arXiv:2603.05382v1 [math.CA] 5 Mar 2026

加权 Sobolev 不等式与 Meyers–Ziemer 框架：测度、等周不等式与端点估计

SIMON BORTZ、KABE MOEN、ANDREA OLIVO、CARLOS PÉREZ 和 EZEQUIEL RELA

摘要。我们为测度建立了一种新的全局端点 Sobolev 不等式，它通过在右端加入极大函数，推广了 Meyers–Ziemer 经典定理。这一结果具有若干重要推论。它可自然推广到加权有界变差函数，并导出相应的容量不等式和等周不等式。该不等式还与分数阶算子的端点估计密切相关，包括分数阶极大函数的界以及 Riesz 势的 Hardy 空间端点估计。我们的主要不等式导出一系列端点不等式，可通过子表示公式、Lorentz 空间改进，以及针对测度和有界开集的等周不等式来刻画。当从端点移至 $p > 1$时，类似的不等式一般不再成立；不过，我们找到了一个尖锐的隆起极大函数，使相应的非端点不等式成立。最后，我们证明这一框架还可导出新的 $(p,\ p)$ 双权 Sobolev 不等式。

1. 引言

1.1. 经典 Sobolev 不等式与等周不等式。 考虑经典的 Gagliardo-Nirenberg-Sobolev（GNS）不等式：

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant s_{n,p}\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1}$$

这对 $1 \leqslant p < n$、$p^* = \frac{np}{n-p}$ 和 $u \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$成立。若将 $\dot{\mathrm{W}}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 取为 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 关于范数 $\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}$（一般而言这并非范数，但在 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$上是范数）的完备化，则可得到 Sobolev 嵌入 $\mathrm{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathrm{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$.

日期：2026年3月6日。2020数学主题分类。 主分类 46E35；次分类 26D10、42B25、49Q20。关键词。加权 Sobolev 不等式、Meyers–Ziemer 不等式、极大函数、等周不等式、端点估计。S. Bortz 得到 Simons Foundation 数学家旅行资助计划以及 AWI-CONSERVE 研究员资助的支持。A. Olivo 得到由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 以及 ESF+ 资助的项目 PID2023-146646NB-I00 的支持，并得到巴斯克政府通过 BERC 2022–2025 计划以及通过 BCAM Severo Ochoa 认证 CEX2021-001142-S / MICIN / AEI / 10.13039/501100011033 的支持。C. Pérez 得到西班牙政府通过项目 PID2023-146646NB-I00 以及 Severo Ochoa 认证 CEX2021-001142-S 的支持（二者均在 BCAM），并得到巴斯克政府通过巴斯克大学项目 IT1615-22 以及 BCAM 的 BERC 2022-2025 计划的支持。

端点 GNS不等式,

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{\frac{n}{n-1},1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant s_{n,1}\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{2}$$

尤其重要。首先，通过缩放函数，它可推出一般情形 $1 < p < n$ 。更重要的是，它等价于以下等周不等式:

$$\mathrm{Per}(\Omega) \geqslant c_n \mathcal{L}(\Omega)^{\frac{n-1}{n}},$$

其中，$\mathrm{Per}(\Omega)$ 表示集合 Ω 的周长， $\mathcal{L}$ 是 $\mathbb{R}^n$上的勒贝格测度。对于足够规则的集合，周长与边界 $\partial\Omega$ 的豪斯多夫测度一致。Talenti [58] 找到了索博列夫不等式中的最佳常数，并通过下式给出了等周等式中的最佳常数:

$$c_n = s_{n,1}^{-1} = n v_n^{1/n},$$

其中

$$v_n = \mathcal{L}(B_1(0)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

是 $\mathbb{R}^n$中单位球的体积。

估计式 (2) 在 [41] 中推广到了局部有限博雷尔测度 μ 的情形，具体如下：存在维数常数 c_n ，使得对于任意局部有限博雷尔测度 μ 以及任意具有紧支撑的 Lipschitz 函数 u ,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{n'}\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{n'}} \leqslant c_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|(\mathrm{M}\mu(x))^{\frac{1}{n'}}\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

其中 M 表示通常的 Hardy–Littlewood极大算子，且 $n' = {}_{n-1}^{n} = 1^*$。作为该估计的一个推论， [41] 中还建立了一个涉及测度的等周不等式：若 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域，且 μ 是一个测度，则

$$\mu(\Omega)^{\frac{1}{n'}} \leqslant c_n \int_{\partial\Omega} (\mathrm{M}\mu)^{\frac{1}{n'}}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}, \tag{4}$$

其中 $\mathcal{H}^{n-1}$表示 $(n-1)$ 维豪斯多夫测度（见第 3 节）。本文的主要目标是证明 (3) 实际上属于更广泛的一族端点测度论Sobolev不等式，并通过大幅放宽对边界光滑性的假设，将等周不等式 (4) 推广到更一般的集合。

我们强调，上述常数 c_n 不一定与 (3) 中的相同。确定在此设定下的最佳常数是否与经典等周常数一致，即在 $\mu = \mathcal{L}$ 的情形下，将是一个有趣的问题。

1.2. 加权与双权 Sobolev 不等式。 我们关注测度变换下的 GNS 不等式。作为动机，考虑不等式 (1) 中的拟共形变量变换。设 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 $\mathrm{W}^{1,1}\mathrm{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ 中的双射，满足

$$|Df(x)|^n \leqslant K J_f(x),$$

其中 $Df(x)$ 是雅可比矩阵，$|Df(x)|$ 是其算子范数，而 $J_f(x) = \det Df(x)$ 是雅可比行列式。经过变量替换后，不等式 (1) 变为

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p^*} J_f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant s_{n,p} K^{\frac{1}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p J_f(x)^{1-\frac{p}{n}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad u \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

这自然引出了对如下形式的一般加权 Sobolev 不等式的研究

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{p^*}(w)} \leqslant C \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(w^{1-\frac{p}{n}})}, \qquad 1 \leqslant p < n. \tag{5}$$

一般而言，要刻画使 (5) 成立的权 w 所满足的精确条件并不容易。

David 和 Semmes [14] 提出的一种方法（另见 Semmes [52]）基于强 A_∞ 权的概念，这类权也称为度量倍增测度。我们将在第 6 节回顾 David 和 Semmes 的工作。

David 和 Semmes 的另一种方法如下。考虑一个权 w，使得对于某个常数 c_w，任意具有紧支撑的 Lipschitz 函数 u 都满足以下估计：

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{n',\infty}(w)} \leqslant c_w \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^1(w^{\frac{1}{n'}})}. \tag{6}$$

于是，通过截断方法 [32]（见第 5 节的定理 5.1），存在一个普适常数 λ，使得我们可以将其提升为强估计 (5)，即：

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{n'}(w)} \leqslant c_w \lambda \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^1(w^{\frac{1}{n'}})}.$$

现在，利用缩放论证（第6节中的定理6.1），我们得到

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{p^*}(w)} \leqslant c_{w,p} \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(w^{1-\frac{p}{n}})}, \qquad 1 \leqslant p < n. \tag{7}$$

因此，根本问题在于确定 w 上所需的最小条件，以导出弱型估计(6)。这被表述为第6节中的猜想 6.2。

现在，鉴于(3)，自然要问(3)的类似结论对于指数对 $(p,\ p^*)$（其中 $p > 1$）是否仍然成立。换言之，能否建立(3)的L^p 版本，即

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p^*} w(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant c_{n,p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p \mathrm{M}w(x)^{1-\frac{p}{n}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} ? \tag{8}$$

事实上，这一估计是错误的。相反，必须用更大的迭代算子M^k替换算子M，其中整数 k 依赖于 p（见定理 2.16）。我们请读者参阅第5节以了解进一步的讨论及相关结果。

另一方面，可以利用(3)以及上述论证的缩放变体（见定理6.1的证明）推出如下估计。所得不等式适用于权，而非一般测度。具体而言，对 $\mathbb{R}^n$ 和 $1 \leqslant p < n$上的任意权 w，我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p^*}\, w(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant c_{n,p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p \frac{\mathrm{M}w(x)^{\frac{p}{n'}}}{w(x)^{p-1}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{9}$$

注意，右端的权逐点大于(7)中出现的 $w^{1-\frac{p}{n}}$。不等式(9)是 [40, 定理1.21], 的推论，其中利用(3)的局部形式建立了一个局部版本。

为证明不等式 (6)，我们可以借助 Muckenhoupt 权关于黎曼势算子的经典理论

$$\mathrm{I}_\alpha f(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,\mathrm{d}y, \qquad 0<\alpha<n,$$

其中

$$\gamma(\alpha) = \frac{2^\alpha \pi^{n/2}\Gamma(\alpha/2)}{\Gamma((n-\alpha)/2)}.$$

由于次表示公式，Riesz 势 I_1 在 Sobolev 不等式中起着核心作用

$$|u(x)| \leqslant \frac{\gamma(1)}{\omega_{n-1}} \mathrm{I}_1(|\nabla u|)(x), \qquad u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n), \tag{10}$$

其中 $\omega_{n-1} = nv_n$ 表示单位球面的表面积测度。尽管 (10) 通常针对 $u \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 陈述，但对 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$ 以及所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 仍然成立。Muckenhoupt 与 Wheeden [34] 通过证明不等式，刻画了使 Riesz 势有界的权

$$\|\mathrm{I}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^q(w)} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}^p(w^{\frac{p}{q}})}, \qquad 1<p<\tfrac{n}{\alpha}, \quad \tfrac{1}{q} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{\alpha}{n},$$

当且仅当 w 属于 Muckenhoupt 类 $\mathrm{A}^{1+\frac{q}{p'}}$ 时，该不等式成立。在端点 $p=1$，弱型估计

$$\|\mathrm{I}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^{\frac{n}{n-\alpha},\infty}(w)} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}^1(w^{\frac{n}{n-\alpha}})}$$

当且仅当 $w \in \mathrm{A}_1$ 时成立。将 (10) 与这一结果结合，并取 $\alpha = 1$ 和 $q = p^*$，可知只要 $w \in \mathrm{A}_{p^*}$，加权 Sobolev 不等式 (5) 就成立。事实上，经过n'直接计算可得 $1 + p^*/p' = p^*/n' = p(n-1)/(n-p)$。作为一个具体例子，对于幂权可得到以下不等式

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{p^*}(|x|^\lambda)} \leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(|x|^{\lambda(1-p/n)})},$$

对 $-n < \lambda < np^*/p'$成立。在第 6 节中，我们将更详细地研究单权 Sobolev 不等式 (5)。

考虑如下形式的更一般的双权 Sobolev 不等式

$$\|u\|_{\mathrm{L}^q(w)} \leqslant C\,\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(v)}. \tag{11}$$

此类不等式在定量不确定性原理中也发挥着核心作用（参见 [8, 16,7, 31, 38]）。在 $1 < p \leqslant q < \infty$的情形下，不等式 (11) 是 Sawyer 关于 I_α [49] 的弱有界性定理的推论。具体而言，Sawyer 证明了弱型不等式

$$\|\mathrm{I}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^{q,\infty}(w)} \leqslant C\,\|f\|_{\mathrm{L}^p(v)}$$

成立当且仅当测试条件

$$\left(\int_Q \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{1}_Q w)^{p'}\, v^{1-p'}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant C\, w(Q)^{\frac{1}{q'}} \tag{12}$$

对所有立方体 Q均成立。因此，如果 $(w,\ v)$ 满足带有 $\alpha = 1$的 (12)，那么根据 (10)，弱 Sobolev 不等式成立，

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{q,\infty}(w)} \leqslant C\|\mathrm{I}_1(|\nabla u|)\|_{\mathrm{L}^{q,\infty}(w)} \leqslant C\,\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(v)}.$$

通过余面积公式或 Maz'ya 截断法，可以将其提升为 (11) 中给出的强形式；同样，我们再次参见定理 5.1。

尽管条件 (12) 对于 Riesz 势的弱有界性是必要且充分的——因而对于双权 Sobolev 不等式是充分的——但尚不清楚它是否确实刻画了Sobolev 不等式。此外，充分条件涉及算子 I_1，，而不等式本身涉及函数及其梯度，这一点也多少令人不满意。

因此，另一种由第四位作者发起的方法，是寻求称为 bump 条件的尖锐充分条件，这些条件只涉及权 $(w,\ v)$ 而不涉及算子 I_1。可以验证，映射 $\mathrm{I}_\alpha : \mathrm{L}^p(v) \to L^{q,\ \infty}(w)$ 的一个必要条件是双权 Muckenhoupt 条件

$$\sup_Q \ell(Q)^\alpha\, \mathcal{L}(Q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(⨍_Q w\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \left(⨍_Q v^{1-p'}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty. \tag{13}$$

这里我们使用积分平均的标准记号

$$⨍_Q f\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathcal{L}(Q)}\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此，一个自然的方向是以一种既保持尖锐性又便于处理的方式扩大此条件中的平均值——这就引出了所谓的 bump 条件。第四位作者 [36] 证明，假设两个权上的平均值都满足充分强的凸起条件，就能得到强型不等式 $\mathrm{I}_\alpha : \mathrm{L}^p(v) \to \mathrm{L}^q(w)$，从而得到索博列夫不等式。在严格上三角情形 $1 < p < q < \infty$中，第二位作者和 Cruz-Uribe [13], 进一步改进了这一结果，他们证明，若 $(w,\ v)$ 满足对数凸增量条件（对数平均的定义见第 3 节）

$$\sup_Q \ell(Q)^\alpha\, \mathcal{L}(Q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|w\|_{Ł(\log Ł)^{\frac{q}{p'}+\epsilon}(Q)} \left(⨍_Q v^{1-p'}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \tag{14}$$

对某个 $\epsilon > 0$成立，则 $\mathrm{I}_\alpha : \mathrm{L}^p(v) \to \mathrm{L}^{q,\ \infty}(w)$。取 $\alpha = 1$，可知 (11) 由 (10) 和定理 5.1 推出。我们还证明，条件 (14) 对索博列夫不等式 (11) 是尖锐的，即在 (14) 中不能取 $\epsilon = 0$ 而仍得到一个充分条件。

在对角情形 $p = q$ 中，最优隆起条件仍然未知。事实上，目前已知的最佳充分 bump 条件适用于 $(p,\ p)$ 双权 Sobolev 不等式

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p(w)} \leqslant C\,\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(v)}$$

由下式给出

$$\sup_{Q} \ell(Q)\, \|w\|_{\mathrm{L}(\log \mathrm{L})^{2p-1+\epsilon}(Q)} \left(\fint_{Q} v^{1-p'} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty. \tag{15}$$

敏锐的读者会注意到，在 (14) 中取 $p = q$ 会得到关于 $\frac{p}{p'} + \epsilon = p - 1 + \epsilon$ 的对数幂，而该幂严格小于 $2p - 1 + \epsilon$。我们将在第 5 节重新讨论双权 Sobolev 不等式，并说明在对角情形 $p = q$ 下，bump 条件确实可以改进为最优形式（见定理 2.15）。

1.3. 端点不等式与极大算子。 众所周知，端点不等式往往蕴含相应的非端点不等式。如上所述，对 Riesz 势的任何估计都会给出相应的索博列夫不等式。因此，建立 Riesz 势的尖锐端点估计仍是一个活跃的研究领域。为说明其中的微妙之处，我们先回顾分数阶极大函数的类似端点估计，该函数定义在一个局部有限博雷尔测度上

$$(\mathrm{M}_{\alpha}\mu)(x) = \sup_{r>0} r^{\alpha} \fint_{B_r(x)} \mathrm{d}\mu, \qquad 0 \leqslant \alpha < n.$$

当 $\mathrm{d}\mu = |f|\,\mathrm{d}x$ 对于 $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 时，我们记作 $\mathrm{M}_{\alpha} f$。当 $\alpha = 0$ 时，$\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}$ 是 Hardy–Littlewood 极大算子。对于 $0 < \alpha < n$，M_{α} 是与 Riesz 势相联系的自然极大算子，事实上

$$\mathrm{M}_{\alpha} f(x) \leqslant c_{n,\alpha}\, \mathrm{I}_{\alpha} f(x), \qquad f \geqslant 0.$$

Fefferman与Stein 关于 Hardy–Littlewood 极大算子的经典结果 [56] 断言，弱型不等式

$$\|\mathrm{M} f\|_{\mathrm{L}^{1,\infty}(w)} \leqslant C_n \, \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}w)} \tag{16}$$

对任意权 w 或测度均成立。该估计在调和分析和偏微分方程中有应用，因为它蕴含了 M 的向量值估计，这些估计在 Littlewood–Paley 理论中发挥着核心作用。Sawyer [46] 后来证明，不等式 (16) 可推广到分数阶情形，即

$$\|\mathrm{M}_{\alpha} f\|_{\mathrm{L}^{1,\infty}(w)} \leqslant C \, \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_{\alpha} w)}. \tag{17}$$

相比之下，对于奇异积分算子，相应的端点估计并不成立。例如，若 H 表示 Hilbert变换，Muckenhoupt 和 Wheeden 猜想

$$\|\mathrm{H} f\|_{\mathrm{L}^{1,\infty}(w)} \leqslant C \, \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}w)}. \tag{18}$$

后来证明这个不等式是错误的；参见 [44, 45, 25]。Pérez [37]（另见 [24]）证明了一个替代结果：若 T 是奇异积分算子且 $\varepsilon > 0$，则

$$\|\mathrm{T} f\|_{\mathrm{L}^{1,\infty}(w)} \leqslant C_{\varepsilon} \, \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_{\mathrm{L}(\log \mathrm{L})^{\varepsilon}} w)} \tag{19}$$

其中 $\mathrm{M}^{\mathrm{L}(\log \mathrm{L})^{\varepsilon}}$ 是 Orlicz极大函数（见 (37)）。也就是说，只要对右侧权所作用的极大函数作适当的凸起处理，不等式 (18) 就成立。

分数阶情形中也会出现类似现象。分数阶极大函数不等式 (17) 成立，但分数阶积分算子不满足一般的弱型端点估计。Carro、Pérez、Soria 和 Soria [6] 证明了弱型不等式

$$\|\mathrm{I}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^{1,\infty}(w)} \leqslant C\,\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_\alpha w)} \tag{20}$$

对任意权并不成立。不过，他们确立了以下带凸增量的替代估计：

$$\|\mathrm{I}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^{1,\infty}(w)} \leqslant C_\varepsilon\,\|f\|_{\mathrm{L}^1\left(\mathrm{M}_\alpha(\mathrm{M}_{\mathrm{L}(\log \mathrm{L})^\varepsilon} w)\right)}, \tag{21}$$

它对任意权和任意 $\varepsilon > 0$ 均成立（同样，$\mathrm{M}^{\mathrm{L}(\log \mathrm{L})^\epsilon}$ 是一个 Orlicz 极大函数）。

（21）的一个不足之处是，当 $\alpha = 0$ 时，该表述无法恢复预期的端点行为。尽管阶数为 $\alpha = 0$ 的 Riesz 势没有定义，但（21）右侧出现的极大算子至少在形式上应当退化为（19）中的极大函数。然而，事实并非如此。事实上，

$$\mathrm{M}_0\big(\mathrm{M}_{\mathrm{L}(\log \mathrm{L})^\varepsilon} w\big) \approx \mathrm{M}_{\mathrm{L}(\log \mathrm{L})^{1+\varepsilon}} w,$$

而（19）中的极大函数只包含一个指数为 ε 的对数凸增量。这一差异解释了（15）中 L^p bump 条件的尖锐性损失，使其成为次优估计。

1.4. **Meyers–Ziemer 定理**。 另一个与此密切相关的端点结果在 Sobolev 空间理论中发挥着基础性作用。Meyers–Ziemer 定理指出，对于局部有限正博雷尔测度 μ，Sobolev 不等式，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|\,\mathrm{d}\mu \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\,\mathrm{d}x, \qquad u \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

当且仅当该测度满足阶数为 $n-1$ 的上 Ahlfors–David 正则性： 对于任意球 $B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mu(B_r(x)) \leqslant C r^{n-1} \qquad x \in \mathbb{R}^n, r > 0. \tag{22}$$

这一结果是索博列夫空间理论的核心，在索博列夫迹的刻画以及有界变差$(\mathbb{R}^n)$空间的对偶空间的确定等方面有重要应用。

2. 主要结果

本文旨在将这些结果置于统一的框架中，并指出 Meyers–Ziemer 定理存在一种自然而简洁的推广，且具有深远影响。具体而言，我们提出了 Meyers–Ziemer 定理的推广版本，它既统一得出了若干已知结果，也带来了新的结果。

定理 2.1。 设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$上的局部有限博雷尔测度。那么存在一个维数常数 $C = C_n$，它与 μ无关，使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|\,\mathrm{d}\mu \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|\,\mathrm{M}_1\mu(x)\,\mathrm{d}x, \qquad u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n). \tag{23}$$

这里有几点说明。首先，与经典的 Meyers–Ziemer 定理相比，条件 (22) 等价于有界性 $\mathrm{M}_1\mu \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$。此外，只要 $\mathrm{M}_1\mu < \infty$关于勒贝格测度几乎处处成立，权 $\mathrm{M}_1\mu$就属于 Muckenhoupt 类 A_1 （见定理 3.3）。这自然引出了一个问题：在对 μ 施加哪些条件时，估计 $\mathrm{M}_\alpha\mu < \infty$ 成立?

在情形 $\alpha = 0$ 下，条件 $\mathrm{M}\mu < \infty$ 在勒贝格几乎处处意义下的刻画最初由 Fiorenza 与 Krbec [17] 给出（亦见 [2] 中关于测度的一个版本）。在本文中，我们借助豪斯多夫测度给出了 $\mathrm{M}_\alpha\mu$有限性的刻画，从而提供了一个更为自然的框架。下述定理是新的，且具有独立意义。

定理 2.2. 设 μ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的局部有限博雷尔测度，并设 $0 \leqslant \alpha < n$。则下列陈述等价：

(1) 存在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，使得 $(\mathrm{M}_\alpha\mu)(x_0) < \infty$；*(2)* $\mathrm{M}_\alpha\mu < \infty$，$\mathcal{H}^{n-\alpha}$–几乎处处，即

$$\mathcal{H}^{n-\alpha}\big(\{x \in \mathbb{R}^n : (\mathrm{M}_\alpha\mu)(x) = \infty\}\big) = 0.$$

定理 2.2 断言，分数阶极大函数 $\mathrm{M}_\alpha\mu$ 要么恒等于无穷大，要么在某个 $\mathcal{H}^{n-\alpha}$–零测集之外有限。下文中的许多结果都依赖于与局部有限博雷尔测度 μ相关联的权 $\mathrm{M}_\alpha\mu$ 。因此，我们假设 μ 满足使 $\mathrm{M}_\alpha\mu$ 有定义的条件；等价地，假设存在某点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$使得 $(\mathrm{M}_\alpha\mu)(x_0) < \infty$ 。在此假设下，权 $\mathrm{M}_\alpha\mu$ 性质良好：它是下半连续的，并属于 A_1 类（详情见第 3 节中的定理 3.3）。

2.1. **推论：有界变差、容量与等周不等式**。不等式 (23) 比原始的 Meyers-Ziemer 定理具有更大的灵活性。例如，直接应用 Meyer-Ziemer 定理时，可以取 $\mathrm{d}\mu = \frac{1}{|x|}\mathrm{d}x$，从而看到 μ 满足 (22)，并得到哈代–勒雷不等式。然而，对于 $1 \leqslant \lambda < n$，不等式 (23) 允许取 $\mathrm{d}\mu = \frac{1}{|x|^\lambda}\,\mathrm{d}x$，于是得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|}{|x|^\lambda}\,\mathrm{d}x \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u(x)|}{|x|^{1-\lambda}}\,\mathrm{d}x.$$

不等式 (23) 可由第四位作者与 Franchi 和 Wheeden [18], 建立的局部Poincaré不等式推导得出，并且最近在 [35]中再次加以探讨。不过，我们强调，定理 (2.1) 的证明要简单得多。该证明直接改进了 Meyers 和 Ziemer 的原始论证，避开了中间的局部Poincaré不等式方法，从而使思路更加清晰。

定理 2.1 有若干推论。我们首先指出，它可以自然地推广到加权 BV 函数。设 w 是一个正的下半连续权函数。若函数 $u \in \mathrm{L}^1(w)$ 属于 $\mathrm{BV}(w)$，则称其为

$$|Du|_w(\mathbb{R}^n) := \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} u\ \mathrm{div}\,\mathbf{\Phi}\,\mathrm{d}x :\ \mathbf{\Phi} \in \mathrm{C}_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),\ |\mathbf{\Phi}(x)| \leqslant w(x),\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n\right\} < \infty.$$

若 $w \in \mathrm{A}_1$（我们略显非标准的 A_1 定义见第 3 节），则 $\mathrm{BV}(w)$ 中的函数可以用光滑函数逼近；参见 [2] 中的定理 1.2。如上所述，若 $(\mathrm{M}_1\mu)(x_0) < \infty$ 对某个 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 成立，则权 $w = \mathrm{M}_1\mu$ 是一个下半连续的 A_1 权（见定理 3.3）。特别地，我们得到以下推论。

推论 2.3。设 $\mu \ll \mathcal{L}$ 满足 $(\mathrm{M}_1\mu)(x_0) < \infty$，其中 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。那么，对于每个 $u \in$ 有界变差$(\mathrm{M}_1\mu)$，

$$\|u\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leqslant C\,|Du|_{\mathrm{M}_1\mu}(\mathbb{R}^n).$$

注 2.4。我们注意到，将该理论推广到加权 BV 函数时，要求底层测度相对于勒贝格测度绝对连续；换言之，该结果适用于权函数。这一技术性假设是使用光滑逼近所必需的，而光滑逼近在 $\mathcal{L}$-几乎处处成立。

借助这一工具，我们推导出一个新的加权等周不等式。给定一个下半连续权函数 w，如果一个可测集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 具有有限的 w-周长，即 $\mathbf{1}_\Omega \in$ 有界变差(w)（相关定义见第 3 节），则称其具有有限的 w-周长。Ω 的 w-周长定义为

$$\mathrm{Per}(\Omega, w) := |D\mathbf{1}_\Omega|_w.$$

如果 $\mathrm{M}_1\mu$ 不恒等于 8，那么 $\mathrm{M}_1\mu$ 在除去一个 $\mathcal{H}^{n-1}$-测度为零的集合之外是有限的。特别地，在这种情况下，周长可表示为

$$\mathrm{Per}(\Omega, \mathrm{M}_1\mu) = \int_{\partial^*\Omega} \mathrm{M}_1\mu \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1},$$

其中 $\partial^*\Omega$ 表示 Ω 的约化边界（见第 3 节）。

推论 2.5. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个具有有限 $\mathrm{M}_1\mu$-周长的开集。那么

$$\mu(\Omega) \leqslant C\,\mathrm{Per}(\Omega, \mathrm{M}_1\mu).$$

注 2.6. 不等式 (2.5) 中的常数取决于维数，更确切地说，取决于 $\mathrm{M}_1\mu$ 的 A_1 常数。

事实上，利用余面积公式，推论 2.5 等价于 (23)。

还可以将集合 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 的有界变差(w)-容量定义为

$$\mathrm{Cap}(E, w) := \inf\left\{\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^1(w)} :\ u \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)^+,\ u \geqslant 1 \text{ in a neighborhood of } E\right\}.$$

以下结果可由 (23) 和容量的定义直接推出。

推论 2.7. 设 μ 是一个局部有限博雷尔测度，并设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$。那么

$$\mu(\Omega) \leqslant C\,\mathrm{Cap}(\Omega, \mathrm{M}_1\mu).$$

2.2. **Riesz 变换与极大函数的端点估计**。 回到 Riesz 势 I_1, , 其有界性蕴含索博列夫不等式；然而，反向结论并不成立。取而代之的是，可以得到一个涉及 Riesz 变换的相关估计。向量值黎斯变换 $\mathbf{R}f$ 定义为

$$\mathbf{R}f(x) = -\nabla \mathrm{I}_1 f(x) = \text{ p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c_n y}{|y|^{n+1}} f(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

其中 p.v. 表示主值。

同样，在端点处，Riesz 势不有界，且弱型估计 (20) 不成立。相反，通过对含有$u = \mathrm{I}_1 f$的 (23) 应用极限论证，可以得到一个替代性的端点不等式，其右端涉及 Riesz 变换。

定理 2.8. 设 μ 是一个局部有限博雷尔测度。那么

$$\|\mathrm{I}_1 f\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leqslant C\,\|\mathbf{R}f\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_1\mu)}, \qquad f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{24}$$

不等式 (24) 在形式上等价于索博列夫不等式 (23)。事实上，取$f = (-\Delta)^{\frac{1}{2}} u$（分数阶导数的定义见公式 (2.3)），并利用恒等式

$$\mathrm{I}_1(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u = u \text{ and } \mathbf{R}(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u = -\nabla \mathrm{I}_1(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u = \nabla u,$$

即可得到所需的不等式。

注意，若在 (23) 中取 $u = \mathrm{M}_1 f$，并使用 Kinnunen 和 Saksman [29]关于分数阶极大函数正则性的一个结果,

$$|\nabla \mathrm{M}_1 f| \leqslant c\,\mathrm{M}f$$

那么我们可以得到

$$\|\mathrm{M}_1 f\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leqslant C\|\nabla(\mathrm{M}_1 f)\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_1\mu)} \leqslant C\|\mathrm{M}f\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_1\mu)}. \tag{25}$$

比较 (25) 与 (24)，可以看到极大函数和积分算子满足完全类似的不等式。一般而言，正如下一个定理所示，(25) 可扩展至完整范围 $0 \leqslant \alpha < n$ 。

定理 2.9。 设 $0 \leqslant \alpha < n$，且 μ 是一个局部有限博雷尔测度。那么

$$\|\mathrm{M}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leqslant C\,\|\mathrm{M}f\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_\alpha\mu)}. \tag{26}$$

注 2.10。 当 $\alpha = 0$ 且 $\mathrm{d}\mu = w\mathrm{d}x$ 时，不等式 (26) 是勒贝格微分定理的直接推论，尤其是因为

$$w \leqslant \mathrm{M}w, \qquad \mathcal{L}\text{-a.e.}$$

然而，对于一般测度 μ，(26) 中的情形 $\alpha = 0$ 似乎也是新的 .

我们还注意到，如果从右侧去掉极大算子 M，定理 *2.9* 就是错误的。事实上，设 $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是任意一个非平凡函数，且 $\operatorname{supp} f \subseteq B_R(0)$。那么

$$\mathrm{M}_\alpha f(x) \geqslant \frac{C}{|x|^{n-\alpha}}, \qquad |x| \geqslant R.$$

此外，如果取 $\mathrm{d}\mu = |x|^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$，那么对所有 x，$\mathrm{M}_\alpha\mu(x) \leqslant C$，因此$\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_\alpha\mu)} < \infty$。另一方面，

$$\|\mathrm{M}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \geqslant C\int_{|x|\geqslant R}\frac{1}{|x|^n}\,\mathrm{d}x = \infty.$$

若 $\mathrm{M}_\alpha\mu \approx 1$，则对任意非零函数，不等式 (26) 都是平凡的，因为 $\|\mathrm{M}f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)}$ =8。然而，确实存在一些权，使得这一估计既有意义又非平凡。给定一个权 w，Stein [56] 引入了空间 $\mathrm{ML}^1(w)$，它由满足下述条件的函数 f 组成：

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{M}f(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

他证明了，若 $w(\mathbb{R}^n) = \infty$且

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{w(x)}{(1+|x|)^n}\,\mathrm{d}x < \infty,$$

则 $\mathrm{ML}^1(w) \neq \{0\}$，且 $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathrm{ML}^1(w)$中稠密。因此，不等式 (26) 给出了映射性质

$$\mathrm{M}_\alpha : \mathrm{ML}^1(\mathrm{M}_\alpha\mu) \longrightarrow \mathrm{L}^1(\mu).$$

回到 Riesz 势，不等式 (24) 与 Riesz 势的 Hardy 空间估计密切相关。给定一个 A_1 权 w，加权Hardy空间 $\mathrm{H}^1(w)$ 定义为由满足$\mathbf{R}f \in \mathrm{L}^1(w)$的函数 $f \in \mathrm{L}^1(w)$ 构成的集合，并赋予范数

$$\|f\|_{\mathrm{H}^1(w)} := \|f\|_{\mathrm{L}^1(w)} + \|\mathbf{R}f\|_{\mathrm{L}^1(w)}.$$

特别地，不等式 (24) 意味着

$$\mathrm{I}_1 : \mathrm{H}^1(\mathrm{M}_1\mu) \longrightarrow \mathrm{L}^1(\mu).$$

我们为一般的 $0 < \alpha < n$建立了以下结果，据我们所知，现有文献中尚未出现这一结果。

定理 2.11. 假设 $0 < \alpha < n$，且 μ 是一个博雷尔测度，使得 $\mathrm{M}_\alpha\mu < \infty$几乎处处（相对于勒贝格测度）。那么

$$\|\mathrm{I}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leqslant C\,\|f\|_{\mathrm{H}^1(\mathrm{M}_\alpha\mu)}.$$

当 $\alpha = 1$时，端点估计 (24) 严格强于上文讨论的 Hardy 空间界。有趣的是，对于 $\alpha \neq 1$，更强的不等式

$$\|\mathrm{I}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leqslant C\,\|\mathbf{R}f\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_\alpha\mu)} \tag{27}$$

可能不成立。事实上，Spector [55] 证明，对于 $0 < \alpha < 1$，不等式 (27)——其形式上等价于分数阶Sobolev不等式——并不成立。

Table 1 总结了 M_α 与 I_α 的已知及未知端点估计 .

端点估计	不等式	状态
弱 M_α 界	$\|\mathrm{M}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^{1,\infty}(\mu)} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_\alpha\mu)}$	对 $0 \leqslant \alpha < n$([56, 46])成立
强 M_α 界	$\|\mathrm{M}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_\alpha\mu)}$	错误（注 2.10）
强 M_α-M 界	$\|\mathrm{M}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leqslant C\|\mathrm{M}f\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_\alpha\mu)}$	对 $0 \leqslant \alpha < n$(定理 2.9)成立
弱 I_α 界	$\|\mathrm{I}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^{1,\ \infty}(\mu)} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_\alpha\mu)}$	不成立（[6]）
强 I_α-$\mathbf{R}$ 界	$\|\mathrm{I}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leqslant C\|\mathbf{R}f\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_\alpha\mu)}$	对 $\alpha = 1$ 成立（定理 2.8），对 $0 < \alpha < 1$ 不成立（[55]）
Hardy I_α 界	$\|\mathrm{I}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{H}^1(\mathrm{M}_\alpha\mu)}$	对 $0 < \alpha < n$ 成立（定理 2.11）

表1. 端点估计及其有效性概要。

2.3. **进一步的推论与结果**。 强端点不等式 (23) 也与经典的 Gagliardo–Nirenberg–Sobolev 不等式密切相关。首先，我们指出，Alvino [1] 给出了不等式 (1) 到 Lorentz 空间的一个自然推广。他证明，GNS不等式在 Lorentz 标度上可以进一步改进（定义见第 3 节），即,

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{\frac{n}{n-1},1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\,\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{28}$$

More 一般而言，我们的端点估计给出如下一般的 Lorentz 标度结果。

推论 2.12. 设 μ 为局部有限博雷尔测度。对 $1 \leqslant q \leqslant \frac{n}{n-1}$ 与 $\alpha = n - q(n-1)$，我们有

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{q,1}(\mu)} \leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\,(\mathrm{M}_\alpha\mu)^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}x. \tag{29}$$

（左侧为$\|u\|_{\mathrm{L}^q(\mu)}$ 的）式（29）的Lebesgue空间对应形式可由 [35]中建立的局部 Poincaré不等式推出。不过，我们强调，式（29）的Lorentz空间改进形式似乎是新的。当 $q = 1$时，不等式（29）退化为式（23）。现在，我们简要说明 $q > 1$时推论 2.12 的证明，该证明由式（23）结合一个简单的对偶性论证得出。

假设 $1 < q \leqslant \frac{n}{n-1}$，并令 $g \in \mathrm{L}^{q',\infty}(\mu)$ 为一个非负函数，满足

$$\|g\|_{\mathrm{L}^{q',\infty}(\mu)} = 1.$$

那么，由不等式（23），若令 $\mathrm{d}\nu = g\mathrm{d}\mu$，则有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|\,g\,\mathrm{d}\mu \leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\,\mathrm{M}_1\nu\,\mathrm{d}x$$

给定任意球 $B_r(x)$，我们估计

$$r\fint_{B_r(x)} g\,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{v_n r^{n-1}}\|g\|_{\mathrm{L}^{q',\infty}(\mu)}\,\|\mathbf{1}_{B_r(x)}\|_{\mathrm{L}^{q',1}(\mu)} = \frac{\mu(B_r(x))^{\frac{1}{q}}}{v_n r^{n-1}} = \frac{1}{v_n}\left(\frac{\mu(B_r(x))}{r^{q(n-1)}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

因此，由于 $n - \alpha = q(n-1)$，我们有

$$\mathrm{M}_1\nu \leqslant c\,(\mathrm{M}_\alpha\mu)^{\frac{1}{q}}.$$

不等式 (2.12) 的端点情形 $q = \frac{n}{n-1}$ 特别值得关注，因为它对应于经典 Gagliardo–Nirenberg–Sobolev 不等式 (1) 的缩放。事实上，当

$\mu = \mathcal{L}$ 时，可得到经典 GNS 不等式，或者更准确地说，是 Alvino [1] 提出的 Lorentz 空间精细化版本。此外，当 $q = \frac{n}{n-1}$ 时，不等式 (29) 化简为

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{n',1}(\mu)} \leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^1\left((\mathrm{M}\mu)^{1-\frac{1}{n}}\right)}, \tag{30}$$

这是对 (3) 的洛伦兹空间改进。

不等式 (30) 推出了 Muckenhoupt与Wheeden 最初得到的加权 Sobolev 不等式及相应的 Riesz 势有界性结果 [34]。事实上，若$w \in \mathrm{A}_1$ 且 $\mathrm{d}\mu = w\mathrm{d}x$，则 (30) 意味着

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{\frac{n}{n-1}}(w)} \leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^1\left(w^{1-\frac{1}{n}}\right)}.$$

由于该估计对所有 $w \in \mathrm{A}_1$, 均一致成立，Harboure、Macías 和 Segovia [20] 的非对角外推定理给出

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{p*}(w)} \leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p\left(w^{1-\frac{p}{n}}\right)}, \qquad w \in \mathrm{A}_{\frac{p*}{n'}}, \quad 1 < p < n.$$

（关于这一非对角外推的一个具有最优界的锐化版本，见[30]。另见 [41, 推论 1.4] ，其中给出了具有精确界的局部版本。）最后，将此不等式用于 $u = \mathrm{I}_1 f$，得到

$$\|\mathrm{I}_1 f\|_{\mathrm{L}^{p*}(w)} \leqslant C\|\nabla(\mathrm{I}_1 f)\|_{\mathrm{L}^p\left(w^{1-\frac{p}{n}}\right)} = C\|\mathbf{R}f\|_{\mathrm{L}^p\left(w^{1-\frac{p}{n}}\right)} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}^p\left(w^{1-\frac{p}{n}}\right)},$$

其中，最后一个不等式由 Riesz 变换在 $\mathrm{L}^p\left(w^{1-\frac{p}{n}}\right)$ 上的有界性推出。这是因为 $w \in \mathrm{A}_{p*}$ 保证了 Riesz 变换的有界性。事实上，定理6.1给出了这一原理的一个更一般的版本，且不依赖于外推。

当 $1 < q \leqslant \frac{n}{n-1}$时，可以基于子表示公式 (10) 采用另一种方法证明不等式 (29)。对于 $0 < \beta < n$，Riesz 势 I_β 可写成与核的一个常数倍的卷积

$$k_\beta(x) = |x|^{\beta-n} \in \mathrm{L}^{\frac{n}{n-\beta},\infty}(\mathbb{R}^n).$$

若 $1 < q \leqslant \frac{n}{n-\beta}$，则

$$\left\|k_\beta\right\|_{\mathrm{L}^{q,\infty}(\mu)} = \sup_{\lambda>0} \lambda\, \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \ |x|^{\beta-n} > \lambda\}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sup_{r>0} \frac{\mu(B_r(0))}{r^{n-\alpha}}\right)^{\frac{1}{q}} = c(\mathrm{M}_\alpha\mu)(0)^{\frac{1}{q}}$$

其中 $\alpha = n - q(n-\beta)$。因此 $k_\beta \in \mathrm{L}^{q,\ \infty}(\mu)$ 当且仅当 $\mathrm{M}_\alpha\mu(0) < \infty$。应用 Minkowski 积分不等式并将计算结果平移，可得弱型估计

$$\|\mathrm{I}_\beta f\|_{\mathrm{L}^{q,\infty}(\mu)} \leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, \left\||\cdot - y|^{\beta-n}\right\|_{\mathrm{L}^{q,\infty}(\mu)} \mathrm{d}y = C\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, (\mathrm{M}_\alpha\mu(y))^{\frac{1}{q}}\, \mathrm{d}y, \tag{31}$$

因此,

$$\mathrm{I}_\beta : \mathrm{L}^1\left((\mathrm{M}_\alpha\mu)^{\frac{1}{q}}\right) \longrightarrow \mathrm{L}^{q,\infty}(\mu)$$

其中 $1 < q \leqslant \frac{n}{n-\beta}$, $\alpha = n - q(n-\beta)$。

将此界应用于子表示公式 (10)，对 $\beta = 1$、$1 < q \leqslant \frac{n}{n-1}$ 和 $\alpha = n - q(n-1)$ 可得弱Sobolev不等式

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{q,\infty}(\mu)} \leqslant C\|\mathrm{I}_1(|\nabla u|)\|_{\mathrm{L}^{q,\infty}(\mu)} \leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^1\left((\mathrm{M}_\alpha\mu)^{\frac{1}{q}}\right)}. \tag{32}$$

然后可以应用弱蕴含强原理（见定理 5.1），从而得到Lorentz不等式(29)。事实上，在此测度论框架中，且对于 $q > 1$，Lorentz不等式(29)等价于弱型不等式(32)，也等价于次表示公式(10)以及相应的等周不等式。尽管这些不等式均成立——其中一些已为人所知——但它们之间的等价性是新的。

定理2.13. 设 $1 < q \leqslant \frac{n}{n-1}$ 且 $\alpha = n - q(n-1)$。下列陈述等价：

*(1) Lorentz Sobolev*不等式

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{q,1}(\mu)} \leqslant C_1\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^1\left((\mathrm{M}_\alpha\mu)^{\frac{1}{q}}\right)}$$

对所有局部有限*Borel*测度 μ 以及所有 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$成立；

(2) 子表示公式

$$|u(x)| \leqslant C_2\,\mathrm{I}_1(|\nabla u|)(x)$$

对所有 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$ 以及所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 均成立；

(3) 弱型*Sobolev*不等式

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{q,\infty}(\mu)} \leqslant C_3\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^1\left((\mathrm{M}_\alpha\mu)^{\frac{1}{q}}\right)}$$

对所有局部有限博雷尔测度 μ 以及所有 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$ 均成立；

(4) 等周不等式

$$\mu(\Omega)^{\frac{1}{q}} \leqslant C_4\ \mathrm{Per}\big(\Omega, (\mathrm{M}_\alpha\mu)^{\frac{1}{q}}\big) \tag{33}$$

[1]对所有局部有限博雷尔测度 μ 以及所有具有有限 $(\mathrm{M}_\alpha\mu)^q$-周长的有界开集 Ω 均成立。

此外，这些常数彼此相差一个维数倍数。

注 2.14。 在定理2.13中，$q > 1$是必不可少的，尤其对于蕴含关系$(2) \Rightarrow (3)$而言。根本原因在于弱洛伦兹空间$\mathrm{L}^{1,\infty}$并非赋范空间，因此导出(31)的计算并不成立。事实上，在情形 $q = 1$ 下将会得到的端点不等式(20)是不成立的。

自然要问，定理2.13与Riesz 势I_1, 的弱有界性有何关系，即,

$$\mathrm{I}_1 : \mathrm{L}^1\left((\mathrm{M}_\alpha\mu)^{\frac{1}{q}}\right) \to \mathrm{L}^{q,\infty}(\mu), \tag{34}$$

对于 $1 < q \leqslant \frac{n}{n-1}$ 和 $\alpha = n - q(n-1)$。映射性质(34)蕴含定理2.13中的条件(3)。索博列夫不等式本身是否蕴含弱有界性(34)仍是一个未决问题。定理2.13(4)推广了等周不等式

在 [41], 中建立，该不等式是在端点情形$q = \frac{n}{n-1}$下对充分光滑集合证明的。

在情形 $q = \frac{n}{n-1}$下，不等式 (33) 化为具有充分光滑边界的集合的等周不等式 (4)。此外，当 $\mathrm{d}\mu = w\mathrm{d}x$ 且权为 $w \in \mathrm{A}_1$, 时，我们有 $\mathrm{M}\mu \leqslant Cw$。因此，(33) 恢复了加权等周不等式：该不等式最初在 [14] 中针对具有光滑边界的集合建立，随后在 [59, 第 2 节4] 中被推广到更一般的情形：

$$w(\Omega)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant C \int_{\partial\Omega} w^{1-\frac{1}{n}} \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}.$$

相比之下，我们的结果给出了一整族对更一般集合成立的等周不等式。具体而言，对于 $1 \leqslant q \leqslant \frac{n}{n-1}$，我们得到

$$\mu(\Omega)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \int_{\partial^*\Omega} (\mathrm{M}_\alpha \mu)^{\frac{1}{q}} \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}.$$

最后，我们回到起点，重新讨论双权 Sobolev 不等式 (11)。我们首先处理对角情形 $p = q$中关于最优隆起条件的长期问题。

为将这一结果置于恰当的背景中，我们请读者参阅第 3 节，以了解 Young 函数与 Orlicz 平均的相关定义。给定一个杨函数 Ψ，可以在立方体 Q 上定义相应的 Orlicz 平均。bump 条件旨在精确量化 (13) 中的标准平均必须放大多少，才能得到一个充分条件。

对于 $1 < p \leqslant q < \infty$，Cruz-Uribe与Moen [13] 引入了非对角可积性条件 $\Psi \in \mathrm{B}_{p,q}$，其定义为

$$\int_1^\infty \frac{\Psi(t)^{\frac{q}{p}}}{t^{q+1}} \mathrm{d}t < \infty. \tag{35}$$

在严格非对角情形 $1 < p < q < \infty$中，他们证明了，若 (w, v) 是满足以下条件的权重对

$$\sup_Q \ell(Q)\, \mathcal{L}(Q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|w\|_{\text{Ł}^\Psi(Q)} \left(\fint_Q v^{1-p'} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \tag{36}$$

¯并且若伴随杨函数 Ψ 属于$\mathrm{B}_{q',p'}$，则

$$\mathrm{I}_1 : \mathrm{L}^p(v) \to \mathrm{L}^{q,\infty}(w).$$

一个典型的杨函数 Ψ ，使得 $\bar{\Psi} \in \mathrm{B}_{q',p'}$ 成立，由 $\Psi(t) = t^q \log(\mathrm{e} + t)^{\frac{q}{p'}+\epsilon}$ 给出，其中针对 $\epsilon > 0$。特别地，根据截断方法定理 5.1，条件(36)对于严格非对角情形 $p < q$中的双权索博列夫不等式(11)是充分的。

然而，在对角情形 $p = q$下，情况更加微妙。此前，人们只知道在非最优的对数 bump 条件 (15) 下该结果成立。当$p = q$时，$\mathrm{B}_{p,q}$ 条件简化为第二位作者 [36]提出的 B_p 条件。现在我们得到了以下尖锐结果。

定理 2.15. 设 $1 < p < \infty$，且 Ψ 是一个杨函数，使得 $\Psi \in \mathrm{B}_{p'}$。若 $(w,\ v)$ 是一对满足以下条件的权重：

$$\sup_Q \ell(Q)\, \|w^{\frac{1}{p}}\|_{\text{Ł}^{\Psi}(Q)} \left(\fint_Q v^{1-p'}\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

那么，索博列夫不等式

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p(w)} \leqslant C \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(v)}$$

对所有 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$ 成立，并且 *Riesz* 势/*Riesz* 变换界

$$\|\mathrm{I}_1 f\|_{\mathrm{L}^p(w)} \leqslant C \|\mathbf{R} f\|_{\mathrm{L}^p(v)}$$

对所有 $f \in \mathrm{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$成立。特别地，对于任意 $\epsilon > 0$，可以取 $\Psi(t) = t^p \log(\mathrm{e} + t)^{p-1+\epsilon}$。

接下来，我们证明这些估计的尖锐性，并考虑将不等式（29）推广到 $p > 1$ 情形的问题。我们证明，这样的推广不可能在右侧带有权 w 和极大函数 $(\mathrm{M}_\alpha w)^{\frac{p}{q}}$ 的情况下成立。作为替代，我们证明：如果在右侧出现适当的隆起极大函数，则该不等式确实对 $p > 1$ 成立。

为此，我们引入与杨函数 Θ 和 $0 \leqslant \alpha < n$ 相关的 Orlicz 分数阶极大函数：

$$\mathrm{M}_{\alpha,\Theta} f(x) = \sup_{Q \ni x} \ell(Q)^{\alpha} \|f\|_{\text{Ł}^{\Theta}(Q)}. \tag{37}$$

当 $\alpha = 0$ 时，我们简单地记作 $\mathrm{M}_{0,\ \Theta} = \mathrm{M}_{\Theta}$。

我们证明，一般而言，当 $p > 1$ 时，对数凸增量是不可避免的，并确定了使索博列夫不等式成立的尖锐对数极大函数。我们的主要结果如下。

定理 2.16。设 $1 < p < n$、$p \leqslant q \leqslant p^*$、$\alpha = n - \frac{q}{p}(n - p)$ 且 $\varepsilon > 0$。那么，对于任意权 w，索博列夫不等式

$$\|u\|_{\mathrm{L}^q(w)} \leqslant C \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p\left((\mathrm{M}_{\alpha,\Theta} w)^{\frac{p}{q}}\right)}$$

对所有 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$ 都成立，其中 $\Theta(t) = t[\log(\mathrm{e} + t)]^{\frac{q}{p'} + \varepsilon}$. 此外，当$\varepsilon = 0$时，该不等式不成立。

回到 Alvino 的 Lorentz 空间 Sobolev 不等式（28），或者等价地，用 Riesz 势和 Riesz 变换表示，我们可以写成

$$\|\mathrm{I}_1 f\|_{\mathrm{L}^{\frac{n}{n-1},1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|\mathbf{R} f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Spector [54]（另见 [51]）将这一结果推广到了完整范围 $0 < \alpha < n$，从而证明了

$$\|\mathrm{I}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^{\frac{n}{n-\alpha},1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|\mathbf{R} f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{38}$$

然而，在测度的背景下，$\alpha \neq 1$的行为在很大程度上仍未知。若不等式 (27) 对 $\alpha \neq 1$ 成立，它将给出 Spector 定理的测度论类比。尽管一般情形仍未解决，我们能够得到一个新的

强 $(\frac{n}{n-\alpha},1)$ 端点界（关于 $\alpha>1$），利用分数阶积分算子 I_α 的强映射性质。

定理 2.17。 假设 $1<\alpha<n$、$\varepsilon>0$ 和 w 是一个权。那么

$$\|\mathrm{I}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^{\frac{n}{n-\alpha}}(w)} \leqslant C\,\|\mathbf{R}f\|_{\mathrm{L}^1\left((\mathrm{M}_\Psi w)^{1-\frac{\alpha}{n}}\right)},$$

其中 $\Psi(t)=t[\text{对数}(\mathrm{e}+t)]^{\frac{1}{n-\alpha}+\varepsilon}$。特别地，如果 $w\in \mathrm{A}_1$，则

$$\|\mathrm{I}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^{\frac{n}{n-\alpha}}(w)} \leqslant C\,\|\mathbf{R}f\|_{\mathrm{L}^1\left(w^{1-\frac{\alpha}{n}}\right)}. \tag{39}$$

注 2.18。 定理 2.17 的一般形式仍然是开放问题。更确切地说，尚不清楚该估计是否成立

$$\|\mathrm{I}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^{\frac{n}{n-\alpha},1}(\mu)} \leqslant C\,\|\mathbf{R}f\|_{\mathrm{L}^1\left((\mathrm{M}\mu)^{1-\frac{\alpha}{n}}\right)}, \qquad f\in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{40}$$

在 $\alpha\neq 1$ 时成立，即使将右端替换为相应的 Lebesgue空间范数。

不等式 (40) 对于 $0<\alpha<1$ 尤其有趣，因为在这种情况下，它在形式上等价于分数阶 Sobolev 不等式

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{\frac{n}{n-\alpha},1}(\mu)} \leqslant C\,\|\nabla^\alpha u\|_{\mathrm{L}^1\left((\mathrm{M}\mu)^{1-\frac{\alpha}{n}}\right)}, \tag{41}$$

其中 $\nabla^\alpha := \nabla \mathrm{I}_{1-\alpha}$ 是 Riesz分数阶梯度。若不等式 (27) 成立，则可推出这样的不等式。此外，对于 A_1 权，(40) 将推出 (39)，且适用于完整范围$0<\alpha<n$。这可以看作 Spector 不等式 (38) 的 A_1加权类比。

最后，我们对指标为 $0<s<1$ 的分数阶情形作几点观察。为将我们的结果置于背景之中，我们先讨论分数阶导数，从经典的分数阶拉普拉斯算子开始。这个算子可视为 I_s的逆，并通过傅里叶变换定义为

$$[(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u]\hat{}(\xi) = |2\pi\xi|^s\hat{u}(\xi), \qquad u\in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

需要注意的是，分数阶Sobolev不等式

$$\|u\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leqslant C\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_s\mu)}$$

并不成立，因为它将推出不成立的不等式 (20)。当 $0<s<1$ 时（事实上，对于$0<s<2$ 也如此，不过这与此处无关），分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u$ 是奇异积分的常数倍

$$\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(y)-u(x)}{|x-y|^{n+s}}\,\mathrm{d}y.$$

类似地，Riesz分数阶梯度 $\nabla^s u=\nabla \mathrm{I}_{1-s}u$ 的积分表示（相差一个常数倍）为

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+s}}\frac{x-y}{|x-y|}\,\mathrm{d}y.$$

∇^s 与 $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ 之间的关系类似于经典梯度 ∇ 与 $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ 之间的关系；通过 Riesz 变换和 Riesz 势可以将这种联系精确地表示为：

$$\mathbf{R}f = -\nabla^s \mathrm{I}_s f = -\mathrm{I}_s \nabla^s f \quad \text{and} \quad \mathbf{R}(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u = \nabla^s u.$$

有关这些分数阶导数的更多内容，请参阅 Ponce 的著作 [42] 以及 Comi 和 Stefani 的论文 [9, 10]。

分数阶Sobolev不等式

$$\|u\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leqslant C\|\nabla^s u\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_s\mu)},$$

对于 $0 < s < 1$，它在形式上等价于 (27)，因此对于一般测度并不成立。相反，我们建立了一个涉及更高阶分数阶导数的替代不等式。

当 $0 < s < 1$时， ∇^s 和 $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ 的积分表示对光滑函数绝对收敛。这使我们能够定义非线性、正的分数阶导数

$$\mathcal{D}^s u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{n+s}}\,\mathrm{d}y,$$

wh它在逐点意义下同时支配两个标准分数阶导数。更准确地说 ，

$$|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(x)| + |\nabla^s u(x)| \leqslant c\,\mathcal{D}^s u(x).$$

由 Spector 在 [54], 中引入的正导数算子 $\mathcal{D}^s$，实际上早已隐含地出现在分数阶 Sobolev 空间理论中。特别地，Gagliardo 半范数可以表示为

$$[u]_{\mathrm{W}^{s,1}(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{D}^s u\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)}.$$

$\mathcal{D}^s$ 值得关注的另一个原因是，如 [26, 引理 2.6] 所示，它给出了对 (10) 的一个改进：

$$|u(x)| \leqslant (1-s) c_{n,s}\, \mathrm{I}_s(\mathcal{D}^s u)(x) \leqslant c_n\, \mathrm{I}_1(|\nabla u|)(x), \qquad 0 < s < 1. \tag{42}$$

我们还可以利用 Riesz 分数阶梯度 ∇^s 改进 (42)。事实上，利用经典 Riesz 变换恒等式 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} = -\mathbf{I}$，可得

$$u = -\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}u = \mathbf{R}\cdot\nabla \mathrm{I}_1 u = \mathrm{I}_s \mathbf{R}\cdot\nabla \mathrm{I}_{1-s} u = \mathrm{I}_s \mathbf{R}\cdot\nabla^s u,$$

这里我们使用了 $0 < s < 1$ 的卷积恒等式 $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_{1-s} \circ \mathrm{I}_s$ ，以及以下事实：所涉及的算子——无论是导数还是卷积算子——在 $u \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 时均可交换。计算$\mathbf{R}\mathrm{I}_s = -\nabla \mathrm{I}_{1+s}$ 的核，可得 $u \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的表示公式：

$$u(x) = (\mathbf{R}\mathrm{I}_s \cdot \nabla^s u)(x) = c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x-y}{|x-y|^{n-s+1}} \cdot (\nabla^s u)(y)\,\mathrm{d}y \tag{43}$$

（另见 [42, 命题 15.8，第 246] 页，可严格证明等式 (43)）。该积分绝对收敛，因此我们得到以下子表示公式：

$$|u(x)| \leqslant \gamma_{n,s} \mathrm{I}_s(|\nabla^s u|)(x). \tag{44}$$

通过显式计算这些常数，可以看出

$$\gamma_{n,s}\mathrm{I}_s(|\nabla^s u|)(x) \leqslant (1-s)\delta_{n,s}\mathrm{I}_s(\mathcal{D}^s u)(x),$$

其中 $\delta_{n,\ s} \leqslant c_n$ 当 $s \to 1^-$ 时。因子 $(1-s)$ 很重要，因为它自然地出现在定义 ∇^s 的常数中，并且与 Bourgain–Brezis–Mironescu 现象 [3] 和 [4]，相一致，从而导向与 $\mathcal{D}^s$ 的联系。因此，不等式 (44) 改进了 (10)，结合上述估计与不等式 (42)，可得

$$|u(x)| \leqslant \gamma_{n,s}\mathrm{I}_s(|\nabla^s u|)(x) \leqslant (1-s)\delta_{n,s}\mathrm{I}_s(\mathcal{D}^s u)(x) \leqslant c_n \mathrm{I}_1(|\nabla u|)(x), \qquad u \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

在 [35]，中，针对局部有限博雷尔测度建立了一个局部小数阶庞加莱不等式：

$$\int_Q |u-u_Q|\,\mathrm{d}\mu \leqslant C(1-s)\int_Q\int_Q \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{n+s}}\mathrm{M}_s\mu(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{45}$$

当 $0 \leqslant s < 1$ 且 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$ 时。通过在 (45) 中取足够大的立方体，我们得到以下整体不等式。

定理 2.19。 设 μ 是一个局部有限博雷尔测度，且 $0 < s < 1$。则

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|\,\mathrm{d}\mu \leqslant C(1-s)\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}^s u\,\mathrm{M}_s\mu\,\mathrm{d}x, \qquad u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n).$$

最后，采用与证明推论 2.12 中处理经典梯度时类似的论证，可得以下结果。

推论 2.20。 设 μ 是局部有限博雷尔测度，且 $0 < s < 1$、$1 \leqslant q \leqslant \frac{n}{n-s}$ 和 $\alpha = n - q(n-s)$。那么

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{q,1}(\mu)} \leqslant C(1-s)\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}^s u\,(\mathrm{M}_\alpha\mu)^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}x, \qquad u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n).$$

再次说明，这些观察结果可由 [35]中的工作推出，因此我们不提供证明。

2.4. **论文结构**。 本文结构如下。第 3 节介绍必要的背景知识，包括权、Lorentz 空间、BV 空间和奥利奇空间的基本事实，以及本文分析中的一项关键工具：加权 BV 空间中的余面积公式。第 4 节按照 Meyers 和 Ziemer 的方法，给出定理 2.1 的简短且自成一体的证明，并推导若干相关结果。第 5 节重新考察双权 Sobolev 不等式 (11)，并证明定理 2.15、2.16 和 2.17。最后，第 6 节回到单权索博列夫不等式 (5)，并确立若干辅助结果。

3. 预备知识

本节汇集全文所需的背景知识。我们研究 $\mathbb{R}^n$ 上的正博雷尔测度 μ，满足对每个紧集 K都有 $\mu(K) < \infty$。由于$\mathbb{R}^n$ 是 σ-紧的，每个局部有限博雷尔测度都是拉东测度。我们用 $\mathcal{L}$ 表示 $\mathbb{R}^n$上的勒贝格测度。

3.1. 豪斯多夫测度与极大函数估计。 我们回顾豪斯多夫测度的定义。对于 $s \geqslant 0$ 和 $0 < \delta \leqslant \infty$，集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的豪斯多夫内容定义为

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) := \inf\left\{\sum_k \ell(Q_k)^s : E \subseteq \bigcup_k Q_k,\ \ell(Q_k) \leqslant \delta\right\},$$

其中，下确界取遍所有由边长不超过 δ 的立方体 Q_k 对 E 构成的可数覆盖。我们注意到，这与 $\mathcal{H}^s$ 的标准定义略有不同，例如 [15]，中的定义允许使用任意集合构成覆盖。不过，这两个定义仅相差一个依赖于 n 和 s 的常数，因此我们采用上述表述。博雷尔集 E 的豪斯多夫测度 定义为

$$\mathcal{H}^s(E) := \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(E).$$

根据此定义， $\mathcal{H}^s$ 是一个外测度；将其限制在博雷尔 σ-代数上时，它是一个测度。不过，本文只需要 $\mathcal{H}^s_\infty$，它是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的外测度。注意， $\mathcal{H}^s(E) = 0$ 当且仅当 $\mathcal{H}^s_\infty(E) = 0$（见 [15, 第 64] 页）。

3.2. 二进网格。下文中，我们需要用到一些标准的二进技巧。 $\mathscr{D}$ 中的二进网格是由立方体构成的集合，其边长为 $\ell(Q) = 2^k$、 $k \in \mathbb{Z}$，满足对于每个 k，子集

$$\mathscr{D}^k := \{Q \in \mathscr{D} : \ell(Q) = 2^k\}$$

构成 $\mathbb{R}^n$的一个划分，并且任意两个立方体 Q， $P \in \mathscr{D}$满足 $Q \cap P \in \{\varnothing,\ Q,\ P\}$。

特别重要的是平移二进网格，

$$\mathscr{D}_t = \{\, 2^k([0,1)^n + m + (-1)^k t) : k \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}^n \,\}, \qquad t \in \{0, \tfrac{1}{3}\}^n,$$

它们具有众所周知的1 3技巧。–

引理 3.1。对于任意半径为 $r(B)$的球 $B \subset \mathbb{R}^n$ ，存在 $t \in \{0、\ \frac{1}{3}\}^n$ 和一个立方体 $Q_t \in \mathscr{D}_t$，使得 $B \subset Q_t$ 且 $\ell(Q_t) \leqslant 12\, r(B)$。

给定一个二进网格 $\mathscr{D}$，我们定义与之相关的二进分数极大算子（$0 \leqslant \alpha < n$）如下：

$$\mathrm{M}^{\mathscr{D}}_\alpha \mu(x) := \sup_{Q \in \mathscr{D}} \ell(Q)^\alpha \fint_Q \mathrm{d}\mu\, \mathbf{1}_Q(x).$$

作为引理 3.1 的推论，分数阶极大算子在每一点上都可以由有限个相应的二进极大算子控制。

引理 3.2. 设 μ 是一个局部有限博雷尔测度，且 $0 \leqslant \alpha < n$。那么

$$(\mathrm{M}_\alpha \mu)(x) \leqslant c_{n,\alpha} \sum_{t \in \{0,\frac{1}{3}\}^n} \mathrm{M}^{\mathscr{D}_t}_\alpha \mu(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

3.3. 由$_1$ 极大函数生成的权。 权 w 是定义在 $\mathbb{R}^n$上的非负局部可积函数。A_1 权是满足以下条件的非零权

$$(Mw)(x) \leqslant c\, w(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{46}$$

这个定义略强于 A_1，的标准定义，后者通常只要求不等式 (46) 对 $\mathcal{L}$ 几乎处处成立。然而，对于加权 BV 空间的理论，权必须处处定义、下半连续，并且逐点满足条件 (46)。在当前语境下，这些要求会自动满足。事实上，如果 μ 是一个满足 $(M_1\mu)(x_0) < \infty$ （对某个 $x_0 \in \mathbb{R}^n$）的测度，那么 $w = M_1\mu$ 定义了一个具有所需性质的权，而且本文中的大多数相关结果都适用于这种情形。事实上，我们有如下定理：该定理在加权情形下最初由 Sawyer [47] 提出，随后由 Hurri-Syrjänen、Martínez-Perales、Pérez 和 Vähäkangas [23, 在一般情形下完整证明。引理 3.6]。

定理 3.3。 设 $0 \leqslant \alpha < n$ 且 μ是局部有限博雷尔测度。若存在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$使得 $(M_\alpha\mu)(x_0) < \infty$，则 $M_\alpha\mu$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 均有定义（在某个 $\mathcal{H}^{n-\alpha}$ 测度为零的集合上可能取值为 $+\infty$），是下半连续的，并满足

$$(M_\alpha\mu)^r \in A_1, \quad \textit{for all } 0 \leqslant r < \frac{n}{n-\alpha}.$$

3.4. 洛伦兹空间与奥利奇空间。 给定测度 μ 在 $\mathbb{R}^n$ 上以及 $1 \leqslant r, s < \infty$，Lorentz 空间 $L^{r,s}(\mu)$由所有满足以下条件的可测函数 f 组成

$$\|f\|_{L^{r,s}(\mu)}^s = r \int_0^\infty t^{s-1}\, \mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}\big)^{\frac{s}{r}}\, \mathrm{d}t < \infty.$$

当 $s = \infty$时，弱-L^r 空间 $L^{r,\infty}(\mu)$ 定义为

$$\|f\|_{L^{r,\infty}(\mu)} = \sup_{t>0} t\, \mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}\big)^{\frac{1}{r}}.$$

这些空间满足众所周知的嵌入关系

$$L^{r,1}(\mu) \subseteq L^{r,r}(\mu) = L^r(\mu) \subseteq L^{r,\infty}(\mu).$$

关于奥利奇空间的背景知识，读者可参阅书籍 [12, 第 5]章。杨函数 Ψ是满足 $\Psi(0) = 0$ 且满足以下条件的连续递增函数

$$\frac{\Psi(t)}{t} \to \infty \qquad \text{as } t \to \infty.$$

¯伴随杨函数 Ψ 定义为

$$\bar{\Psi}(t) = \sup_{s>0}(st - \Psi(s)).$$

给定一个杨函数 Ψ 和一个立方体 Q，归一化奥利奇平均定义为

$$\|f\|_{L^\Psi(Q)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \fint_Q \Psi\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)\, \mathrm{d}x \leqslant 1\right\}.$$

当 $\Psi(t) = t^a \log(e + t)^b$ 我们写作

$$\|f\|_{L^\Psi(Q)} = \|f\|_{L^a(\log L)^b(Q)}.$$

3.5. 加权 BV 空间与周长。 现在我们汇总若干关于加权 BV 空间的事实；更多细节请参阅 [2]。设 $w \in A_1$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$上的一个正下半连续函数。对于 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，加权变差定义为

$$\mathrm{Var}_w u = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} u \ \mathrm{div}\, \mathbf{\Phi}\ \mathrm{d}x : \mathbf{\Phi} \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),\ |\mathbf{\Phi}| \leqslant w\right\}.$$

我们称 $u \in$ 有界变差(w)，若 $u \in L^1(w)$ 且 $\mathrm{Var}_w u < \infty$，并为该空间配备范数

$$\|u\|_{\mathrm{BV}(w)} = \|u\|_{L^1(w)} + \mathrm{Var}_w u.$$

If $u \in$ 有界变差(w)，则 $u \in$ 有界变差$_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，且存在有限博雷尔测度 $|Du|_w$ 使得 t

$$\mathrm{d}|Du|_w = w\,\mathrm{d}|Du| \tag{47}$$

其中 $|Du|$ 是由 $u \in$ 有界变差$_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$产生的全变差测度。

此外，

$$\mathrm{Var}_w u = |Du|_w(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} w\,\mathrm{d}|Du|.$$

给定集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$，若 $\mathbf{1}_\Omega \in$ 有界变差(w)，则称 Ω 具有有限加权周长。此时，加权周长（或 w-周长）定义为

$$\mathrm{Per}(\Omega, w) := \mathrm{Var}_w(\mathbf{1}_\Omega) = \sup\left\{\int_\Omega \mathrm{div}\, \mathbf{\Phi}\,\mathrm{d}x :\ \mathbf{\Phi} \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),\ |\mathbf{\Phi}(x)| \leqslant w(x), \forall x \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

当 $w \equiv \mathbf{1}$ 时，我们将 $\mathrm{Per}(\Omega) = \mathrm{Per}(\Omega\ \mathbf{1})$ 记为经典周长（见 [15]），并将相应的加权周长记为

$$|\partial\Omega|_w := |D\mathbf{1}_\Omega|_w.$$

一般而言，若 Ω 具有有限 w-周长，则它在 $\mathbb{R}^n$ 中具有局部有限的经典周长；反之，由于正的下半连续函数在紧集上有下界，具有有限经典周长的有界集也具有有限 w-周长（见 [2]）。此外，由于

$$|D\mathbf{1}_\Omega| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^*\Omega, \tag{48}$$

其中 $\partial^*\Omega$ 表示 Ω 的约化边界，即存在良定义的测度论单位法向量的点集 $x \in \mathbb{R}^n$（若 $\partial\Omega$ 为 C^1，则它与拓扑边界重合），由 (47) 和 (48) 可得

$$\mathrm{Per}(\Omega, w) = \int_{\partial^*\Omega} w\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}.$$

我们将需要如下加权余面积公式；关于这一具有一般权的版本的证明，见 [5]。

引理 3.4。 设 w 为一个权，且 $u \in$ 有界变差(w)非负。对于 $t > 0$，令 $E_t = \{u > t\}$。则对于 $\mathcal{L}$-几乎处处的 $t \in \mathbb{R}$，E_t 具有有限的 w 周长，并且

$$|Du|_w(\mathbb{R}^n) = \int_0^\infty \mathrm{Per}(E_t, w)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty |\partial E_t|_w(\mathbb{R}^n)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} w\,\mathrm{d}|D\mathbf{1}_{E_t}|\,\mathrm{d}t.$$

特别地，如果 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$，则

$$\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^1(w)} = \int_0^\infty \mathrm{Per}(E_t, w)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} w\,\mathrm{d}|D\mathbf{1}_{E_t}|\,\mathrm{d}t.$$

最后，我们需要以下无权相对等周不等式。其证明可由局部Poincaré不等式推出；相关内容请参阅 Evans 和 Gariepy [15,第 190] 页。

引理 3.5. 假设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个有限周长的有界集合。那么对于任意球 $B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\min\{\mathcal{L}(B_r(x)\cap E), \mathcal{L}(B_r(x)\cap E^c)\}^{\frac{n-1}{n}} \leqslant C\,|D\mathbf{1}_E|(B_r(x)). \tag{49}$$

4. 主要结果的证明

4.1. Meyer–Ziemer 定理的推广及其推论。 我们首先证明主要结果定理 2.1 及其推论，即推论 2.3 和 2.5。我们还证明定理 2.13，该定理刻画了范围 $1 < q \leqslant \frac{n}{n-1}$内的端点索伯列夫不等式。

——

定理2.1的证明。 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个有限周长的有界开集。由于 E 是开集，对于每个 $x \in E$，我们有

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}(B_r(x)\cap E)}{\mathcal{L}(B_r(x))} = 0, \qquad \lim_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{L}(B_r(x)\cap E)}{\mathcal{L}(B_r(x))} = 1.$$

因此，存在 $r_x > 0$使得

$$\frac{\mathcal{L}(B_{r_x}(x)\cap E)}{\mathcal{L}(B_{r_x}(x))} = \frac{1}{2}, \qquad \text{that is,} \qquad \mathcal{L}(B_{r_x}(x)\cap E) = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}(B_{r_x}(x)).$$

由此可得

$$\mathcal{L}(B_{r_x}(x)\cap E^c) = \mathcal{L}(B_{r_x}(x)) - \mathcal{L}(B_{r_x}(x)\cap E) = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}(B_{r_x}(x)).$$

应用引理 3.5，可得对每个 $x \in E$ 都有估计

$$r_x^{n-1} \leqslant C\,|D\mathbf{1}_E|(B_{r_x}(x)).$$

现在令 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$。对每个 $t > 0$，水平集 $E_t = \{|u| > t\}$是开集、有界集，且具有有限周长。设 $K \subseteq E_t$ 为紧集。那么

$$K \subseteq \bigcup_{x\in K} B_{r_x}(x).$$

由紧致性和Vitali覆盖引理，存在一个有限的不相交球集 $B_j = B_{r_j}(x_j)$，其满足 $x_j \in K$，使得

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} 3B_j.$$

因此，

$$\begin{aligned}\mu(E_t) &\leqslant \sum_{j=1}^{N} \mu(3B_j) = c_n \sum_{j=1}^{N} \frac{\mu(3B_j)}{r_j^{n-1}}\, r_j^{n-1} \\ &\leqslant c_n \sum_{j=1}^{N} \frac{\mu(3B_j)}{r_j^{n-1}}\, |D\mathbf{1}_{E_t}|(B_j) \leqslant c_n \sum_{j=1}^{N} \int_{B_j} \mathrm{M}_1\mu \,\mathrm{d}|D\mathbf{1}_{E_t}| \\ &\leqslant c_n \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{M}_1\mu \,\mathrm{d}|D\mathbf{1}_{E_t}| = c_n\, |\partial E_t|_{\mathrm{M}_1\mu}(\mathbb{R}^n),\end{aligned}$$

其中我们用到了，对每个 $x \in B_j$，

$$\mathrm{M}_1\mu(x) \geqslant c_n\, \frac{\mu(3B_j)}{r_j^{n-1}}.$$

最后，对 $t \in (0,\infty)$ 积分，并应用权为 $w = \mathrm{M}_1\mu$ 的余面积公式（引理 (3.4)），得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u| \,\mathrm{d}\mu = \int_0^\infty \mu(E_t)\,\mathrm{d}t \leqslant C \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{M}_1\mu \,\mathrm{d}|D\mathbf{1}_{E_t}|\,\mathrm{d}t \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\, \mathrm{M}_1\mu \;\mathrm{d}x.$$

证明至此完成。 □

推论2.3. 设 u ∈ 有界变差($\mathrm{M}_1 w$)。由 [2], 中的定理 1.2，存在一个序列$\{u_k\} \subseteq \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使得 $u_k \to u$ $\mathcal{L}$-几乎处处成立，且

$$\limsup_{k\to\infty} \|\nabla u_k\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_1 w)} \leqslant C\, |Du|_{\mathrm{M}_1 w}(\mathbb{R}^n),$$

其中 C 仅依赖于维数和 $\mathrm{M}_1 w$ 的 A_1 常数（参见定理 3.3）。

由 Fatou 引理——这正是我们要求 w 为权的原因，因为收敛在 $\mathcal{L}$-几乎处处成立——以及不等式 (23)，我们得到

$$\|u\|_{\mathrm{L}^1(w)} \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{\mathrm{L}^1(w)} \leqslant C \limsup_{k\to\infty} \|\nabla u_k\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_1 w)} \leqslant C\, |Du|_{\mathrm{M}_1 w}(\mathbb{R}^n).$$

□

现在我们转向推论 2.5。与上述扩展结果相反，对于一般的局部有限博雷尔测度 μ，只要 Ω 是一个具有有限 $\mathrm{M}_1\mu$-周长的有界开集，等周不等式便成立。

推论的证明2.5. 设 φ 是一个标准磨光核，其支集包含于 $B_1(0)$，非负、径向递减，且归一化使得 $\int \varphi = 1$。令 $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$，并且

$$u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * \mathbf{1}_\Omega.$$

由于 Ω 是开集，每个 $x \in \Omega$ 都是 $\mathbf{1}_\Omega$的连续点，因此

$$u_\varepsilon(x) \to 1 \qquad \text{for all } x \in \Omega \quad \text{as } \varepsilon \to 0.$$

由 Fatou 引理和不等式 (23)，我们得到

$$\mu(\Omega) \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon \;\mathrm{d}\mu \leqslant C \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\varepsilon|\, \mathrm{M}_1\mu \;\mathrm{d}x.$$

令 $w = \mathrm{M}_1\mu$。则

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\varepsilon|\, w \,\mathrm{d}x = \mathrm{Var}_w(u_\varepsilon) = \sup_{\substack{\boldsymbol{\Phi}\in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\\ |\boldsymbol{\Phi}|\leqslant w}} \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon \,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Phi}\,\mathrm{d}x.$$

对于这样的 $\boldsymbol{\Phi}$，由富比尼定理可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon \,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Phi}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathrm{div}(\varphi_\varepsilon * \boldsymbol{\Phi})\,\mathrm{d}y.$$

由于 φ 是径向递减的，

$$|\varphi_\varepsilon * \boldsymbol{\Phi}| \leqslant \varphi_\varepsilon * |\boldsymbol{\Phi}| \leqslant \varphi_\varepsilon * w \leqslant \mathrm{M}w \leqslant Cw,$$

这里我们用到了：与径向递减光滑核的卷积受 Hardy–Littlewood极大算子控制，且 $w \in \mathrm{A}_1$。因此，

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon \,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Phi}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{Var}_{Cw}(\mathbf{1}_\Omega) = C\ \mathrm{Per}(\Omega, \mathrm{M}_1\mu).$$

对所有可容许的 $\boldsymbol{\Phi}$ 取上确界，即完成证明。 □

我们以定理2.13的证明结束本节。

证明。 为证明 (1) 蕴含 (2)，令 $\mu = \delta_{x_0}$ 为位于 $x_0 \in \mathbb{R}^n$处的点质量。则

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{q,1}(\delta_{x_0})} = |u(x_0)|,$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)| (\mathrm{M}_\alpha \delta_{x_0})(x)^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}x = c\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u(x)|}{|x-x_0|^{n-1}}\,\mathrm{d}x = c\,\mathrm{I}_1(|\nabla u|)(x_0).$$

由不等式 (32)可得蕴含关系 $(2) \Rightarrow (3)$。$(3) \Rightarrow (4)$ 的证明与推论 2.5 的证明基本相同。最后，对于 $(4) \Rightarrow (1)$，令 $E_t = \{|u| > t\}$ 对于 $t > 0$，其中该集合是开、有界且具有所需有限周长的，只要 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$。根据余面积公式，

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{q,1}(\mu)} = q\int_0^\infty \mu(E_t)^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}t \leqslant C\int_0^\infty \mathrm{Per}\left(E_t, (\mathrm{M}_\alpha\mu)^{\frac{1}{q}}\right)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| (\mathrm{M}_\alpha\mu)^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}x.$$

□

4.2. 端点不等式。 现在我们建立涉及算子的端点不等式，首先从定理 2.8 开始，随后讨论定理 2.9 和 2.11。

定理 2.8的证明。 令 μ 为局部有限博雷尔测度，并令 $w = \mathrm{M}_1\mu \in \mathrm{A}_1$，，假设 $\mathrm{M}_1\mu$ 并非恒等于无穷。若 $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，则 $\mathrm{I}_1 f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$。

设 $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$满足 $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$，在 $B_1(0)$上满足 $\varphi \equiv 1$，且在 $B_2(0)$之外满足 $\varphi \equiv 0$，并令$\varphi_k(x) = \varphi(x/k)$。则 $u_k = \varphi_k \mathrm{I}_1 f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且

$$\nabla u_k = (\mathrm{I}_1 f)\nabla\varphi_k + \varphi_k \nabla \mathrm{I}_1 f = (\mathrm{I}_1 f)\nabla\varphi_k - \varphi_k \mathbf{R} f.$$

由不等式 (23)，

$$\|u_k\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leqslant C\|\nabla u_k\|_{\mathrm{L}^1(w)} \leqslant C\Big(\|(\mathrm{I}_1 f)\nabla\varphi_k\|_{\mathrm{L}^1(w)} + \|\varphi_k \mathbf{R} f\|_{\mathrm{L}^1(w)}\Big).$$

第二项由 $\|\mathbf{R}f\|_{\mathrm{L}^1(w)}$ 控制。对于第一项，

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{I}_1 f)\nabla\varphi_k\|_{\mathrm{L}^1(w)} &\leqslant \frac{C}{k}\|\mathbf{1}_{B_{2k}(0)\setminus B_k(0)}\mathrm{I}_1 f\|_{\mathrm{L}^1(w)}\\ &\leqslant \frac{C}{k}w(B_{2k}(0))^{1/n}\|\mathbf{1}_{B_{2k}(0)\setminus B_k(0)}\mathrm{I}_1 f\|_{\mathrm{L}^{n',\infty}(w)}\\ &\leqslant C(\mathrm{M}w(0))^{1/n}\|\mathbf{1}_{B_{2k}(0)\setminus B_k(0)}\mathrm{I}_1 f\|_{\mathrm{L}^{n',\infty}(w)}.\end{aligned}$$

现在，利用估计

$$\|\mathrm{I}_1 f\|_{\mathrm{L}^{n',\infty}(\mu)} \leqslant c_n\|f\|_{\mathrm{L}^1((\mathrm{M}\mu)^{\frac{1}{n'}})},$$

这正是对 $\beta = 1$ 和 $q = \frac{n}{n-1}$ 的 (31)，以及 $f \in \mathrm{L}^1(w^{\frac{1}{n'}})$ 且 $w \in \mathrm{A}_1$ 这一事实，我们有 $\mathrm{I}_1 f \in \mathrm{L}^{n',\infty}(w)$；因此，最后一项当 $k \to \infty$ 时趋于零。

最后，应用 Fatou 引理，并利用对所有 x 都有 $\varphi_k(x)\mathrm{I}_1 f(x) \to \mathrm{I}_1 f(x)$，得到

$$\|\mathrm{I}_1 f\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leqslant C\|\mathbf{R}f\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_1\mu)}.$$

□

定理2.9 的证明。 由引理 3.2，只需考虑一般的二进算子 $\mathrm{M}_\alpha^{\mathscr{D}}$ 和函数 $f \in \mathrm{L}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$。我们使用关于 M_α 的著名稀疏界（见 [13, 定理 5.1]）。

具体而言，存在一个立方体子族 $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{D}$，使得对每个 $Q \in \mathcal{S}$，都存在一个可测子集 $E_Q \subseteq Q$，满足 $|E_Q| \geqslant \frac{1}{2}|Q|$；集合 $\{E_Q \div Q \in \mathcal{S}\}$ 两两不相交，并且

$$\mathrm{M}_\alpha^{\mathscr{D}} f(x) \leqslant c\sum_{Q\in\mathcal{S}} \ell(Q)^\alpha \fint_Q |f|\,\mathrm{d}x\,\mathbf{1}_{E_Q}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(f)$ 可能依赖于 f，但 c 仅取决于维数。

对 μ积分，得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{M}_\alpha^{\mathscr{D}} f\,\mathrm{d}\mu &\leqslant C\sum_{Q\in\mathcal{S}} \ell(Q)^\alpha \fint_Q |f|\,\mathrm{d}x\,\mu(E_Q)\\ &\leqslant C\sum_{Q\in\mathcal{S}} \Big(\fint_Q |f|\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\ell(Q)^\alpha\frac{\mu(Q)}{|Q|}\Big)|E_Q|\\ &\leqslant C\sum_{Q\in\mathcal{S}} \int_{E_Q} \mathrm{M}f(x)\mathrm{M}_\alpha\mu(x)\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{M}f(x)\mathrm{M}_\alpha\mu(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

定理2.11的证明。 设 $w = \mathrm{M}_1\mu \in \mathrm{A}_1$。对于这类权，Riesz 变换与加权Hardy空间 $\mathrm{H}^1(w)$ 的原子刻画是等价的。因此，

只需验证原子上的有界性。具体而言，设 $a \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 支撑于球 $B = B_R(x_0)$上，并满足

$$\int_B a \,\mathrm{d}x = 0, \qquad \|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant w(B)^{-1}. \tag{50}$$

我们将证明

$$\|\mathrm{I}_\alpha a\|_{\mathrm{L}^1(w)} \leqslant C,$$

其中 C 与原子 a 无关。

我们将 $|\mathrm{I}_\alpha a|$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分拆分为局部部分和整体部分：

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{I}_\alpha a| \,\mathrm{d}\mu = \int_{3B} |\mathrm{I}_\alpha a| \,\mathrm{d}\mu + \int_{(3B)^c} |\mathrm{I}_\alpha a| \,\mathrm{d}\mu.$$

利用 a 的消去性以及标准核估计，我们对整体部分作如下估计：

$$\begin{aligned}
\int_{(3B)^c} |\mathrm{I}_\alpha a| \,\mathrm{d}\mu &= C \int_{(3B)^c} \Big| \int_B a(y) \Big(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|x-x_0|^{n-\alpha}} \Big) \,\mathrm{d}y \Big| \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\leqslant C \int_{(3B)^c} \int_B |a(y)| \frac{|y-x_0|}{|x-x_0|^{n-\alpha+1}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\leqslant C \int_B |a(y)| \int_{(3B)^c} \frac{|y-x_0|}{|x-y|^{n-\alpha+1}} \,\mathrm{d}\mu(x) \,\mathrm{d}y \\
&\leqslant C \int_B |a(y)| \mathrm{M}_\alpha \mu(y) \,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

由 (50) 可得

$$\int_{(3B)^c} |\mathrm{I}_\alpha a| \,\mathrm{d}\mu \leqslant C.$$

对于局部部分，令 $x \in 3B$，

$$|\mathrm{I}_\alpha a(x)| \leqslant \frac{1}{w(B)} \int_B \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} \,\mathrm{d}y \leqslant \frac{C}{w(B)} R^\alpha,$$

使得

$$\int_{3B} |\mathrm{I}_\alpha a| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{C R^\alpha \mu(3B)}{w(B)} \leqslant C \frac{1}{w(B)} \int_B \mathrm{M}_\alpha \mu \,\mathrm{d}x \leqslant C.$$

结合局部与全局估计，即完成证明。 □

4.3. 分数阶极大算子的定义域。 接下来，我们证明定理 2.2，该定理刻画了作用于测度的分数阶极大算子的定义域。作为预备步骤，我们建立了一个关于豪斯多夫测度的分数阶极大函数端点估计。该结果将在定理 2.2 的证明中发挥关键作用，且本身也具有独立的研究价值。

定理 4.1. 设 μ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的有限博雷尔测度，并设 $0 \leqslant \alpha < n$。则存在常数 $C > 0$，使得对每个 $\lambda > 0$，

$$\mathcal{H}_\infty^{n-\alpha}\big(\{x \in \mathbb{R}^n : (\mathrm{M}_\alpha \mu)(x) > \lambda\}\big) \leqslant \frac{C}{\lambda} \mu(\mathbb{R}^n).$$

特别地，

$$\mathcal{H}_{\infty}^{n-\alpha}\big(\{x\in\mathbb{R}^n:(\mathrm{M}_\alpha\mu)(x)=\infty\}\big)=0,$$

因此，对于 $\mathcal{H}^{n-\alpha}$-几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^n$，有 $(\mathrm{M}_\alpha\mu)(x)<\infty$。

证明。 设 μ 为有限博雷尔测度。根据引理 3.2，只需证明与任意二进网格 $\mathscr{D}$ 相关联的二进分数极大算子 $\mathrm{M}_\alpha^{\mathscr{D}}$ 满足该估计。

固定 $\lambda>0$，并考虑水平集

$$E_\lambda:=\{x\in\mathbb{R}^n:(\mathrm{M}_\alpha^{\mathscr{D}}\mu)(x)>\lambda\}.$$

由于 $\mu(\mathbb{R}^n)<\infty$，我们可以选取一族极大二进立方体 $\{Q_j\}\subset\mathscr{D}$，使得

$$\ell(Q_j)^\alpha \fint_{Q_j}\mathrm{d}\mu>\lambda.$$

这些立方体两两不相交，并且满足

$$E_\lambda=\bigsqcup_j Q_j.$$

对于每个 Q_j，我们有 $\ell(Q_j)^{n-\alpha}<\mu(Q_j)/\lambda$，因此

$$\sum_j \ell(Q_j)^{n-\alpha}<\frac{1}{\lambda}\sum_j\mu(Q_j)=\frac{\mu(E_\lambda)}{\lambda}\leqslant\frac{\mu(\mathbb{R}^n)}{\lambda}.$$

根据豪斯多夫内容的定义，这意味着

$$\mathcal{H}_{\infty}^{n-\alpha}(E_\lambda)\leqslant\frac{\mu(\mathbb{R}^n)}{\lambda},$$

这就完成了证明。 □

现在，我们按照 Fiorenza 和 Krbec 的原始工作 [17]，证明一个稍微更一般的刻画。

定理 4.2. 设 $0\leqslant\alpha<n$，并设 μ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的局部有限博雷尔测度。以下陈述等价：

(1) $\mathrm{M}_\alpha\mu$ 几乎处处有限（相对于 $\mathcal{H}^{n-\alpha}$）；*(2)* 存在 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 使得 $(\mathrm{M}_\alpha\mu)(x_0)<\infty$；*(3)* 存在 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 使得

$$\limsup_{R\to\infty}\frac{\mu(B_R(x_0))}{R^{n-\alpha}}<\infty;$$

(4) 存在一个常数 $K\geqslant 0$，使得对每个 $x\in\mathbb{R}^n$，

$$\limsup_{R\to\infty}\frac{\mu(B_R(x))}{R^{n-\alpha}}=K.$$

定理 4.2 的证明。 (1)⇒(2)⇒(3) 的推论显而易见。

假设 (3) 对某个 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 成立，并令

$$K:=\limsup_{R\to\infty}\frac{\mu(B_R(x_0))}{R^{n-\alpha}}<\infty.$$

对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，记 $d = |x - x_0|$，并注意到 $B_R(x) \subset B_{R+d}(x_0)$，我们得到 in

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{\mu(B_R(x))}{R^{n-\alpha}} \leqslant \limsup_{R\to\infty} \frac{(R+d)^{n-\alpha}}{R^{n-\alpha}} \frac{\mu(B_{R+d}(x_0))}{(R+d)^{n-\alpha}} = K.$$

交换 x 和 x_0 的角色即可得到 (4)。

最后，假设 (4) 成立。特别地，

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{\mu(B_R(0))}{R^{n-\alpha}} = K < \infty.$$

选取 $N_0 \in \mathbb{N}$ 使得对所有 $R \geqslant N_0$，都有 $\mu(B_R(0))/R^{n-\alpha} \leqslant 2K$，并定义

$$E_\infty := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{M}_\alpha \mu(x) = \infty\}.$$

由于 $\mathbb{R}^n = \bigcup_{N=N_0}^{\infty} B_N(0)$，只需证明对每个 $N \geqslant N_0$ 都有 $\mathcal{H}^{n-\alpha}(E_\infty \cap B_N(0)) = 0$。将 μ 分解为 $\mu_N \colon = \mu \llcorner B_{2N}(0)$ 和 $\nu_N \colon = \mu \llcorner B_{2N}(0)^c$，使得 $\mathbf{M}_\alpha \mu \leqslant \mathbf{M}_\alpha \mu_N + \mathbf{M}_\alpha \nu_N$。由于 μ_N 是有限测度，定理 4.1 给出

$$\mathcal{H}^{n-\alpha}(\{x \in B_N(0) : \mathbf{M}_\alpha \mu_N(x) = \infty\}) = 0.$$

对于 $x \in B_N(0)$，当 $r < N$ 时，我们有 $\nu_N(B_r(x)) = 0$；而对于 $r \geqslant N$，有 $B_r(x) \subset B_{2r}(0)$，因此

$$\frac{\nu_N(B_r(x))}{r^{n-\alpha}} \leqslant \frac{\mu(B_{2r}(0))}{r^{n-\alpha}} \leqslant 2^{n-\alpha+1} K.$$

因此，$\mathbf{M}_\alpha \nu_N(x)$ 在 $B_N(0)$上是一致有界的，结论随即得证。 □

5. 双权重 Sobolev 不等式

现在我们汇总证明定理 2.15、2.16 和 2.17 所需的双权重工具。在此之前，我们先建立一些关于双权重 Sobolev 不等式的一般结果，这些结果本身也具有独立的意义。

我们首先讨论弱到强现象。特别地，余面积公式允许将弱端点 Sobolev 不等式提升为强不等式。事实上，设下述加权弱Sobolev不等式成立：

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{q,\infty}(w)} \leqslant C \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^1(v)} \tag{51}$$

对所有 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$、某个 $1 \leqslant q < \infty$ 以及权 (w, v)均成立。由光滑函数的稠密性，该不等式可扩展到加权 BV 空间(v)，因此适用于具有有限 v-周长的集合。对这样的集合 E，在（51）中取 $u = \mathbf{1}_E$（这需要类似于证明推论 2.5 时所采用的极限过程），即可得到等周不等式

$$w(E)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \ \mathrm{Per}(E, v).$$

现在令 $E_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |u(x)| > t\}$。那么，根据余面积公式，

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{q,1}(w)} = q \int_0^\infty w(E_t)^{\frac{1}{q}} \, \mathrm{d}t \leqslant C \int_0^\infty \mathrm{Per}(E_t, v) \, \mathrm{d}t = C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| \, v \, \mathrm{d}x.$$

当 $p > 1$ 时，前面的论证不再适用。在这种情况下，可以改用 Maz'ya 提出的截断方法 [32]（另见 [22]）。

定理 5.1。 设 $1 \leqslant p$、 $q < \infty$，并设 $(w$、 $v)$ 是一对满足弱*Sobolev*不等式的权重

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{q,\infty}(w)} \leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^{p}(v)} \tag{52}$$

对所有 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$ 均成立。因此，加权*Lorentz*不等式

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{q,p}(w)} \leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^{p}(v)} \tag{53}$$

对所有 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$ 也成立。

注5.2. • 截断方法在 Sobolev 空间理论中广为人知。然而，据我们所知，定理 5.1 在如此一般的层面上是新的，尤其是在同时涉及权和Lorentz 空间时。（参见 Koskela 和 Onninen [28] 关于有限区域上单权版本的工作）

- 可以验证，当左侧的密度替换为一般的局部有限博雷尔测度 μ 时，证明仍然成立。然而，右侧的密度必须关于 $\mathcal{L}$ 绝对连续；这一要求已隐含在余面积公式 (3.4) 中。

- 若 $p \leqslant q$，则不等式 (53) 推出相应的 Lebesgue Sobolev 不等式

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{q}(w)} \leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^{p}(v)},$$

  由 Lorentz 空间的通常嵌入，即 $\mathrm{L}^{q,p}(w) \subseteq \mathrm{L}^{q}(w)$。
- 子表示公式 (10) 表明弱有界性

$$\mathrm{I}_1 : \mathrm{L}^{p}(v) \to \mathrm{L}^{q,\infty}(w)$$

  蕴含不等式 (52)，进而自改进为 (53)。自然要问逆蕴含是否成立。

证明。 由于 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$ 蕴含 $|u| \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$ 以及 $|\nabla|u|| \leqslant |\nabla u|$，我们不妨假设 $u \geqslant 0$。对每个 $k \in \mathbb{Z}$，定义截断

$$\tau_k u(x) = \begin{cases} 0, & u(x) \leqslant 2^k, \\ u(x) - 2^k, & 2^k < u(x) \leqslant 2^{k+1}, \\ 2^k, & u(x) > 2^{k+1}. \end{cases}$$

由于 $\mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$ 在截断下保持不变，我们有 $\tau_k u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$ 以及

$$|\nabla \tau_k u| \leqslant |\nabla u|\, \mathbf{1}_{\{2^k < u \leqslant 2^{k+1}\}}.$$

此外，

$$\{x : u(x) > 2^{k+1}\} \subseteq \{x : \tau_k u(x) > 2^{k-1}\}.$$

我们现在将洛伦兹范数离散化：

$$\begin{aligned} \|u\|^p_{\mathrm{L}^{q,p}(w)} &= q\int_0^\infty t^{p-1} w(\{x : u(x) > t\})^{\frac{p}{q}}\, dt \\ &\leqslant c_{p,q} \sum_k 2^{(k+1)p} w(\{x : u(x) > 2^{k+1}\})^{\frac{p}{q}} \leqslant c_{p,q} \sum_k 2^{kp} w(\{x : \tau_k u(x) > 2^{k-1}\})^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

将弱Sobolev不等式（52）应用于 $\tau_k u$，并对 k求和，我们得到

$$\|u\|^p_{\mathrm{L}^{q,p}(w)} \leqslant C\sum_k \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tau_k u|^p v\,\mathrm{d}x \leqslant C\sum_k \int_{\{2^k<u\leqslant 2^{k+1}\}} |\nabla u|^p v\,\mathrm{d}x \leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p v\,\mathrm{d}x,$$

由此完成证明。 □

如引言中所述，算子 I_α 和 M_α 的双权不等式已得到广泛研究。关于 M_α 的测试条件完整刻画最初在 [48] 中给出，随后又在 [49, 50]中针对 I_α 给出。就本文的目的而言，我们将采用以下最优充分凸起条件，这些条件最初由 Pérez [36] 提出（另见 [39]）。我们将使用 [13], 中的改进版本，该版本采用 $\mathrm{B}_{p,q}$ 条件（见（35）），而非 B_p 条件，因此在非对角情形下给出更精确的结果 $p<q$。

引理 5.3（定理 3.4 [13]）。设 $1<p\leqslant q<\infty$, (w,v) 是一对权，且 Ψ 是一个凹杨函数，并满足 $\Psi\in \mathrm{B}_{p,q}$。若权满足

$$\sup_Q \ell(Q)^\alpha \mathcal{L}(Q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \Big(⨍_Q w\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}} \|v^{-\frac{1}{p}}\|_{Ł^\Psi(Q)} < \infty,$$

then

$$\|\mathrm{M}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^q(w)} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}^p(v)}.$$

引理 5.4（定理 2.1 [36], 定理 3.6 [13]）。设 $1<p\leqslant q<\infty$, (w,v) 是一对凹权，且 (Φ,Ψ) 是一对杨函数，并满足 $\Phi\in \mathrm{B}_{q',p'}$ 以及 $\Psi\in \mathrm{B}_p$。若权满足

$$\sup_Q \ell(Q)^\beta \mathcal{L}(Q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|w^{\frac{1}{q}}\|_{Ł^\Phi(Q)} \|v^{-\frac{1}{p}}\|_{Ł^\Psi(Q)} < \infty, \tag{54}$$

then

$$\|\mathrm{I}_\beta f\|_{\mathrm{L}^q(w)} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}^p(v)}.$$

注记 5.5。对于分数阶极大函数 M_α，只需对其中一个权进行凸起。相比之下，对于 I_α，两个权都必须进行凸起，正如例子 [13] 所展示的那样。在 $p<q$ 的情形下，可以将 I_α 的凸起分开处理（见 [13]）。然而，对于 $p=q$，目前尚不清楚能否将凸起分开。这个问题与 I_α 的双权弱型 $(p,\ p)$ 不等式密切相关。

最后，我们陈述一个一般定理，它将在定理 2.16 和 2.17 的证明中用到。该结果由引理 5.4 推出，而且似乎是新的。

定理 5.6。设 $0<\beta<n$、$1<p<\frac{n}{\beta}$ 和 $p\leqslant q\leqslant \frac{np}{n-\beta p}$。令 w 为一个权。*Then*

$$\|\mathrm{I}_\beta f\|_{\mathrm{L}^q(w)} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}^p\left((\mathrm{M}_{\alpha,\Theta}w)^{\frac{p}{q}}\right)}, \tag{55}$$

其中

$$\Theta(t)=t[\log(\mathrm{e}+t)]^{\frac{q}{p'}+\varepsilon},\quad \alpha=n-\frac{q}{p}(n-\beta p).$$

此外，这个不等式是尖锐的，因为当 $\varepsilon=0$ 时它不成立。

注 5.7. 对 p 和 q 的限制保证了 $0\leqslant\alpha<n$。

证明。 根据定理 5.4，只需验证数对 (w, v)，其中

$$v = (\mathrm{M}_{\alpha,\Theta} w)^{\frac{p}{q}},$$

$\bar{}$ $\bar{}$对于适当的杨函数 (Φ, Ψ) 满足条件 (54)，使得 $\Phi \in \mathrm{B}_{q',p'}$ 且 $\Psi \in \mathrm{B}_p$。定义

$$\Phi(t) = t^q [\log(\mathrm{e} + t)]^{\frac{q}{p'} + \varepsilon}.$$

Then

$$\bar{\Phi}(t) \approx \frac{t^{q'}}{[\log(\mathrm{e} + t)]^{\frac{q'}{p'} + \frac{q'}{q}\varepsilon}} \in \mathrm{B}_{q',p'},$$

并且由于 $\Phi(t^{1/q}) \approx \Theta(t)$，

$$\|w^{\frac{1}{q}}\|_{\text{Ł}^{\Phi}(Q)} \approx \|w\|^{\frac{1}{q}}_{\text{Ł}^{\Theta}(Q)}.$$

接下来，令 $r = 1 + \varepsilon$ 并设 $\Psi(t) = t^{rp'}$，从而 $\bar{\Psi}(t) \approx t^{(rp')'} \in \mathrm{B}_p$。（此处凸起函数的选择较灵活；幂隆起函数即可。）

采用这些选择并令 $\alpha = n - \frac{q}{p}(n - \beta p)$，我们估计

$$\begin{aligned}\ell(Q)^{\beta} \mathcal{L}(Q)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|w^{\frac{1}{q}}\|_{\text{Ł}^{\Phi}(Q)} \|v^{-\frac{1}{p}}\|_{\text{Ł}^{\Psi}(Q)} &\leqslant C \big(\ell(Q)^{\alpha} \|w\|_{\text{Ł}^{\Theta}(Q)}\big)^{\frac{1}{q}} \|(\mathrm{M}_{\alpha,\Theta} w)^{-\frac{1}{q}}\|_{\text{Ł}^{\Psi}(Q)} \\ &\leqslant C \|(\mathrm{M}_{\alpha,\Theta} w)^{\frac{1}{q}} (\mathrm{M}_{\alpha,\Theta} w)^{-\frac{1}{q}}\|_{\text{Ł}^{\Psi}(Q)} \leqslant C,\end{aligned}$$

因为对每个 $x \in Q$，

$$\ell(Q)^{\alpha} \|w\|_{\text{Ł}^{\Theta}(Q)} \leqslant (\mathrm{M}_{\alpha,\Theta} w)(x).$$

因此，条件 (54) 成立，从而得到

$$\|\mathrm{I}_{\beta} f\|_{\mathrm{L}^q(w)} \leqslant C \|f\|_{\mathrm{L}^p\left((\mathrm{M}_{\alpha,\Theta} w)^{\frac{p}{q}}\right)}.$$

为证明尖锐性，反设 (55) 对 $\varepsilon = 0$ 成立，即

$$\Theta(t) = t [\log(\mathrm{e} + t)]^{\frac{q}{p'}}.$$

令 $w = \mathbf{1}_B$，其中 $B = B_1(0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球。于是 (55) 给出

$$\|\mathrm{I}_{\beta} f\|_{\mathrm{L}^q(B)} \leqslant C \|f\|_{\mathrm{L}^p\left((\mathrm{M}_{\alpha,\Theta}(\mathbf{1}_B))^{\frac{p}{q}}\right)}.$$

对偶性论证表明

$$\|\mathrm{I}_{\beta} g\|_{\mathrm{L}^{p'}((\mathrm{M}_{\alpha,\Theta}(\mathbf{1}_B))^{-\frac{p'}{q}})} \leqslant C \|g\|_{\mathrm{L}^{q'}(B)}.$$

取 $g = \mathbf{1}_B$ 得到

$$\|\mathrm{I}_{\beta}(\mathbf{1}_B)\|_{\mathrm{L}^{p'}((\mathrm{M}_{\alpha,\Theta}(\mathbf{1}_B))^{-\frac{p'}{q}})} \leqslant C.$$

由于对于 $y \in B$ 有 $|x - y| \leqslant |x| + 1$，因此

$$\mathrm{I}_{\beta}(\mathbf{1}_B)(x) \geqslant \frac{v_n}{(1 + |x|)^{n - \beta}}.$$

此外，对于 $|x| > 2$，

$$\mathrm{M}_{\alpha,\Theta}(\mathbf{1}_B)(x) \approx \frac{(\log |x|)^{\frac{q}{p'}}}{|x|^{n - \alpha}}.$$

根据 α 的定义,

$$(n-\alpha)\frac{p'}{q}=(n-\beta)p'-n.$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{I}_\beta(\mathbf{1}_B)(x)^{p'}\mathrm{M}_{\alpha,\Theta}(\mathbf{1}_B)(x)^{-\frac{p'}{q}}\,\mathrm{d}x &\geqslant C\int_{|x|>2}\frac{|x|^{(n-\beta)p'-n}}{(1+|x|)^{(n-\beta)p'}\log|x|}\,\mathrm{d}x\\ &\geqslant C\int_{|x|>2}\frac{1}{|x|^n\log|x|}\,\mathrm{d}x=\infty,\end{aligned}$$

这就产生了矛盾。 □

定理 2.15的证明。该证明直接由定理2.1和5.3推出。令 $p>1$和 $u\in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$。利用恒等式 $(\mathrm{L}^p(w))^*=\mathrm{L}^{p'}(w^{1-p'})$，可得

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p(w)}=\sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|ug|\,\mathrm{d}x:\|g\|_{\mathrm{L}^{p'}(w^{1-p'})}=1\right\}.$$

固定这样的函数 g。由定理 2.1 和 Hölder 不等式,

$$\int_{\mathbb{R}^n}|ug|\,\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|\,\mathrm{M}_1 g\,\mathrm{d}x\leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(v)}\|\mathrm{M}_1 g\|_{\mathrm{L}^{p'}(v^{1-p'})}.$$

为了控制极大项，我们将定理 5.3 应用于带权重对 $(v^{1-p'},\ w^{1-p'})$的 $\mathrm{L}^{p'}(w^{1-p'})$ 上的分数阶极大算子。于是得到

$$\|\mathrm{M}_1 g\|_{\mathrm{L}^{p'}(v^{1-p'})}\leqslant C\|g\|_{\mathrm{L}^{p'}(w^{1-p'})},$$

前提是

$$\sup_Q \ell(Q)\left(\fint_Q v^{1-p'}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}\|w^{-(1-p')\frac{1}{p'}}\|_{\mathrm{L}^\Psi(Q)}<\infty$$

对某个 Ψ，满足 $\bar{\Psi}\in \mathrm{B}_{p'}$。由于 $-(1-p')\frac{1}{p'}=\frac{1}{p}$，此条件正是定理的假设。结合这些估计，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^n}|ug|\,\mathrm{d}x\leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p(v)},$$

这就完成了证明。

□

定理 2.16 的证明。 由子表示公式 (10)，只需验证

$$\mathrm{I}_1:\mathrm{L}^p\big((\mathrm{M}_{\alpha,\Theta}w)^{\frac{p}{q}}\big)\to\mathrm{L}^q(w),$$

其中 $\Theta(t)=t[\log(\mathrm{e}+t)]^{\frac{q}{p'}+\varepsilon}$ 适用于 $\varepsilon>0$。（弱型有界性已足够，但这对权满足强有界性的条件。）然而，由定理 5.6 及 $\beta=1$ 可知此结论成立。因此

$$\|u\|_{\mathrm{L}^q(w)}\leqslant C\|\mathrm{I}_1(|\nabla u|)\|_{\mathrm{L}^q(w)}\leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p\left((\mathrm{M}_{\alpha,\Theta}w)^{\frac{p}{q}}\right)}.$$

因此，所需结果成立。尖锐性，即我们不能取 $\epsilon = 0$，也可由定理 5.6 得出。事实上，假设

$$\|u\|_{\mathrm{L}^q(w)} \leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p\left((\mathrm{M}_{\alpha,\Theta}w)^{\frac{p}{q}}\right)}$$

在 $\Theta(t) = t[\log(\mathrm{e}+t)]^{\frac{q}{p'}}$ 下成立。于是我们可以取 $u = \mathrm{I}_1 f$，这将推出

$$\|\mathrm{I}_1 f\|_{\mathrm{L}^q(w)} \leqslant C\|\mathbf{R}f\|_{\mathrm{L}^p\left((\mathrm{M}_{\alpha,\Theta}w)^{\frac{p}{q}}\right)} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}^p\left((\mathrm{M}_{\alpha,\Theta}w)^{\frac{p}{q}}\right)}$$

其中我们用到了 Riesz 变换在 $\mathrm{L}^p\big((\mathrm{M}_{\alpha,\ \Theta}w)^{\frac{p}{q}}\big)$ 上有界，因为该权

$$(\mathrm{M}_{\alpha,\Theta}w)^{\frac{p}{q}} \in \mathrm{A}_1.$$

然而，由定理 5.6 证明中的例子可知，这个不等式并不成立。 □

定理 2.17 的证明。设 $1 < \alpha < n$。我们从卷积恒等式开始

$$\mathrm{I}_\alpha = \mathrm{I}_{\alpha-1} \circ \mathrm{I}_1.$$

然后我们应用定理 5.6 中 $\mathrm{I}_{\alpha-1}$ 的强有界性。设

$$\beta = \alpha - 1, \qquad p = \frac{n}{n-1}, \qquad q = \frac{n}{n-\alpha},$$

它们满足定理 5.6 的假设。在这种情况下，

$$n - \frac{q}{p}(n - \beta p) = n - \frac{n-1}{n-\alpha}\Big(n - \frac{(\alpha-1)n}{n-1}\Big) = 0.$$

因此，

$$\|\mathrm{I}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^{\frac{n}{n-\alpha}}(w)} = \|\mathrm{I}_{\alpha-1}(\mathrm{I}_1 f)\|_{\mathrm{L}^{\frac{n}{n-\alpha}}(w)} \leqslant C\|\mathrm{I}_1 f\|_{\mathrm{L}^{\frac{n}{n-1}}\left((\mathrm{M}_\Theta w)^{\frac{n-\alpha}{n-1}}\right)},$$

其中

$$\Theta(t) = t[\log(\mathrm{e}+t)]^{\frac{q}{p'}+\varepsilon} = t[\log(\mathrm{e}+t)]^{\frac{1}{n-\alpha}+\varepsilon}.$$

接下来，由定理 2.12，

$$\|\mathrm{I}_1 f\|_{\mathrm{L}^{\frac{n}{n-1}}\left((\mathrm{M}_\Theta w)^{\frac{n-\alpha}{n-1}}\right)} \leqslant C\|\mathbf{R}f\|_{\mathrm{L}^1\left((\mathrm{M}(\mathrm{M}_\Theta w)^{\frac{n-\alpha}{n-1}})^{\frac{n-1}{n}}\right)}.$$

由于 $\frac{n-\alpha}{n-1} < 1$，权 $(\mathrm{M}_\Theta w)^{\frac{n-\alpha}{n-1}}$ 属于 A_1（这可由定理 3.3 针对 Orlicz 极大算子的一个强化版本推出）。因此，

$$\mathrm{M}\big((\mathrm{M}_\Theta w)^{\frac{n-\alpha}{n-1}}\big)(x) \leqslant C\big[\mathrm{M}_\Theta w(x)\big]^{\frac{n-\alpha}{n-1}},$$

合并指数后得到

$$\|\mathrm{I}_\alpha f\|_{\mathrm{L}^{\frac{n}{n-\alpha}}(w)} \leqslant C\|\mathbf{R}f\|_{\mathrm{L}^1\left((\mathrm{M}_\Theta w)^{1-\frac{\alpha}{n}}\right)}.$$

□

6. 单权 Sobolev 不等式

我们回到单权 Sobolev 不等式 (5),

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} w \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p w^{1-\frac{p}{n}} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{56}$$

其中我们假设 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < n$ 和 $p^* = \frac{np}{n-p}$。对于固定的 $1 \leqslant p < n$，令$\mathcal{W}_p$ 表示满足对所有 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$ 不等式 (56) 均成立的权类。

类 A_{p^*} 由满足$_{n'}$的权组成

$$\sup_Q \left(⨍_Q w \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(⨍_Q w^{-\frac{p'}{p^*}} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

刻画了 Riesz 势 I_1, 的加权有界性，即 at

$$\mathrm{I}_1 : \mathrm{L}^p(w^{1-\frac{p}{n}}) \to \mathrm{L}^{p^*}(w) \iff w \in \mathrm{A}_{\frac{p^*}{n'}}, \qquad 1 < p < n,$$

and

$$\mathrm{I}_1 : \mathrm{L}^1(w^{1-\frac{1}{n}}) \to \mathrm{L}^{\frac{n}{n-1},\infty}(w) \iff w \in \mathrm{A}_1.$$

由子表示公式 (10)（以及弱端点情形下的定理 5.1），我们有

$$\mathrm{A}_{\frac{p^*}{n'}} \subseteq \mathcal{W}_p.$$

虽然 A_{p^*} 刻画了 I_1, 的有界性，但一般而言，它是否也能刻画加权 Sobolev 不等式 (5) 尚不明确。

如引言中所述，另一种方法采用 David 和 Semmes [14]定义的强 A_∞ 权。强 A_∞ 权类有时记为 A_∞^*，由所有倍增权 w 组成，这些权满足拟距离函数

$$\delta(x,y) = w(B_{x,y})^{\frac{1}{n}},$$

其中 $B_{x,\ y}$ 表示包含 x和 y的最小欧几里得球，它等价于 $\mathbb{R}^n$上的一个度量。这意味着存在一个正常数 C 以及定义在$\mathbb{R}^n$ 上的距离函数 d，使得

$$C^{-1}\delta(x,y) \leqslant d(x,y) \leqslant C\delta(x,y).$$

实际上，这个条件意味着强 A_∞ 权属于 A_∞ 类（见 [52,命题 3.4] 和 [19]）。此外，可以证明 $\mathrm{A}_1 \subseteq \mathrm{A}_\infty^*$，但对于每个 $p > 1$，都存在一个并非强 A_∞权的 A_p 权；有关更多详情，请参见 [52] 和 [14]。

David 和 Semmes 在他们的研究中证明，若 $w \in \mathrm{A}_\infty^*$，则加权 Sobolev 不等式 (5) 成立。为证明在 $1 < p < n$ 范围内的不等式，他们证明了一个与 (10) 思路相同的加权次表示公式；对于 $p = 1$ 的情形，则使用了相应的加权等周不等式。

因此,

$$\mathrm{A}_{\frac{p^*}{n'}} \cup \mathrm{A}_\infty^* \subseteq \mathcal{W}_p.$$

另一方面，当 w 满足倍增条件（记为 $w \in \mathrm{DB}$）时，属于 A_∞ 实际上是一个必要条件。为此，用一个截断函数 φ 测试（5），该函数等于

1 在球 B上，支集包含于 $2B$中，并满足 $|\nabla\varphi| \leqslant C/r,$ ，其中 r 是 B的半径。于是

$$\left(\int_B w\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|\,w\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|^p\,w^{1-\frac{p}{n}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{C}{r}\left(\int_{2B} w^{1-\frac{p}{n}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

改写该估计可得

$$\fint_B w\,\mathrm{d}x \leqslant C\left(\fint_B w^{\frac{p}{p^*}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p^*}{p}}.$$

这表明 w^{p^*} 属于反向霍尔德类 RH_{p^*}，而众所周知，该类等价于 A_∞ （见 [57, 推论 6.2]）。特别地，我们已经证明

$$\mathcal{W}_p \cap \mathrm{DB} \subseteq \mathrm{A}_\infty.$$

作为一条备注，我们指出，与无权情形一样，只需证明与 $p = 1$对应的端点不等式。因此，我们记录以下定理，其证明沿用无权情形中的论证（见 [15, 第 4] 章；另见 [40,定理 1.21]）。

定理6.1。 若 w 是一个权，使得(5)对 $p = 1$及所有 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$成立，则该不等式对任意 $1 < p < n$ 及所有 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$均成立。也就是说， $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_p$ 对 $1 < p < n$。

证明。 设 w 为一个权，使得

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{\frac{n}{n-1}}(w)} \leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^1(w^{1-\frac{1}{n}})}, \qquad u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n). \tag{57}$$

固定 $1 < p < n$ 并令 $q = \frac{p^*}{n'} > 1$。设 $u \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$ ，且不失一般性地假设 u 不恒为零。由于 u有界且 $q > 1$，我们有 $|u|^q \in \mathrm{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$ ，并且

$$|\nabla|u|^q| \leqslant |u|^{q-1}|\nabla u|.$$

将端点不等式 (57) 应用于 $|u|^q$ ，得到

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} w\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n'}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|u|^q)^{n'} w\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n'}} \leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1}|\nabla u| w^{1-\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \\ &= C\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1} w^{\frac{1}{p'}} |\nabla u| w^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p w^{1-\frac{p}{n}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(q-1)p'} w\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

由于

$$(q-1)p' = \left(\frac{p^*}{n'} - 1\right)p' = p^*,$$

重新整理不等式，得到

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} w\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n'}-\frac{1}{p'}} \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p w^{1-\frac{p}{n}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},$$

这恰好就是所需的索博列夫不等式，因为

$$\frac{1}{n'} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p^*}.$$

□

最后，所有这些结果引出了以下猜想。

猜想 6.2。 假设 $w \in A_\infty$。那么 Sobolev 不等式 (5) 成立，即 $A_\infty \subseteq \mathcal{W}_1$。

要证明猜想 (6.2)，只需证明 A_∞ 足以推出弱端点不等式

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1},\infty}(w)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^1(w^{1-\frac{1}{n}})}.$$

参考文献

[1] A. Alvino，《洛伦兹空间中的索博列夫不等式》，《意大利数学联合会通报 A》（5）14（1977），第1期，148–156页。[2]S. Bortz、M. Gossett、J. Kasel 和 K. Moen，《加权有界变差再探》，预印本 arXiv：2510.14105。[3] J. Bourgain、H. Brezis 和 P. Mironescu，《再看索博列夫空间》，《最优控制与偏微分方程》，439–455页。[4] J. Bourgain、H. Brezis 和 P. Mironescu，关于 W^s 的极限嵌入定理，^{p} 当 $s \uparrow 1$ 时及其应用，第87卷，2002年，献给 Thomas H. Wolff 的纪念专辑，77–101页。[5] C. S. Camfield，《加权欧几里得空间与度量测度空间中的 BV 范数比较》。博士学位论文，辛辛那提大学，2008年。[6] M.J. Carro、C. Pérez、F. Soria 和 J. Soria，《极大函数与加权不等式的控制：分数阶积分算子的情形》。《印第安纳大学数学杂志》54（2005），第3期，627–644页。[7] S. Y. A. Chang、J. M. Wilson 和 T. H. Wolff，《关于薛定谔算子的若干加权范数不等式》。《Commentarii Mathematici Helvetici》60（1985），217–286页。[8] S. Chanillo 和 R. Wheeden，分数阶积分和 Sobolev 不等式的 L^p 估计及其在薛定谔算子中的应用，《偏微分方程通讯》10（1985），1077–1116页。[9] G. Comi 和 G. Stefani，《分布方法处理分数阶Sobolev空间与分数阶变差：渐近性 I》。《Revista Matemática Complutense》36，491–569页（2023）。[10] G. Comi 和 G. Stefani，《分布方法处理分数阶Sobolev空间与分数阶变差：渐近性 II》。《巴黎科学院数学报告》360（2022），589–626页。[11] D. Cruz-Uribe 和 C. Pérez，《通过极大算子的双权外推》。《泛函分析杂志》，20（2000），1–17页。[12] D. Cruz-Uribe、J.M. Martell 和 C. Pérez，《权、外推与 Rubio de Francia 理论》。《算子理论：进展与应用》，215，Birkhäuser/Springer，巴塞尔，2011年，xiv+280页。[13] D. Cruz-Uribe 和 K. Moen，《分数阶 Muckenhoupt-Wheeden 定理及其推论》。《积分方程与算子理论》76（2013），421–446页。[14] G. David 和 S. Semmes，《强 A_∞ 权、Sobolev 不等式与拟共形映射》。《纯粹与应用数学讲义》，122，Marcel Dekker 出版社，纽约，1990年，101–111页。[15] L. Evans 和 R. Gariepy，《测度论与函数的精细性质》，修订版第2版，《数学教材》，CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2025年，xi+327 页。[16] C. Fefferman，《不确定性原理》。《美国数学会通报》9（1983），129–206页。[17] A. Fiorenza 和 M. Krbec，《极大算子的定义域与值域》。《名古屋数学杂志》（2000），43–61页。[18] B. Franchi、C. Pérez 和 R. Wheeden，《向量场与非倍增测度的锐几何庞加莱不等式》。《伦敦数学会会刊》（3）80（2000），第3期，665–689页。[19] F. W. Gehring，拟共形映射的偏导数的 L^p -可积性，《Acta Mathematica》130（1973），265–277页。[20] E. Harboure、R. A. Macías 和 C. Segovia，《权类的外推结果》。《美国数学杂志》110（3）：383–397，1988年。

[21] P. Hajłasz，《调和分析笔记》，https://sites.google.com/view/piotr-hajasz/teaching/lecture-notes。[22] P. Hajłasz，《Sobolev 不等式、截断方法与 John 域》。载于：《分析论文集》，《于韦斯屈莱大学数学与统计系报告》83，于韦斯屈莱大学，2001年，109–126页。[23] R. Hurri-Syrjänen、J. Martínez、C. Pérez 和 A. Vähäkangas，《带权分数阶庞加莱-索伯列夫不等式中的 BBM 现象》。《国际数学研究通知》，2022年。[24] T. Hytönen 和 C. Pérez，极大奇异积分算子的 $L(\log L)^{\epsilon}$ 端点估计，《数学分析及其应用杂志》428（2015），第1期，605–626页。[25] C. Hoang 和 K. Moen，《稀疏算子的 Muckenhoupt-Wheeden 猜想》。《巴塞尔数学档案》109（2017），49–58页。[26] C. Hoang、K. Moen 和 C. Pérez，《子表示公式的新视角》。《数学》4（2025），V2，293–309页。专刊：纪念 David R. Adams 的《偏微分方程的分析与应用》。[27] C. Hoang、K. Moen 和 C. Pérez，《致敬 Guido Weiss 及其对圣路易斯团队的领导：奇异积分的交换子与 Sobolev 不等式》。《应用与数值调和分析》，Birkhäuser，Cham，2025年，293–311页，特刊：“Guido Weiss 的数学遗产”。[28] P. Koskela 和 J. Onninen，《通过截断得到的锐不等式》。《数学分析及其应用杂志》278（2003），第2期，324–334页。[29] J. Kinnunen 和 E. Saksman，《分数阶极大函数的正则性》。《伦敦数学会通报》，第35卷（2003），529–535页。[30] M. Lacey、K. Moen、C. Pérez 和 R. Torres，《加权 L^p 空间上分数阶算子的锐加权界及相关 Sobolev 不等式》。《泛函分析杂志》259（2010），1073–1097页。[31] E. H. Lieb 和 M. Loss，《分析》，第二版，《数学研究生教材》19，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2001年。[32] V. Maz’ya，《Sobolev 空间及其在椭圆型偏微分方程中的应用》。第二版，修订增补版。《数学科学基础丛书》，342。[33] N. Meyers 和 W. Ziemer，《有界变差函数的庞加莱与维尔廷格型积分不等式》。《美国数学杂志》99（1977），第6期，1345–1360页。[34] B. Muckenhoupt 和 R. Wheeden，《分数阶积分的加权范数不等式》。《美国数学会汇刊》192（1974），261–274页。[35] K. Myyryläinen、C. Pérez 和 J. Weigt，《通过等周不等式得到的加权分数阶庞加莱不等式》。《变分法与偏微分方程》63（2024），第8期，论文205，32页。[36] C. Pérez，《关于势型与分数阶极大算子的两个加权不等式》。《印第安纳大学数学杂志》43（1994），第2期，663–683页。[37] C. Pérez，《奇异积分算子的加权范数不等式》。《伦敦数学会杂志》（2）49（1994），第2期，296–308页。[38] C. Pérez，《锐 L^p–加权 Sobolev 不等式》。《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）45（1995），1–16页。[39] C. Pérez，《关于不同权的加权 L^p 空间之间 Hardy-Littlewood 极大算子有界性的充分条件》。《伦敦数学会会刊》（3）71（1）：135–157，1995年。[40] C. Pérez 和 E. Rela，《退化庞加莱-索伯列夫不等式》。《美国数学会汇刊》372（2019），6087–6133页。[41] C. Pérez 和 E. Rela，《致敬 Pola Harboure：等周不等式与 HMS 外推定理》。《阿根廷数学联合会评论》66（2023），第1期，265–280页。[42] A. Ponce，《椭圆型偏微分方程、测度与容量：从泊松方程到非线性 Thomas-Fermi 问题》。《EMS 数学论著丛书》23，欧洲数学会（EMS），2016年。[43] M. Reed 和 B. Simon，《现代数学物理方法（第二卷）：傅里叶分析、自伴性》，学术出版社，纽约，1975年。[44] M.C. Reguera，《关于 Muckenhoupt-Wheeden 猜想》。《数学进展》227（2011），1436–1450页。[45] M.C. Reguera 和 C. Thiele，Hilbert变换不将 $L^1(\mathrm{M}w)$ 映射到 $L^{1,\infty}(w)$，《数学研究快报》19（2012），1–7页。

[46] E. Sawyer，分数次极大算子的加权范数不等式，1980 年调和分析研讨会（加拿大魁北克省蒙特利尔，1980），第 283–309 页，《美国数学会会议论文集》，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州；1981 年出版。[47] E. Sawyer，某些极大算子和积分算子的双权范数不等式，载于《调和分析》（明尼苏达州明尼阿波利斯，1981），《数学讲义》第 908 卷，第 102–127 页。Springer，柏林，1982 年。[48] E. Sawyer，极大算子双权范数不等式的刻画，《数学研究》75（1982），1–11。[49] E. Sawyer，分数阶积分的双权弱型不等式，《美国数学会汇刊》281（1984），339–345。[50] E.Sawyer，分数阶积分和泊松积分双权范数不等式的刻画，《美国数学会汇刊》308（1988），533–545。[51] A. Schikorra、D. Spector 和 J.V. Schaftingen，一个 L^1 型 *Riesz* 势估计，《伊比利亚美洲数学杂志》33（2017），第 1 期，291–303。[52] S. Semmes，双利普希茨映射与强 A_∞ 权，《芬兰科学院年刊：数学》18，1993，211–248。[53] B. Simon，《作为二次型定义的哈密顿算子的量子力学》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，纽约州，1970 年。[54] D. Spector，一种最优索伯列夫嵌入 L^1，《泛函分析杂志》279（2020），26 页。[55] D. Spector，关于分数次梯度的一个非不等式，《葡萄牙数学》76（2019），第 2 期，第 153–168 页。[56] Stein, E.M.《调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿（1993）。[57] J. Strömberg 和 R. Wheeden，加权空间上的分数阶积分 H^p 与 L^p 空间，《美国数学会汇刊》287（1985），第 1 期，293–321。[58] G. Talenti，索伯列夫不等式中的最佳常数，《纯粹与应用数学年刊》（第 4 辑）110（1976），353–372。[59] B. Turesson，《非线性位势理论与加权索伯列夫空间》，《数学讲义》第 1736 卷，Springer 出版社，柏林，2000 年，xiv +173 页。SIMON BORTZ，数学系，阿拉巴马大学，塔斯卡卢萨，AL 35487，美国电子邮件地址：sbortz@ua.edu KABE MOEN，数学系，阿拉巴马大学，塔斯卡卢萨，AL 35487，美国电子邮件地址：kabe.moen@ua.edu ANDREA OLIVO，数学系，精确与自然科学学院，布宜诺斯艾利斯大学及 IMAS-CONICET，PABELLÓN I（C1428EGA），布宜诺斯艾利斯市，阿根廷电子邮件地址：aolivo@dm.uba.ar CARLOS PÉREZ，数学系，巴斯克大学、IKERBASQUE 及 BCAM，毕尔巴鄂，西班牙电子邮件地址：cperez@bcamath.org EZEQUIEL RELA，数学系，布宜诺斯艾利斯大学及 IMAS- CONICET

-

UBA电子邮件地址：erela@dm.uba.ar