允许稳定双极化的配置，但这些配置同样几乎不会达到，因为它们十分脆弱，并且取决于信念初始分布与交互顺序的组合。如果环面两端的主体在相反方向的情况发生之前，先与中等意见的主体进行交互（并向其靠近），那么极化结果就不会出现。



(a) 立方意见空间　(b) 环面意见空间　(c) 截断值示意图

图 3：在（a）立方意见空间和（b）环面意见空间中，全连接群体内每个可能的信念上各有一个个体时，个体感受到的“拉力”。此处为清晰起见，我们设定 $M = 2$。（c）示意有界信任如何应用于交互函数 $f(d)$，以及“截断值”的含义。

在图 3 中，我们绘制了全连接群体中个体的预期运动方向，其中每种意见组合由一个主体持有。为便于观察，这些图中我们将 $M = 2$ 设为 3。可以将其视为意见空间中均匀分布的稠密种群的平均场预期运动。请注意，在立方意见空间中（图 3a），预期方向指向意见空间中心，使意见总数减少。这解释了为何模型的立方意见空间版本能更快达成共识。在环面意见空间中（图 3b），每个主体的预期方向都相同。存在预期运动这一事实与模型中平局的处理方式有关：比较各意见上的距离时，索引较小者在平局时胜出。此外，在比较应沿正方向还是负方向调整意见时，平局时选择正方向。如果这些平局由公平抛硬币决定，就不会出现预期运动（所有箭头的长度均为零）。不过，这两种情况都能解释为什么环面意见空间上的动力学需要更长时间才能稳定下来，因为一开始并不预期会出现收缩。

我们得出结论，该模型的立方体版本和环面版本构成了适当的比较基础。立方体意见空间和环面意见空间所产生的动力学主要存在定量差异。环面模型需要更长时间才能达到稳态，但当初始意见均匀分布时，两个模型都持续达成共识。基本模型的结果表明，从定性上看，行为不会因 α 的具体取值而改变。为避免模拟时间过长和计算成本过高，我们将继续采用 $\alpha = 2$ 的情况。

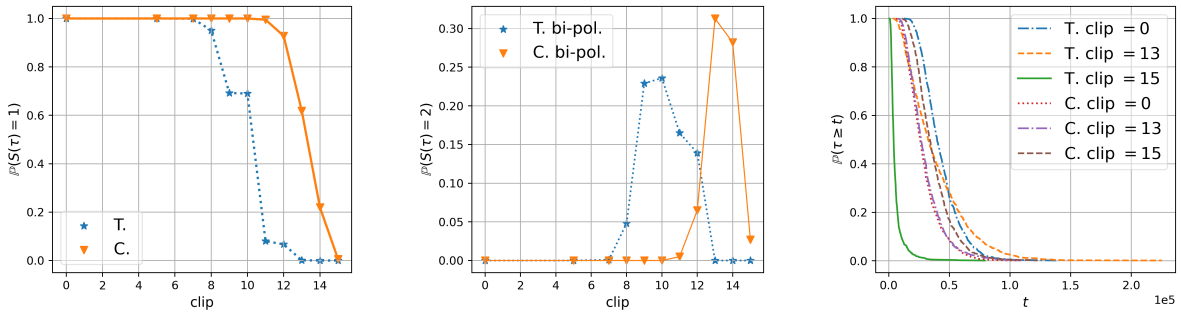
3.2 有界信任

对模型的第一项扩展是引入有界信任。也就是说，如果主体的观点「相距过远」（或主体认为相距过远），它们就不再进行交互，从而使彼此的观点更加接近。在 Axelrod 型模型中加入有界信任并不少见。例如，MacCarron 等人 [22] 研究了一种 Axelrod 模型，其中的特征是序数型的，并在交互可能性和交互效果中纳入了有界信任。他们的模型并非按照共享特征的数量成比例地进行交互，而是按照主体观点处于共识阈值范围内的特征数量来确定交互概率。这往往会提高交互可能性；为此，他们只允许主体在彼此观点也处于共识阈值范围内时，才改变相应的观点。

我们通过引入一个「截断值」 b 来在此模型中实现有界信任：从主体观点之间可能达到的最大距离 $d_{\max}$ 中减去该值（在环面和立方意见空间中均如此）。我们将 $f(d)$修改为有界信任下的交互概率 $f_{\mathrm{BC}}(d)$，如下所示（见图 3c）：

$$f_{\mathrm{BC}}(d) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{d}{qM - M}\right)^{\alpha} & \text{if } d \leq qM - M - b, \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \tag{6}$$

本模型中的有界信任通过将彼此距离为$d > d_{\max} - b$ 的邻居之间的交互概率设为零，使持续分歧成为可能。起初这种效应很小，但随着 b增大，稳态中可能出现更多群体（体现群内一致与群外分歧）。我们提醒读者，初始意见是从所有可能意见中均匀随机抽取的，这意味着在截断大小较小时，无法达成共识的概率可以忽略不计（我们的模拟估计为零）。然而，从理论上讲，一旦引入一定程度的有界信任，就会出现更多稳态。如果抽取初始意见的过程更偏向极端，这一点将发挥更大作用。



(a) 共识。 (b) 双极化。 (c) 生存概率。

图4：有界信任对立方体意见模型和环面意见模型中达成共识的估计概率以及意见两极分化的估计概率的影响，以及动力学趋于稳定所需的时间。

3.2.1 有界信任对时间尺度的影响

图 4c 展示了立方意见空间模型和环面意见空间模型的生存概率随时间的变化（说明了吸收时间）。具体来说，我们绘制了有界信任（$b = 0$、13、15）下的结果。可以看到，环面意见空间模型既是最慢的（$b = 0$），也是最快的（$b = 15$）。在环面意见空间模型中加入 15 的有界信心截断值，会加快动力学过程。相反，在立方意见空间模型中加入 15 的有界信心截断值，则会减慢动力学过程。我们还绘制了 $b = 13$ 的数值，以展示这一效应的一些细微之处。在立方意见空间中，截断值为 13 确实会显著改变吸收时间。不过，对于环面意见空间，我们看到时间尺度的分布范围更广：与没有任何有界信任时相比，更多模拟运行会更早或更晚达到稳态。

3.2.2 有界信任下的共识概率

以共识结束的模拟运行比例绘于图 4a。在截断值达到 $b = 6$ 之前，两种意见拓扑在长期内都只会导向共识。对于立方意见空间，这种情况会持续到 $b = 11$。另一方面，环面意见空间的动力学在 $b = 8$ 时就已开始出现非共识结果。起初，只有少数模拟迭代不会导向共识，但在截断值为 $b = 9$ 和 $b = 11$ 时，这一比例迅速上升。在 $b = 13$ 时，动力学已彻底改观：环面意见空间中没有任何迭代以共识告终，而立方意见空间中这一比例仍约为 60%。可以看到，环面意见空间模型中的变化呈阶梯式。这是因为距离归一化时使用的系数 $(q-1)/\lfloor q/2 \rfloor = 1.75$，这意味着并非所有整数距离都可能出现。

3.2.3 有界信任对群体数量的影响

在图4b中，我们绘制了不同截断大小下导致严格两极分化（即稳态下恰好形成2个群体）的模拟迭代所占百分比。可以看到，对于立方意见空间和环面意见空间，随着截断阈值增大，这一比例最初会上升，随后下降。较大的截断阈值意味着交互较少，因此形成的群体可能多于两个 。请注意，对于环面意见空间，共识概率和两极分化概率均从 $b = 10$ 开始下降；对于立方意见空间，这两种概率均从 $b = 13$ 开始下降。这意味着最终的群体数量必定 $S(\tau) \geq 3$。起初，在截断值 $[7, 12]$ 之间，环面意见空间比立方空间更容易出现意见两极分化。然而，在截断值13和15之间，情况恰好相反：立方意见空间中的两极分化概率远高于环面意见空间。

在图5中，我们绘制了环面和立方体意见模型中截断值为5、10、12、13、14和15时群体平均数量随时间的变化，可以看到两者的动力学差异开始扩大。特别是，截断大小越大（有界信任程度越高），环面意见空间所允许的群体数量就越多。这不仅在暂态期如此，在稳态下也是如此。此外，环面意见空间中群体数量的方差也远大于立方空间。与立方空间相比，环面意见空间在有界信任条件下可形成更多稳态构型，这解释了观察到的效应。

有两点值得注意：第一，立方意见空间中意见双极化概率的峰值高于环面意见空间（见图4b）。第二，$\mathbb{E}(S(\tau))$ 在环面意见空间中的值高于立方空间，尤其是在截断大小最大的情况下，远高于2。因此，我们得出结论：在有界信任条件下，在立方意见空间中观察到意见两极分化的概率高于环面意见空间。

3.3 主题权重

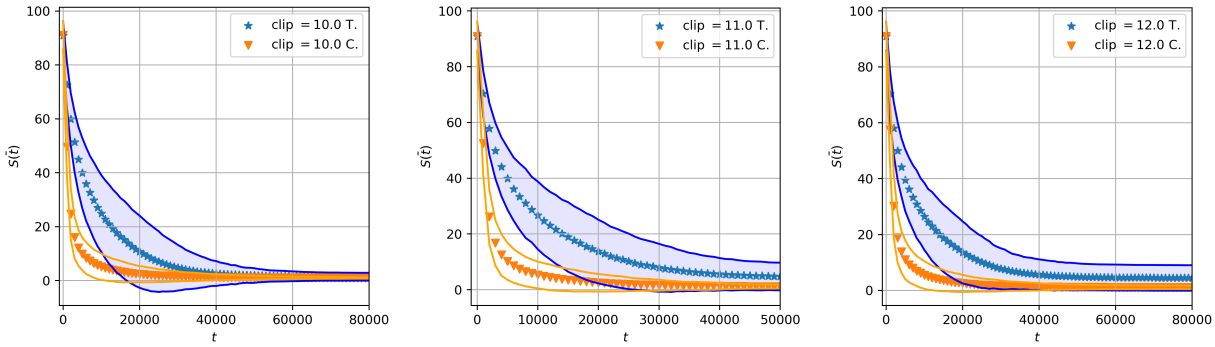
我们研究的第二种扩展，是为意见中的每个主题（ s_i中的要素）添加智能体特定权重。例如，Huet 和 Deffuant [23], 研究了一种意见动力学模型，其中一个意见要素比另一个更重要，由此产生了丰富的动力学。同样，Baldassari 和 Bearman [24] 表明，在观点更新机制中纳入主体对某些主题（意见要素）的个人相对兴趣，可能导致意见极化，并使群体围绕极化的主题形成组织。Kalinowska 和 Dybiec [25] 研究了一种为每个意见维度设置主题权重的 Axelrod 模型。他们的模型采用了与原始 Axelrod 模型相同的相似性度量，但在观点采纳步骤中，机制有所不同。在他们的加权模型中，只有当两个主体之间的相似度大于待更新维度的权重时，才会将采纳所选邻居观点的概率设为该相似度。他们发现，与原始模型相比，这种加权机制会增加稳态下的群体数量。

我们认为，将主题权重扩展到更多领域是很自然的，尽管直到现在，文献中对此关注不多（前文提到的两个例子除外）。此外，在讨论可能的未来研究时， [26] 也提出了这一扩展，这表明持有这种观点的不止我们。

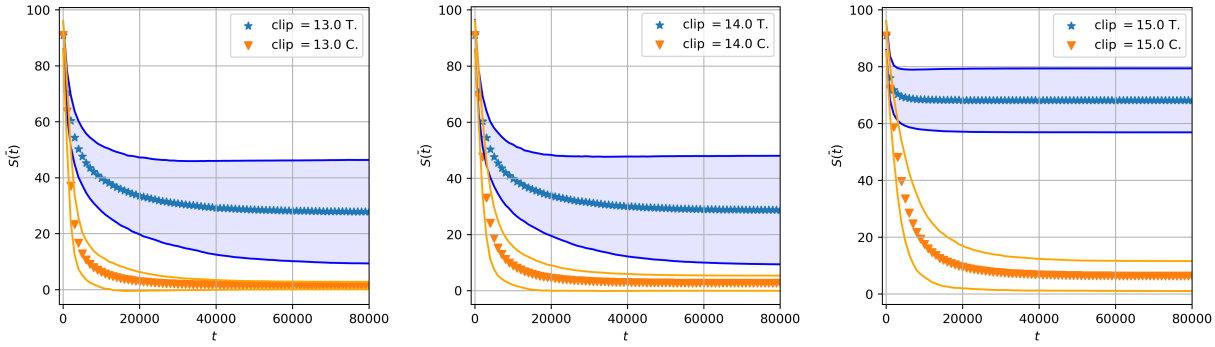
初始化时，每个主体随机抽取三个权重（总和为 1），分别对应一个意见的三个要素。在计算与邻居意见的“距离”时，他们会使用这些权重，以确定彼此交互的似然。这样，我们便考虑到了不同主体对各项议题的重视程度可能有所不同；例如，对某个主体而言，与少数群体权利相关的观点可能比与动物产品消费相关的议题更“重要”。

在模拟中，我们通过以下步骤实现这一点：

- 对于每个主体 i $(\forall i \in V)$，我们抽取一个长度为 $M-1$ 的伪随机数向量 $\boldsymbol{r}^i$。每个 $r \in \boldsymbol{r}^i$ 都是从均匀分布中抽取的 $\mathcal{U}_{[0,1)}$ （通过 Python 函数 numpy.random.rand() 实现）。
- 我们对这个向量进行排序，使得 $r^i_j < r^i_{j+1}$ 对所有 $j \in \{1, \ldots, M-2\}$成立。



(a) $b = 5$ (b) $b = 10$ (c) $b = 12$



(d) $b = 13$ (e) $b = 14$ (f) $b = 15$

图5：在立方体和环面意见空间上（分别标记为 C. 和 T.），当 b 在 $\{5, 10, 12, 13, 14, 15\}$ 中以 $\alpha = 2$ 进行模拟时，群体平均数量随时间的变化。可以看到，随着有界信任允许的交互减少，立方体与环面意见空间上的动力学差异会增大。

- 年龄nt i 被赋予长度为 M的意见权重向量： $\boldsymbol{w}_i := [r_1^i, r_2^i - r_1^i, \ldots, 1 - r_{M-1}^i]^\top$。

主体 i 使用这一加权方式，在立方体上计算自身意见 s_i 与其选定的、可能进行交互的邻居 j 的加权曼哈顿距离：

$$d_{ij}^C = \sum_{k=1}^{M} w_i^k M \cdot \mid s_i^k - s_j^k \mid, \tag{7}$$

在环面上：

$$d_{ij}^T = \sum_{k=1}^{M} w_i^k M \cdot \frac{q-1}{\lfloor q/2 \rfloor} \min(\mid s_i^k - s_j^k \mid, q - \mid s_i^k - s_j^k \mid). \tag{8}$$

为了使加权版本和非加权版本中的距离具有可比性，我们需要将权重 w_i^k乘以 M。非加权版本可以视为所有权重相等的加权版本。将所有意见中的 $w_i^k = 1/M$ 代入式（7）（或式（8）），并注意到所得结果分别为式（2）（和式（3）），即可看出这一点。

3.3.1 主题权重下的共识概率与双极化

图 6a 和 6b 展示了在立方体和环面意见空间中扩展主题权重后，不同有界信任水平下的共识概率估计值，以及稳态时恰好出现两个物种的概率。可以将这两幅图与图 4a 和 4b 对比，观察加入主题权重后，模型的动力学相较于仅考虑有界信任时发生了哪些变化。

比较图 6a 和图 4a 可见，在立方意见空间模型中，为主题添加个性化权重对共识概率的影响很小。环面模型中的影响更大。具体而言，在两个模型中，添加权重都会使共识概率略有增加（不过在环面意见空间模型中增加得更多）。这种影响主要体现在较高的有界信任水平下。

比较图6b和图4b可见，添加主题意见权重会使环面意见空间和立方意见空间中的两极分化概率峰值都向右移动。然而，在环面意见空间模型中，这一变化更大，峰值从 $b = 10$ 移动到 $b = 12$，并且峰值高度从略低于0.25增加到超过0.3。另一方面，在立方意见空间模型中，峰值仅从 $b = 13$ 移动到$b = 14$，高度没有显著变化。

在 §3.3.3 中，我们讨论意见的主题加权对所感知的主体意见之间距离的影响。这解释了观察到的极化概率峰值偏移现象。

3.3.2 主题权重对群体数量随时间变化的影响

我们看到，采用这一扩展后，动力学的时间尺度发生了变化。图6c 展示了生存概率。我们注意到，加入主题权重后，环面意见空间模型达到稳态所需的时间延长了（在 $b = 13$ 和 $b = 15$ 时，吸收时间均有所推迟）。在立方意见空间模型中，达到稳态所需的时间几乎不受影响。请注意，采用这一扩展后，并非所有模拟运行都达到稳态。模拟时间内未收敛至稳态的运行次数列于表1。从表中也可以明显看出，加入主题权重后，环面意见空间模型的动力学变化大于立方意见空间模型。请注意，计算共识概率和双极化的估计值时，我们使用收敛运行的比例。

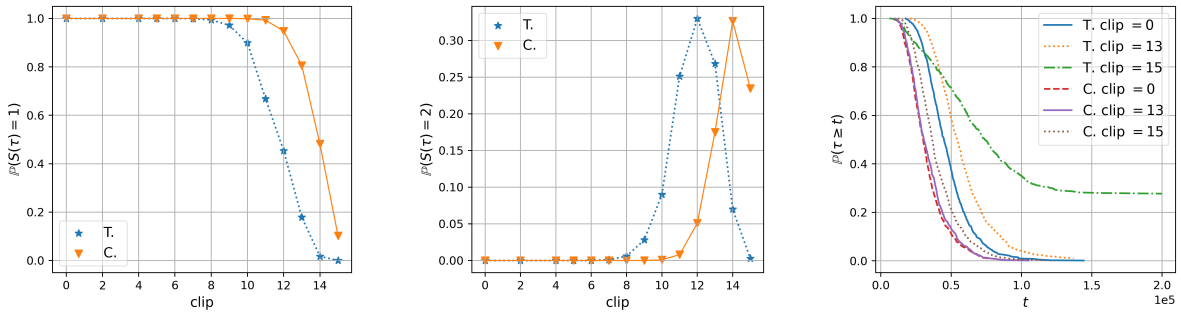
表1：在模拟的250,000个时间步内未收敛到稳态的模拟运行次数（共1000次）。

b:	11	12	13	14	15
立方体	1	0	0	1	2
环面	1	12	9	28	276

在图7中，我们绘制了带有$b = 13$、 $b = 14$和 $b = 15$的加权意见模型中随时间存在的群体数量（或意见“种类”）。与未加权模型类似，随着置信度变得更加受限，环面意见空间与立方意见空间之间的差异会增大。我们还看到了前文提到的对意见主题加权对两种模型的影响：群体数量减少，且这一效应在环面意见空间模型中比在立方意见空间模型中更强。请注意，对于 $b = 15$，在环面意见空间模型中，群体数量的期望值从无主题权重时的60以上大幅下降到有主题权重时的略高于20。另一方面，立方意见空间模型的群体数量期望值则集中在远低于20的水平。

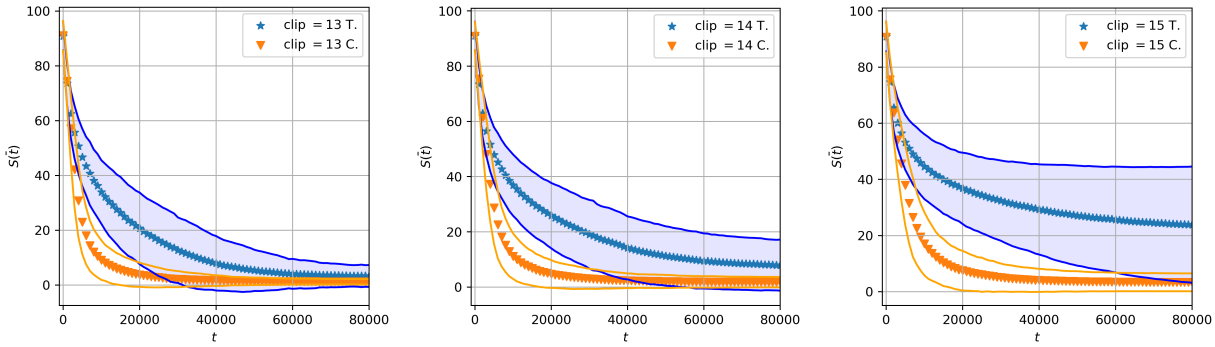
3.3.3 主题加权意见对主体之间“距离”的影响

在图 8 中，我们绘制了在不同实例中加入主题权重所导致的变化。为生成此图，我们抽取 500 个主体（包含意见和意见权重），然后从第一个抽取主体的视角，使用全部四种距离度量，比较它与其他 499 个主体之间的距离。我们重复这一过程 1000 次。所得直方图展示了加入主题权重后距离的变化。负值表示相关两个主体之间的距离缩短。



(a) 共识　　(b) 双极化　　(c) 生存概率

图 6：在有界信心模型的主题权重扩展下，(a) 共识与 (b) 意见两极分化的估计概率。环面意见空间的结果以星号和虚线绘制，立方意见空间的结果以向下人字形标记和实线绘制。(c) 吸收时间（生存概率）的分布。请注意，在此扩展下，首次出现了在模拟时段内未被吸收的运行。



(a) $b = 13$ (b) $b = 14$ (c) $b = 15$

图7：在加权立方体和加权环面意见空间（分别标记为C.和T.）上，截断大小属于 $\{11, 13, 15\}$ 且 $\alpha = 2$ 的模拟中，群体数量随时间变化的均值。

从图 8 可以看出，环面意见空间中引发的变化更加多样（直方图更平坦）。距离变化幅度更大，意味着更多主体彼此靠得更近，同时也有许多主体之间的距离变得更远。这或许可以解释，为什么主题权重扩展对环面意见空间模型动力学的影响，比对立方意见空间模型的影响更大。

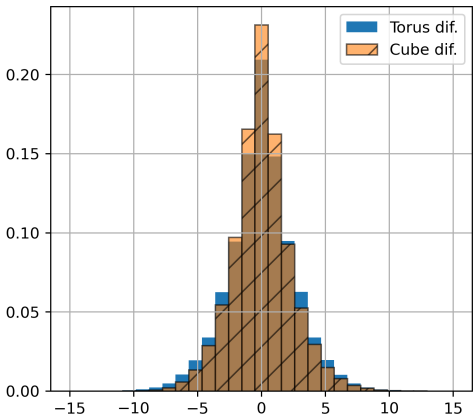
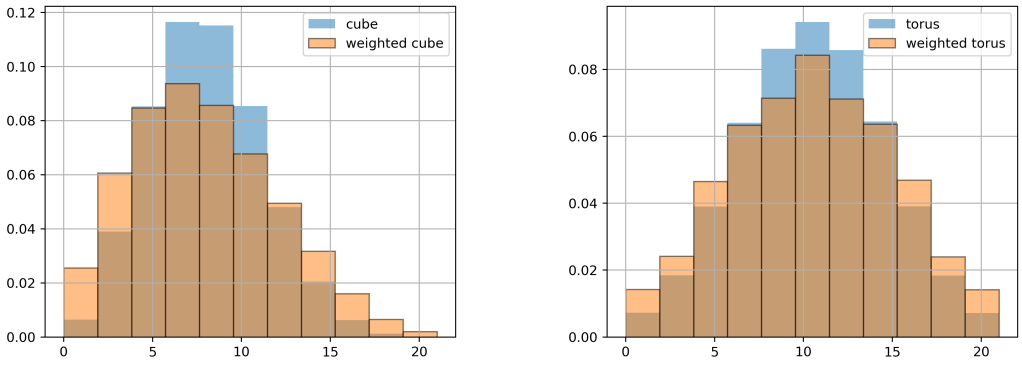


图 8：立方体意见空间和环面意见空间中由意见的均匀加权所引起的变化的直方图。变化的度量方式为： $d_{\text{weighted}} - d_{\text{unweighted}}$，因此负向变化意味着该加权使意见彼此更加接近。

图 9a 和图 9b 分别展示了立方意见空间和环面意见空间中意见距离（加权和未加权）的分布。个人意见加权修改夸大了立方意见空间中边界的影响。未加权立方意见空间的分布（图 9a）已经不是对称的，而在采用个人意见加权后，这种不对称性变得更加明显。相反，环面意见空间中的距离分布（图 9b）是对称的。这种对称性意味着，所有 主体都同等程度地受到新增变化的影响，包括有界信任和主题加权；而在立方意见空间中，位于边界的主体比位于中间的主体受到的影响更大，尤其是在加入有界信任后更是如此。这解释了为什么相较于立方意见空间模型，对基本模型的扩展会使环面意见空间模型的动力学发生更大的变化。

3.4 网络重连

为确定环面意见空间的影响在不同智能体网络拓扑下是否一致，我们在重连网格上进行了模拟。我们取规则格结构，并通过以概率$p \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$随机选择边并将其重连，将其转变为小世界网络（类似于 Watts 和 Strogatz [27] 研究的网络）。在此过程中，我们会确保整个网络保持连通，以便有意义地比较单个连通分量上的共识概率；不过，这会产生一个副作用，即略微改变某些网络结构出现的概率



（a）立方体　　（b）环面

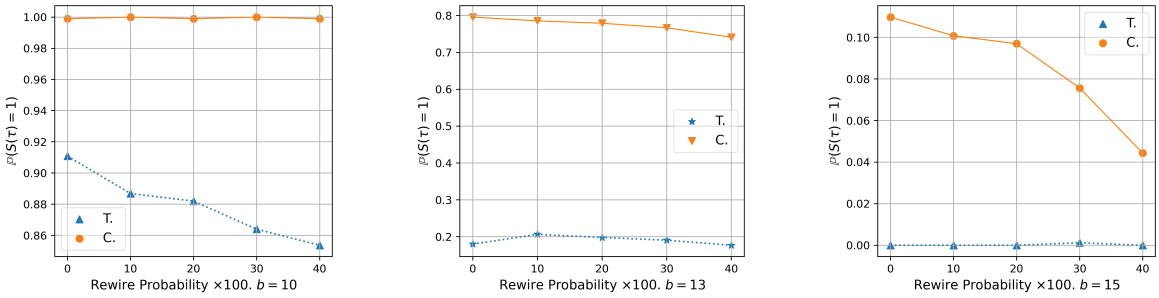
图9：T　he 在（a）立方体和（b）环面意见空间中有无主题加权时的距离分布　　ts.

。如果重连过程结束时生成的网络不连通，我们就重新尝试（从规则网格重新开始），以此实现这一点。

此类重连对网络的影响已得到充分研究。随着重连一条边的概率增加，节点之间的典型距离会缩短，从而形成一个“小世界”。然而，在我们的模型中，这种重连对动力学的影响正是本节所要阐明的内容。为此，我们在有界信心水平 $b \in \{10, 13, 15\}$ 下运行模拟，从而在无需完整搜索参数空间的情况下，实现一系列终态。

3.4.1 Ef重连对稳态时共识概率和群体数量的影响

在图 10a–10c 中，我们绘制了环面（T.）和立方体（C.）意见空间中，在网格上进行重连时的共识概率，重连程度由 x-轴表示。我们看到，与未进行重连的网络中的动力学类似，这一变化的影响在环面意见空间中“更早”显现。也就是说，同样的影响——在此情况下为共识概率的降低——在环面意见空间中有界信任程度较低时便会显现，而在立方体意见空间中则需要更高的有界信任程度。这与环面意见空间对扩展更为敏感这一发现相一致。具体而言，我们看到环面意见空间中的这种降低在 $b = 10$ 时就已经发生，而在立方体意见空间中则直到 $b = 15$ 才发生。

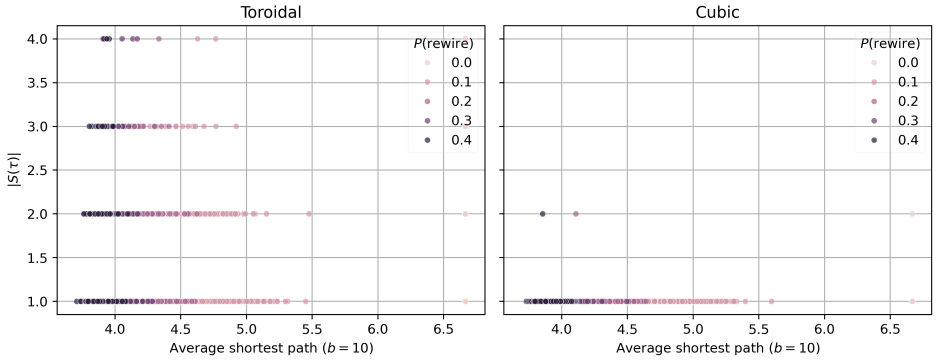


(a) $b = 10$　　(b) $b = 13$　　(c) $b = 15$

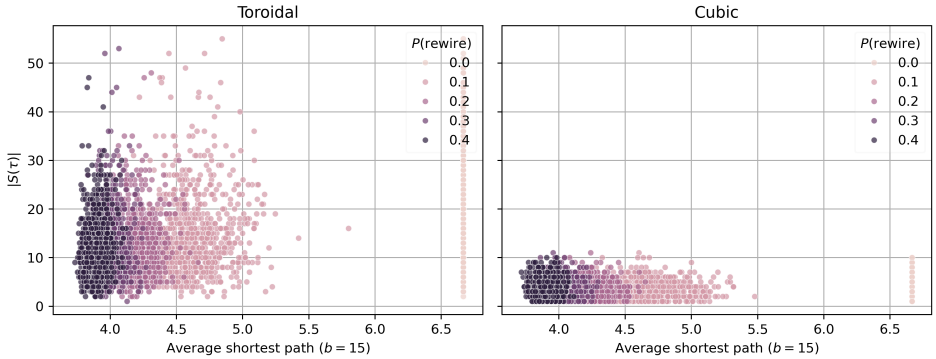
图10：估计的共识概　　网络重连下不同条件下达成共识的概率　　有界信任水平下进行网络重连。

值得注意的是，我们观察到的效果出乎意料。重连网络中的边会使主体平均而言彼此更加接近。因此，在进行这些实验之前，人们可能会认为边重连应该提高达成共识的可能性。

为进一步说明重连对动力学稳态的影响，图11绘制了稳态下的群体数量（$|S(\tau)|$）与网络中顶点之间最短路径平均长度的关系。在该图中，色调表示重连概率，使我们能够验证，更多的重连会缩短网络中顶点之间的距离。



(a) $b = 10$



(b) $b = 15$

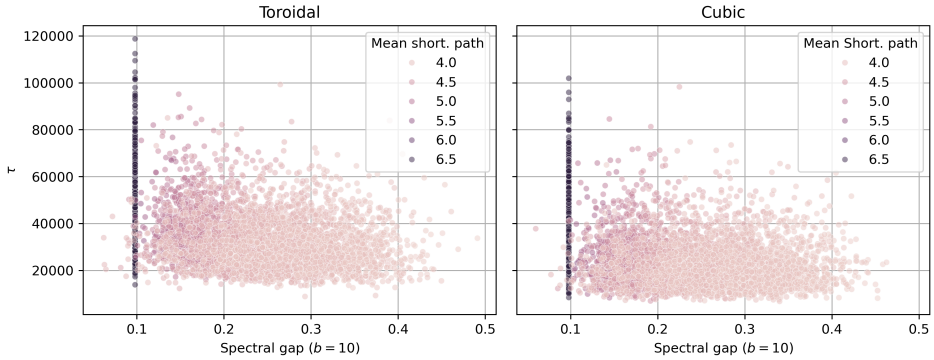
图11：网络中顶点之间最短路径的平均长度对模拟终止时群体数量的影响。也就是说，对每次模拟的网络配置，平均值是根据顶点之间的最短路径计算得出的。

最短路径缩短所产生的影响较弱，但与增加重连的影响相似：在该模型中，顶点之间更短的距离会导致稳态下出现更多群体以及更少的共识。我们认为，这在很大程度上取决于网络的初始构型。事实上，在 [28], 的意见动力学模型中，更多的重连更常导致共识，其原因在于，对所研究的循环网络进行更多重连时，不同簇不太可能存在。然而，循环图在重连之前具有大量三角形，这意味着重连会加强原本已经紧密相连的群体之间的连接。从二维网格进行重连则意味着初始状态下不存在三角形，因此重连可能缩短路径长度，但未必意味着网络中紧密群体之间的连接会增加。实际上，重连为三角形的形成创造了机会，从而增加了形成封闭群体的可能性，并导致整个网络中出现更多分歧。在附录 C 中，我们展示了循环图经过重连后的动力学，其中初始构型包含许多三角形。

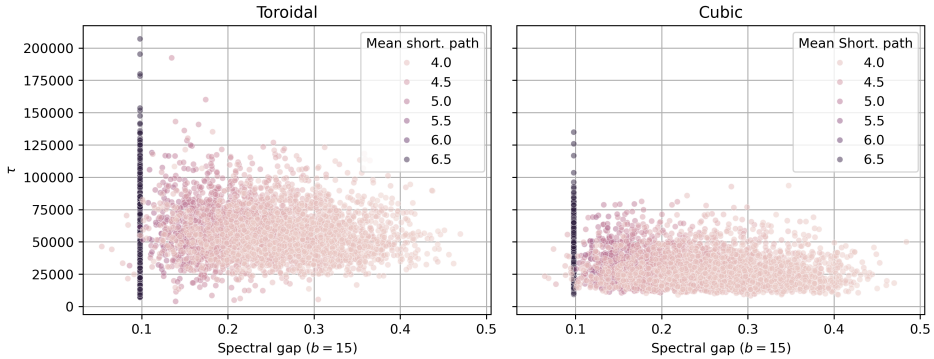
3.4.2 网络重连对动力学时间尺度的影响

关于网络的拉普拉斯矩阵第二特征值（谱隙）对混合时间和共识时间的影响，已有相关研究。由此，谱隙可作为衡量信息在网络中传播速度的指标。在图12a–12b中，我们绘制了不同有界信任取值下，模拟终止时间与 x轴上谱隙之间的关系。预期的关系确实存在，但较弱。谱隙越大通常意味着收敛越快，这在我们的动力学中也同样成立。当然，需要指出的是，其他模型的现有结果未必能直接适用于本模型。

在这一指标下，环面与立方意见空间之间的差异不那么明显，不过与之前一样，我们始终观察到立方意见空间中的点云集中在较低的 τ 处（收敛更快）。
图13绘制了群体数量随时间变化的动力学。我们再次看到，环面意见空间对是否加入重连扩展更加敏感。其影响表现为某种扭曲。我们看到，群体数量会在较长一段时间内维持在较高水平，随后迅速下降。从图中的最后一行可以看出，重连虽然降低了达成共识的似然，但至少在参数设置为 $b = 15$ 时，会降低



(a) $b = 10$



(b) $b = 15$

图12：网络谱隙对模拟 τ 终止时间的影响。

稳态下的平均群体数量。这更接近人们对重连效果的预期。因此，重连可能会使网络从连接松散的网格转变为数量更少（但大于 1）、连接更紧密的簇。

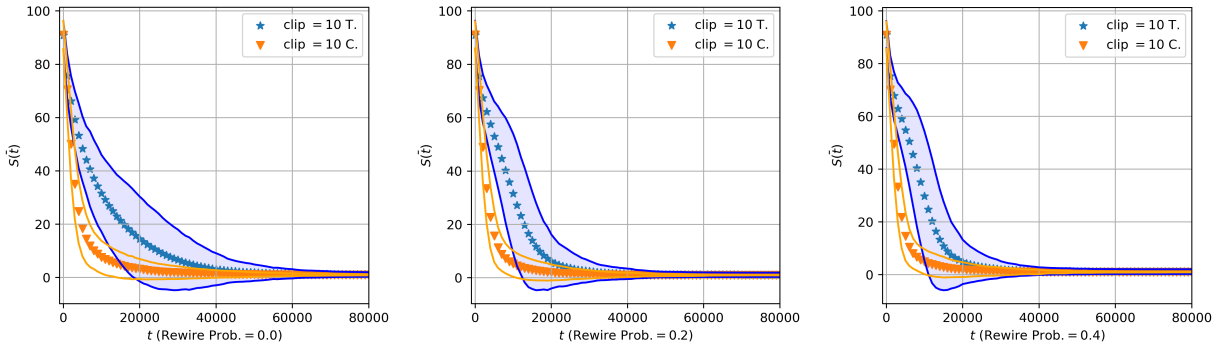
为使正文简洁，展示重连对 $b = 13$ 达到稳态所需时间影响的相应图表将移至附录D。具体而言，之所以推迟呈现这些图表，是因为它们与已列出的图表足够相似，无需在此处再纳入。

4 讨论

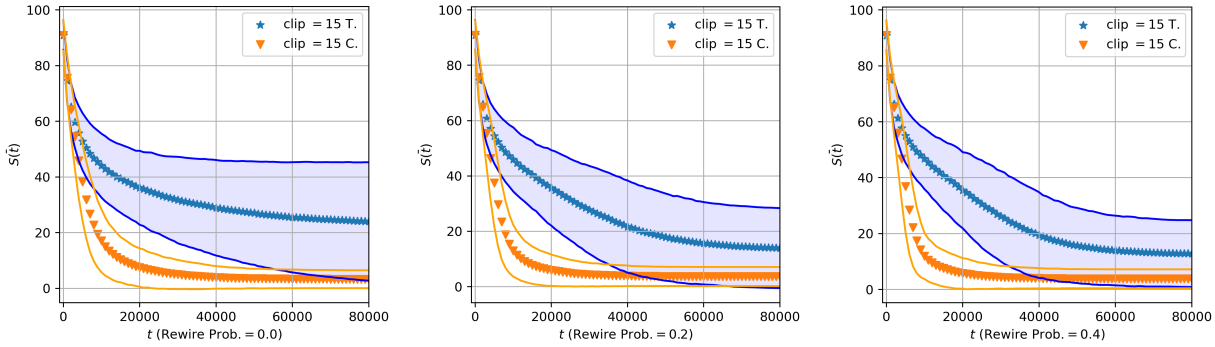
在没有有界信任和个人意见加权的情况下，两种意见空间都会在相对相似的时间尺度上达成共识，这一事实表明这两种基线模型适合进行比较。
在加入有界信任后，模型之间出现了差异：环面意见空间允许相邻个体之间存在更多分歧。共识概率下降到零的速度更快（随着置信度缩小），且“意见种类”数量的增长速度也快于立方意见空间。

将主题权重加入有界信心扩展会促进相邻个体之间达成一致。这会提高共识概率，并将极化概率的峰值向右移动（更大的截断大小）。我们在环面意见空间模型和立方意见空间模型中都观察到了这一效应。然而，该效应在环面意见空间模型中更为显著。我们关于将有界信任和主题权重扩展加入环面和立方意见空间模型所产生影响的结论，对参数 α的变化具有稳健性。我们在附录A中对此进行了论证。

立方意见空间与环面意见空间的动力学主要有两点不同。首先，环面意见空间始终能够在稳态中维持更多样的意见。在立方空间中保证形成共识的有界信任（截断大小）水平下，环面意见空间却会出现双极化，甚至 $S(\tau) > 2$. 当双极化在



(a) $b = 10, p = 0.0$ (b) $b = 10, p = 0.2$ (c) $b = 10, p = 0.4$



(d) $b = 15, p = 0.0$ (e) $b = 15, p = 0.2$ (f) $b = 15, p = 0.4$

图13：平均n 群体数量随时间的变化，针对截断大小为 $\{10, 13, 15\}$ 且重连概率 y $p \in \{0.0, 0.2, 0.4\}$ 与 $\alpha = 2$ 上的加权立方意见空间和加权环面意见空间（分别标记为C.和T.）。

立方意见空间中成为可能且很有可能发生时，环面意见空间则会出现意见碎片化（稳态中存在许多不同的观点）。第二个主要区别是，在我们研究的设置下，环面意见空间模型对模型变化更为敏感。如前所述，环面意见空间模型稳态中的群体数量远多于立方意见空间模型，而且群体更加多样（无论是否扩展加入主题权重）。此外，当我们从仅采用有界信任转为同时采用有界信任和主题权重时，立方模型的动力学几乎没有变化，而环面意见空间的动力学则会发生幅度大得多、但方向相同的变化。这些差异的简要解释是，在环面意见空间模型中，所有主体受到加入有界信任和主题权重的影响程度相同。与之相反，在立方意见空间模型中，置信度边界主要影响处于极端位置的主体。持有温和观点的主体不会受到影响，直到截断值足够大为止。例如，意见恰好位于空间中心的主体，要到 $b > d_{\max}/2$才会“感受到”置信度边界。

如前所述，我们用作种群结构的网格是一个自然的起点。我们将研究扩展至纳入网络重连的影响，并发现关键结果在这一扩展下仍然成立。即使在网络重连下，环面意见空间在稳态下允许的群体数量也多于立方空间。环面意见空间对纳入这一扩展也比立方意见空间更为敏感，这与本文的其他结果一致。此外，已有研究表明，对于具有序数特征的Axelrod模型而言，具体的网络拓扑（例如网格或小世界）所起的作用显著小于交互动力学 [29]。我们的结果为所研究的意见动力学模型印证了这一发现。

网络重连本身的影响乍看之下似乎有悖直觉，但考察初始状态后便会明白。在网格图中，更多的网络重连为形成界限更清晰的群体创造了机会，因此降低了共识概率。这与 [28] 中的发现恰恰相反：在另一种意见动力学模型中，重连提高了共识的可能性。在他们的论文中，重连发生在循环图上，而我们关注的是从网格图开始的重连。在附录 C 中，我们简要展示了，对于我们的模型，从循环图开始时，重连同样会提高共识的可能性（并且通常会减少稳态下的群体数量）。

我们将把这一问题留待未来研究：正如 Dinkelberg 等人 [29], 以及本文所示，对于更具现实性的网络，网络拓扑的影响是否不如交互动力学重要。

下面简要讨论 Kalinowska 和 Dybiec 研究的加权 Axelrod 模型与我们模型之间的区别。为意见赋予权重的做法相当于一种有界信心机制。如果相似度不够高（这取决于可能发生变化的意见的权重），那么交互发生的概率为零。需要特别指出的是，这只取决于正在考虑是否改变的那个意见维度的权重。这意味着，其他意见维度的权重完全不起作用。在我们的模型中，相似性度量会根据意见各维度的权重进行加权。这样，整个意见范围都会发挥作用，其影响大小取决于主体认为这些意见有多重要。

意见动力学领域的大多数模型都在包含极端值的空间中运行。我们的研究表明，模型所产生的动力学可能对意见空间的选择相当敏感。具体而言，某些扩展在立方意见空间中似乎几乎没有影响，但在环面意见空间中却可能产生重大影响。意见空间的选择十分重要，应当明确加以讨论。

数据可用性

本文仿真模型的代码可在 https://github.com/Benephfer/ Toroidal-and-cubic-opinion-space-dynamics 获取。

参考文献

[1] C. Castellano、S. Fortunato 和 V. Loreto，“社会动力学的统计物理学”，《现代物理学评论》，第 81 卷第 2 期，第 591–646 页，2009 年。[2] A. Flache 、 M. Mäs 、 T. Feliciani 、 E. Chattoe-Brown 、 G. Deffuant、S. Huet 和 J. Lorenz，“社会影响模型：迈向新的前沿”，《人工社会与社会模拟杂志》，第 20 卷第 4 期，2017 年。文章编号：2。[3] H. Noorazar、K. Vixie、A. Talebanpour 和 Y. Hu，“从经典意见动力学到现代意见动力学”，《国际现代物理学杂志 *C*》，第 31 卷第 7 期，2020 年。文章编号：2050101。[4] M. Jusup、P. Holme、K. Kanazawa、M. Takayasu、I. Romi´c、Z. Wang、S. Geˇcek、T. Lipi´c、B. Podobnik、L. Wang、W. Luo、T. Klanjšˇcek、J. Fan、S. Boccaletti 和 M. Perc，“社会物理学”，《物理学报告》，第 948 卷，第 1–148 页，2022 年。[5] S. Liu、Z. Wu 和 L. Martínez，“意见极化综述：模型、驱动因素与策略性解决方案”，《信息处理与管理》，第 63 卷第 2 期 A 部分，页码 104433，2026 年。[6] R. A. Holley 和 T. M. Ligget，“弱交互无限系统与投票者模型的遍历定理”，《概率年刊》，第 3 卷第 4 期，第 643–663 页，1975 年。[7] K. Sznajd-Weron 和 J. Sznajd，“封闭社群中的意见演化”，《国际现代物理学杂志 *C*》，第 11 卷第 06 期，第 1157–1165 页，2000 年。[8] S. Galam，“随机几何中的少数意见传播”，《欧洲物理学杂志 *B*》，第 25 卷，第 403–406 页，2002 年。[9] M. H. DeGroot，“达成共识”，《美国统计学会杂志》，第 69 卷第 345 期，第 118–121 页，1974 年。[10] R. Hegselmann 和 U. Krause，“意见动力学与有界信心模型：分析与模拟”，《人工社会与社会模拟杂志》，第 5 卷第 3 期，2000 年。[11] K. Chan、R. Duivenvoorden、A. Flache 和 M. Mandjes，“一种意见形成的相对方法”，数学社会学杂志，第 48 卷第 1 期，第 1–41 页，2024 年。[12] M. Caponigro、A. C. Lai 和 B. Piccoli，“球面上的非线性意见形成模型”，《离散与连续动力系统》，第 35 卷第 9 期，第 4241–4268 页，2015 年。[13] A. Aydoˇgdu、S. T. McQuade 和 N. P. Duteil，“一般紧黎曼流形上的意见动力学”，《网络与异质介质》，第 12 卷第 3 期，第 489–523 页，2017 年。[14] R. Axelrod，“文化传播：一种具有局部收敛和全局极化的模型”，《冲突解决杂志》，第 41 卷第 2 期，第 203–226 页，1997 年。[15] B. V. Meylahn 和 J. M. Meylahn，“社会强化学习如何导致亚稳态极化和投票者模型”，*PLOS ONE*，第 19 卷第 12 期，页码 e0313951，2024 年。

[16] S. Banisch 和 E. Olbrich，“通过社会反馈学习导致的意见极化”，数学社会学杂志，第 43 卷第 2 期，第 76–103 页，2019 年。[17] G. Deffuant、D. Neau、F. Amblard 和 G. Weisbuch，“交互主体之间的信念混合”，复杂系统进展，第 3 卷，第 87–98 页，2000 年。[18] M. Starnini、F. Baumann、T. Galla、D. Garcia、G. Iñiguez、M. Karsai、J. Lorenz 和 K. Sznajd-Weron，“意见动力学：统计物理学及其他”，2025 年。arXiv:2507.11521。[19] R. J. Glauber，“伊辛模型的时变统计”，数学物理学杂志，第 4 卷，第 294–307 页，1963 年 2 月。[20] N. Metropolis、A. W. Rosenbluth、M. N. Rosenbluth、A. H. Teller 和 E. Teller，“ 利用高速计算机计算状态方程 ”，化学物理学杂志，第 21 卷，第 1087–1092 页，1953 年。[21] W. K. Hastings，“使用马尔可夫链的蒙特卡洛抽样方法及其应用”，*Biometrika*，第 57 卷，第 97–109 页，1970 年。[22] P. MacCarron、P. J. Maher、S. Fennell、K. Burke、J. P. Gleeson、K. Durrheim 和 M. Quayle，“Axelrod文化传播模型中的共识阈值”，*PLOS ONE*，第 15 卷，第 1–13 页，2020 年 06 月。[23] S. Huet 和 G. Deffuant，“开放性带来意见稳定性，狭隘性则导致波动性”，复杂系统进展，第 13 卷第 03 期，第 405–423 页，2010 年。[24] D. Baldassarri 和 P. Bearman，“政治极化的动力学”，《美国社会学评论》，第 72 卷第 5 期，第 784–811 页，2007 年。[25] Z. Kalinowska 和 B. Dybiec，“加权Axelrod模型：不同却相似”，*Physica A*：统计力学及其应用，第 630 卷，页码 129281，2023 年。[26] T. M. Pham、J. Korbel、R. Hanel 和 S. Thurner，“经验社会三元组统计可由二元同质性互动解释”，美国国家科学院院刊，第 119 卷第 6 期，页码 e2121103119，2022 年。[27] D. J. Watts 和 S. H. Strogatz，“‘小世界’网络的集体动力学”，《自然》，第 393 卷第 6684 期，第 440–442 页，1998 年。[28] B. V. Meylahn 和 C. Searle，“超越社会影响的意见动力学”，网络科学，第 12 卷第 4 期，页码 339–365，2024 年。[29] A. Dinkelberg、P. MacCarron、P. J. Maher 和 M. Quayle，“在扩展Axelrod文化传播模型中，同质性动力学的影响超过网络拓扑”，*Physica A*：统计力学及其应用，第 578 卷，页码 126086，2021 年。[30] H. L. J. van der Maas、J. Dalege 和 L. Waldorp，“个体内部及个体之间的极化：层级伊辛意见模型”，复杂网络杂志，第 8 卷，2020 年 5 月。[31] W. J. Mullin，“谐势中的玻色–爱因斯坦凝聚”，《低温物理学杂志》，第 106 卷，第 615–641 页，1997 年 3 月。

A 敏感性抽查

为了检验研究结果的稳健性，我们在有界信任扩展和主题权重扩展中，针对有界信心截断值的一组有限取值，在 α 的其他取值下进行模拟。

特别地，我们对截断值 $b = 12,$ 15进行抽查。在表2和表3中可以看到，两种意见空间上的效应是一致的：

- 加入有界信任后，可以出现共识以外的结果（见表2，其中所有模型的共识概率均为 < 1）。
- 在有界信心模型中加入主题权重，会提高环面意见空间模型和立方意见空间模型中达成共识的似然（见表3）。此外，这一效应在环面模型中强于立方模型。
- 在环面意见空间模型中加入主题权重，会提高出现双极化的概率。
- 在立方意见空间模型中加入主题权重，会使双极化概率的峰值向右移动。这表现为在 $b = 12$处双极化概率略有下降，而在 $b = 15$处有所上升，且这一现象在 α的所有取值上均可见。

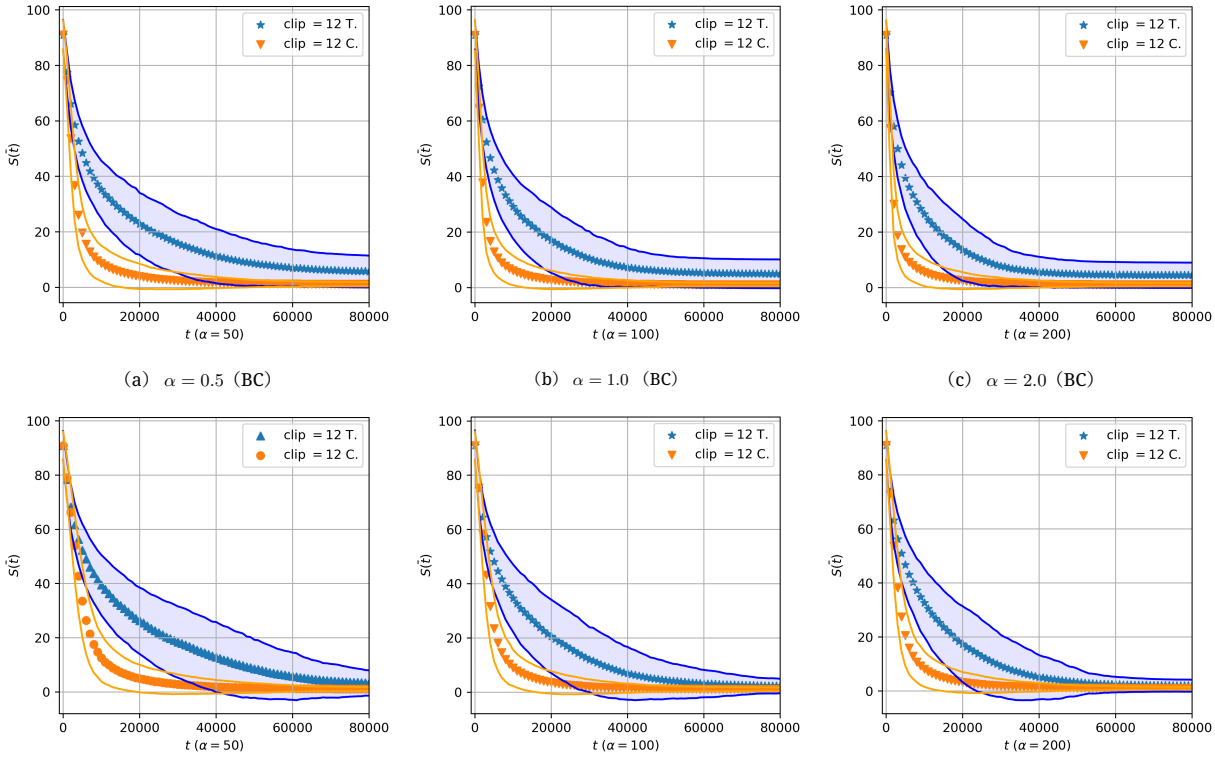
α	Cube				环面			
	$b=12$		$b=15$		$b=12$		$b=15$ 有界信任	加权主题
	BC	TW	BC	TW	BC	TW		
0.5	0.904	0.939	0.005	0.0901	0.04	0.3418	0.0	0.0
1.0	0.92	0.9489	0.008	0.1298	0.038	0.4039	0.00	0.00
2.0	0.928	0.948	0.006	0.1022	0.067	0.4534	0.0	0.00

表2：共识概 在有界信任（BC）和加权主题（TW）下， $\alpha \in \{0.5, 1, 2\}$ 的共识概率 .

α	Cube				环面			
	$b=12$		$b=15$		$b=12$		$b=15$	
	BC	TW	BC	TW	BC	TW	BC	TW
0.5	0.09	0.0590	0.031	0.1972	0.098	0.3531	0.00	0.00
1.0	0.077	0.0480	0.03	0.2354	0.144	0.3215	0.00	0.00
2.0	0.065	0.051	0.0270	0.2345	0.139	0.3300	0.00	0.0028

表 3：双极化概率在有界信任（BC）和加权主题（TW）下，对于 $\alpha \in \{0.5, 1, 2$ 的双极化概率 }.

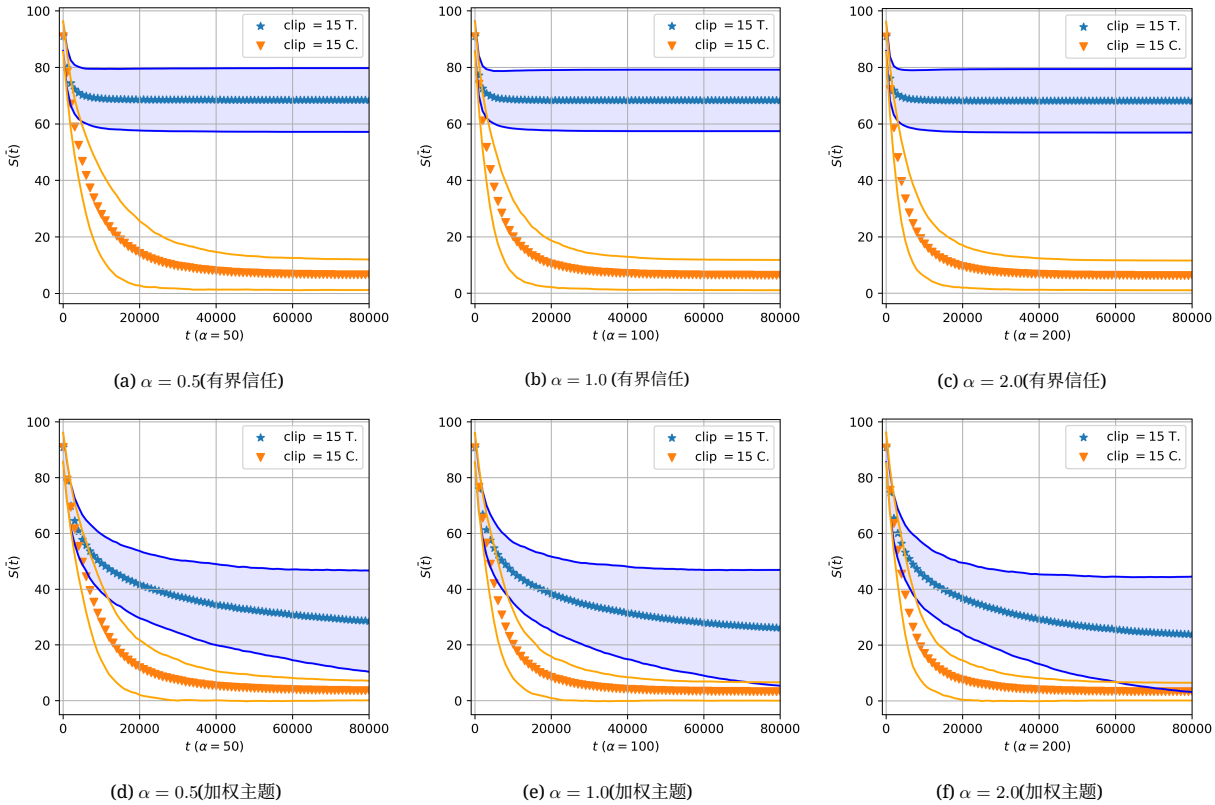
在图14和图15中，我们分别绘制了两种扩展在截断值 $b = 12$ 和15下、随 α 变化时群体数量随时间的变化。正如在基本模型的讨论中所述，调整 α 的效果是加快或减慢动力学。额外扩展的效果在 α 的不同取值上是一致的（后期群体数量更低）。尽管这绝非对参数空间的详尽检验，但我们看到，在动力学最为丰富的 b 区域，不同 α取值下的结果相似。我们得出结论：我们的结果对参数 α的变化具有稳健性。



（a） $\alpha = 0.5$（BC） （b） $\alpha = 1.0$ （BC） （c） $\alpha = 2.0$（BC）

（d） $\alpha = 0.5$（TW） (e) $\alpha = 1.0$(加权主题) (f) $\alpha = 2.0$(加权主题)

图14：在有界信任（有界信任）和主题权重（加权主题）下， $b = 12$ 于 $\alpha = 0.5, 1.0, 2.0$不同取值时的模拟中，群体数量随时间变化的均值。



(a) $\alpha = 0.5$(有界信任) (b) $\alpha = 1.0$ (有界信任) (c) $\alpha = 2.0$(有界信任)

(d) $\alpha = 0.5$(加权主题) (e) $\alpha = 1.0$(加权主题) (f) $\alpha = 2.0$(加权主题)

图15：平均nu 群体数量随时间的变化，针对使用 $b = 15$、在 $\alpha = 0.5$不同取值下的模拟, 1.0,2.0 在 r 有界信任（有界信任 ）和主题权重（加权主题）。

B 哈密顿表述

该模型及其动力学目前以概率形式表述。这种方法与大量现有文献相一致。然而，研究意见动力学的另一种框架借鉴了伊辛模型的类比，这些模型源自固体与软物质以及自旋玻璃的统计物理学。在社会科学领域，此类模型通常称为层次伊辛观点模型(HIOM)（参见 [30]）。在原始伊辛模型中，哈密顿量表示粒子自旋从“向上”翻转为“向下”或反之所对应的能量，这两个方向是相对于外场或由粒子系综共同产生的平均场来定义的。这种机制可能导致系统出现宏观极化，即所有自旋都朝同一方向排列。

在这类模型中，确定相互作用概率的方法是先写出相互作用的哈密顿量，这相当于所有粒子的总能量。相互作用会改变粒子的状态，因此，对整个系统中的所有粒子求和后，能量值也会随之改变。统计物理学采用了玻尔兹曼分布这一概念，用来描述系统处于给定能量状态的总体似然，其形式为 $\exp(-H/kT)/Z$，其中 Z 是配分函数， T 是系统温度。若某种相互作用导致总能量降低，则所得状态变得更有可能——也就是说，发生这种跃迁的似然较高。反之，若相互作用使系统能量增加，则该跃迁的概率相应较低。在算法中实现这些跃迁概率的方法有多种。在格劳伯动力学（[19]）中，发生变化 $\Delta \boldsymbol{s}$ 的概率 $p(\Delta \boldsymbol{s})$为：

$$p\left(\Delta \boldsymbol{s}\right) = \frac{1}{1 + e^{\Delta H(\boldsymbol{s})/T}} \tag{9}$$

或者，也可以采用梅特罗波利斯-黑斯廷斯方法：

$$p(\Delta \boldsymbol{s}) = \begin{cases} 1 \text{ if } \Delta H \leq 0 \\ \exp(-\Delta H/T) \text{ if } \Delta H > 0 \end{cases} \tag{10}$$

请注意，在 [30] 中，式（9）分母的玻尔兹曼因子使用的是因子 $-A$，而不是 $1/T$。按照 [30] 中的描述，此表达式中的常数 A 是主体的“注意力”。它可以针对每个主体单独指定，也可以设为系统中所有主体共用的一个常数。如果某个主体的注意力为 0，那么 H 的任何变化都不会影响转移概率，该主体会保持在 $1/2$。如果注意力 A 很高，那么即使 H 略有下降，也会使玻尔兹曼因子的值变得很小，从而使状态发生变化的概率很高。在伊辛模型的情形下，哈密顿量尤其简单：

$$H(\boldsymbol{s}) = -\sum_i \tau_i s_i - \sum_i \sum_j \omega s_i s_j \tag{11}$$

其中，s_i 只能取值为 ± 1；其符号和数值表示自旋与外场、相邻自旋之间耦合的相对强度，以及材料属于铁磁性还是反铁磁性。

值得指出的是，系统在经过 n 次独立步骤（成对相互作用）后发生某种状态转变的似然 P_n 满足：

$$\begin{aligned} P_n &= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{1}{1 + e^{\Delta H_i / T}}) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{\Delta H_i / T}}{1 + e^{\Delta H_i / T}} \\ &\approx 1 - \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta H_i / T \right) \approx \frac{1}{1 + \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta H_i / T \right)} \end{aligned} \tag{12}$$

这里的近似等号基于这样一种观点：只有最可能发生的转变才值得纳入考量，即满足 $\Delta H \ll 0$的转变。表达式 (12) 表明，至少在近似意义上，n 次独立交互对应的哈密顿量是每次成对相互作用所对应哈密顿量之和。

正文中介绍的模型，其概率由式 (1) 给出；在有界信任变体中，则由式 (6) 给出。意见空间中的距离根据意见空间是立方体还是环面，分别由式 (2) 或式 (3) 给出。在当前设置中，主体位于网格上，每个时间步都有一对邻居进行交互，状态变化 $\Delta \boldsymbol{s}$ 对应于邻居之间意见空间距离的变化，即 $\Delta \boldsymbol{s} \to \Delta d$。给定这些概率后，我们可以反向推导，例如在适用 Glauber方法时，相应的哈密顿量形式为：

$$\Delta H = -T \ln\left(\frac{p(\Delta \boldsymbol{s})}{1 - p(\Delta \boldsymbol{s})} \right) \tag{13}$$

为了说明这些选择的影响，我们有必要考察 ΔH 与 d时的行为。如果 d 足够小，主体就会保持在有界信任区域内。为了阐明哈密顿量作为 d 的函数时的行为，方便起见，我们将 $d \downarrow 0$ 的概率上限设为一个略低于 1 的常数值，这样 ΔH 就不会在 $d \downarrow 0$时发散：

$$p_0 = 1 - \epsilon \tag{14}$$

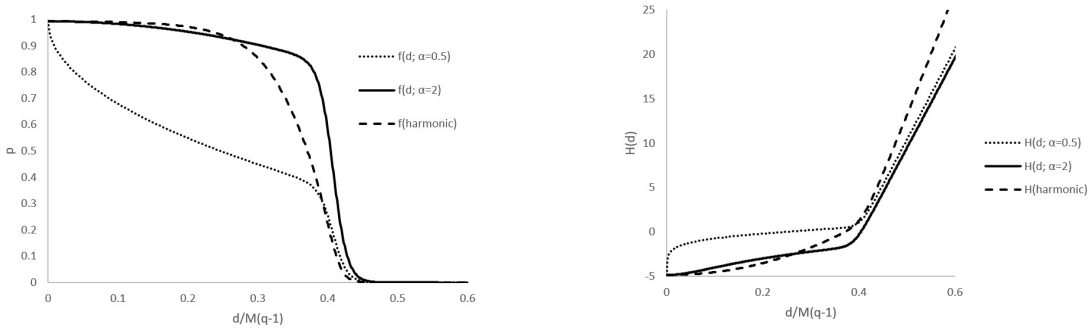
由此显然可知

$$\Delta H = -T \ln\left(\frac{f(d)}{1 - f(d)} \right) = -T \ln\left[\frac{1 - \left(\frac{d}{M(q-1)} \right)^{\alpha}}{\frac{\epsilon}{1-\epsilon} + \left(\frac{d}{M(q-1)} \right)^{\alpha}} \right] \quad \text{for } d < M(q-1) - b \tag{15}$$

现在可以清楚地看出，对于 $0 < \alpha < 1$，f形状的选择会导致 ΔH 在 $d \downarrow 0$时呈现尖点状行为，而 $\alpha > 1$则呈现平坦（即相对于 d的导数为 0）的行为。

为了便于说明，值得考虑单调递减函数 f 的另一种参数化形式：

$$f_b(d) = \frac{e^{(1-\beta d^2)/\sigma_b}}{1 + e^{(1-\beta d^2)/\sigma_b}} \tag{16}$$



(a) 跃迁概率　　(b) 相关的哈密顿量

图 16：(a)：跃迁概率随意见空间距离 d 的变化，按 $M(q-1)$ 缩放；函数 f 采用标准形状选项（点线和实线）或替代式 (16)（虚线）。右图：等效哈密顿量；在格劳伯动力学作用下，该哈密顿量会产生这些概率。本例中，函数 f 的参数选为 $\alpha = 1/2$（点线）或 $\alpha = 2$（实线），以及 $b = 1/\sqrt{6} \approx 0.408$。对于形状 (16)，函数 f_b 的参数为 $\beta = 7.2$ 和 $\sigma_b = 0.2$。特意作出这些选择，是为了使函数值在 $d \downarrow 0$ 处相匹配，并使概率在 d 附近以相同的数值开始下降。

参数为 $\beta > M^2(q-1)^2$ 和 $0 < \sigma_b < 1$（最好取较小值）。这是因为对于这种形状的概率函数，哈密顿量满足：

$$\Delta H \quad = \quad -T \ln\left(\frac{f(d)}{1-f(d)}\right) = \frac{T}{\sigma_b}\left(\beta d^2 - 1\right) \tag{17}$$

这立即让人认出它是谐振子的哈密顿量。这意味着，对于 $\alpha \approx 2$ 的选择而言，跃迁概率随意见空间中距离变化的行为，与受谐势支配的系统相似；这类系统在统计物理学中已有相当深入的研究，例如伊辛系统。

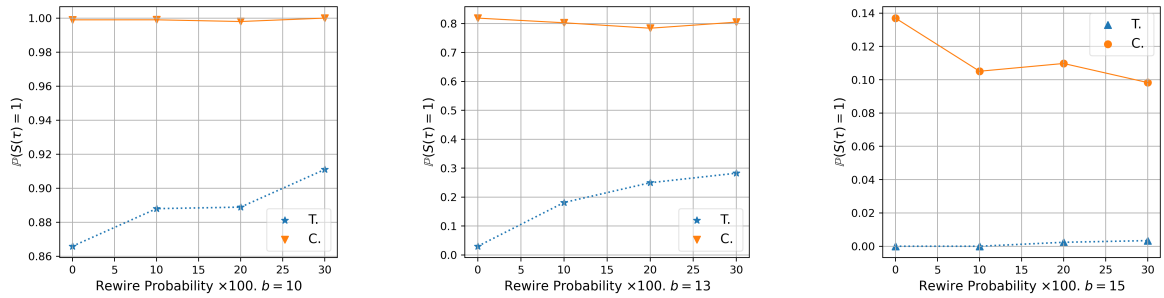
谐势（即谐振子系统）是描述理想气体粒子或固态晶格中粒子的一种有用近似。在低温下，玻色粒子气体发生相变并形成玻色-爱因斯坦凝聚态的现象可用这种方式建模（参见 [31]）；对于晶格，声子的某些性质也能由此类模型很好地描述。我们或许可以预期，在当前情形下也会出现一些类似的行为。

请注意，截断（有界信任）已纳入式 16：截断距离 $d_{clip} = M(q-1) - b \approx 1/\sqrt{\beta}$，而跃迁的“陡峭程度”由 σ_b 参数控制。σ_b 的值越小，跃迁就越陡；因此，主文图 3c 中的硬截断对应于 $\sigma_b \downarrow 0$。将 β 设得足够小，就会使任何跃迁都落在 d 可取值的范围之外；或者，将 σ_b 设得很大，也会让截断变得极其平缓，几乎难以察觉。由式（17）可知，在固定 σ_b（和 β）的情况下，降低系统温度与在固定温度下提高 σ_b 的效果相同，即（逐渐）消除任何截断。我们已经看到，没有有界信任（即没有截断）时，系统总会达到共识：所有人都会“凝聚”到同一状态。这似乎相当于极低温下的玻色-爱因斯坦凝聚态。温度较高、截断较强时，尤其是在较短距离处出现陡降、导致交互概率大幅下降时，则相当于有限或较高温度，因此系统并不总会最终凝聚到单一状态。哈密顿量与谐振子的对应关系还要求考虑意见空间的边界条件。请回想一下，谐振子微分方程配合立方体边界上的诺伊曼型或狄利克雷型条件，会产生一组允许的离散谱本征态／振荡（驻波）。在具有周期性条件的环面空间中也会出现同样的现象，不过环面空间与立方空间的能级和本征态有所不同。将这一点对应到当前情形，可以预期，若系统处于较高能量本征态，子群数量会更多。随机初始条件很可能会使系统处于多个本征态的叠加态。甚至可以说，系统最终形成的群体数量的似然可能偏向较低本征态（即子群数量较少），除非对初始条件进行某种相当具体的设置。对此进行探讨超出了本文的范围。

C 循环图上的重连

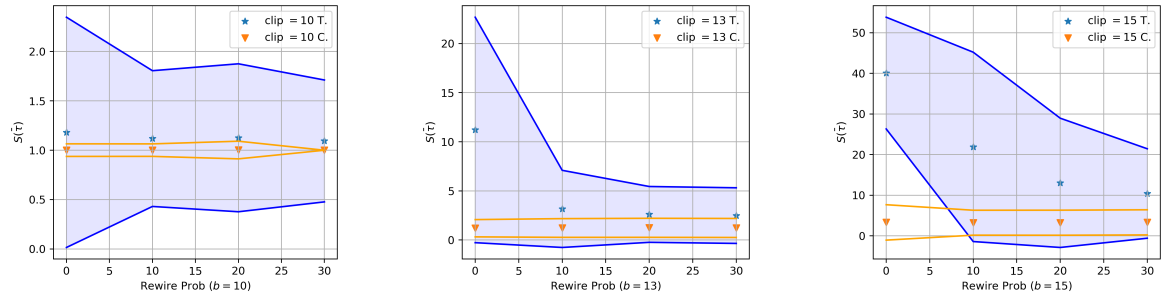
在本附录中，我们简要展示从循环图出发进行网络重连对模型中动力学的影响。

进行这些数值模拟时，我们保持先前调整的参数不变。具体而言， $\alpha = 2$，每个主体在每个意见维度上都有个人主题权重，最近邻数量为 4，而主体总数为 100。我们选择具有 4 个最近邻的循环图，因为网格中的大多数主体都有 4 个最近邻。不过，在这个循环图中，主体之间的最短路径明显长于网格中的最短路径。此外，该图的聚类程度也更高：重连前，所有节点都属于 3 个三角形，而网格中的节点则不属于任何三角形。



(a) $b = 10$ (b) $b = 13$ (c) $b = 15$

图17：不同有界信任水平下的共识概率估计值。



(a) $b = 10$ (b) $b = 13$ (c) $b = 15$

图 18：在不同有界信任水平下，模拟终止时群体数量的估计平均值。

在图 17a–18c 中，我们绘制了共识的似然，以及模拟终止时的群体数量（对于那些在时间限制之前终止、因而已收敛至稳态的运行）。我们看到，对于环面意见空间，其影响与我们原本预期重连会造成的影响更为相似。更多的重连会带来更高的共识可能性，以及稳态下更少的群体数量。在循环图中，这是通过将原本相距甚远的紧密社区彼此拉得更近来实现的。

我们看到一个出乎意料的结果：在立方意见空间中，当有界信任为 $b = 15$ 时，重连会降低达成共识的可能性。这类似于从二维网格开始、在 §3.4.1 中研究的重连。然而，群体数量的期望值保持稳定。我们通过在图 19 中以热图格式绘制稳态下的群体数量，进一步考察这一现象。

我们观察到，随着重连程度增加，共识的似然在下降，而稳态下群体数量极端化的可能性也在增加。因此，在如此有界信任的条件下，对循环图进行重连会破坏边被切断处的局部社区结构，同时强化边被重连处的局部社区结构。

最后，为了进一步说明从循环图而非二维网格开始时，重连会产生不同影响，我们在图20中绘制了模拟终止时的群体数量与谱隙之间的关系（谱隙定义为图的拉普拉斯矩阵的第二大特征值），分别对应于 $b = 15$ 和重连概率 $p \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3\}$。对于环面意见空间，我们观察到明显的相关性：谱隙越大，稳态下的群体数量越少。对于网格图，这种相关性则弱得多。

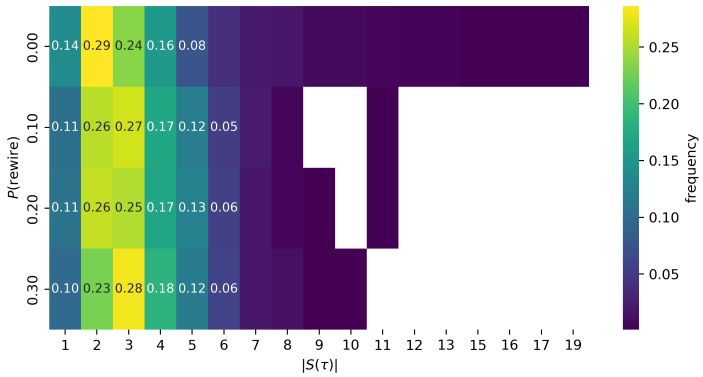
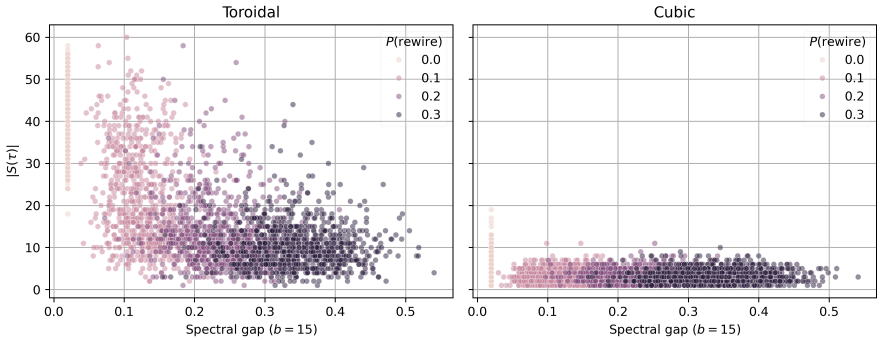
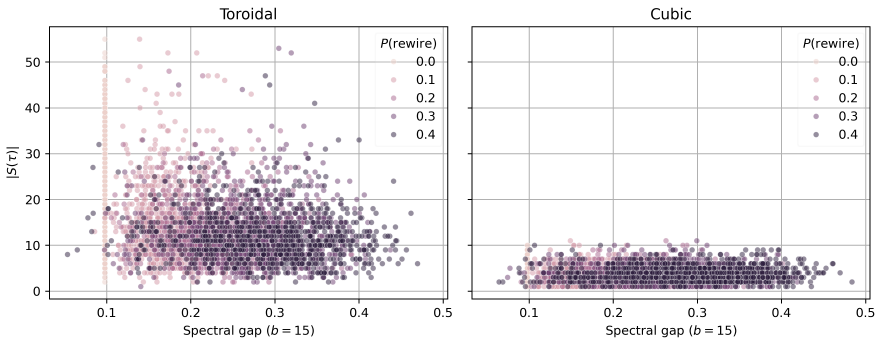


图19：在有界信任 $b = 15$ 条件下，从循环网络重连后，立方意见空间中 $|S(\tau)|$ 的频率。请注意，空方块表示没有模拟运行产生该结果；为便于阅读，数值 < 0.05 的标注已省略。



(a) 从循环图重连

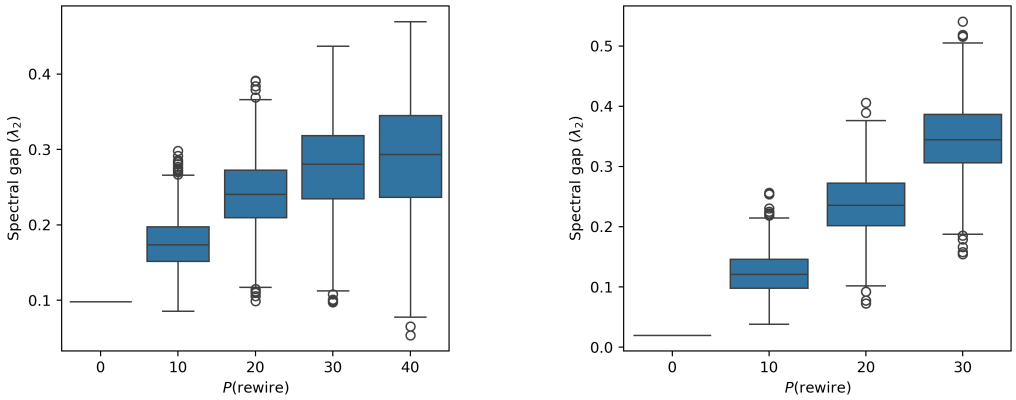


(b) 从二维网格重连

图20：数量 o 重连后终止时的群体数量，分别对应 (a) 循环网络和 (b) 网格网络；该网络位于环面 l
和立方意见空间 适用于 $b = 15$。

从循环图开始时，提高重连概率会增大谱隙。谱隙较大通常意味着混合时间较短，因为图的连通性似乎更好。连通性的增强也可能解释了稳态下群体数量的减少。

图 21 展示了从二维网格和循环图出发，在不同重连概率 p 下谱隙的箱线图。我们看到，重连网格会使谱隙的分布范围变大，最大值和最小值也都随之增大。相比之下，重连循环图则会更均匀地提高谱隙。这或许可以解释为什么重连会提高循环网络中出现共识的似然，却不会提高网格中的这一似然。



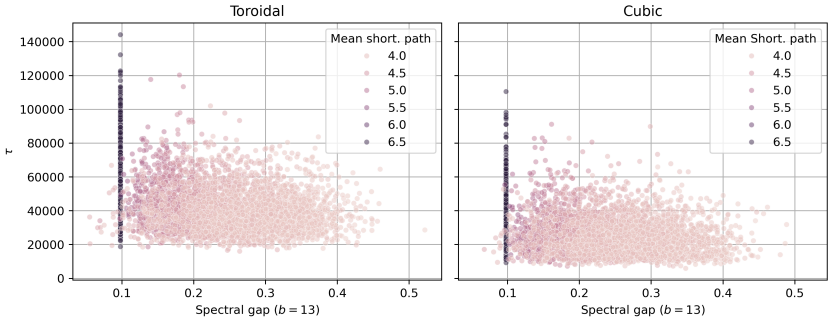
(a) 网格　　(b) 循环图

图21：箱线图展示重连网格与循环图如何改变谱隙，谱隙定义为该图拉普拉斯矩阵的第二特征值。

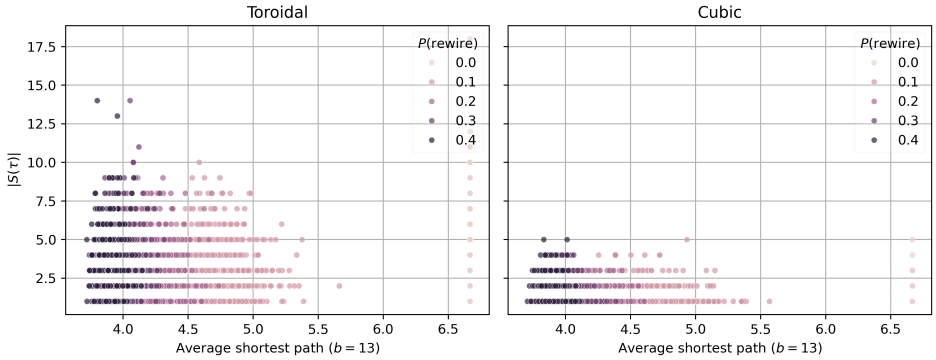
D 附加　图，说明重连网格对达到稳态时间的影响

为求完整起见，我们在此列出正文中省略的图。特别是，中间值 $b = 13$呈现出与 $b = 10$ 和 $b = 15$相似的时间动力学。在图 22 中，将吸收时间 τ绘制为所用重连网格网络的谱隙的函数。

在图 23a–23c 中，我们绘制了 $b = 13$在网格网络重连条件下，群体数量随模拟时间变化的均值（取自多次模拟）。

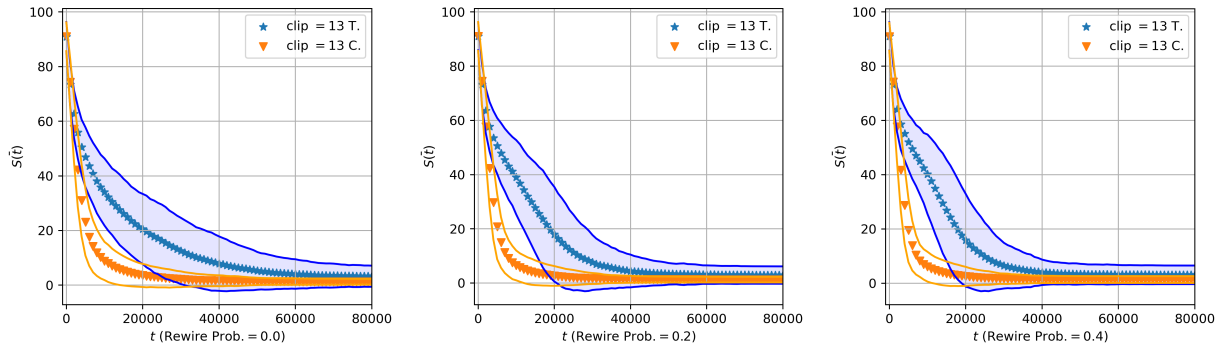


（a）谱隙和终止时间 τ



（b）最短路径和群体数量 $|S(\tau)|$

图22：网络的谱隙对模拟终止时间 τ 的影响，以及最短路径对 $b = 13$终止时群体数量的影响。



（a） $b = 13$， $p = 0.0$

（b） $b = 13$， $p = 0.2$

(c) $b = 13, p = 0.4$

图 23：在加权立方体和加权环面意见空间（分别标记为 C. 和 T.）上， $b = 13$ 且重连概率为 $p \in \{0.0, 0.2, 0.4\}$、$\alpha = 2$ 时，模拟中群体数量随时间变化的平均值。