arXiv:2603.05364v1 [math.RA] 5 Mar 2026

带对合的Azumaya代数的 Knebusch迹公式

VINCENT ASTIER 和 THOMAS UNGER

Abstract. 我们为带对合的Azumaya代数上的厄米形式的符号建立了一个迹公式，将 Knebusch 关于交换基环有限 ´étale 扩张上的对称双线性型的工作加以推广。作为一个应用，在基环为半局部环时，我们得到一个关于全符号的正合列，它与 Pfister 局部-整体原理及稳定指数的概念有关。

Contents

1. 引言.1 2. 预备知识 .2 2.1. 厄米形式 .2 2.2. 有限 ´étale 代数 .3 2.3. 带对合的Azumaya代数.3 2.4. 迹映射 .5 2.5. 实代数 .5 2.6. 厄米形式的符号 .8 3. Knebusch迹公式 .9 3.1. 有限 ´étale 扩张与实闭域 .9 3.2. 迹公式.12 4. 具有 2 的幂符号差的参考形式.14 5. 半局部情形下全符号的正合列 . . . . . 19 附录 A. 厄米 Morita 等价 .19 参考文献 .24

1. Introduction

设 R 是一个交换环。20 世纪 70 年代中期，Knebusch 证明了关于有限 ´ Etale 扩张（更一般地说，Frobenius 扩张）上的对称双线性形式之符号的迹公式，其中 R，参见 [17, 18, 19]。Knebusch 的方法早于 Coste 和 Roy 对实谱 Sper R 的发现，参见 [10, 第 7] 章和[20], 所用的符号是从 Witt 环 $W(R)$ 到$\mathbb{Z}$的环同态。

本文关注厄米形式的一个迹公式，该公式以序上的符号表示 $\alpha \in \operatorname{Sper} R$。具体而言，在第2节介绍必要的预备知识后，我们在第3节为交换环上带对合的Azumaya代数上的厄米形式建立了这样一个公式。我们证明了

2020 *Mathematics Subject Classification.* 16H05, 11E39, 13J30,16W10, 06F25.
Key words and phrases. Azumaya代数、对合、厄米形式、序、符号、迹公式、实代数。

我们在早先的论文中证明了域上带对合的中心单代数的一个类似结果 [1]，该论文也是我们针对带对合的“性质良好”环发展实代数理论的起点。

我们方法的主线是厄米形式的符号。就 Witt 群和 Sper 上的 Harrison拓扑而言，符号的性质通常十分令人满意 R，参见 [5]。定义这些符号的主要机制是厄米 Morita 理论，我们还为此主题提供了一篇技术附录。作为 Knebusch迹公式的应用，我们在第 2^m 4节证明了一个具有常值符号的非奇异参考形式的存在性；而在第5 节，我们简要讨论了底环为半局部环时全符号的一个正合列（在交换情形下，该正合列与稳定指数有关）。

2. Preliminaries

本文中假设所有环均含幺且满足结合律，并且 2 可逆， d 假设所有域的特征均不等于 2。

2.1. 厄米形式。 设 (A,σ) 是一个带对合的环。环 (A,σ) 上的厄米模是一个对 (M,h)，其中 M 是有限生成投射右 A-模，且 $h\colon M\times M\to A$ 是关于 σ的厄米形式。我们常将 (M,h) 称为厄米形式，并不总是指明其 M 为何。我们用 $\simeq$表示形式的等距。对于 $a_1,\dots,a_\ell\in \mathrm{Sym}(A,\sigma):=\{a\in A\mid \sigma(a)=a\}$，我们用$\langle a_1,\dots,a_\ell\rangle_\sigma$表示对角厄米形式

$$A^\ell\times A^\ell\to A,\ (x,y)\mapsto \sum_{i=1}^{\ell}\sigma(x_i)a_iy_i.$$

注意，并非每个厄米形式都与某个对角厄米形式等距。

定义 2.1。 对于 $i=1,\dots,t$，设 (A_i,σ_i) 为带对合的环，且设 (M_i,h_i) 为定义在 (A_i,σ_i) 上的厄米形式。令 $(A,\sigma):=(A_1,\sigma_1)\times\cdots\times(A_t,\sigma_t)$。我们将 $(M_1,h_1)\times\cdots\times(M_t,h_t)$ 记为定义在 (A,σ) 上的厄米形式 (M,h)，其定义如下：

- $M=M_1\times\cdots\times M_t$，具有显然的右 A-模结构；
- $h((m_1,\dots,m_t),(m_1',\dots,m_t')):=(h_1(m_1,m_1')\dots,h_t(m_t,m_t'))$

（直接验证可知，(M,h) 是定义在 (A,σ) 上的厄米形式）。

命题 2.2。 采用定义 2.1中的相同记号，假设存在交换环 R_i，使得 A_i 是有限生成的 R_i-模，其中 $i=1,\dots,t$。则

(1) h 非奇异，当且仅当每个 h_i 都非奇异；(2) 若每个 h_i 都是双曲的，则 h 是双曲的。

证明。令 $R:=R_1\times\cdots\times R_t$。则 A 是有限生成的 R-模。

第一条结论是以下事实的推论：对于 h，其非奇异当且仅当 $h\otimes_R R/\mathfrak{m}$ 非奇异，其中 $\mathfrak{m}$ 是 R的任意极大理想，参见 [22, 第一章，引理 7.1。3]。

我们证明第二个陈述。我们可以写作 $M_i=L_i\oplus P_i$ with $h_i(L_i,L_i)=0$ and$h_i(P_i,P_i)=0$ (参见 [14, 第 2.2] 节)。因此 $M=\prod_{i=1}^t(L_i\oplus P_i)\cong(\prod_{i=1}^t L_i)\oplus(\prod_{i=1}^t P_i)$。令 $L=\prod_{i=1}^t L_i$ and $P=\prod_{i=1}^t P_i$。我们验证 $h(L,L)=0$；$h(P,P)=0$ 的证明类似。只需证明，对于每个 $\ell_i\in L_i$ and$\ell_j'\in L_j$，都有 $h(\ell_i,\ell_j')=0$。若 $i\neq j$，则 $h(\ell_i,\ell_j')=0$；若 $i=j$，则 $h(\ell_i,\ell_i')=h_i(\ell_i,\ell_i')=0$。□

2.2. **有限 ´étale 代数**。设 R 是一个交换环。我们称一个 R-代数为 *´étale* R 上的代数，若它是交换、可分、平坦且有限表示的R-代数；若它是 ´étale 且为有限生成的 R-模，则称其为 ´有限 *étale* 代数。

我们有如下蕴含关系序列（事实上是等价关系）。这些结果众所周知，但我们未能在单一且便于查阅的参考文献中找到它们。

T 是有限 ´étale R-代数

$\Rightarrow T$ 是可分平坦的 R-代数，并且作为 R-模是有限表示的（根据 [26, 注2的第一部分4]）$\Rightarrow T$ 是可分的 R-代数，并且是有限生成投射的 R-模（根据 [26, 注2的第二部分4]）$\Rightarrow T$ 是可分、平坦且有限表示的 R-代数，并且作为 R-模是有限生成的（因为投射模是平坦的，并根据 [15,练习9.2.2(2)]）

$\Rightarrow T$ 是有限的 ´étale R-代数，

因此，所有这些陈述都是等价的。

2.3. **带对合的Azumaya代数**。设 R 为交换环。若 A 是一个 R-代数，并且是一个 $Azumaya$ R-代数，则 A 是一个忠实的有限生成投射R-模，且映射

$$A \otimes_R A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_R(A),\ a \otimes b^{\mathrm{op}} \mapsto [x \mapsto axb]$$

是 R-代数的一个同构（此处， A^{op} 表示 A的逆代数，它作为 R-模与 A 相同，但乘法为扭曲乘法 $a^{\mathrm{op}}b^{\mathrm{op}} = (ba)^{\mathrm{op}}$）。中心 $Z(A)$等于 R。例如，参见 [22, 第三章（5.1）], 。我们回顾以下结果：

命题 2.3 （[25, 引理 2.1 和定理 2.2]）。

（1）若 K 是域，则 A 是 *Azumaya* K-代数，当且仅当 A 是中心单代数 K。

（2）若 A 是 *Azumaya* R-代数，且 $f\colon R \to S$ 是交换环同态，则 $A \otimes_R S$ 是 *Azumaya* S- 代数。

定义 2.4 （[14, 第 1.4]节）。若（A, σ）满足以下条件，我们称其为带对合的阿祖马亚代数，其基环为 R：

- A 是一个带有 R-线性对合 σ的 R-代数；
- A 在 R上是可分射影的；
- 同态 $R \to A, r \mapsto r \cdot 1_A$ 将 R 与 $Z(A)$中 σ-对称元素的集合 $\mathrm{Sym}(Z(A)\ \sigma)$等同起来。

此定义的动机如下：

命题 2.5 ([14, 命题 1.1]). 设 A 是一个 R-代数。那么，当且仅当 A 作为 R-模是射影的，并且作为 R-代数是可分的， A 在 $Z(A)$ 上是阿祖马亚代数，且 $Z(A)$ 在 R 上是有限无分歧的。

引理 2.5]进一步揭示了它与阿祖马亚 R-代数之间的联系： [6,

引理 2.6。设 A 是一个带有 R-线性对合 σ 的 R代数，使得 A 是定义在 $Z(A)$上的 *Azumaya*代数， $Z(A)$ 是 R 或 R的二次型 *étale* 扩张，并且$R = \mathrm{Sym}(Z(A)\ \sigma)$。那么，$(A, \sigma)$ 是定义在 R上的带对合的阿祖马亚代数。

反之，若 R 是连通的，则结论成立。

本文余下部分均采用以下假设： R 是一个 2 可逆的交换含幺环（特别地，我们将 R上的二次型与对称双线性型视为相同），且 (A,σ) 是定义在 R 上的带对合的阿祖马亚代数。

注意， A 是 $Z(A)$ 上的 Azumaya代数（根据命题 2.5），但不一定是 R上的 Azumaya代数。

我们回顾以下内容，该内容已在 [14,第 1.4 节第二段]中证明：

命题 2.7 （基环变换）。设 T 是一个交换的 R-代数。则$Z(A\otimes_R T) = Z(A)\otimes_R T$且$(A\otimes_R T, \sigma\otimes\mathrm{id}) = T$是 T上的带对合的阿祖马亚代数（特别地， $Z(A\otimes_R T)\cap\mathrm{Sym}(A\otimes_R T,\sigma\otimes\mathrm{id}) = T$）。

备注 2.8。若 $R = F$ 实际上是一个域，则 (A,σ) 是 R 上的带对合的阿祖马亚代数，当且仅当它是 [23,第 2.A、2.B 节意义下的中心单带对合 F-代数（即，我们允许出现 $Z(A) = F\times F$ 的可能性）。我们称这类代数为 F-带对合代数。

回顾一下，若 (B,τ) 是带对合的 F-代数，则如果 $Z(B)\subseteq\mathrm{Sym}(B,\tau)$，就称 τ 为第一类；否则称为第二类（或酉型）。第一类对合又根据 $\mathrm{Sym}(B,\tau)$ 的维数分为正交型和辛型，参见 [23,第 2.A 节和第 2.B 节]。

定义 2.9 （见 [14, 第 1.4] 节）。若在 $\mathfrak{p}\in$ 谱 R 处， A 上的对合 σ 是正交型、辛型或酉型，则称之为在该处具有相应类型；这里 $(A\otimes_R\kappa(\mathfrak{p})\ \sigma\otimes\mathrm{id})$ 是带正交型、辛型或酉型对合的 $\kappa(\mathfrak{p})$-代数，其中 $\kappa(\mathfrak{p})$ 表示分式域 $\mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p})$。若 σ 在所有 $\mathfrak{p}\in$ 谱 R 处都具有正交型、辛型或酉型，则也称其为正交型、辛型或酉型。

命题 2.10 (参见 [14, 命题 1。21]，以了解更详细的陈述。若 R连通，则以下情况恰有一种成立：

(1) σ 是正交型， $Z(A) = R$，且 $\sigma|_{Z(A)} = id^{Z(A)}$；*(2)* σ 是辛型， $Z(A) = R$，且 $\sigma|_{Z(A)} = id^{Z(A)}$；*(3)* σ 是酉型， $Z(A)$ 是二次 *étale* R-代数，且 $\sigma|_{Z(A)}$ 是 $Z(A)$ 上的标准 *involution*（即 $Z(A)$ 上满足 $R = Sym(Z(A)\ \vartheta)$ 的唯一 *involution* ϑ，参见第一章第 *1.3* 节和命题 *1.3.*4]）。

命题 2.11。设 $\varphi\colon R\to T$ 是交换环同态，且令$\mathfrak{p}\in$ 谱 T。则 $A\otimes_R\kappa(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))$ 上的对合 $\sigma\otimes\mathrm{id}$ 与$A\otimes_R T\otimes_T\kappa(\mathfrak{p})$ 上的对合 $\sigma\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}$ 属于同类型。

特别地，如果 R 是连通的，那么 $A\otimes_R T$ 上的对合 $\sigma\otimes$id 与 σ 同类型。

证明。我们先回顾一下，该结论在域情形下成立：如果 R 和 T 是域，那么 A 上的对合 σ 与 $A\otimes_R T$ 上的对合 $\sigma\otimes\mathrm{id}$ 同类型。

映射 φ 诱导出一个从 $R/\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ 到 $T/\mathfrak{p}$ 的单射环同态，进而得到一个域同态 $\bar{\varphi}\colon\kappa(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))\to\kappa(\mathfrak{p})$。显然：

$$\begin{aligned} T\otimes_T\kappa(\mathfrak{p}) &\xrightarrow{\sim}\kappa(\mathfrak{p})\xrightarrow{\sim}\kappa(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))\otimes_{\bar{\varphi}}\kappa(\mathfrak{p})\\ t\otimes x &\longmapsto \bar{t}x\longmapsto 1\otimes\bar{t}x, \end{aligned}$$

这诱导出一个从 $A\otimes_R T\otimes_T\otimes\kappa(\mathfrak{p})$ 到 $A\otimes_R\kappa(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))\otimes_{\bar{\varphi}}\kappa(\mathfrak{p})$ 的同构，进而诱导出带对合代数的同构

$$(A\otimes_R T\otimes_T\kappa(\mathfrak{p}),\sigma\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\to(A\otimes_R\kappa(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))\otimes_{\bar{\varphi}}\kappa(\mathfrak{p}),\sigma\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}).$$

因此，只需证明 $A \otimes_R \kappa(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))$ 上的对合 $\sigma \otimes \mathrm{id}$ 与 $A \otimes_R \kappa(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})) \otimes_{\bar{\varphi}} \kappa(\mathfrak{p})$ 上的对合 $\sigma \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}$ 属于同类型；这由上文回顾的域情形可知。

现在我们证明命题的第二个断言。设 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} T$。注意，根据定义 2.9，$\sigma$ 在 A 上的 involution 与 $\sigma \otimes_R$ 在 $A \otimes_R \kappa(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))$上的恒等映射属于同一类型。根据命题的第一部分，$\sigma \otimes_R$ 在 $A \otimes_R \kappa(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))$上的恒等映射与 $\sigma \otimes$ 在 $\otimes$ 上的恒等映射在 $A \otimes_R T \otimes_T \kappa(\mathfrak{p})$上也属于同一类型。因此，$\sigma \otimes$ 在 $\otimes$上的恒等映射在 $A \otimes_R T$上的类型在 $\operatorname{Spec} T$上为常数，且等于 σ的类型。□

2.4. 迹映射。设 T 是一个有限 ´étale R-代数。我们将由 T给出的从 T到 R的迹映射记为 $\mathrm{Tr}^{T/R} \in \mathrm{Hom}(T, R)$；按 [13,第 91] 页的术语（此处采用 [17, §3]中的参考文献）或定义 4.6.5]。注意，若T 是有限生成自由的，则 $\mathrm{Tr}^{T/R}$ 就是通常的迹，它通过 T的左正则表示定义，参见练习 4.6.14]。此外，相关的对称双线性形式 $\mathrm{tr}^{T/R}\colon T \times T \to R$，$(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}^{T/R}(xy)$ 是非奇异的。事实上，由证明 [15, 推论 4.6.8 第一段末尾] 可知，$\mathrm{tr}^{T/R}$ 的伴随线性映射是双射。

我们记录以下已知结果：

引理 2.12. 设 S 是一个交换 R代数。则 $\mathrm{Tr}^{T \otimes_R S/S} = \mathrm{Tr}_{T/R} \otimes_R \mathrm{id}_S$.

证明。 正如 [15, 第 153 页所述，(3) 的证明蕴含 (1)], T 在 R 上的一组投射对偶基给出 $T \otimes_R S$ 在 S上的一组投射对偶基，结论由此得出。□

我们定义

$$\mathrm{Tr}_{A \otimes_R T/A} := \mathrm{id}_A \otimes_R \mathrm{Tr}_{T/R} : A \otimes_R T \to A,$$

由迹映射 $\mathrm{Tr}^{T/R}$诱导的映射。注意，它是第一章 [22, 命题 7.2.4 及其后段落意义下的一个对合迹]: 验证定义中的前两点是直接的，而第三点由以下事实得出：需要非奇异的型实际上是 $\langle 1 \rangle_\sigma \otimes_R \mathrm{tr}^{T/R}$，它作为两个非奇异形式的张量积，因而是非奇异的。

由此可知，若 h 是双曲的或非奇异的，则 $\mathrm{Tr}^*_{A \otimes_R T/A}(h)$ 分别是双曲的（参见 [22, 第一章，第 40]页底部）或非奇异的（参见 [22, 第一章，10.3，第 62]页顶部）。

2.5. **实代数**。 本节的主要参考文献是 [20]和 [21]。

实谱： 我们将 R 的实谱（即 R上的所有序的集合）记为 $\operatorname{Sper} R$ ，并且记为

$$\mathring{H}(r) := \{\alpha \in \operatorname{Sper} R \mid r > 0 \text{ at } \alpha\} = \{\alpha \in \operatorname{Sper} R \mid r \in \alpha \setminus -\alpha\}$$

（对于 $r \in R$）构成 Sper R上 Harrison拓扑开集标准子基的那些集合。对于该拓扑，空间 $\operatorname{Sper} R$是紧的（这里的意思是拟紧的），参见 [21, 推论 3.4。6]。

若 $\varphi\colon$ $R \to T$是交换环同态， $\alpha \in \in \operatorname{Sper}$ R，且 $\gamma \in \in \operatorname{Sper}$ T，如果 $\alpha = \varphi^{-1}(\gamma)$，我们就称 γ是 α的扩张，并将 Sper T/α 记为 Sper T中 α的所有扩张所成的集合。

令 $\alpha \in \operatorname{Sper}$ R。 α的支集是素理想 $\mathrm{Supp}(\alpha) := \alpha \cap -\alpha \in \operatorname{Spec}$ R，并定义以下环和映射：

$$R \xrightarrow{\rho_\alpha} \kappa(\alpha) := \mathrm{Frac}(R/\text{支集}(\alpha)) \longrightarrow k(\alpha)\ ,$$
$$\qquad\qquad\qquad

其中

- ρ_α 是从 R 到 $\kappa(\alpha)$ 的典范映射，
- $k(\alpha)$ 是 $\kappa(\alpha)$ 在 $\bar{\alpha}$处的实闭包；该序由 α 在 $\kappa(\alpha)$ 上诱导，
- ，且 r_α 是两个水平映射的复合。

我们用 $\tilde{\alpha}$表示 $k(\alpha)$ 上的唯一序，并定义

$$(A(\alpha), \sigma(\alpha)) := (A \otimes_R \kappa(\alpha), \sigma \otimes \mathrm{id}).$$

注 2.13. 根据命题 2.7，$(A \otimes_R k(\alpha) \quad \sigma \otimes \mathrm{id})$是域 $k(\alpha)$ 上的带对合的阿祖马亚代数；根据引理 2.6，$A \otimes_R k(\alpha)$ 的中心等于 $k(\alpha)$，或是 $k(\alpha)$ 的一个二次型étale扩张。因此，$Z(A \otimes_R k(\alpha))$ 等于$k(\alpha)$、$k(\alpha)$ $(\sqrt{-1})$ 或 $k(\alpha) \times k(\alpha)$。在前两种情况下，$A \otimes_R k(\alpha)$ 是单的，因此

$$A \otimes_R k(\alpha) \cong M_{n_\alpha}(D_\alpha), \text{ with } D_\alpha \in \{k(\alpha), k(\alpha)(\sqrt{-1}), (-1,-1)_{k(\alpha)}\},$$

对于某个 $n_\alpha \in \mathbb{N}$。在第三种情况下，$A \otimes_R k(\alpha)$ 是两个以 $k(\alpha)$ 为中心的单代数的直积，并且我们有

$$A \otimes_R k(\alpha) \cong M_{n_\alpha}(D_\alpha), \text{ with } D_\alpha \in \{k(\alpha) \times k(\alpha), (-1,-1)_{k(\alpha)} \times (-1,-1)_{k(\alpha)}\},$$

对于某个 $n_\alpha \in \mathbb{N}$。注意

$$\dim_{k(\alpha)} A \otimes_R k(\alpha) \in \{n_\alpha^2, 2n_\alpha^2, 4n_\alpha^2, 8n_\alpha^2\}.$$

极大实谱：我们将 $\operatorname{Sper}^{\max} R$ 中所有 R 关于包含关系极大的元素组成的集合记为 $\operatorname{Sper} R$，并赋予其由 $\operatorname{Sper} R$ 诱导的拓扑。对于 $\alpha \in \operatorname{Sper} R$，集合 $\{\beta \in \operatorname{Sper} R \mid \alpha \subseteq \beta\}$ [21, 按包含关系全序排列（参见7]定理 3.6。）$\alpha \in$），且每个 $\alpha^* \in \operatorname{Sper} R$都包含于 $\operatorname{Sper}^{\max} R$中的唯一一个元素，参见 [21, 推论 3.6。8]。映射

$$\operatorname{Sper} R \to \operatorname{Sper}^{\max} R, \ \alpha \mapsto \alpha^*$$

是连续的，参见 [21, 命题 3.6.16]。

环的直积：如果 $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ 是一个直积，那么众所周知，我们可以通过下式将每个 $\operatorname{Spec} R_i$ 识别为 $\operatorname{Spec} R$ 的一个子集

$$\operatorname{Spec} R_i \to \operatorname{Spec} R, \quad \mathfrak{p} \mapsto R_1 \times \cdots \times R_{i-1} \times \mathfrak{p} \times R_{i+1} \times \cdots \times R_n.$$

在此对应下，我们有 $\operatorname{Spec} R = \operatorname{Spec} R_1 \dot\cup \cdots \dot\cup \operatorname{Spec} R_n$。类似地，考察序的支集，可得

$$\operatorname{Sper} R = \operatorname{Sper} R_1 \dot\cup \cdots \dot\cup \operatorname{Sper} R_n, \tag{2.1}$$

其中

$$\operatorname{Sper} R_i \to \operatorname{Sper} R, \quad \alpha \mapsto R_1 \times \cdots \times R_{i-1} \times \alpha \times R_{i+1} \times \cdots \times R_n.$$

的符号 R：关于环的符号的以下内容，可见 [20, 第 5 节（至第 89] 页）。

R 的一个符号是从 $W(R)$（R上非奇异对称双线性型的 Witt 环）到 $\mathbb{Z}$的环同态。若 $\alpha \in \operatorname{Sper} R$，则对称双线性型在 α 处的（Sylvester）符号定义了一个环同态 $\operatorname{sign}_\alpha : W(R) \to \mathbb{Z}$，它因而是 R的一个符号。R 的所有符号构成的集合 $\operatorname{Sign} R$，赋予使所有映射均连续的最粗拓扑

$$\operatorname{sign}_\bullet q \colon \operatorname{Sper} R \to \mathbb{Z}, \ \alpha \mapsto \operatorname{sign}_\alpha q$$

对于 $q \in W(R)$ 连续。此外，如果 $\alpha \subseteq \beta \in \operatorname{Sper} R$，则有 $\operatorname{sign}_\alpha = \operatorname{sign}_\beta$；特别是，$\operatorname{sign}_\alpha$ 等于 $\operatorname{sign}_{\alpha^*}$，即唯一极大

包含 α 的序。注意，sign_α 和 sign^β 仅在非奇异型上相等；对于一般型，如果 $\alpha \subsetneq \beta$，二者则不同（事实上，如果 $a \in \beta \setminus \alpha$，显然有 $\mathrm{sign}_\beta\langle a\rangle \in \{0,1\}$，而 $\mathrm{sign}_\alpha\langle a\rangle = -1$）。

映射

$$\mathrm{Sper}^{\max} R \to \mathrm{Sign}\, R,\ \alpha \mapsto \mathrm{sign}_\alpha, \tag{2.2}$$

是连续且满射的。

如果 R 是半局部的，则 $\mathrm{Sign}\, R$ 上的拓扑基由以下集合给出

$$H(u_1,\dots,u_k) := \{\tau \in \mathrm{Sign}\, R \mid \tau(u_1) = \cdots = \tau(u_k) = 1\},$$

对于 $k \in \mathbb{N}$ 和 $u_1, \dots\dots, u_k \in R^\times$ 此外，如果 R 是半局部的，则映射 (2.2) 是同胚，因此有

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Sper}\, R & \longrightarrow & \mathrm{Sper}^{\max} R & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Sign}\, R \\ \alpha & \longmapsto & \alpha^* & \longmapsto & \mathrm{sign}\,\alpha^* = \mathrm{sign}_\alpha \end{array}, \tag{2.3}$$

其中所有映射都是连续的。特别地，对于 α，$\beta \in \mathrm{Sper}\, R$，当且仅当 $\mathrm{sign}_\alpha = \mathrm{sign}^\beta$ 时 $\alpha^* = \beta^*$，这意味着当 $\beta \in \mathrm{Sper}^{\max} R$ 时有 $\alpha \subseteq \beta$。

下面的引理汇集了 [17]和 [20]中 Knebusch 若干结果的两个直接改述：

引理 2.14。

(1)设 $\varphi: R \to T$ 是交换环的有限 *´étale* 扩张，且 $\alpha \in$ 实谱$^{\max} R$。则 α 到 实谱$^{\max} T$ 的扩张数有限。(2) 假设 R 是半局部的，取 $t \in \mathbb{N}$，并设 $\beta_1, \dots\dots, \beta_t \in$ 实谱$^{\max} R$ 两两不同。则存在 $k \in \mathbb{N}$ 和 $r_1, \dots\dots, r_k \in R^\times$，使得 $\{\beta_1,\dots,\beta_t\} \cap H(r_1, \dots\dots, r_k) = \{\beta_1\}$。

证明。(1) 设 $\varphi^*: W(R) \to W(T)$ 是由 φ 诱导的映射，它作用于 R 和 T 的 Witt 环。设 $\gamma \in \mathrm{Sper}^{\max} T$ 满足 $\alpha = \varphi^{-1}(\gamma)$。根据下面的引理 2.15，$\mathrm{sign}_\alpha = \mathrm{sign}_\gamma \circ \varphi^*$，且 sign^γ 是 T 的一个符号，它扩张了 sign_α。由于根据 [17, 定理 3.4]，这样的符号只有有限多个，故结论成立。

(2) 只需对 $t = 2$ 证明该引理。假设结论不成立。于是由 [6, 定理 2.19] 可得 $\beta_1 = \beta_2$，矛盾。□

引理 2.15. 设 $\varphi: R \to T$ 是交换环同态，设 $\gamma \in$ 实谱 T，并设 $\alpha := \varphi^{-1}(\gamma) \in$ 实谱 R。则 符号空间$_\alpha$ = 符号空间$_\gamma \circ \varphi^*: W(R) \to \mathbb{Z}$。

证明。设 q 是 R 上的非奇异对称双线性型。设 $\mathfrak{p} :=$ 支集$\,\alpha$，并注意到 $2 \notin \mathfrak{p}$，因此 2 在 $R_\mathfrak{p}$ 中可逆。众所周知，在这种情况下，$q \otimes R_\mathfrak{p}$在 $R_\mathfrak{p}$ 中可对角化（参见 [22, 第二章，注 4.6.5]）：$q \otimes R_\mathfrak{p} \simeq \langle a_1, \dots\dots, a_t\rangle$ 其中 $a_1, \dots\dots, a_t \in R_\mathfrak{p}$。将每个 a_i 乘以 $R \setminus \mathfrak{p}$ 中某个元素的平方后，可假设这些 a_i 属于 R，因此也属于 $R \setminus \mathfrak{p}$，因为 $q \otimes R_\mathfrak{p}$ 非奇异。

若 $\varepsilon_i \in \{-1,1\}$ 是 a_i 关于 α 的符号，则有符号$_\alpha\, q = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_t$。特别地，为证明符号$_\alpha\, q =$ 符号$_\gamma\, \varphi^*(q)$，只需对 $a \in R \setminus \mathfrak{p}$证明 $a \in \alpha \setminus -\alpha$ 当且仅当 $\varphi(a) \in \gamma \setminus -\gamma$，而这可由 α的定义立即得出。□

2.6. **厄米型的符号**。 我们回顾 [6中的如下定义]:

定义 2.16. 设 h 是关于 (A,σ) 的一个厄米形式，且 $\alpha\in \mathrm{Sper}\ R$。则$h\otimes\kappa(\alpha)$ 是关于带对合的 $\kappa(\alpha)$-代数的一个厄米形式，并定义 $\mathscr{M}$在 α 处的符号为 h

$$\mathrm{sign}^{\mathscr{M}}_{\alpha}\, h := \mathrm{sign}^{\mathscr{M}_{\bar{\alpha}}}_{\bar{\alpha}}(h\otimes_R \kappa(\alpha)),$$

其中 $\mathscr{M}_{\bar{\alpha}}$ 是 [1, 第 3 节2]中所述的 Morita 等价；参见 [6, 定义 3.1] 及其后的讨论。

$\mathscr{M}$-符号在 $\alpha\in \mathrm{Sper}\ R$上的主要缺点在于，Morita 等价 $\mathscr{M}_{\bar{\alpha}}$的选择并非规范的。另选一个 Morita 等价，至多会导致型的符号发生变化（参见 [1, 命题 3.4]）；而通过选取另一个恰当的 Morita 等价，则可以使该符号任意改变（参见 [1, 第 3 节3]的第一段）。因此，我们采用以下约定：

约定：若在某个陈述或公式中出现多个 (A,σ) 上型的 $\mathscr{M}$-符号，则对它们采用同一种 Morita 等价的选取。

对 $\mathscr{M}_{\bar{\alpha}}$ 缺乏典范选取，尤其当我们希望把一个型的总符号视为实谱 R上的连续函数时，会成为一个问题。我们通过 η-符号在 [5] 中的定义，引入所谓的参考形式 η，从而解决了这一问题，如下：

定义 2.17.

(1) 我们定义幂零集$[A,\sigma] := \{\alpha \in 实谱\ R \mid \mathrm{sign}^{\mathscr{M}}_{\alpha} = 0\}$。它是实谱 R 的一个既开又闭子集（见 [5, 定理 3.11]）。(2) 我们称厄米形式 η 为参考形式，适用于 (A,σ)，若 $\mathrm{sign}^{\mathscr{M}}_{\alpha}\,\eta\neq 0$对每个 $\alpha\in$实谱 $R\setminus$幂零集$[A,\sigma]$成立。

对于 $\alpha\in \mathrm{Sper}\, R\setminus \mathrm{Nil}[A,\sigma]$，现在我们可以用 η来确定计算 $\mathrm{sign}^{\mathscr{M}}_{\alpha}$ 时的符号：我们选择一个 Morita 等价 $\mathscr{M}_{\bar{\alpha}}$，使得 $\mathrm{sign}^{\mathscr{M}}_{\alpha}\,\eta>0$。我们将此符号称为 η-符号在 α 处的取值，记为 $\mathrm{sign}^{\eta}_{\alpha}$。等价地，对于任意选定的 Morita 等价 $\mathscr{M}_{\bar{\alpha}}$，也可以按如下方式得到：

$$\mathrm{sign}^{\eta}_{\alpha}\, h := (\mathrm{sgn}\,\mathrm{sign}^{\mathscr{M}}_{\alpha}\,\eta)\,\mathrm{sign}^{\mathscr{M}}_{\alpha}\, h,$$

对于 $\alpha\in \mathrm{Sper}\ R\setminus \mathrm{Nil}[A,\sigma]$ 和 h 上的厄米形式（A，σ），其中 sgn 表示符号函数。

注意，由于 α 处的所有符号都是通过标量扩张到 $\kappa(\alpha)$ 计算的，因此我们有

$$\mathrm{sign}^{\eta}_{\alpha}\, h = \mathrm{sign}^{\eta\otimes\kappa(\alpha)}_{\bar{\alpha}}(h\otimes\kappa(\alpha)).$$

注记 2.18。 $\mathscr{M}$-符号 $\mathrm{sign}^{\mathscr{M}}_{\alpha}$，尤其是 η-符号 $\mathrm{sign}^{\eta}_{\alpha}$（它是针对 $\mathscr{M}_{\bar{\alpha}}$ 的特定选择所得的特例），继承了为带对合的中心单代数定义的映射 $\mathrm{sign}^{\mathscr{M}_{\bar{\alpha}}}_{\bar{\alpha}}$ 的所有性质。例如，它具有可加性；若 q 是 R 上的二次型，且 h 是 $(A,\ \sigma)$ 上的厄米型，则 $\mathrm{sign}^{\mathscr{M}}_{\alpha}(q\otimes h) = \mathrm{sign}_{\alpha} q\cdot\mathrm{sign}^{\mathscr{M}}_{\alpha}\, h$，参见 [1, 命题 3.6]。

3. The Knebusch trace formula

3.1. **有限 ´étale 扩张与实闭域。** 我们回顾 Knebusch 关于交换环上对称双线性型的迹公式；该公式的一般情形已针对环的 Frobenius 扩张得到证明，见 [19], 但此处仅陈述有限 ´étale 扩张这一特殊情形，参见 [19, 第 168] 页的最后一段。

设 $\varphi: R \to T$ 为有限 ´étale扩张，并考虑诱导映射 $\varphi^*: W(R) \to W(T)$。若 ρ是 R的一个符号，我们用 $S(\varphi,\rho)$表示 T 上相对于 φ延拓 ρ 的所有符号的集合，即 $S(\varphi,\rho)$是满足对所有 $q \in W(R)$均有 $\tau(\varphi^*(q)) = \rho(q)$的符号$\tau$: $W(T) \to \mathbb{Z}$的集合。于是我们有:

定理 3.1 ([17, 定理 3.4], [19, 定理 1.1])**.** 设 ρ 为 R的一个符号。则 $S(\varphi,\rho)$ 是有限的，并且存在一个映射 $n: S(\varphi,\rho) \to \mathbb{N}\cup\{0\}$，使得对所有 $\tau \in S(\varphi,\rho)$，有 $n(\tau) > 0$，并且

$$\rho(\mathrm{Tr}^*_{T/R}(q)) = \sum_{\tau\in S(\varphi,\rho)} n(\tau)\tau(q), \tag{3.1}$$

对所有 $q \in W(T)$。

此外，若 R，因而 T（参见 [22, 第六章，命题 1.1。1]）是半局部的，则对所有 $\tau \in S(\varphi,\rho)$，都有 $n(\tau) = 1$。

证明。 第一部分见 [17, 定理 3.4]（Frobenius 扩张的情形见 [19, 定理 1.1]）。关于半局部情形下 $n(\tau) = 1$ 这一事实，最先见于 [17, 第 74 页（引理 3.11 前第二段）], 随后在 [18,第 8]节中得到证明。□

我们回顾定理3.1证明中使用的构造。本文将多次用到它。

令 $\alpha \in$ 实谱 R。由引理 2.12，下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\otimes_R k(\alpha)} & T\otimes_R k(\alpha) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}_{T/R}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}_{T\otimes_R k(\alpha)/k(\alpha)}} \\ R & \xrightarrow{\otimes_R k(\alpha)} & k(\alpha) \end{array}. \tag{3.2}$$

注意， $T\otimes_R k(\alpha)$ 定义良好，因为 T 通过 φ 具有左 R-模结构，而 $k(\alpha)$ 通过 r_α具有右 R-模结构。特别地，对于 $x \in R$,

$$\varphi(x)\otimes 1 = 1\otimes r_\alpha(x) \text{ in } T\otimes_R k(\alpha). \tag{3.3}$$

由于 $T\otimes_R k(\alpha)$是一个可分 $k(\alpha)$-代数（参见 [15, 推论 4.3.2]），由 [15, 推论 4.5.8]可知存在一个 $k(\alpha)$-代数同构

$$\omega: T\otimes_R k(\alpha) \to E_1\times\cdots\times E_t,$$

其中 $E_1,\dots,E_r$等于 $k(\alpha)$（对某个 $0 \le r \le t$），而 $E_{r+1},\dots,E_t$等于 $k(\alpha)(\sqrt{-1})$。由此我们得到如下交换图（第二个方块由第 137] 页上的 [11,(11) 交换）:

$$\begin{array}{ccccc} T\otimes_R k(\alpha) & \xrightarrow{\omega} & E_1\times\cdots\times E_t & \xrightarrow{\prod p_i} & E_1\times\cdots\times E_t \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}_{T\otimes_R k(\alpha)/k(\alpha)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}_{E_1\times\cdots\times E_t/k(\alpha)}} & & \downarrow{\scriptstyle \sum_{i=1}^t \mathrm{Tr}_{E_i/k(\alpha)}} \\ k(\alpha) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & k(\alpha) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & k(\alpha) \end{array}. \tag{3.4}$$

对于 $j = 1,\dots,t$，我们定义映射

$$\beta_j : T \to T \otimes_R k(\alpha) \xrightarrow{\omega} \prod_i E_i \xrightarrow{p_j} E_j, \tag{3.5}$$

其中 p_j 表示典范投影。注意，对于 $1 \le i \le r$，图

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\beta_i} & k(\alpha) \\ \uparrow{\scriptstyle \varphi} & \nearrow{\scriptstyle r_\alpha} & \\ R & & \end{array} \tag{3.6}$$

由方程（3.3）交换。

命题 3.2。设 $\alpha \in$ 实谱 R。

(1) 我们有 符号空间$_\alpha \mathrm{Tr}^*_{T/R}\langle 1\rangle = r$ （实闭的 E_i 的数量）。(2) 假设 T 作为一个 R-代数（经由映射 φ）在 支集α 上具有奇数秩 r_0。那么存在 $\gamma \in$ 实谱T，使得 $\alpha = \varphi^{-1}(\gamma)$，即 γ 是 α（在 φ 上）的扩张。

现在假设 $\gamma \in$ 实谱T 满足 $\alpha = \varphi^{-1}(\gamma)$。那么：

(3) </style}我们有 幂零集$[A,\sigma]$ 当且仅当 $\gamma \in$幂零集$[A \otimes_\varphi T, \sigma \otimes \mathrm{id}]$。(4) 若 η是 (A,σ)的参考形式，则 $\eta \otimes_\varphi T$是 $(A \otimes_\varphi T, \sigma\otimes\mathrm{id})$的参考形式，并且对于 (A,σ)上的每个厄米形式 h，都有 符号空间$^\eta_\alpha h =$符号空间$^{\eta\otimes T}_\gamma h\otimes T$。

证明。(1) 为了计算 $\mathrm{sign}_\alpha \mathrm{Tr}^*_{T/R}\langle 1\rangle$，我们对 T 上的型 $\langle 1\rangle$ 采用与 Knebusch迹公式证明中相同的论证。根据定义，$\mathrm{sign}_\alpha \mathrm{Tr}^*_{T/R}\langle 1\rangle = \mathrm{sign}_{\tilde\alpha}\big((\mathrm{Tr}^*_{T/R}\langle 1\rangle) \otimes_R k(\alpha)\big)$，其中 $\tilde\alpha$ 表示 $k(\alpha)$上的唯一序，因而得到

$$\mathrm{sign}_{\tilde\alpha}\big((\mathrm{Tr}^*_{T/R}\langle 1\rangle) \otimes_R k(\alpha)\big) = \mathrm{sign}_{\tilde\alpha}\,\mathrm{Tr}^*_{T\otimes_R k(\alpha)/k(\alpha)}\big(\langle 1\rangle \otimes_R k(\alpha)\big)$$

通过将型 $\langle 1\rangle$ 推过图（3.2）。因此，为计算该符号，我们考虑型 $\langle 1\rangle\otimes k(\alpha)$ 在 $T\otimes_R k(\alpha)$ 上，将其推过图（3.4），并计算其符号。由此可得

$$\mathrm{sign}_\alpha\,\mathrm{Tr}^*_{T/R}\langle 1\rangle = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{sign}_{\tilde\alpha}\,\mathrm{Tr}^*_{E_i/k(\alpha)}\langle 1\rangle.$$

现在利用：$\mathrm{Tr}_{E_i/k(\alpha)}$ = 为恒等，当 $1 \le i \le r$，并且符号$(\mathrm{Tr}^*_{E_i/k(\alpha)}b) = 0$ 对任意非奇异对称双线性型 b 在 E_i 上，若 $r+1 \le i \le s$（因为 E_i是代数闭的，故 b 必为弱双曲的，这意味着 $\mathrm{Tr}^*_{E_i/k(\alpha)}b$ 是弱双曲的，见第 2.4节），我们得到符号$_\alpha \mathrm{Tr}^*_{T/R}\langle 1\rangle = r$。

（2）由于符号$_\alpha \mathrm{Tr}^*_{T/R}\langle 1\rangle \neq 0$ （它等于 r_0 模 2），从而得到 $r \ge 1$，且映射 $\beta_1 \colon T \to k(\alpha)$ 存在。定义 $\gamma := \beta_1^{-1}(\tilde\alpha) \in$实谱 T。由于 $\alpha = r_\alpha^{-1}(\tilde\alpha)$，图（3.3）的交换性给出 $\alpha = \varphi^{-1}(\gamma)$。

(3) 由于 $\alpha = \varphi^{-1}(\gamma)$，$\varphi$诱导出一个映射 $R/$ 支集 $\alpha \to T/$ 支集 γ，并且取分式后得到一个映射 $\kappa(\alpha) \to \kappa(\gamma)$，使得该图

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \kappa(\alpha) & \longrightarrow & \kappa(\gamma) \end{array}$$

可交换。根据 [21, 定理 1.11。2] 存在一个（唯一的）态射 $\iota\colon\ k(\alpha) \to k(\gamma)$，使得下图也可交换：

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{\varphi} & T & \xrightarrow{r_\gamma} & k(\gamma) \\ {\scriptstyle r_\alpha}\downarrow & & & \nearrow_{\iota} & \\ k(\alpha) & & & & \end{array} . \tag{3.7}$$

由此可得

$$\begin{aligned} ((A \otimes_\varphi T) \otimes_{r_\gamma} k(\gamma), (\sigma \otimes_\varphi \mathrm{id}_T) \otimes_{r_\gamma} \mathrm{id}_{k(\gamma)}) & \\ \cong (A \otimes_{r_\gamma \circ \varphi} k(\gamma), \sigma \otimes \mathrm{id}) & \\ \cong (A \otimes_{\iota \circ r_\alpha} k(\gamma), \sigma \otimes \mathrm{id}) & \\ \cong ((A \otimes_{r_\alpha} k(\alpha)) \otimes_\iota k(\gamma), (\sigma \otimes_{r_\alpha} \mathrm{id}) \otimes_\iota \mathrm{id}). & \end{aligned} \tag{3.8}$$

注意：

(a) 对合 $(\sigma \otimes_\varphi \mathrm{id}_T) \otimes_{r_\gamma} \mathrm{id}^{k(\alpha)}$ 与 $(\sigma \otimes_{r_\alpha} \mathrm{id}^{k(\alpha)}) \otimes_\iota \mathrm{id}^{k(\gamma)}$同类型；(b) 使用 [5, 引理 3. 10], 中的记号，方程 (3.8) 表明 $\alpha \in C_i$蕴含 $\gamma \in C_i$，对于 $i = 4, \ldots, 8$ 成立；并且由于 $C_4, \ldots, C_8$ 涵盖了所有可能性，因此这一蕴含关系是等价关系。

因此， $\alpha \in$ 幂零集$[A, \sigma]$ 当且仅当 $\gamma \in$ 幂零集$[A \otimes T, \sigma \otimes \mathrm{id}]$ 根据 [5, 注 3.6，或其在定理 3 证明中作为方程 (3.3) 的表述。11]。

(4) 对于第一个结论，我们需要证明，对于所有 $\overset{\mathscr{M}}{\gamma}\ \eta \otimes T \neq 0$ $\gamma \in$实谱 $T \setminus$ 幂零集 $[A \otimes_\varphi T, \sigma \otimes \mathrm{id}]$，有 sign $\gamma \in$实谱 $T \setminus$ 幂零集$[A \otimes_\varphi T, \sigma \otimes \mathrm{id}]$。由 (3) 可得，$\alpha := \varphi^{-1}(\gamma)$ $\notin$ 幂零集$[A, \sigma]$，因此 sign$\overset{\mathscr{M}}{\alpha}\ \eta \neq 0$。由图 (3.7) 可知，对于任意定义在 (h 上的厄米形式A, σ),

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}\overset{\mathscr{M}}{\gamma}\ h \otimes T &= \operatorname{sign}\overset{\mathscr{M}}{\gamma}\ h \otimes T \otimes k(\gamma) \quad \text{(by definition of signature)} \\ &= \operatorname{sign}\overset{\mathscr{M}}{\gamma}\ h \otimes k(\alpha) \otimes k(\gamma) \\ &= \varepsilon \operatorname{sign}\overset{\mathscr{M}}{\alpha}\ h \otimes k(\alpha) \text{ for some } \varepsilon \in \{-1, 1\} \text{ by [1, Lemma 3.8]} \\ &= \varepsilon \operatorname{sign}\overset{\mathscr{M}}{\alpha}\ h. \end{aligned} \tag{3.9}$$

将此应用于 $h = \eta$，得到 sign$\overset{\mathscr{M}}{\gamma}\ \eta \otimes T = \varepsilon$sign$\overset{\mathscr{M}}{\alpha}\ \eta \neq 0$。

对于第二个结论，我们对 η 和 h 分别两次应用等式 (η 以及 h，并得到（第二行；第一行和最后一行是定义）

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}_\gamma^{\eta \otimes T}(h \otimes T) &= \operatorname{sgn}(\operatorname{sign}\overset{\mathscr{M}}{\gamma}\ \eta \otimes T) \operatorname{sign}\overset{\mathscr{M}}{\gamma}\ (h \otimes T) \\ &= \operatorname{sgn}(\operatorname{sign}\overset{\mathscr{M}}{\alpha}\ \eta) \operatorname{sign}\overset{\mathscr{M}}{\alpha}\ h \\ &= \operatorname{sign}_\alpha^\eta h. \end{aligned}$$

□

引理 3.3。假设 R 是半局部的。则

(1) $|S(\varphi,\ \rho)| = \rho(\mathrm{Tr}^*_{T/R}\langle 1\rangle)$ 对所有符号 ρ 的 R；(2) 设 $\alpha \in$实谱 R。参见公式 (3.5)，符号 $\circ\beta_1^*$，.....，符号 $\circ\beta_r^*$彼此不同，且都是 T 的符号，它们扩张了 符号α。

证明。 (1) 将等式 (3.1) 应用于对称双线性形式 $\langle 1\rangle$，利用以下事实： $n(\tau) = 1$ 对所有 $\tau \in S(\varphi, \rho)$ 都成立，因为 R和 T都是半局部的（T是半局部的，这是由[22, 第六章，命题 1.1 得出的。1]）：

$$\rho(\mathrm{Tr}^*_{T/R}\langle 1\rangle) = \sum_{\tau \in S(\varphi,\rho)} \tau(\langle 1\rangle) = |S(\varphi, \rho)|.$$

（2）我们从以下内容开始：

事实。 $\beta_1, \ldots, \beta_r$ 是从 T 到 $k(\alpha)$ 的所有满足 $\beta_i \circ \varphi = r_\alpha$ 的态射。

事实的证明。性质 $\beta_i \circ \varphi = r_\alpha$ 即为方程（3.6）。其余断言的论证见 [17, 命题 1.6 的证明，正如第 74 页第 14 行所指出的那样——15], 不过，我们仍在此给出证明，因为 Knebusch 的结果要一般得多，且采用的记号略有不同。设 $\lambda\colon\ T \to k(\alpha)$ 满足 $\lambda \circ \varphi = r_\alpha$。直接验证可知，$\lambda$ 给出一个态射 $\lambda'\colon\ T \otimes_R k(\alpha) \to k(\alpha)$，该态射由 $t \otimes z \mapsto \lambda(t)z$ 诱导（请回忆，R 通过 φ 右作用于 T，并通过 r_α 左作用于 $k(\alpha)$）。因此，我们有一个 $k(\alpha)$-态射 $\lambda' \circ \omega^{-1}\colon\ E_1 \times \cdots \times E_t \to k(\alpha)$；考虑其核可知，它必等于某个 $i \in \{1, \ldots, r\}$ 对应的 p_i。于是，对于 $a \in T$,

$$\lambda(a) = \lambda'(a \otimes 1) = \lambda' \circ \omega^{-1}(\omega(a \otimes 1)) = p_i(\omega(a \otimes 1)) = \beta_i(a).$$

事实证明结束。

由于 $\beta_j \circ \varphi = r_\alpha$，每个 β_j 都定义了一个符号 $W(T) \to \mathbb{Z}$，它扩展了 sign_α，即，

$$\mathrm{sign} \circ \beta_j^* \circ \varphi^* = \mathrm{sign} \circ r_\alpha^*.$$

按照 [17, 第 74] 页，对于固定的符号 τ，我们定义：$W(T) \to \mathbb{Z}$,

$$n(\tau) := |\{i \in \{1, \cdots, r\} \mid \mathrm{sign} \circ \beta_i^* = \tau\}|$$

（它就是定理 3.1 中的 $n(\tau)$）。正如定理 3.1 中所回顾的，$n(\tau) = 1$，因为 R，因此 T 是半局部的。这意味着映射 $\mathrm{sign} \circ \beta_1^*$、……、$\mathrm{sign} \circ \beta_r^*$ 是 T 上不同的符号。根据 (1)，T 上扩展 sign_α 的符号数量等于 $|S(\varphi, \mathrm{sign}_\alpha)| = \mathrm{sign}_\alpha \mathrm{Tr}^*_{T/R}\langle 1\rangle$，根据命题 3.2(1)，其值为 r。因此，对于 $1 \le i \le r$，$\mathrm{sign}_\alpha \circ \beta_i^*$ 是 T 上所有扩展 sign_α 的符号。□

3.2. **迹公式**。下述结果是Knebusch迹公式的厄米版本，定理 3.1。

定理 *3.4*（*Knebusch*迹公式）。设 $\alpha \in$ 实谱 R，并设 $\varphi\colon\ R \to T$ 是 R的有限 ´ 平展扩张。则存在 γ_1，……，$\gamma_r \in$ 实谱 T/α（即方程 *(3.5)*中所引入的映射 β_1，…… ，β_r 下，$k(\alpha)$上唯一序 $\tilde{\alpha}$ 的原像），使得对$(A \otimes_R T, \sigma \otimes id)$上的每一个厄米形式 h，我们有

$$\mathrm{sign}^\eta_\alpha(\mathrm{Tr}^*_{A \otimes_R T/A} h) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{sign}^{\eta \otimes T}_{\gamma_i} h, \tag{3.10}$$

其中$\mathrm{Tr}^{A \otimes_R T/A}\colon = \mathrm{id}_A \otimes_R \mathrm{Tr}^{T/R}\colon\ A \otimes_R T \to A$ 是由迹映射$\mathrm{Tr}^{T/R}$诱导的映射，而 $\mathrm{Tr}^*_{A \otimes_R T/A}$ 是厄米形式上的诱导映射。

此外，如果 R是半局部的，那么 γ_1^*、……、γ_r^*各不相同，并且实谱$^{\max} T/\alpha = \{\gamma_1^*, \ldots, \gamma_r^*\}$。

证明。交换图（3.2）诱导出交换图

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_R T & \xrightarrow{\otimes_R k(\alpha)} & A \otimes_R T \otimes_R k(\alpha) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}_{A \otimes_R T/A}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_A \otimes_R \mathrm{Tr}_{T \otimes_R k(\alpha)/k(\alpha)}} \\ A & \xrightarrow{\otimes_R k(\alpha)} & A \otimes_R k(\alpha) \end{array}. \tag{3.11}$$

首先根据符号的定义，然后根据上述图的交换性（将型 h 作用于其上），我们得到：

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}_{\alpha}^{\eta}(\operatorname{Tr}^{*}_{A\otimes_R T/A}\,h) &= \operatorname{sign}_{\tilde{\alpha}}^{\eta\otimes k(\alpha)}\big((\operatorname{Tr}^{*}_{A\otimes_R T/A}\,h)\otimes_R k(\alpha)\big)\\ &= \operatorname{sign}_{\tilde{\alpha}}^{\eta\otimes k(\alpha)}(\mathrm{id}_A\otimes_R \operatorname{Tr}_{T\otimes_R k(\alpha)/k(\alpha)})^{*}(h\otimes_R k(\alpha)).\end{aligned} \tag{3.12}$$

参照定理3.1 的证明之后引入的记号以及图（3.4），我们考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} A\otimes_R T\otimes_R k(\alpha) & \xrightarrow{\mathrm{id}_A\otimes\omega} & A\otimes_R \prod_{i=1}^{t} E_i & \xrightarrow{\prod(\mathrm{id}_A\otimes p_i)} & (A\otimes_R E_1)\times\cdots\times(A\otimes_R E_t)\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_A\otimes_R \operatorname{Tr}_{T\otimes_R k(\alpha)/k(\alpha)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_A\otimes \operatorname{Tr}_{E_1\times\cdots\times E_t/k(\alpha)}} & & \downarrow{\scriptstyle \sum_{i=1}^{t}\mathrm{id}_A\otimes\operatorname{Tr}_{E_i/k(\alpha)}}\\ A\otimes_R k(\alpha) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & A\otimes_R k(\alpha) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & A\otimes_R k(\alpha)\end{array}.$$

我们将型 $h\otimes k(\alpha)$ 沿此图推送：

$$\begin{array}{ccccc} h\otimes k(\alpha) & \xmapsto{(\mathrm{id}_A\otimes\omega)^{*}} & h' & \longmapsto & \Big((\mathrm{id}_A\otimes p_1)^{*}(h'),\dots,(\mathrm{id}_A\otimes p_t)^{*}(h')\Big)\\ \downarrow & & & & \downarrow\\ (\mathrm{id}_A\otimes \operatorname{Tr}_{T\otimes k(\alpha)/k(\alpha)})^{*}(h\otimes k(\alpha)) & & \xmapsto{\mathrm{id}} & & \sum_{i=1}^{t}(\mathrm{id}_A\otimes\operatorname{Tr}_{E_i/k(\alpha)})^{*}(h_i')\end{array},$$

其中 $h_i' := (\mathrm{id}_A\otimes p_i)^{*}(h') = (\mathrm{id}_A\otimes\beta_i)^{*}(h)$。因此，对此图底部应用符号后，我们得到（第一个等式由公式（3.12）得出）：

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}_{\alpha}^{\eta}(\operatorname{Tr}^{*}_{A\otimes_R T/A}\,h) &= \operatorname{sign}_{\tilde{\alpha}}^{\eta\otimes k(\alpha)}(\mathrm{id}_A\otimes\operatorname{Tr}_{T\otimes k(\alpha)/k(\alpha)})^{*}(h\otimes_R k(\alpha))\\ &= \sum_{i=1}^{t}\operatorname{sign}_{\tilde{\alpha}}^{\eta\otimes k(\alpha)}(\mathrm{id}_A\otimes\operatorname{Tr}_{E_i/k(\alpha)})^{*}(h_i').\end{aligned} \tag{3.13}$$

我们需要分别考虑 E_i 是代数闭的情形和 E_i 是 re E_i 是实闭的情形：

情形 *1.* 假设 $r+1\le i\le t$。在此情形下，E_i 是代数闭的。根据引理 3.5（见下文），$h_i'\simeq\psi_w\perp\psi_0$，其中 ψ_w 为弱双曲，且 ψ_0 为零型，从而

$$(\mathrm{id}_A\otimes\operatorname{Tr}_{E_i/k(\alpha)})^{*}(h_i')\simeq\underbrace{(\mathrm{id}_A\otimes\operatorname{Tr}_{E_i/k(\alpha)})^{*}(\psi_w)}_{\psi_w'}\perp\underbrace{(\mathrm{id}_A\otimes\operatorname{Tr}_{E_i/k(\alpha)})^{*}(\psi_0)}_{\psi_0'}.$$

型 ψ_w' 是弱双曲的，参见第 2.4 节，且 ψ_0' 显然是零型。这两个型在任一序处的符号均为零，因此

$$\operatorname{sign}_{\tilde{\alpha}}^{\eta\otimes k(\alpha)}(\mathrm{id}_A\otimes\operatorname{Tr}_{E_i/k(\alpha)})^{*}(h_i')=0.$$

情形 *2.* 假设 $1\le i\le r$。则 $E_i=k(\alpha)$，从而 $\operatorname{Tr}_{E_i/k(\alpha)}=\mathrm{id}^{k(\alpha)}$。定义 $\gamma_i:=\beta_i^{-1}(\tilde{\alpha})\in$实谱 T。于是，由 [5, 命题 5.9], 对每个厄米形式 ξ 在 $(A\otimes T,\sigma\otimes\mathrm{id})$ 上，我们有

$$\operatorname{sign}_{\gamma_i}^{\eta\otimes T}\xi=\operatorname{sign}_{\tilde{\alpha}}^{\eta\otimes T\otimes_{\beta_i}k(\alpha)}(\xi\otimes_{\beta_i}k(\alpha)). \tag{3.14}$$

因此，

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}_{\tilde{\alpha}}^{\eta\otimes k(\alpha)}(\mathrm{id}_A\otimes\operatorname{Tr}_{E_i/k(\alpha)})^{*}(h_i') &= \operatorname{sign}_{\tilde{\alpha}}^{\eta\otimes k(\alpha)}h_i'\\ &= \operatorname{sign}_{\tilde{\alpha}}^{\eta\otimes k(\alpha)}(\mathrm{id}_A\otimes\beta_i)^{*}(h)\end{aligned}$$

$$= \operatorname{sign}_{\tilde{\alpha}}^{\eta\otimes T\otimes_{\beta_i} k(\alpha)}(h\otimes_{\beta_i} k(\alpha))$$
$$= \operatorname{sign}_{\gamma_i}^{\eta\otimes T} h \quad \text{(by Equation (3.14))}.$$

这就证明了定理的第一部分。

现在考虑 R 为半局部的情形。根据 γ_i 的定义，注意到对于 $i=1,\dots,r$，有 $\operatorname{sign}^{\gamma_i} = \operatorname{sign}_{\tilde{\alpha}}\circ\beta_i^* \text{on} W(T)$。因此，由引理 3.3(2)，$\operatorname{sign}^{\gamma_1},\dots,\operatorname{sign}^{\gamma_r}$ 都是 T 延拓 α 的符号。由于图式 (3.6) 可交换，根据 γ_i 的定义可得 $\alpha\subseteq\varphi^{-1}(\gamma_i)$；又由 α 的极大性，得到 $\alpha=\varphi^{-1}(\gamma_i)$，即 $\gamma_i\in\operatorname{Sper} T/\alpha$。现在令 $1\le i\ne j\le r$。由于 $\operatorname{sign}_{\gamma_i}\ne\operatorname{sign}^{\gamma_j}$，我们得到 $\gamma_i^*\ne\gamma_j^*$（事实上，参照图式 2.3，若 $\gamma_i^*=\gamma_j^*$，则 $\operatorname{sign}^{\gamma_i} = \operatorname{sign}^{\gamma_i^*} = \operatorname{sign}^{\gamma_j^*} = \operatorname{sign}^{\gamma_j}$，矛盾）。最后，令 $\gamma\in\operatorname{Sper} T/\alpha$。则对于某个 i，有 $\operatorname{sign}^{\gamma} = \operatorname{sign}^{\gamma_i}$，即 $\gamma^*=\gamma_i^*$。因此，$\gamma_1,\dots,\gamma_r$ 如定理第二部分所述。□

引理 3.5. 设 (B,τ) 是代数闭域 E 上带对合的阿祖马亚代数。那么，(B,τ) 上的每个厄米形式都是一个弱双曲形式与一个零型的正交和。

证明。设 h 是 (B,τ) 上的厄米形式。由 [4, 命题 A.3]，$h\simeq h^{\mathrm{ns}}\perp h_0$，其中 h^{ns} 是非奇异的，而 h_0 是一个零型。我们根据 τ的类型分两种情况讨论：

情形 *1*. τ 属于第一类。于是 $Z(B)=E$，且 B 是一个中心单代数 E。特别地，B 是分裂的，因为 E 是代数闭的。(B,τ) 上的厄米形式范畴与以下范畴之一莫里田等价：E 上的对称双线性形式范畴（当 τ 为正交型时），或 E 上的斜对称双线性形式范畴（当 τ 为辛型时）。在这两种情形下，任何非奇异形式都是弱双曲的（例如参见 [8,第 3.6] 节），所以 h^{ns} 是弱双曲的。

情形 *2*。 τ 是第二类对合。那么 $Z(B)$ 是 E 的二次 étale 扩张，因此 $Z(B)\cong E\times E$。根据 [23, 命题 2.14]，存在一个中心单 E代数 C，使得 $(B,\ \tau)\cong(C\times C^{\mathrm{op}},\ \widehat{\ })$，其中 $\widehat{\ }$表示交换对合。于是，根据 [1, 引理 2.1(iv)]，h^{ns}是双曲的。□

4. A reference form of 2-power signature

回忆一下，如果 B 是 Azumaya代数，那么其次数定义为 Spec $Z(B)$ 上的函数 $\deg B := \sqrt{\operatorname{rank}_{Z(B)} B}$。

引理 4.1。设 R 是半局部连通的，$(B、\ \tau)$ 是 R 上带对合的 *Azumaya*代数，满足次数 B 是 *2* 的幂，且 $\alpha\in$实谱$^{\max} R\setminus$幂零集$[B,\tau]$。那么存在一个 h_α 上的非奇异厄米形式，其定义在$(B、\ \tau)$ 上，且符号空间$^{\eta}_{\alpha} h_\alpha$ 是一个2的幂。

证明。根据 [6, 命题 3.18]，存在一个可逆元 $u\in\operatorname{Sym}(B,\tau)$，使得 $\operatorname{sign}^{\mathscr{M}}_{\alpha}\langle u\rangle_\tau = m_{\tilde{\alpha}}(B\otimes_R\kappa(\alpha),\ \tau\otimes\mathrm{id})$。根据 [6, 推论 3.19]，我们有$m_{\tilde{\alpha}}(B\otimes_R\kappa(\alpha),\ \tau\otimes\mathrm{id}) = n_\alpha$，其中 n_α 在备注 2.13 中定义（在定义 3.12]之前的 [6, 中记作$n_{\tilde{\alpha}}$）。

事实。 n_α 是 2 的幂。

事实的证明。由注2.13的最后一行，只需证明 $\dim_{k(\alpha)} B\otimes_R k(\alpha)$ 是 2 的幂。注意，由于 $\alpha\notin$幂零集$[B,\tau]$, $B\otimes_R k(\alpha)$ 是单代数，且其中心是一个域，参见 [5, 注 2.5(4) 和注 3。6]因此

that

$$\begin{aligned}\dim_{k(\alpha)} B\otimes_R k(\alpha) &= (\dim_{Z(B\otimes_R k(\alpha))} B\otimes_R k(\alpha))\cdot \dim_{k(\alpha)} Z(B\otimes_R k(\alpha))\\ &= \operatorname{rank}_{Z(B)} B\cdot \dim_{k(\alpha)} Z(B\otimes_R k(\alpha)).\end{aligned}$$

根据假设，该乘积的第一项是 2 的幂，第二项是 1 或 2（参见引理 2.6），因此 $\dim_{k(\alpha)} B\otimes_R k(\alpha)$ 是 2 的幂。事实的证明结束。

因此，$\operatorname{sign}_\alpha^{\mathscr{M}}\langle u\rangle_\tau$ 是 2 的幂，并且，将 u 替换为 $-u$后，对于固定的参考形式 η，我们得到 $\operatorname{sign}_\alpha^{\eta}\langle u\rangle_\tau$ 是 2 的幂。取 $h_\alpha := \langle u\rangle_\tau$，并注意到它是非奇异的，因为 u可逆，证明得证。□

定理 4.2。设 R 是半局部连通的，并设 $(B,\ \tau)$ 是定义在 R 上的带对合的阿祖马亚代数，满足 A 和 B *Brauer* 等价，且 $\sigma|_S = \tau|_S$，其中 $S := Z(A) = Z(B)$。假设 S 是连通的，并且 σ 和 τ 是同类型。设 $\mathscr{F}_\vartheta$ 为定理 *A.1*中的函子。

于是 幂零集$[A,\sigma]$ =幂零集$[B,\tau]$。此外， $\mathscr{F}_\vartheta(\eta)$ 是 (B,τ)的参考形式；对于 (A,σ) 上的任意厄米形式 h 以及任意 $\alpha\in$实谱 R，我们有

$$\operatorname{sign}_\alpha^{\eta} h = \operatorname{sign}_\alpha^{\mathscr{F}_\vartheta(\eta)} \mathscr{F}_\vartheta(h).$$

证明。设 $\alpha\in$实谱 $R\setminus$幂零集$[A,\sigma]$。我们考虑 $(A(\alpha)\ \sigma(\alpha))$ 与 $(B(\alpha)\ \tau(\alpha))$。注意到，由定义 2.9， σ 与 $\sigma(\alpha)$ 为同类型，且 τ与 $\tau(\alpha)$ 亦为同类型。因此， $\sigma(\alpha)$ 与 $\tau(\alpha)$ 也为同类型。显然， $\kappa(\alpha)$ 是连通的；又因 $\alpha\notin$幂零集$[A,\sigma]$，由 [5, 注记 3.6] 可得 $S\otimes_R\kappa(\alpha)$ 是连通的。于是定理 A.3 适用，且 $A(\alpha)$ 与 $B(\alpha)$ Brauer 等价。由此可知，幂零集$[A(\alpha)\ \sigma(\alpha)]$ =幂零集$[B(\alpha)\ \tau(\alpha)]$，因为这些集合仅依赖于代数的布劳尔类以及 involution 的类型，参见 [1, 定义 3.7]。利用 [6, 引理 3.7]，我们便有

$$\begin{aligned}\alpha\notin \operatorname{Nil}[A,\sigma] &\Rightarrow \bar\alpha\notin \operatorname{Nil}[A(\alpha),\sigma(\alpha)]\\ &\Rightarrow \bar\alpha\notin \operatorname{Nil}[B(\alpha),\tau(\alpha)]\\ &\Rightarrow \alpha\notin \operatorname{Nil}[B,\tau],\end{aligned}$$

因此，幂零集$[B,\tau]\subseteq$幂零集$[A,\sigma]$。另一侧的包含关系可用同样的方法证明。

由于 σ 与 τ 属于同类型，根据定理 A.3，以下图交换：

$$\begin{array}{ccc}\operatorname{Herm}(A(\alpha),\sigma(\alpha)) & \xrightarrow{\mathscr{F}_{\vartheta_{\kappa(\alpha)}}} & \operatorname{Herm}(B(\alpha),\tau(\alpha))\\ \uparrow{\scriptstyle \mathscr{U}_{(A,\sigma,\kappa(\alpha))}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathscr{U}_{(B,\tau,\kappa(\alpha))}}\\ \operatorname{Herm}(A,\sigma) & \xrightarrow[\mathscr{F}_\vartheta]{} & \operatorname{Herm}(B,\tau)\end{array},$$

其中竖直箭头表示标量扩张。因此我们有

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sign}_{\alpha}^{\eta} h &= \operatorname{sign}_{\bar{\alpha}}^{\eta\otimes\kappa(\alpha)} h\otimes\kappa(\alpha) && \text{(by definition)}\\
&= \operatorname{sign}_{\bar{\alpha}}^{\mathscr{U}_{(A,\sigma,\kappa(\alpha))}(\eta)} \mathscr{U}_{(A,\sigma,\kappa(\alpha))}(h)\\
&= \operatorname{sign}_{\bar{\alpha}}^{\mathscr{F}_{\vartheta_{\kappa(\alpha)}}\circ\mathscr{U}_{(A,\sigma,\kappa(\alpha))}(\eta)} \mathscr{F}_{\vartheta_{\kappa(\alpha)}}\circ\mathscr{U}_{(A,\sigma,\kappa(\alpha))}(h) && \text{(4.1)}\\
& && \text{(by [2, Theorem 4.2])}\\
&= \operatorname{sign}_{\bar{\alpha}}^{\mathscr{U}_{(B,\tau,\kappa(\alpha))}\circ\mathscr{F}_{\vartheta}(\eta)} \mathscr{U}_{(B,\tau,\kappa(\alpha))}\circ\mathscr{F}_{\vartheta}(h) && \text{(by the above diagram)}\\
&= \operatorname{sign}_{\bar{\alpha}}^{\mathscr{F}_{\vartheta}(\eta)\otimes\kappa(\alpha)} \mathscr{F}_{\vartheta}(h)\otimes\kappa(\alpha).
\end{aligned}
$$

我们通过检验对于每个 $\alpha\in\mathsf{Sper}\ R\setminus\mathsf{Nil}[B,\tau]=\mathsf{Sper}\ R\setminus\mathsf{Nil}[A,\sigma]$，$\operatorname{sign}_{\alpha}^{\mathscr{M}}\mathscr{F}_{\vartheta}(\eta)\neq 0$，证明 $\mathscr{F}_{\vartheta}(\eta)$ 是 (B,τ) 的参考形式：

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sign}_{\alpha}^{\mathscr{M}}\mathscr{F}_{\vartheta}(\eta) &= \operatorname{sign}_{\bar{\alpha}}^{\mathscr{M}_{\bar{\alpha}}}\mathscr{F}_{\vartheta}(\eta)\otimes\kappa(\alpha)\\
&= \pm\operatorname{sign}_{\bar{\alpha}}^{\mathscr{F}_{\vartheta}(\eta)\otimes\kappa(\alpha)}\mathscr{F}_{\vartheta}(\eta)\otimes\kappa(\alpha)\\
&= \pm\operatorname{sign}_{\alpha}^{\eta}\eta \qquad \text{(by Equations (4.1) for } h=\eta)\\
&\neq 0.
\end{aligned}
$$

回到一般 h的情形，由于 $\mathscr{F}_{\vartheta}(\eta)$ 是参考形式，方程（4.1）中的最后一行可改写为 $\operatorname{sign}^{\mathscr{F}_{\vartheta}(\eta)\alpha}\ \mathscr{F}_{\vartheta}(h)$，从而证明了第二个陈述。□

命题 4.3。设 R 为半局部连通，且 $\alpha\in\operatorname{Sper}^{\max}R\setminus\operatorname{Nil}[A,\sigma]$。则存在一个 h_{α} 上的非奇异厄米形式 (A,σ)，使得 $\operatorname{sign}_{\alpha}^{\eta}h_{\alpha}$ 是一个2次幂。

证明。根据 [9, 定理 8.7 和注记 8。8] 存在一个连通有限 ´étale R- 代数 R_1，以及一个带对合的阿祖马亚代数（A_1，σ_1）在 R_1上，使得 $A\otimes_R R_1$ 和 A_1 在 S_1 上 Brauer 等价：$=S\otimes_R R_1$，σ 并且 σ_1 二者均为酉，或均为非酉；此外，以下至少一个条件成立：

(1) $Z(A_1)\cong R_1\times R_1$；(2) 次数 $A_1=1$；(3) 次数 A_1 是 2 的幂，且存在 $u\in A_1^{\times}$ 使得 $\sigma_1(u)=-u$（以及本证明中不需要的其他性质）。

注意到存在 $\beta\in$ 实谱$^{\max}R_1$ 使得 $\alpha=\beta\cap R$。事实上，由命题 3.2（2），存在 $\gamma\in$ 实谱 R_1 使得 $\alpha=\gamma\cap R$。然后，令 $\beta\in$ 实谱$^{\max}R_1$满足 $\gamma\subseteq\beta$。由此可得 $\alpha=\beta\cap R$，因为 α 是极大的。此外，$\beta\notin$ 幂零集$[A\otimes_R R_1,\sigma\otimes$ 恒等$]$，由命题 3.2（3）。

我们考虑上述三种情形：

（1）这种情况不会出现：由于 $Z(A\otimes_R R_1)=Z(A_1)\cong R_1\times R_1$，对合$\sigma$ 必定是酉的，从而我们得到 $\beta\in$ 幂零集$[A\otimes_R R_1,\sigma\otimes$ 恒等$]$，由 [6, 引理 3。7],矛盾。

(2) 在此情形下 $A_1=S_1$。若 σ_1 是酉的，则 S_1 是一个二次型 ´étale R_1-代数，而 σ_1 是 S_1 上的标准 involution，依据命题 2.10。

断言。 $K:=A_1\otimes_{R_1}\kappa(\beta)$ 是 $\kappa(\beta)$ 的一个二次域扩张，其形式为$\kappa(\beta)(\sqrt{d})$，其中 $d<_{\bar{\beta}}0$ 且 $\iota:=\sigma_1\otimes\mathrm{id}$ 是 K 上的典范对合。

断言的证明。事实上，若 $d >_{\bar{\beta}} 0$ 或者若 $K \cong \kappa(\beta) \times \kappa(\beta)$，则 $K \otimes_{\kappa(\beta)} k(\beta) \cong k(\beta) \times k(\beta)$，因此由引理 3.7], 可得 $\beta \in \mathrm{Nil}[K, \iota]$，即 $\beta \in \mathrm{Nil}[A_1 \otimes_{R_1} \kappa(\beta)\ \sigma_1 \otimes \mathrm{id}]$。由此再次根据引理 3.7] 可知 $\beta \in \mathrm{Nil}[A_1, \sigma_1]$。由于 σ_1 是酉的，且根据假设 σ 是酉的，因此由命题 2.11 可得 $\sigma \otimes \mathrm{id}$ 是酉的。由于 $A \otimes_R R_1$ 与 A_1 Brauer 等价，因此 $\mathrm{Nil}[A \otimes_R R_1, \sigma \otimes \mathrm{id}] = \mathrm{Nil}[A_1, \sigma_1]$, 从而 $\beta \in \mathrm{Nil}[A \otimes_R R_1, \sigma \otimes \mathrm{id}],$, 进而由命题 3.2(3) 得到$\alpha \in \mathrm{Nil}[A, \sigma]$，矛盾。第二个陈述显然，因为 ι 是 $\kappa(\beta)$-线性的。断言证明完毕。

由断言和 [7, 注 2。5] 我们于是得到符号空间$^{\mu}_{\beta}\langle 1\rangle_{\sigma_1} := $ 符号空间$^{\mu\otimes\kappa(\beta)}_{\bar{\beta}}\langle 1\rangle_{\iota} = 1$。因此，符号空间$^{\eta}_{\beta}\langle 1\rangle_{\sigma_1} =: \ \delta \in \{-1, 1\}$。取 $h_1 = \langle\delta\rangle_{\sigma_1}$ 即可得到符号空间$^{\eta}_{\beta} h_1 = 1$。

若 σ_1，从而 σ 不是酉的，则有 $(A_1, \sigma_1) = (S_1, \iota) = (R_1, \mathrm{id})$。因此$\sigma_1$ 是正交型，按上述方式取 $h_1 = \langle\delta\rangle_{\sigma_1}$，再次得到符号空间$^{\eta}_{\beta} h_1 = 1$。现在证明 σ 也必为正交型。我们有 $A_1 \otimes_{R_1} k(\beta) \cong k(\beta)$。由于$A \otimes_R R_1$ 与 A_1 Brauer 等价，$(A \otimes_R R_1) \otimes_{R_1} k(\beta)$ 和 $A_1 \otimes_{R_1} k(\beta)$ Brauer 等价（参见 [15, 命题 7.3.3]），因此 $(A \otimes_R R_1) \otimes_{R_1} k(\beta)$ 与 $k(\beta)$ Brauer 等价。若 σ 是辛型，则根据 [5,注 3.6], , $\beta \in$ 幂零集$[A \otimes_R R_1, \sigma \otimes \mathrm{id}]$，故由命题 3.2(3)可得 $\alpha \in$ 幂零集$[A, \sigma]$，矛盾。

(3) 根据命题 2.7，我们有 $S_1 := S \otimes_R R_1 = Z(A) \otimes_R R_1 = Z(A \otimes_R R_1)$。因此，根据引理 2.6， S_1 是 R_1 的二次 ´étale 扩张。由此可知，S_1 是连通的；否则，由 [14, 引理 1.16], 以及与情形 (1) 相同的论证，可得 $S_1 \cong R_1 \times R_1$，从而产生矛盾。若 σ_1 是辛型，则 $\mathrm{Int}(u) \circ \sigma_1$是正交型；若 σ_1 是正交型，则 $\mathrm{Int}(u) \circ \sigma_1$ 是辛型（这由[23, 命题 2.7] 可知，因为可在每个 $\mathfrak{p} \in$ 谱 R上检验，参见定义 2.9）。因此，适当将 σ_1 替换为 $\mathrm{Int}(u) \circ \sigma_1$后，我们可以假设 σ 与 σ_1 属于同一类型。根据引理 4.1，存在 (A_1, σ_1) 上的非奇异厄米形式 h_1，使得 $\mathrm{sign}^{\lambda_1}_{\beta} h_1$ （至多相差一个符号）是 2 的幂，其中 λ_1 是 (A_1, σ_1) 的参考形式。

因此，在情形 (2) 和 (3) 中， S_1 是连通的， σ 且 σ_1 属于同类型，并且存在一个非奇异厄米形式 h_1 定义在 (A_1, σ_1) 上，其符号（相差一个符号）是 2 的幂。根据定理 4.2，存在型 λ 和 h 定义在 $(A \otimes_R R_1, \sigma \otimes \mathrm{id})$ 上，使得 h 非奇异，且符号$^{\lambda}_{\beta} h$ 是 2 的幂。由于符号$^{\eta\otimes R_1}_{\beta} h = \pm$符号$^{\lambda}_{\beta} h$我们可以假设（必要时将 h 替换为 $-h$），使得符号$^{\eta\otimes R_1}_{\beta} h = 2^{\ell}$ 对某个$\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$成立。

根据引理 2.14(1)，$\mathrm{Sper}^{\max} R_1$ 中将 α 扩张到 R_1 的所有极大扩张所成的子集是有限的，记为 $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$，其中 $\beta_1 = \beta$。根据引理 2.14(2)，存在 $b_1, \ldots, b_k \in R_1^{\times}$，使得 $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\} \cap \mathring{H}(b_1, \ldots, b_k) = \{\beta_1\}$。注意，若 $\gamma = \beta_1$，则符号$_{\gamma}\langle\langle b_1, \ldots, b_k\rangle\rangle$ 等于 2^k；若 $\gamma \in \{\beta_2, \ldots, \beta_m\}$，则等于 0，其中$\langle\langle b_1, \ldots, b_k\rangle\rangle$ 表示 Pfister 形式 $\langle 1, b_1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, b_k\rangle$。

迹型 $\mathrm{Tr}^*_{A\otimes_R R_1/A}(\langle\langle b_1, \ldots, b_k\rangle\rangle \otimes h)$ 在 (A, σ) 上是非奇异的（因为 $\mathrm{Tr}^{A\otimes_R R_1/A}$是对合迹，参见第 2.4节），由迹公式定理 3.4可得

$$\mathrm{sign}^{\eta}_{\alpha} \mathrm{Tr}^*_{A\otimes_R R_1/A}(\langle\langle b_1, \ldots, b_k\rangle\rangle \otimes h) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{sign}^{\eta\otimes R_1}_{\gamma_i}(\langle\langle b_1, \ldots, b_k\rangle\rangle \otimes h), \tag{4.2}$$

对于某些序 $\gamma_1,\dots,\gamma_r \in$ 实谱 R_1，使得 $\gamma_1^*,\dots,\gamma_r^*$ 彼此均不相同，且实谱$^{\max} R_1/\alpha = \{\gamma_1^*,\dots,\gamma_r^*\}$。因此 $r = m$，经过适当重新编号后，我们有$\gamma_i \subseteq \beta_i$，其中 $i = 1,\dots,m$。

回忆一下，$|$符号$^{\eta\otimes R_1}_{\bullet}(\langle\!\langle b_1,\dots,b_k\rangle\!\rangle \otimes h)|$ 在 Sper R_1 上关于 Harrison拓扑是连续的，由 [5, 推论 4。3], 可由 [5, 引理 6。5] 得到，对于 $i = 1.\dots,m$,

$$\begin{aligned}|\operatorname{sign}^{\eta\otimes R_1}_{\gamma_i}(\langle\!\langle b_1,\dots,b_k\rangle\!\rangle \otimes h)| &= |\operatorname{sign}^{\eta\otimes R_1}_{\beta_i}(\langle\!\langle b_1,\dots,b_k\rangle\!\rangle \otimes h)| \\ &= \begin{cases} 2^k|\operatorname{sign}^{\eta\otimes R_i}_{\beta_i} h| & \text{if } i = 1 \\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}\end{aligned}$$

因此，方程（4.2）给出

$$\operatorname{sign}^{\eta}_{\alpha}\operatorname{Tr}^*_{A\otimes_R R_1/A}(\langle\!\langle b_1,\dots,b_k\rangle\!\rangle \otimes h) = \pm 2^k \operatorname{sign}^{\eta\otimes R_1}_{\beta_1} h = \pm 2^{k+\ell},$$

这是一个2的幂，至多只需将 h 替换为 $-h$。 □

引理 4.4。设 R 为半局部连通。若 $\alpha \in$ 实谱 $R \setminus$ 幂零集$[A,\sigma]$，则 $\alpha^* \in$实谱 $^{\max} R \setminus$ 幂零集$[A,\sigma]$。

证明。由命题 4.3 存在一个非奇异厄米形式 h，定义在（A,σ）上，使得 sign $^{\eta}_{\alpha} h \neq 0$。由 [5, 推论 4。3]，$|\operatorname{sign}^{\eta}_{\bullet} h|$ 关于 Harrison拓扑连续。因此由 [5, 引理 6。5] 可得 $\operatorname{sign}^{\eta}_{\alpha^*} h \neq 0$，于是 $\alpha^* \notin$幂零集$[A,\sigma]$。 □

定理4.5。设 R 为半局部环。存在 $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ 以及定义在(A,σ)上的非奇异厄米形式 h_0，使得 $|$在实谱 $R \setminus$幂零集$[A,\sigma]$上的符号空间为$^{\eta}_{\bullet} h_0| = 2^m$。

证明。我们假设Spec(R)成立。由于 R 是半局部环，我们可写作$R \cong R_1 \times \cdots \times R_t$（其中 $t \in \mathbb{N}$为某个对象），其中每个R_i都是连通半局部环（参见 [6, 注6.5]）。令 $e_i :=$ $(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$（其中1位于第 i位）。由于 $e_i \in R$，对于 $i = 1,\dots,t$，我们有 $\sigma(e_i) = e_i$。记$A_i := Ae_i$，由此可得

$$(A,\sigma) = (A_1,\sigma|_{A_1}) \times \cdots \times (A_t,\sigma|_{A_t}).$$

其中$(A_i,\sigma_i) \cong (A \otimes_R R_i, \sigma\otimes\mathrm{id})$，对 $i = 1,\dots,t$成立，因此它是定义在 R_i上的带对合的阿祖马亚代数。

经过适当的重新编号，我们可以假设 Sper $R_i \setminus$幂零集$[A,\sigma] \neq \emptyset$对于 $1 \leq i \leq s$ 且 Sper $R_i \setminus$幂零集$[A,\sigma] = \emptyset$对于 $s+1 \leq i \leq t$成立。因此，参照等式（2.1），有

$$\operatorname{Sper} R \setminus \operatorname{Nil}[A,\sigma] = (\operatorname{Sper} R_1 \setminus \operatorname{Nil}[A_1,\sigma_1]) \dot\cup \cdots \dot\cup (\operatorname{Sper} R_s \setminus \operatorname{Nil}[A_s,\sigma_s]).$$

设 $i \in \{1,\dots,s\}$。由引理 4.4，存在某个 $\alpha_i \in$Sper$^{\max} R_i \setminus$幂零集$[A_i,\sigma_i]$，且由命题 4.3，存在定义在（A_i,σ_i）上的非奇异厄米形式（M_i,h_i），使得对某个 $k_i \in \mathbb{N}$ 有 $\operatorname{sign}^{\eta\otimes R_i}_{\alpha_i} h_i = 2^{k_i}$。由于 Sper R_i 是连通的，且 $|\operatorname{sign}^{\eta}_{\bullet} h_i|$ 在 Sper R_i 上连续（参见推论 4.3），因此在 Sper R_i 上有 $|\operatorname{sign}^{\eta}_{\bullet} h_i| = 2^{k_i}$。

对于 $i = s+1,\dots,t$，我们为（M_i，h_i）任取一个定义在（A_1，σ_1）上的非奇异厄米形式，并定义（参见定义 2.1）：

$$(M,h) := (M_1,h_1) \times \cdots \times (M_t,h_t).$$

根据命题 2.2，h 是非奇异的，且通过直接验证可知，如果 $\alpha \in$实谱 $R_i \setminus$幂零集$[A_i,\sigma_i]$ 对于某个 $i \in \{1,\dots,s\}$成立，那么我们有

$$|\operatorname{sign}^{\eta}_{\alpha} h| = |\operatorname{sign}^{\eta\otimes R_i}_{\alpha} h\otimes R_i| = |\operatorname{sign}^{\eta\otimes R_i}_{\alpha} h_i| = 2^{k_i}.$$

设 $k = k_1 + \cdots + k_s$。由于 Sper R_i 在 Sper R 中是既开又闭的，因此存在 $\ell_i \in \mathbb{N}$ 和一个定义在 R 上的非奇异二次型 q_i'，使得 sign$q_i' = 2^{\ell_i+k-k_i}$ 在 Sper R_i 上成立，而 sign $q_i' = 0$ 在 Sper $R \setminus$ Sper R_i 上成立，参见 [24, 定理 3.2]。令 $\ell := \ell_1 + \cdots + \ell_s$ 和 $q_i := 2^{\ell-\ell_i} \times q_i'$，其中 $i = 1, \ldots, s$（因此 sign$q_i = 2^{\ell+k-k_i}$ 在 Sper R_i 上成立，在其补集上为 0）。那么

$$h_0 := q_1 \otimes h \perp \ldots \perp q_s \otimes h$$

在 Sper R 上满足 $|$符号$^\eta\, h_0| = 2^{\ell+k}$。 □

5. An exact sequence for total signatures in the semilocal case

在本节中，我们假设环 R 是半局部的（回顾一下我们一贯的假设，即 $2 \in R^\times$），并且参考形式 η 对于 (A, σ) 是非奇异的，这由定理4.5得到证明。

我们将简要考察定义在 Sper R上的连续函数与厄米形式的全符号之间的联系。论证与作相应修改后，和 [3]中的论证相同。由于在 Nil$[A, \sigma]$上，任意关于 (A, σ) 的厄米形式的符号均为 0，我们引入以下记号：

$$C(\operatorname{Sper} R, \mathbb{Z})_{[A,\sigma]} := \{f : \operatorname{Sper} R \to \mathbb{Z} \mid f \text{ is continuous for the Harrison topology and } f = 0 \text{ on } \operatorname{Nil}[A, \sigma]\}.$$

命题 5.1。设 $f \in C(\operatorname{Sper} R, \mathbb{Z})_{[A,\sigma]}$。则存在 $m \in \mathbb{N}$ 以及一个关于 (A, σ) 的非奇异厄米形式 h，使得 $2^m f =$ 符号$^\eta_\bullet h$。

证明。设 h_0 是 (A, σ) 上的非奇异厄米形式，使得在 Sper $R \setminus$ Nil$[A, \sigma]$ 上 $|$sign$^\eta_\bullet h_0| = 2^k$（参见定理4.5）。考虑映射 δ: Sper $R \setminus$ Nil$[A, \sigma] \to \mathbb{Z}$, $\delta(\alpha) :=$ sgn(sign$^\eta_\alpha\, h_0$), 从而 $\delta(\alpha)$ sign$^\eta_\alpha\, h_0 = 2^k$。根据 [5, 定理6.1] δ 在 Harrison拓扑下是连续的。设 q 是 R 和 $\ell \in \mathbb{N}$ 上的非奇异二次型，使得在 Sper R 上 sign$_\bullet\, q = 2^\ell \delta f$ （参见 [24, Th´eor`eme 3.2]）。则 $q \otimes h_0$ 是非奇异的，且 sign$^\eta_\bullet\, q \otimes h_0 = 2^{\ell+k} f$。□

定义5.2。我们将 $S^\eta(A, \sigma)$ 定义为映射 sign$^\eta_\bullet$: $W(A, \sigma) \to C$(Sper $R, \mathbb{Z})^{[A,\sigma]}$ 的余核。

记 $W_t(A, \sigma)$ 为 $W(A, \sigma)$ 的挠子群，则有：

定理 5.3. 序列

$$0 \to W_t(A, \sigma) \to W(A, \sigma) \xrightarrow{\text{sign}^\eta_\bullet} C(\operatorname{Sper} R, \mathbb{Z})_{[A,\sigma]} \to S^\eta(A, \sigma) \to 0$$

是正合的，且群 $W_t(A, \sigma)$ 与 $S^\eta(A, \sigma)$ 均为 2-主挠。

证明. 这由 Pfister 局部-整体原理、[6, 定理 6.6], 以及命题 5.1。 □

注 5.4. 若 $(A, \sigma) = (F, \text{id})$，其中 F为形式实域，则 $S^\eta(A, \sigma)$ 等于 F 的稳定群 $S(F)$，且使得 $S(F)$ 的指数为 2^s的元素 $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$称为 F 的稳定指数，参见 [12, §1]。

Appendix 附录 A. Hermitian Morita equivalence

在本附录中，我们证明，在半局部连通环上 Brauer 等价的带对合的 Azumaya 代数是厄米莫里田等价的，并且这种等价在半局部连通基变换下保持不变。为方便读者，我们将大部分细节逐一说明。

回顾一下，$(A,\ \sigma)$ 表示 R 上带对合的 Azumaya 代数。设 $\varepsilon \in Z(A)$ 是一个单位元，满足 $\sigma(\varepsilon)\varepsilon = 1$。我们用 $\mathrm{Herm}^{\varepsilon}(A,\ \sigma)$ 表示 $(A,\ \sigma)$ 上 ε-厄米形式的范畴。其对象是 $(A,\ \sigma)$ 上的 ε-厄米模 $(M,\ h)$，其态射为等距同构（特别地，它们全都是同构）。

设 (B,τ) 是 R 上另一个带对合的阿祖马亚代数，并设 $\delta \in Z(B)$ 是一个单位元，满足 $\tau(\delta)\delta = 1$。我们回顾 [22, 第一章，第 §8] 节中形式的乘积的定义。设 (N,φ) 是 (A,σ) 上的一个 ε-厄米形式，且 (M,ψ) 是 (B,τ) 上的一个 δ-厄米形式。假设 N 是 R 上的一个 B-A 双模（即，R 在 N 上的左作用与右作用相同），并假设 φ 具有 (B,τ)，即

$$\varphi(n \star b, n') = \varphi(n, bn')$$

对所有 $n,\ n' \in N$ 和所有 $b \in B$，其中 B 在 N 上的右作用 $\star$ 是通过对合 τ 给出的，即 $n \star b = \tau(b)n$。于是，φ 与 ψ 的乘积是 $(A,\ \sigma)$ 上的 $\varepsilon\delta$-厄米形式 $\varphi \bullet \psi$：$(M \otimes_B N) \times (M \otimes_B N) \to A$，定义如下：

$$\varphi \bullet \psi(m \otimes n, m' \otimes n') := \varphi(n, \psi(m, m')n'). \tag{A.1}$$

乘积满足结合律，并且对任一位置上的正交和满足分配律。当且仅当 φ 和 ψ 均为非奇异时，它才是非奇异的。

若 (M,h) 是环 (A,σ) 上的非奇异 ε-厄米形式，则 h 的伴随对合是环 $\mathrm{End}_A(M)$ 上由下式隐式定义的对合 ad_h

$$h(x, \mathrm{ad}_h(f)(y)) = h(f(x), y)$$

对所有 $x, y \in M$ 以及所有 $f \in \mathrm{End}_A(M)$ 均成立，参见 [14, 第 2.4] 节。

定理 A.1. 设 R 为半局部连通的，并设 (B,τ) 是 R 上带对合的阿祖马亚代数，满足 A 和 B ***Brauer*** 等价，且 $\sigma|_S = \tau|_S$，其中$S := Z(A) = Z(B)$。假设 S 是连通的。则存在 $\delta \in \{-1, 1\}$ 以及 (B,τ) 上的非奇异 δ-厄米形式 (P,ϑ)，它容许 (A,σ)，使得函子

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_\vartheta : \mathrm{Herm}^{\varepsilon}(A,\sigma) &\to \mathrm{Herm}^{\delta\varepsilon}(B,\tau) \\ (M,h) &\mapsto (M \otimes_A P, \vartheta \bullet h) \qquad \textit{(objects)} \\ f &\mapsto f \otimes \mathrm{id}_P \qquad \text{(态射)} \end{aligned}$$

是保持正交和、将非奇异型映为非奇异型、将双曲形式映为双曲形式的范畴等价。具体而言，若 $\sigma|_S = \mathrm{id}_S$，则当 σ 和 τ 同为正交型或同为辛型时，$\delta = 1$；否则为 $\delta = -1$；若 $\sigma|_S \neq \mathrm{id}_S$，则 δ 可在 $\{-1, 1\}$中自由选取。

证明。这是对 [6, 定理 2.15]证明的扩展版本。

若 $\sigma|_S \neq \mathrm{id}_S$，则根据 [6, 命题 2.12]，$S$ 是一个二次 étale R-代数，并且 is 因此，根据 [22,第六章，命题 1.1.1]，它是半局部的。

由于 A 和 B Brauer 等价，存在忠实投射（即忠实的有限生成投射）S-模 P 和 Q，使得 $A \otimes_S \mathrm{End}_S(P) \cong B \otimes_S \mathrm{End}_S(Q)$，参见 [22, 第三章，(5.3)]。由于 S 是半局部连通的，P 和 Q由 [16]可知是自由的。因此，存在 $k,\ \ell \in \mathbb{N}$ 以及阿祖马亚S-代数的一个同构

$$\zeta : \mathrm{End}_A(A^k) \to \mathrm{End}_B(B^\ell). \tag{A.2}$$

记 $\tilde{A} = \mathrm{End}_A(A^k)$、$\tilde{B} = \mathrm{End}_B(B^\ell)$，并注意到 $Z(\tilde{A}) = Z(\tilde{B}) = S$。考虑分别定义在 (A,σ) 和 (B,τ) 上的非奇异厄米形式 $(A^k, \varphi := k \times \langle 1 \rangle_\sigma)$ 和 $(B^\ell, \psi := \ell \times \langle 1 \rangle_\tau)$。由于 φ 和 ψ 是厄米的，对合 σ

和 adφ 属于同类型，对合 τ 和 adψ也同样如此，参见[14, 命题 2。11]。特别是， $\sigma|_S = \mathrm{ad}_\varphi|_S$ 和 $\tau|_S = \mathrm{ad}_\psi|_S$。注意， A^k 自然是 $\tilde{A}$-A-双模 over R 且 B^ℓ 自然是 $\tilde{B}$-B-双模 over R。

由于 A^k 是 A 上的忠实投射模（因为它是自由模），且 φ 是非奇异的，[22, 第一章，命题 9.3.4] 告知我们，(A^k, φ)允许$(\tilde{A}, \mathrm{ad}\varphi)$，并给出一个定义在$(\tilde{A}, \mathrm{ad}\varphi)$上的非奇异厄米形式$(A^k, \varphi')$，它允许$(A, \sigma)$。这里，$\varphi'$ 由 φ 的伴随线性映射构造而成（具体细节与我们的论证无关），而 A^k 是通过分别用对合 σ 和 adφ扭曲 A^k 的乘法得到的 A-$\tilde{A}$双模：

$$a \cdot t \cdot b := \mathrm{ad}_\varphi(b)t\sigma(a) \ (= \mathrm{ad}_\varphi(b)(t\sigma(a)))$$

对所有 $a \in A$、 $t \in A^k$ 和 $b \in \tilde{A}$均成立。于是， [22, 第一章，定理 9.3.5] 及其证明表明，函子

$$\begin{aligned} \mathscr{G} : \mathrm{Herm}^\varepsilon(A, \sigma) &\to \mathrm{Herm}^\varepsilon(\tilde{A}, \mathrm{ad}_\varphi) \\ (M, h) &\mapsto (M \otimes_A \overline{A^k}, \varphi' \bullet h) \\ f &\mapsto f \otimes \mathrm{id}_{\overline{A^k}}, \end{aligned}$$

是范畴等价。

对合 τ 通过同构 ζ，在 $\tilde{B}$ 上诱导出同类型的对合 ω。因此，我们得到一个在 S 上的带对合的Azumaya代数同构 $(A,\mathrm{ad}\varphi) \cong (B, \omega)$。根据 [22, 第一章，(7.1)]，存在一个范畴同构

$$\begin{aligned} \mathscr{U} : \mathrm{Herm}^\varepsilon(\tilde{A}, \mathrm{ad}_\varphi) &\to \mathrm{Herm}^\varepsilon(\tilde{B}, \omega) \\ (M, h) &\mapsto (M \otimes_{\tilde{A}} \tilde{B}, \zeta^* h) \\ f &\mapsto f \otimes \mathrm{id}_{\tilde{B}}, \end{aligned}$$

其中

$$\zeta^* h(m \otimes a, n \otimes b) := \omega(a)\zeta(h(m, n))b$$

对所有 $m, n \in M$以及所有 $a, b \in B$均成立。

注意，由我们的假设可知， $\omega|_S = \mathrm{ad}_\psi|_S$。根据 Skolem-Noether定理[9, 定理 8.6]，ω 与 adψ 相差一个内自同构：存在$\delta \in \{-1, 1\}$ 以及一个单位元 $u \in B$，使得 ad$\psi(u) = \delta u$，且 $\omega = \mathrm{Int}(u) \circ \mathrm{ad}\psi$；若 $\sigma|_S \neq \mathrm{id}_S$，则 $\{-1, 1\}$ 中的元素 δ 可任意选取。此外，若$\sigma|_S = \mathrm{id}_S (= \mathrm{ad}_\psi|_S)$，则 δ 唯一：若 $\mathrm{Int}(u) = \mathrm{Int}(u')$，则 $u = u's$对某个 $s \in S^\times$成立，因此 ad$\psi(u) = \delta u$ 当且仅当 ad$\psi(u') = \delta u'$。于是， [22, 第一章，注 5.8.2] 给出了一个范畴同构

$$\begin{aligned} \mathscr{S} : \mathrm{Herm}^\varepsilon(\tilde{B}, \omega) &\to \mathrm{Herm}^{\delta\varepsilon}(\tilde{B}, \mathrm{ad}_\psi) \\ (M, h) &\mapsto (M, u^{-1}h) \\ f &\mapsto f. \end{aligned}$$

由于 B^ℓ 在 B 上是忠实投射的（因为它是自由的），且 ψ 是非奇异的，[22, 第一章，命题 9.3.4] 告诉我们，(B^ℓ, ψ) 存在 $(\tilde{B}, \mathrm{ad}\psi)$，而 [22,第一章，定理 9.3.5]表明该函子

$$\begin{aligned} \mathscr{F} : \mathrm{Herm}^{\delta\varepsilon}(\tilde{B}, \mathrm{ad}_\psi) &\to \mathrm{Herm}^{\delta\varepsilon}(B, \tau) \\ (M, h) &\mapsto (M \otimes_{\tilde{B}} B^\ell, \psi \bullet h) \\ f &\mapsto f \otimes \mathrm{id}_{B^\ell}, \end{aligned}$$

是范畴等价。

综上，我们得到如下范畴与函子序列：

$$\mathrm{Herm}^{\varepsilon}(A,\ \sigma) \xrightarrow{\mathscr{G}} \mathrm{Herm}^{\varepsilon}(\tilde{A},\ \mathrm{ad}_{\varphi}) \xrightarrow{\mathscr{U}} \mathrm{Herm}^{\varepsilon}(\tilde{B},\ \omega) \xrightarrow{\mathscr{S}} \mathrm{Herm}^{\delta\varepsilon}(\tilde{B},\ \mathrm{ad}_{\psi}) \xrightarrow{\mathscr{F}} \mathrm{Herm}^{\delta\varepsilon}(B,\ \tau)。$$

复合 $\mathscr{E} :=\mathscr{F}\circ\mathscr{S}\circ\mathscr{U}\circ\mathscr{G}$ 是范畴等价，因为构成它的函子是范畴等价，且这些范畴彼此同构。此外，$\mathscr{E}$保持正交和，将非奇异形式映为非奇异形式，并将双曲形式映为双曲形式；根据 [22] 前文引用的文献，构成它的函子均具有这些性质。

Let

$$(P,\vartheta) := \big((\overline{A^k}\otimes_{\tilde{A}}\tilde{B})\otimes_{\tilde{B}} B^{\ell}, \psi\bullet u^{-1}\zeta^{*}\varphi'\big),$$

并令 $\mathscr{F}_{\vartheta}$ 按定理陈述中的定义给出。由下文引理 $\mathscr{E}$和 $\mathscr{F}_{\vartheta}$，函子自然同构。我们得出，A.2 是保持正交和、将非奇异形式映为非奇异形式，并将双曲形式映为双曲形式的范畴等价。 $\mathscr{F}_{\vartheta}$

最后我们证明关于 δ 当 $\sigma|_S =$ 恒等$_S$时的断言。由于 δ 是唯一的，只需检验它在任意 $\mathfrak{p}\in$ 谱 R 处的取值（即在 R 上与 κ（$\mathfrak{p}$）张量之后）。由 [23, 命题 2.7] 我们知道 $\delta=1$ 若 σ 与 τ 在 $\mathfrak{p}$ 处同为正交型或同为辛型，且 $\delta=-1$ 否则。再利用 [6,命题 2.12]，该陈述即得。□

引理 A.2. 函子 $\mathscr{E}$ 与 $\mathscr{F}_{\vartheta}$ 自然同构。

证明. 设 $(M,h)\in\mathrm{Herm}^{\varepsilon}(A,\sigma)$。我们首先计算 $\mathscr{E}(M,h)$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(M,h) &= (\mathscr{F}\circ\mathscr{S}\circ\mathscr{U}\circ\mathscr{G})(M,h)\\
&= (\mathscr{F}\circ\mathscr{S}\circ\mathscr{U})(M\otimes_A\overline{A^k},\varphi'\bullet h)\\
&= (\mathscr{F}\circ\mathscr{S})\big((M\otimes_A\overline{A^k})\otimes_{\tilde{A}}\tilde{B},\zeta^{*}(\varphi'\bullet h)\big)\\
&= \mathscr{F}\big((M\otimes_A\overline{A^k})\otimes_{\tilde{A}}\tilde{B},u^{-1}(\zeta^{*}(\varphi'\bullet h))\big)\\
&= \Big(\big((M\otimes_A\overline{A^k})\otimes_{\tilde{A}}\tilde{B}\big)\otimes_{\tilde{B}}B^{\ell},\psi\bullet(u^{-1}(\zeta^{*}(\varphi'\bullet h)))\Big).
\end{aligned}$$

接下来我们证明存在一个等距

$$\mathscr{E}(M,h)\xrightarrow{\alpha_{(M,h)}}\mathscr{F}_{\vartheta}(M,h).$$

事实上:

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(M,h) &= \Big(\big((M\otimes_A\overline{A^k})\otimes_{\tilde{A}}\tilde{B}\big)\otimes_{\tilde{B}}B^{\ell},\psi\bullet(u^{-1}(\zeta^{*}(\varphi'\bullet h)))\Big)\\
&\simeq_1 \Big(\big(M\otimes_A(\overline{A^k}\otimes_{\tilde{A}}\tilde{B})\big)\otimes_{\tilde{B}}B^{\ell},\psi\bullet(u^{-1}(\zeta^{*}\varphi'\bullet h))\Big)\\
&= \Big(\big(M\otimes_A(\overline{A^k}\otimes_{\tilde{A}}\tilde{B})\big)\otimes_{\tilde{B}}B^{\ell},\psi\bullet(u^{-1}\zeta^{*}\varphi'\bullet h)\Big)\\
&\simeq_2 \Big(M\otimes_A\big((\overline{A^k}\otimes_{\tilde{A}}\tilde{B})\otimes_{\tilde{B}}B^{\ell}\big),(\psi\bullet u^{-1}\zeta^{*}\varphi')\bullet h\Big)\\
&= \mathscr{F}_{\vartheta}(M,h),
\end{aligned}$$

其中 $\simeq_1$ 与 $\simeq_2$ 为等距同构。为验证 $\simeq_1$，只需证明

$$\big((M\otimes_A\overline{A^k})\otimes_{\tilde{A}}\tilde{B},\zeta^{*}(\varphi'\bullet h)\big)\simeq\big(M\otimes_A(\overline{A^k}\otimes_{\tilde{A}}\tilde{B}),\zeta^{*}\varphi'\bullet h\big).$$

由张量积的结合律可知，存在一个由下式诱导的典范同构

$$\nu:(M\otimes_A\overline{A^k})\otimes_{\tilde{A}}\tilde{B}\to M\otimes_A(\overline{A^k}\otimes_{\tilde{A}}\tilde{B}),\ (m\otimes t)\otimes b\mapsto m\otimes(t\otimes b)$$

对所有的 $m \in M$、 $t \in \overline{A^k}$ 和 $b \in \tilde{B}$ 均成立。我们来验证它是一个等距映射:

$$\begin{aligned}\zeta^*\varphi' \bullet h\big(\nu((m_1 \otimes t_1) \otimes b_1),\, \nu((m_2 \otimes t_2) \otimes b_2)\big) \\ &= \zeta^*\varphi' \bullet h\big(m_1 \otimes (t_1 \otimes b_1), m_2 \otimes (t_2 \otimes b_2)\big) \\ &= \zeta^*\varphi'\big(t_1 \otimes b_1, h(m_1, m_2)(t_2 \otimes b_2)\big) \\ &= \omega(b_1)\zeta\big(\varphi'(t_1, h(m_1, m_2)t_2\big)b_2 \\ &= \omega(b_1)\zeta\big(\varphi' \bullet h(m_1 \otimes t_1, m_2 \otimes t_2)\big)b_2 \\ &= \zeta^*(\varphi' \bullet h)\big((m_1 \otimes t_1) \otimes b_1, (m_2 \otimes t_2) \otimes b_2\big).\end{aligned}$$

对 $\simeq_2$ 的验证类似（或参见 [22, 第一章，引理 8.1.1(2)]）。

现在考虑一个等距 $(M,h) \xrightarrow{f} (N,h')$。直接计算可得$\mathscr{E}(f) = ((f \otimes \mathrm{id}_{A^k}) \otimes \mathrm{id}_{\tilde{B}}) \otimes \mathrm{id}_{B^\ell}$，而 $\mathscr{F}_\vartheta(f) = f \otimes \mathrm{id}_{(A^k \otimes \tilde{B}) \otimes B^\ell}$由定义即得。 —

最后，同构所构成方形图的交换性

$$\begin{array}{ccc}\big((M \otimes_A \overline{A^k}) \otimes_{\tilde{A}} \tilde{B}\big) \otimes_{\tilde{B}} B^\ell & \xrightarrow{\mathscr{E}(f)} & \big((N \otimes_A \overline{A^k}) \otimes_{\tilde{A}} \tilde{B}\big) \otimes_{\tilde{B}} B^\ell \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{(M,h)}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{(N,h')}} \\ M \otimes_A \big((\overline{A^k} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{B}) \otimes_{\tilde{B}} B^\ell\big) & \xrightarrow[\mathscr{F}_\vartheta(f)]{} & N \otimes_A \big((\overline{A^k} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{B}) \otimes_{\tilde{B}} B^\ell\big)\end{array},$$

由.....确定

$$\begin{array}{ccc}((m \otimes t) \otimes b) \otimes s & \xmapsto{\mathscr{E}(f)} & ((f(m) \otimes t) \otimes b) \otimes s \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{(M,h)}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{(N,h')}} \\ m \otimes ((t \otimes b) \otimes s) & \xmapsto[\mathscr{F}_\vartheta(f)]{} & f(m) \otimes ((t \otimes b) \otimes s)\end{array},$$

给出交换方形图

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{E}(M,h) & \xrightarrow{\mathscr{E}(f)} & \mathscr{E}(N,h') \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{(M,h)}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{(N,h')}} \\ \mathscr{F}_\vartheta(M,h) & \xrightarrow[\mathscr{F}_\vartheta(f)]{} & \mathscr{F}_\vartheta(N,h')\end{array}.$$

因此，存在自然变换 $\alpha\colon\ \mathscr{E} \to \mathscr{F}_\vartheta$；由于等距同构$\alpha_{(M,h)}$ 都是同构，这也是一个自然同构。□

设 T 是一个交换 R-代数。设 $h\colon\ M \times M \to A$ 是(A,σ)上的一个 ε-厄米型。于是，(M,h)给出$(A \otimes_R T, \sigma \otimes \mathrm{id}_T)$上的 $\varepsilon \otimes 1$-厄米模(M_T, h_T): $= (M \otimes_R T, h \otimes T)$，其中

$$h \otimes T(m \otimes t, m' \otimes t') := h(m,m') \otimes tt' \tag{A.3}$$

对所有 $m, m' \in M$以及所有 $t, t' \in T$均成立。若(M,h)是非奇异的或双曲的，则(M_T, h_T)也分别是非奇异的或双曲的，参见 [22, 第 38]页。

设 $(M,\ h) \xrightarrow{f} (N,\ h')$ 是 $(A,\ \sigma)$ 上 ε-厄米模之间的一个等距，则 $(M_T,\ h_T)$ $\xrightarrow{f \otimes_{\mathrm{id}} T} (N_T,\ h'_T)$ 是 $(A \otimes_R T,\ \sigma \otimes \mathrm{id}_T)$ 上 $\varepsilon \otimes 1$- 厄米模之间相应的等距。综上可得一个函子

$$\mathscr{U}_{(A,\sigma,T)} : \mathrm{Herm}^{\varepsilon}(A,\sigma) \to \mathrm{Herm}^{\varepsilon \otimes 1}(A \otimes_R T, \sigma \otimes \mathrm{id}_T)$$

它保持正交和，将非奇异形式映射为非奇异形式，并将双曲形式映射为双曲形式，参见 [22, 第 38] 页。

定理 A.3. 设 R 为半局部连通，并设 (B,τ) 为 R 上的带对合的阿祖马亚代数，使得 A 与 B *Brauer* 等价且 $\sigma|_S = \tau|_S$，其中 $S := Z(A) = Z(B)$。假设 S 是连通的。设 $R \to T$ 为交换环同态，使得 T为半局部连通且 $S_1 := S \otimes_R T$是连通的。则 $A\otimes_R T$与 $B\otimes_R T$在 S_1上 *Brauer* 等价，并且范畴与函子的图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Herm}^{\varepsilon\otimes 1}(A\otimes_R T, \sigma\otimes \mathrm{id}) & \xrightarrow{\mathscr{F}_{\vartheta_T}} & \mathrm{Herm}^{\delta\varepsilon\otimes 1}(B\otimes_R T, \tau\otimes \mathrm{id}) \\ \uparrow{\scriptstyle \mathscr{U}_{(A,\sigma,T)}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathscr{U}_{(B,\tau,T)}} \\ \mathrm{Herm}^{\varepsilon}(A,\sigma) & \xrightarrow[\mathscr{F}_\vartheta]{} & \mathrm{Herm}^{\delta\varepsilon}(B,\tau) \end{array} \tag{A.4}$$

交换（在自然同构的意义下）。

证明. 环同态 $R \to T$ 给出一个环同态 $S \to S_1$。由 [15, 命题 7.3.3] 可知，$A\otimes_S S_1$ 与 $B\otimes_S S_1$ 在 S_1上 Brauer 等价。由于 $A\otimes_R T \cong A\otimes_S (S\otimes_R T) = A\otimes_S S_1$，且对 B同样成立，故第一个断言成立。

由命题 2.11 可知 σ 和 $\sigma\otimes$id 属于同一类型，同时 τ 和 $\tau\otimes$id 也属于同一类型。此外，$(\sigma\otimes \mathrm{id})|_{S_1} = (\tau\otimes \mathrm{id})|_{S_1}$。定理A.1 便给出了图 (A.4) 的各行。

考虑 $(M,h) \in \mathrm{Herm}^{\varepsilon}(A,\sigma)$。那么

$$\begin{aligned} (\mathscr{F}_{\vartheta_T}\circ \mathscr{U}_{(A,\sigma,T)})(M,h) &= \big(M_T \otimes_{A\otimes_R T} P_T, \vartheta_T \bullet h_T\big) \\ &\simeq \big((M\otimes_A P)_T, (\vartheta\bullet h)_T\big) \\ &= (\mathscr{U}_{(B,\tau,T)}\circ \mathscr{F}_\vartheta)(M,h), \end{aligned}$$

其中，等距 $\simeq$ 可由以下右 T-模之间的同构经简单计算得到： [6, 引理 4 的证明。12], 由

$$M_T \otimes_{A\otimes_R T} P_T \to (M\otimes_A P)_T,\ (m\otimes t_1)\otimes(p\otimes t_2) \mapsto (m\otimes p)\otimes t_1 t_2.$$

此等距诱导出一个自然同构 $\mathscr{F}_{\vartheta_T}\circ \mathscr{U}_{(A,\sigma,T)} \cong \mathscr{U}_{(B,\tau,T)}\circ \mathscr{F}_\vartheta$，从而完成证明。□

References

[1] Vincent Astier 和 Thomas Unger。厄米形式的符号与 Knebusch迹公式。 *Math. Ann.*, 358(3-4):925–947，2014。[2] Vincent Astier 和 Thomas Unger。厄米形式的符号与 Witt 群的“素理想”。 *Adv. Math.*，285:497–514，2015。[3] Vincent Astier 和 Thomas Unger。带对合代数的稳定指数。载于*algebraic structures and related topics* 697 *Contemp. Math.* 41 50 *Ordered* ，第 卷，页码 –。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017。[4] Vincent Astier 和 Thomas Unger。厄米形式的符号、正性，以及对 Procesi 和 Schacher 问题的回答。 *J. Algebra*，508:339–363，2018。[5] Vincent Astier 和 Thomas Unger。带对合的Azumaya代数的全符号映射的连续性。 *Preprint at https://arxiv.org/abs/2511.15448*，2025。[6] Vincent Astier 和 Thomas Unger。带对合的Azumaya代数的 Pfister 局部-整体原理。 *Doc. Math.*，30(6):1325–1364，2025。[7] Vincent Astier 和 Thomas Unger。由带对合代数上的正锥导出的符号映射。 *Canad. J. Math.* 在线发表：1–26。doi:10.4153/S0008414X25101806，2025。

[8] E. Bayer-Fluckiger、R. Parimala 和 J-P. Serre。 G *Izv. Ross.* -迹型的 *Akad. Nauk Ser. Mat.* 77 3 5 28, 2013 Hasse 原理。, ( ): –。[9] Eva Bayer-Fluckiger、Uriya A. First 和 Raman Parimala。关于经典群的 Grothendieck-Serre 猜想。 *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 106(4):2884–2926, 2022。[10] Jacek Bochnak、Michel Coste 和 Marie-Fran¸coise Roy。*Real algebraic geometry*，第 36 卷，丛书名为 *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]* 1998 1987 。

Springer-Verlag，柏林，。译自法文原版，由作者修订。[11] N. Bourbaki。 *Éléments de mathématique*, *Fasc. XXIII*。科学与工业新论丛´丛[科学与工业新论丛], 第 1261 号。Hermann，巴黎，1973。第二卷：代数。第八章：模与半单环，1958 年版的新版印刷。[12] Ludwig Br ¨ ocker。关于形式实域上的二次型理论。, : –。[13] Frank DeMeyer 和 Edward Ingraham。 *Separable algebras over commutative rings*。《数学讲义》，第 181 卷。Springer-Verlag，柏林-纽约，1971。[14] Uriya A. First。带对合的Azumaya代数的 Witt 群的一个 8-周期正合序列。 *Manuscripta Math.*, 170(1-2):313–407，2023。[15] Timothy J. Ford。 *Separable algebras*，第 183 卷，丛书名为 *Graduate Studies in Mathematics*。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017。[16] Yukitoshi Hinohara。半局部环上的射影模。 *Tohoku Math. J. (2)*, 14 211，1962 205：–。[17] Manfred Knebusch。交换环的实闭包 I。 *J. Reine Angew. Math.*, 274(275):61–89，1975。[18] Manfred Knebusch。交换环的实闭包 II。 *J. Reine Angew. Math.*，286 287 278 313，1976 ( ): –。[19] Manfred Knebusch。Frobenius 扩张上的符号。载于 *Number theory and algebra*，第 167–186 页。Academic Press，纽约-伦敦，1977。[20] Manfred Knebusch。实谱导论。载于 *Quadratic and Hermitian forms (Hamilton, Ont., 1983)* 4 *CMS Conf. Proc.* 51 105, 337 338 ，第 卷，页码 – –。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1984。[21] Manfred Knebusch 和 Claus Scheiderer。 *Real algebra—a first course*。Universitext。Springer，Cham，2022。译自 1989 年德文版，并含 Thomas Unger 撰写的补充内容。[22] Max-Albert Knus。 *Quadratic and Hermitian forms over rings* 294 *Grundlehren der* ，第 卷，丛书 *mathematischen Wissenschaften* 1991 名为。Springer-Verlag，柏林，。附有 I. Bertuccioni 撰写的前言。[23] Max-Albert Knus、Alexander Merkurjev、Markus Rost 和 Jean-Pierre Tignol。 *The book of involutions* 44 ，第 卷，丛书名为 *American Mathematical Society Colloquium Publications*。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998。附有 J. Tits 撰写的法文前言。[24] Louis Mah´e。符号与连通分支。 *Math. Ann.*，260(2):191–210，1982。[25] David J. Saltman。 *Lectures on division algebras* 94 *CBMS Regional Conference Series* ，第 卷，丛书 *in Mathematics* 名为。由美国数学会出版，普罗维登斯，罗得岛州；代表数学科学会议委员会出版，华盛顿特区，1999。[26] Abhishek Kumar Shukla 和 Ben Williams。带生成元的 ´etale 代数的分类空间。 *Canad. J. Math.*, 73(3):854–874，2021。

School of Mathematics and Statistics, University College Dublin, Belfield, Dublin 4,Ireland*Email address*: vincent.astier@ucd.ie*Email address*: thomas.unger@ucd.ie