arXiv:2603.05408v1 [math-ph] 5 Mar 2026

克拉夫丘克多项式的吉布斯现象

约翰·卡利南和伊丽莎白·杨

Abstract. 我们研究了利用克拉夫丘克多项式对符号函数进行的傅里叶逼近。我们给出了数值证据，表明该逼近的吉布斯现象不同于经典吉布斯常数；这与其他正交多项式族的情形形成对比。我们还通过明确证明 $\lim_{N\to\infty} \mathcal{F}'_N(0) = \log 4$，表明该逼近的陡峭度 $\mathcal{F}'_N(0)$ 有界。这同样不同于经典正交多项式的逼近，后者的陡峭度已被证明会随着次数增加而无界。

1. 引言

1.1. 动机。 设 $I \subseteq \mathbf{R}$ 为一个实区间，$\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为定义在 I 上的一组连续函数，并且它们关于内积 $\langle\ ,\ \rangle$正交。如果$f\colon\ I \to \mathbf{R}$ 是一个实值函数，则 f的第 N阶傅里叶逼近 $\mathcal{F}_N$ 在 I 上按点定义为

$$\mathcal{F}_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \mathrm{Proj}_{p_n}(f)\, p_n(x),$$

其中 Proj 表示使用 $\langle\ ,\ \rangle$进行正交投影。经典的吉布斯现象出现在用三角傅里叶级数逼近不连续函数时。我们立即考虑一个能说明本项目的特例。设 a 为正实数，且设 $I = [-a, a]$。令 $f = \mathrm{sgn}\colon\ I \to \mathbf{R}$为符号函数。

例 1。 若 $a = \pi$ 且 $p_n(x) = \sin(nx)$，则

$$\mathcal{F}_N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x).$$

例 2。 若 $a = 1$ 且 T_n 是第 n 个切比雪夫多项式，则根据 [4, 公式 (3.10)],

$$\mathcal{F}_N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} T_{2n-1}(x).$$

类似地，如 [4, 公式 (6.14)], 所示，若 p_n 是第 n 个勒让德多项式，则

$$\mathcal{F}_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \left(2 - \frac{1}{2n}\right) p_{2n-2}(0) p_{2n-1}(x).$$

Key words and phrases. 正交多项式，吉布斯现象。

在第一个例子中，可以通过标准练习证明，当 $N \to \infty$ 和 $x \to 0^+$ 时，$\mathcal{F}_N(x)$ 会以一个常数 γ“过冲”于值 1 之上，该常数明确表示为

$$\gamma = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t \approx 1.179.$$

我们可以问，例 2 中的级数是否也存在类似的吉布斯常数。事实上，文章 [1], [3], 和 [7] 表明，若用切比雪夫、盖根鲍尔、埃尔米特、雅可比、拉盖尔或勒让德多项式来逼近符号函数（或在 $I = \mathbf{R}$ 下采用适当的变体），那么每个这样的级数都有一个相应的吉布斯常数，且其值恰好为 γ。对于上述列出的每种情形，包括三角情形，逼近函数在 0 处的陡峭度 $\mathcal{F}'_N(0)$也都无界（在 $N \to \infty$ 中； [7, §3.2] 作者明确展示了陡峭度如何随一参数冈贝尔多项式族中的参数而变化）。

上述每个傅里叶级数的一个共同特点是， $\mathcal{F}'_N(x)$可以通过克里斯托费尔-达布恒等式 [11, 定理 3.2.2]求和。例如，若 $H_n(x)$表示第 n 个埃尔米特多项式（定义在实直线 $\mathbf{R}$ 上），那么

$$\mathcal{F}_{2N+1}(x) = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2n+1} \right) \frac{H_{2n}(0) H_{2n+1}(x)}{\|H_{2n}\|^2}.$$

利用求导法则 $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$，我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'_{2N+1}(x) &= 2 \sum_{n=0}^{N} \frac{H_{2n}(0) H_{2n}(x)}{\|H_{2n}\|^2} \\ &= \frac{(-1)^N}{2^{2N} N! \sqrt{\pi}} \frac{H_{2N+1}(x)}{x}, \end{aligned}$$

其中，我们利用克里斯托费尔-达布公式以及 $H_{2n}(0)$ 的已知值对求和进行了化简；完整推导见 [1, §3] 。这一最后表达式从两个角度来看都是有用的。首先，利用厄米多项式零点的已知估计 [11, (6.31.20)、(6.31.23)], ，可以将 $H_{2N+1}(x)$ 的最小临界点 θ_N 近似为

$$\frac{\pi}{\sqrt{2N+1}} < \theta_N < \frac{\pi}{\sqrt{2N+1}} \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{2\pi}{2N+1} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{-1/2}}_{\to 1^+ \text{ as } N \to \infty}.$$

其次，根据微积分基本定理，我们可以写成

$$\mathcal{F}_N(\theta_N) = \frac{(-1)^N}{2^{2N} N! \sqrt{\pi}} \int_0^{\theta_N} \frac{H_{2N+1}(x)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

然后可以证明，利用厄米多项式的标准近似，当 $N \to \infty$ 时，该值趋近于 γ。

这就引出了一个问题：在所有对符号函数的连续逼近中，这个吉布斯常数是否具有“普适性”？本文表明，克拉夫丘克多项式会出现吉布斯现象，但反映过冲的实际常数有所不同。我们还证明，逼近的陡峭度有界，且界为 $N \to \infty$。

1.2. 克拉夫丘克多项式。 固定一个正整数 N，并设 p 和 q 为满足 $p+q=1$ 的正实数。在区间 $[0,N]$ 上，定义克拉夫丘克多项式 $\{K_n^{(p)}\}_{n=0}^N$ 如下：

$$K_n^{(p)}(x;N)=\sum_{v=0}^{n}(-1)^{n-v}\binom{N-x}{n-v}\binom{x}{v}p^{n-v}q^v.$$

定义权函数 $w_N(x)=\binom{N}{x}p^xq^{N-x}$。于是，$K_n^{(p)}(x;N)$ 关于离散内积在 $[0,N]$ 上正交

$$\langle f,g\rangle=\sum_{y=0}^{N}f(y)g(y)w_N(y).$$

现在我们立即特化到本文将要研究的情形。

从现在起，我们取 N 为偶函数，并令 $p=1/2$；对于 $p\neq 1/2$ 的情形，见第 2 节。我们考虑平移后的多项式

$$k_n(x;N):=K_n^{(1/2)}(x+N/2;N)=\frac{1}{2^n}\sum_{v=0}^{n}(-1)^{n-v}\binom{N/2-x}{n-v}\binom{N/2+x}{v}\tag{3}$$

在区间 $I_N=[-N/2,N/2]$ 上关于平移后的内积。我们研究用 $k_n(x;N)$对符号函数进行的傅里叶展开。

经典正交多项式的一个共同特征是它们满足斯图姆-刘维尔微分方程（见 [11, §8.61]），而克拉夫丘克多项式——它们在离散集上正交——则不满足。正是这一微分方程使得人们能够将傅里叶逼近写成其导数可用克里斯托费尔-达布公式求和的形式。克拉夫丘克多项式的离散性质表明，我们的方法将基于组合学而非微积分。事实上，我们将借助超卡特兰数推导出

$$\mathcal{F}_N(x)=\sum_{n=0}^{N-2}\frac{k_n(0;N)k_{n+1}(x;N)}{\|k_n(-;N)\|^2},$$

这与经典多项式逼近的形式非常相似。关于其他基下傅里叶展开的进一步讨论，见第5节。

1.3. 主要结果。 回顾一下，对符号函数的傅里叶逼近的陡峭度为$\mathcal{F}'_N(0)$，并且对于经典正交多项式，当 $N\to\infty$时陡峭度是无界的。我们的主要结果是，对于克拉夫丘克多项式，情况并非如此。

定理4. 沿用上述全部记号，我们有

$$\lim_{N\to\infty}\mathcal{F}'_N(0)=\log 4.$$

在图1中，我们绘制了符号函数的39次克拉夫丘克逼近（绿色）与傅里叶正弦逼近（最高频率为79）的对比。原点处的斜率为

$$\mathcal{F}'_{40}(0)=\frac{3637485804655193}{2671465728531600}\approx 1.3616,$$

同时 $\log 4\approx 1.3862$。

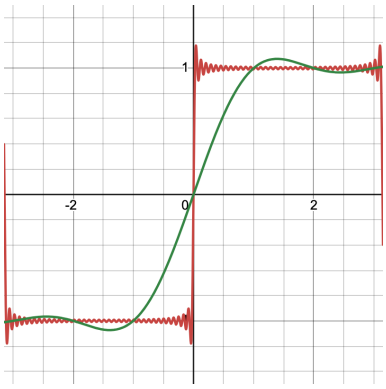

FIGURE 1. 克拉夫丘克与三角逼近

计算机计算表明，过冲也保持有界，即，Krawtchouk 多项式也存在吉布斯现象，但我们无法给出严格证明。我们将在第 5 节解释证明这一结果的困难。这里，我们改为给出一些数值数据来支持这一断言。设 θ_N 为 $\mathcal{F}_N(x)$ 的最小正临界点。于是我们发现

N	$\mathcal{F}_N(\theta_N)$
10	$\approx$ 1.101182
50	$\approx$ 1.071891
100	$\approx$ 1.068784
200	$\approx$ 1.067271
400	$\approx$ 1.066524
500	$\approx$ 1.066375
600	$\approx$ 1.066277

1.4. 论文概述。 在下一节中，我们将证明，只需研究 $p = 1/2$ 时的傅里叶逼近，因为我们会证明，对于所有 $0 < p < 1$，$\mathcal{F}_N^{(p)}(x) = \mathcal{F}_N(x)$。接着，我们推导出符号函数的克拉夫丘克傅里叶逼近，并说明它与其他正交基中的逼近有显著差异。正因如此，我们无法确定 $\lim_{N\to\infty} \mathcal{F}_N(\theta_N)$ 的闭式表达。随后在第 4 节中，我们证明定理4。所有计算均使用 PARI/GP [10] 完成，数值精度设为 500 位。例如，逼近 $\mathcal{F}_{600}(\theta_{600}) \approx 1.066277$ 在普通笔记本电脑上耗时 89 分钟。我们使用 Desmos 图形计算器 [2] 绘制图1。

1.5. 致谢。 第二作者感谢巴德学院 AIMS⁺项目，本研究即在该项目中开展。

2. POLYNOMIAL INTERPOLATION AND INDEPENDENCE OF p

符号函数：$[-N/2, N/2] \to \mathbf{R}$ 为我们提供了平面上的点集 $\mathcal{P}_N$：

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N &= \{(-N/2,-1),\dots,(-1,-1),(0,0),(1,1),\dots,(N/2,1)\} \\ &= \{(i - N/2, \operatorname{sgn}(i - N/2))\}_{i=0}^{N}. \end{aligned} \tag{5}$$

固定 $p \in (0,1)$。本节的目标是证明 $\mathcal{F}_N^{(p)}(x)$与 p无关。我们将通过证明 $\mathcal{F}_N^{(p)}(x)$是 $\mathcal{P}_N$的 $N+1$ 个点上次数为 $N-1$ 的（唯一）插值多项式来做到这一点。因此，我们约定将研究限制在 $p = 1/2$上。

命题 6。按照上述所有记号， $\mathcal{F}_N^{(p)}(x)$ 是一个次数为 $N-1$的多项式，它插值于 $\mathcal{P}_N$ 中的各点。

证明。由于符号函数 sgn 是奇函数，偶数次$k_n^{(p)}(x)$的傅里叶系数全为零。由于 N 是偶数，因此出现在 $\mathcal{F}_N^{(p)}(x)$ 中的克拉夫丘克多项式的最高次数为 $N-1$。因此，$\mathcal{F}_N^{(p)}(x)$的次数为 $N-1$。由于 $\mathcal{F}_N^{(p)}(x)$是奇函数，我们只需证明对于$m = 1,\ldots, N/2$， $\mathcal{F}_N^{(p)}(m) = 1$ 。

固定 $m \in \{1,\ldots,N/2\}$。我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_N^{(p)}(m) &= \sum_{n=0}^{N} \frac{\langle \mathsf{sgn}, k_n^{(p)}(-;N)\rangle}{\|k_n^{(p)}(-;N)\|^2} k_n^{(p)}(m;N) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{y=-N/2}^{N/2} \mathsf{sgn}(y) k_n^{(p)}(y;N) w_N(y+N/2) \right) \frac{k_n^{(p)}(m;N)}{\|k_n^{(p)}(-;N)\|^2} \\ &= \sum_{y=-N/2}^{N/2} \mathsf{sgn}(y) w_N(y+N/2) \sum_{n=0}^{N} \frac{k_n^{(p)}(y;N) k_n^{(p)}(m;N)}{\|k_n^{(p)}(-;N)\|^2}.\end{aligned}$$

记作

$$K_N(x,y) = \sum_{n=0}^{N} \frac{k_n^{(p)}(y;N) k_n^{(p)}(x;N)}{\|k_n^{(p)}(-;N)\|^2}.$$

那么， $K_N(x,\ y)$ 是（平移后的）克里斯托费尔-达布核。根据 [11, 定理 3.1.4], ，我们有

$$K_N(x,y) w_N(y+N/2) = \delta_{xy}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_N^{(p)}(m) &= \sum_{y=-N/2}^{N/2} \mathsf{sgn}(y) w_N(y+N/2) K_N(m,y) \\ &= \sum_{y=-N/2}^{N/2} \mathsf{sgn}(y) \delta_{my} \\ &= \mathsf{sgn}(m) = 1.\end{aligned}$$

□

如上所述，命题 6 立即表明，由于 $\mathcal{F}_N^{(p)} < |\mathcal{P}_N|$的次数， $\mathcal{F}_N^{(p)}(x)$ 与 p 无关。因此，本文余下部分均令 $p = 1/2$，并省略上标“(1/2)”的记号。作为本节的结尾，我们给出 $\mathcal{F}_N(x)$ 的另一种形式。虽然这种形式更容易表述，但对于傅里叶分析而言用处较小。不过，它将进一步凸显克拉夫丘克多项式所体现的、与组合学之间的深刻联系。

设 $I_N(x)$ 为 $\mathcal{P}_N$ 中各点所对应插值多项式的拉格朗日形式。那么

$$I_N(x) = \sum_{i=0}^{N} \mathsf{sgn}(i - N/2)\ell_i(x),$$

其中

$$\ell_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{N} \frac{x - (j - N/2)}{i - j}.$$

命题7。 采用上述所有记号，我们有

$$I_N(x) = \sum_{i=0}^{N} \mathsf{sgn}(i - N/2)\binom{N/2 + x}{i}\binom{N/2 - x}{N - i}.$$

证明。 由于 $I_N(x) = \sum_{i=0}^{N}$ 符号函数$(N/2 - i)\ell_i(x)$，因此只需确定 $\ell_i(x)$。根据定义：

$$\begin{aligned}
\ell_i(x) &= \prod_{j=0, j\neq i}^{N} \frac{x - (j - N/2)}{i - j} \\
&= \frac{(x + N/2)(x + N/2 - 1)\cdots(x + N/2 - i + 1)(x + N/2 - i - 1)\cdots(x - N/2)}{i!(N - i)!(-1)^{N-i}} \\
&= \frac{\binom{N/2+x}{i} i! \binom{N/2-x}{N-i} (N - i)!(-1)^{N-i}}{i!(N - i)!(-1)^{N-i}} \\
&= \binom{N/2 + x}{i}\binom{N/2 - x}{N - i}.
\end{aligned}$$

证毕。 □

注 8。 数值实验表明， $I_N(x)$的首项系数（因此， $\mathcal{F}_N(x)$的首项系数）为

$$\frac{(-1)^{(N-2)/2}}{(N-1)!} C\left(\frac{N-2}{2}\right),$$

其中 $C(n)$ 是第 n 个卡特兰数。有关与卡特兰数的进一步联系，参见附录 A。

3. The Approximation

回顾引言可知，多项式 $\{k_n(x; N)\}_{n=0}^{N}$ 在 $[-N/2, N/2]$ 上关于平移离散内积是正交的

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \sum_{y=-N/2}^{N/2} f(y)g(y)w_N(y + N/2) \\
&= \frac{1}{2^N} \sum_{y=-N/2}^{N/2} f(y)g(y)\binom{N}{y + N/2}.
\end{aligned}$$

取 f =符号函数，可得

$$\mathcal{F}_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\langle \mathsf{sgn}(x), k_n(x; N)\rangle}{\|k_n(x; N)\|^2} k_n(x; N). \tag{9}$$

直接应用内积可得

$$\|k_n(x;N)\|^2 = 4^{-n}\binom{N}{n}. \tag{10}$$

由于符号函数 sgn 为奇函数， w_N 为偶函数，而 k_n 在奇数/偶数阶时分别为奇/偶函数，因此

$$\langle \mathsf{sgn}(x), k_n(x;N)\rangle = \begin{cases} \frac{2}{2^N}\sum_{y=1}^{N/2} k_n(y;N)\binom{N}{N/2+y} & \text{if } n \text{ is odd, and} \\ 0 & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases} \tag{11}$$

本节余下部分将致力于确定 $\mathcal{F}_N(x)$ 的显式表达式，该表达式对应于用其他族的正交多项式对符号函数进行的傅里叶逼近。

命题 12. 在上述所有记号下，我们有

$$\mathcal{F}_N(x) = \frac{1}{2^{N-1}}\binom{N}{N/2}\sum_{n=0}^{N-2}\frac{k_n(0;N)k_{n+1}(x;N)}{\|k_n(-;N)\|^2}.$$

证明。 将公式（11）应用于公式（9），可写为

$$\mathcal{F}_N(x) = \frac{1}{2^{N-1}}\sum_{\substack{n=0\\ n \text{ odd}}}^{N}\frac{1}{\|k_n(-;N)\|^2}\sum_{y=1}^{N/2} k_n(y;N)\binom{N}{N/2+y}k_n(x;N). \tag{13}$$

现在考虑乘积 $k_n(y;N)\binom{N}{N/2+y}$:

$$k_n(y;N)\binom{N}{N/2+y} = \frac{1}{2^n}\sum_{v=0}^{n}(-1)^{n-v}\binom{N/2-y}{n-v}\binom{N/2+y}{v}\binom{N}{N/2+y}. \tag{14}$$

通过对二项式系数进行初等变形，可写为:

$$\begin{aligned} \binom{N/2+y}{v}\binom{N}{N/2+y} &= \binom{N}{v}\binom{N-v}{N/2-y}, \\ \binom{N/2-y}{n-v}\binom{N-v}{N/2-y} &= \binom{N-v}{n-v}\binom{N-n}{N/2+y-v}, \text{ and} \\ \binom{N-v}{n-v}\binom{N}{v} &= \binom{N}{n}\binom{n}{v}. \end{aligned}$$

综上可得

$$\mathcal{F}_N(x) = \frac{1}{2^{N-1}}\sum_{\substack{n=0\\ n \text{ odd}}}^{N}\frac{\binom{N}{n}}{(-2)^n\|k_n(-;N)\|^2}\sum_{y=1}^{N/2}\sum_{v=0}^{n}(-1)^v\binom{n}{v}\binom{N-n}{N/2+y-v}k_n(x;N),$$

化简为

$$\mathcal{F}_N(x) = \frac{1}{2^{N-1}}\sum_{\substack{n=0\\ n \text{ odd}}}^{N}(-2)^n\sum_{y=1}^{N/2}\sum_{v=0}^{n}(-1)^v\binom{n}{v}\binom{N-n}{N/2+y-v}k_n(x;N),$$

利用公式（10）。交换求和次序并重新编号后，我们将 $\mathcal{F}_N(x)$ 改写为

$$\mathcal{F}_N(x) = \frac{1}{2^{N-1}}\sum_{\substack{n=0\\ n \text{ odd}}}^{N}(-2)^n\left(\sum_{v=0}^{n}(-1)^v\binom{n}{v}\sum_{s=N/2+1-v}^{N-v}\binom{N-n}{s}\right)k_n(x;N).$$

回忆一下，超卡特兰数 $S(n,m)$ 定义为

$$S(n,m)=\frac{(2n)!(2m)!}{n!m!(m+n)!},$$

并定义 $T(n,\ m)=\frac{2n+1}{m+n+1}S(n,\ m)$。我们请读者参阅附录 A，其中我们将作为一个更一般结果的一部分证明

$$\sum_{v=0}^{n}\sum_{s=N/2+1-v}^{N-v}(-1)^v\binom{n}{v}\binom{N-n}{s}=(-1)^{\frac{n+1}{2}}T\left(\frac{N-n-1}{2},\frac{n-1}{2}\right). \tag{15}$$

将公式（15）应用于我们对 $\mathcal{F}_N(x)$ 的表达式，得到

$$\mathcal{F}_N(x)=\frac{1}{2^{N-1}}\sum_{\substack{n=0\\ n\ \text{odd}}}^{N}(-2)^n(-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{(N-n)!(n-1)!}{\left(\frac{N-n-1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}k_n(x;N).$$

最后，利用以下事实

$$k_m(0;N)=\begin{cases}\binom{N/2}{m/2}\frac{(-1)^{m/2}}{2^m} & \text{if } m \text{ is even, and}\\ 0 & \text{if } m \text{ is odd,}\end{cases}$$

结合公式 10，我们可以重新编号并简化 $\mathcal{F}_N(x)$，得到

$$\mathcal{F}_N(x)=\frac{1}{2^{N-1}}\binom{N}{N/2}\sum_{n=0}^{N-2}\frac{k_n(0;N)k_{n+1}(x;N)}{\|k_n(-;N)\|^2},$$

如所声称的。 □

4. Steepness

现在我们证明本文的主要结果：当 $N\to\infty$ 时，$\mathcal{F}_N(x)$ 的陡峭度趋近于 $\log 4$。正如引言中所述，这一点不同于经典正交多项式和三角函数。

定理 16. 当 $N\to\infty$ 时，$\mathcal{F}_N(x)$ 的陡峭度趋近于 $\log(4)$。

我们首先推导 $\mathcal{F}'_N(0)$ 的表达式。根据导数的线性性，只要得到正整数 m 和 N 且 N 为偶数时 $k'_m(0;\ N)$ 的表达式，这一结论便可立即得出。

引理 17. 设 m、$N\geq 1$，其中 N 为偶数，且 $m\leq N$。则

$$k'_m(0;N)=\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{\ell=0}^{(m-1)/2}\frac{(-1)^\ell\binom{N/2}{\ell}}{(m-2\ell)}$$

若 m 为奇数，则为 0；若 m 为偶数，则为 0。

证明。 由于 $k'_m(0;\ N)$ 是 $k_m(x;\ N)$ 的线性系数，我们需要求出方程（3）的线性项表达式。 $2^m k_m(x;\ N)$ 的生成函数为

$$G(t;N)=(1-t)^A(1+t)^B,$$

其中 $A = N/2 - x$ 和 $B = N/2 + x$ [11, (2.82.4)]。于是我们可以写成

$$\begin{aligned} G(t;N) &= (1-t^2)^{N/2}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^x \\ &= (1-t^2)^{N/2}\exp\left(x\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right) \\ &= (1-t^2)^{N/2}\left(1 + x\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + O(x^2)\right). \end{aligned}$$

因此， $k_m(x;\, N)$ 的线性系数是 $(1-t^2)\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$ 中 t^m 的系数，再按 2^{-m} 缩放。我们将幂级数表示相乘

$$(1-t^2)\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^\ell\binom{N/2}{\ell}t^{2\ell}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{t^{2\ell+1}}{2\ell+1}\right),$$

并通过卷积提取 t^m 的系数；我们求得其为

$$2\sum_{\ell=0}^{(m-1)/2}\frac{(-1)^\ell\binom{N/2}{\ell}}{(m-2\ell)},$$

若 m 为奇数，且当 m为偶数时为 0。乘以 2^{-m} 即完成证明。 □

命题 18. 设 $c(n;\, N) = (-1)^{n/2}\binom{N/2}{n/2}/\binom{N}{n}$ 当 n为偶数时，且当 n为奇数时为 *0*。则 $\mathcal{F}_N(x)$ 的陡峭度由下式给出

$$\frac{1}{2^{N-1}}\binom{N}{N/2}\sum_{n=0}^{N-2}c(n;N)\sum_{\ell=0}^{n/2}\frac{(-1)^\ell\binom{N/2}{\ell}}{(n+1-2\ell)}.$$

证明. 回顾

$$k_n(0;N) = \begin{cases}\frac{(-1)^{n/2}}{2^n}\binom{N/2}{n/2} & \text{if } n \text{ is even} \\ 0 & \text{if } n \text{ is odd, and}\end{cases} \tag{19}$$

$$\|k_n(-;N)\|^2 = \frac{1}{4^n}\binom{N}{n}. \tag{20}$$

由命题 12，我们有

$$\mathcal{F}_N(x) = \frac{1}{2^{N-1}}\binom{N}{N/2}\sum_{n=0}^{N-2}\frac{k_n(0;N)k_{n+1}(x;N)}{\|k_n(-;N)\|^2},$$

因此

$$\mathcal{F}'_N(0) = \frac{1}{2^{N-1}}\binom{N}{N/2}\sum_{n=0}^{N-2}\frac{k_n(0;N)k'_{n+1}(0;N)}{\|k_n(-;N)\|^2}.$$

现在将方程（19）和（20）以及引理 17 应用于 $k'_{n+1}(0;\, N)$。消去 2^n 的幂次，即得到关于 $\mathcal{F}'_N(0;\, N)$ 的所述公式。□

命题 18 为我们提供了 $\mathcal{F}'_N(0)$ 的精确表达式，我们可以在 N 较大时对其进行求值：

N	$\mathcal{F}'_N(0)$
400	≈ 1.38379
1000	≈ 1.38529
10000	≈ 1.38619
20000	≈ 1.38624

相比之下，我们有 $\log 4 \approx 1.38629$。

注 21. $\mathcal{F}'_N(0)$ 的显式公式使得计算比依赖 $\mathcal{F}_N(x)$ 的定义快得多。例如，$\mathcal{F}'_{20000}(0)$ 的计算在一台普通笔记本电脑上大约花了 2 分钟，与第 1 节中的计算形成对比。

由于命题 18 中的求和是对 n 的偶数取值进行的，我们通过令 $m = n/2$ 和 $M = N/2$ 来重新标号，并定义

$$S(M) = \frac{1}{2^{2M-1}}\binom{2M}{M}\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m \frac{\binom{M}{m}}{\binom{2M}{2m}}\sum_{\ell=0}^{m}\frac{(-1)^\ell\binom{M}{\ell}}{2m+1-2\ell}. \tag{22}$$

我们进一步定义

$$T(M) = 2\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{M+k}, \tag{23}$$

并且众所周知 $\lim_{M\to\infty}\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{M+k} = \log 2$。我们将证明对所有 $M \geq 1$ 有 $S(M) = T(M)$。于是定理 16 将作为推论立即得出。

定理 24. 对 $M \geq 1$ 定义 $S(M)$ 和 $T(M)$，如方程 *(22)* 和 *(23)*。则对所有 $M \geq 1$ 有 $S(M) = T(M)$。

在开始证明之前，我们先引入一些方便的记号。对于满足 $0 \leq m \leq M-1$ 的整数 m 和 M，定义

$$C(m,M) = (-1)^m\frac{\binom{M}{m}}{\binom{2M}{2m}} \tag{25}$$

$$D(m,M) = C(m,M)\left(\frac{2M-2m+1}{2M+2}\right). \tag{26}$$

利用二项式系数的众所周知的性质，可以验证

$$\left(\frac{2M+1}{2M+2}\right)C(m,M+1) = D(m,M), \text{ and} \tag{27}$$

$$D(m,M) - D(m+1,M) = C(m,M). \tag{28}$$

我们还定义

$$X(m,M) = \sum_{\ell=0}^{m}\frac{(-1)^\ell\binom{M}{\ell}}{2m+1-2\ell} \tag{29}$$

并利用帕斯卡恒等式 $\left(\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}\right)$ 验证

$$X(m,M+1) = X(m,M) - X(m-1,M). \tag{30}$$

现在我们证明一个辅助引理。

引理 31. 沿用上述所有记号，我们有

$$X(M,M+1) = (-1)^{M+1}\left(1 - \frac{2^{2M+1}}{\binom{2M+1}{M+1}}\right).$$

证明。我们有

$$X(M,M+1)=\sum_{\ell=0}^{M}\frac{(-1)^{\ell}\binom{M+1}{\ell}}{2M+1-2\ell}.$$

写出

$$\frac{1}{2M+1-2\ell}=\int_0^1 x^{2M-2\ell}\,\mathrm{d}x,$$

使得

$$\sum_{\ell=0}^{M}\frac{(-1)^{\ell}\binom{M+1}{\ell}}{2M+1-2\ell}=\int_0^1 x^{2M}\sum_{\ell=0}^{M}\binom{M+1}{\ell}\left(-x^{-2}\right)^{\ell}\,\mathrm{d}x.$$

根据二项式定理

$$\sum_{\ell=0}^{M+1}\binom{M+1}{\ell}\left(-x^{-2}\right)^{\ell}=(1-x^{-2})^{M+1},$$

因此

$$\sum_{\ell=0}^{M}\binom{M+1}{\ell}\left(-x^{-2}\right)^{\ell}=(1-x^{-2})^{M+1}-(-x^{-2})^{M+1}.$$

因此,

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{M}\frac{(-1)^{\ell}\binom{M+1}{\ell}}{2M+1-2\ell}&=\int_0^1 x^{2M}\left((1-x^{-2})^{M+1}-(-x^{-2})^{M+1}\right)\,\mathrm{d}x\\&=(-1)^{M+1}\int_0^1\frac{(1-x^2)^{M+1}-1}{x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

分部积分得

$$(-1)^{M+1}\int_0^1\frac{(1-x^2)^{M+1}-1}{x^2}\,\mathrm{d}x=(-1)^{M+1}\left(1-2(M+1)\int_0^1(1-x^2)^{M}\,\mathrm{d}x\right).$$

后者是一个沃利斯积分，其值为

$$\int_0^1(1-x^2)^{M}\,\mathrm{d}x=\frac{2^{2M}}{(2M+1)\binom{2M}{M}}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{M}\frac{(-1)^{\ell}\binom{M+1}{\ell}}{2M+1-2\ell}&=(-1)^{M+1}\left(1-2(M+1)\frac{2^{2M}}{(2M+1)\binom{2M}{M}}\right)\\&=(-1)^{M+1}\left(1-\frac{2^{2M+1}}{\binom{2M+1}{M+1}}\right),\end{aligned}$$

如所声称。 □

采用上述记号后，我们可以将 $S(M)$ 更简洁地写成

$$S(M)=\frac{1}{2^{2M-1}}\binom{2M}{M}\sum_{m=0}^{M-1}C(m,M)X(m,M). \tag{32}$$

我们通过归纳法证明定理 24，以结束本节。

定理 *24* 的证明。我们验证 $S(1) = T(1) = 1$。固定 $M \geq 1$，假设 $S(M) = T(M)$，并考虑 $S(M+1)$：

$$\begin{aligned} S(M+1) &= \frac{1}{2^{2M+1}} \binom{2M+2}{M+1} \sum_{m=0}^{M} C(m, M+1) X(m, M+1) \\ &= \frac{1}{2^{2M-1}} \binom{2M}{M} \left(\frac{2M+1}{2M+2} \right) \sum_{m=0}^{M} C(m, M+1) X(m, M+1). \end{aligned}$$

应用方程（27），我们将 $S(M+1)$ 改写为

$$S(M+1) = \frac{1}{2^{2M-1}} \binom{2M}{M} \sum_{m=0}^{M} D(m, M) X(m, M+1). \tag{33}$$

接下来，写成

$$\sum_{m=0}^{M} D(m, M) X(m, M+1) = \sum_{m=0}^{M-1} D(m, M) X(m, M+1) + D(M, M) X(M, M+1).$$

通过在方程（26）中直接代入，我们得到

$$D(M, M) = \frac{(-1)^M}{2M+2}. \tag{34}$$

应用引理 31，我们进而得到

$$\frac{\binom{2M}{M}}{2^{2M-1}} D(M, M) X(M, M+1) = \frac{2}{2M+1} - \frac{\binom{2M}{M}}{2^{2M-1}(2M+2)}. \tag{35}$$

现在利用方程（30）写成

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-1} D(m, M) X(m, M+1) &= \sum_{m=0}^{M-1} D(m, M) \left(X(m, M) - X(m-1, M) \right) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} D(m, M) X(m, M) - \sum_{m=0}^{M-1} D(m, M) X(m-1, M). \end{aligned}$$

由于对所有 M，$X(-1, M) = 0$，我们将第二个求和重新编号为

$$\sum_{m=0}^{M-1} D(m, M) X(m-1, M) = \sum_{m=0}^{M-2} D(m+1, M) X(m, M). \tag{36}$$

现在我们写作

$$\sum_{m=0}^{M-1} D(m, M) X(m, M) = \sum_{m=0}^{M-2} D(m, M) X(m, M) + D(M-1, M) X(M-1, M). \tag{37}$$

应用公式 (36) 和 (37)，可得

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-1} D(m, M) X(m, M+1) = &\sum_{m=0}^{M-2} \left(D(m, M) - D(m+1, M) \right) X(m, M) \\ &+ D(M-1, M) X(M-1, M). \end{aligned}$$

由公式 (28)，可得

$$\sum_{m=0}^{M-2} \left(D(m,M) - D(m+1,M)\right) X(m,M) = \sum_{m=0}^{M-2} C(m,M)X(m,M), \tag{38}$$

并通过直接计算（使用引理 31），我们验证

$$\frac{\binom{2M}{M}}{2^{2M-1}} D(M-1,M)X(M-1,M) = \frac{2}{2M-1} - \frac{2}{2M+2} - \frac{3\binom{2M}{M}}{2^{2M-1}(2M-1)(2M+2)}. \tag{39}$$

将方程 (38) 乘以 $\frac{\binom{2M}{M}}{2^{2M-1}}$，并将方程 (35) 和 (39) 右端相加，得到

$$S(M+1) = \frac{\binom{2M}{M}}{2^{2M-1}} \sum_{m=0}^{M-2} C(m,M)X(m,M) - \frac{\binom{2M}{M}}{2^{2M-1}(2M+2)} \left(1 + \frac{3}{2M-1}\right) + \frac{2}{2M-1} - \frac{2}{2M+2} + \frac{2}{2M+1}.$$

由于

$$\frac{\binom{2M}{M}}{2^{2M-1}(2M+2)} \left(1 + \frac{3}{2M-1}\right) = \frac{\binom{2M}{M}}{2^{2M-1}(2M-1)}$$

and

$$-\frac{\binom{2M}{M}}{2^{2M-1}(2M-1)} + \frac{2}{2M-1} = \frac{1}{2M-1}\left(\frac{2^{2M}}{\binom{2M}{M}} - 1\right) = C(M-1,M)X(M-1,M)$$

（再次使用引理 31），我们有

$$S(M+1) = S(M) - \frac{1}{M+1} + \frac{2}{2M+1}.$$

应用归纳假设 $S(M) = T(M)$，我们有

$$\begin{aligned} S(M+1) &= 2\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{M+k} - \frac{1}{M+1} + \frac{2}{2M+1} \\ &= 2\sum_{k=1}^{M+1} \frac{1}{M+1+k} = T(M+1), \end{aligned}$$

由此完成证明。 □

5. The Gibbs Phenomenon and Connection to Classical Families

经典正交多项式通常满足一条求导法则（继承自斯图姆-刘维尔微分方程），其中，次数为 n

的成员与次数为 $n-1$ 的成员相关。例如，雅可比多项式、广义拉盖尔多项式和厄米多项式满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\alpha+\beta+n+1}{2}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x), \text{ and}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x),$$

分别。盖根鲍尔多项式和勒让德多项式都是雅可比多项式的子族，它们满足类似的关系。正是这些导数公式，使得可以将 $\mathcal{F}'_N(x)$ 表示为克里斯托费尔–达布和（关于埃尔米特多项式，见第 1 节；关于盖根鲍尔多项式，见 [7, 命题 1]；关于广义拉盖尔多项式，见 [1, §4]）。由此可以将 $\mathcal{F}_N(x)$ 的临界点表示为一个经典正交多项式的零点，而这类多项式的渐近性质已得到广泛研究。相比之下，克拉夫楚克多项式满足差分方程

$$k_n(x+1;N) - k_n(x;N) = k_{n-1}(x+1/2;N-1).$$

由于 $k'_{n+1}(x;N)$ 不是 $k_n(x;N)$ 的常数倍，因此无法直接将克里斯托费尔-达布公式应用于

$$\mathcal{F}'_N(x) = \frac{1}{2^{N-1}}\binom{N}{N/2}\sum_{n=0}^{N-2}\frac{k_n(0;N)k'_{n+1}(x;N)}{\|k_n(-;N)\|^2}.$$

最后，我们提及克拉夫楚克多项式与埃尔米特多项式之间的一种深刻联系，克拉夫楚克已知这一联系 [8]，并在 [9] 中作了解释。沿用第 1 节中的所有记号，[9, 方程 (4)] 表明，对于固定的 n,

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{2}{Npq}\right)^{n/2} n!K_n^{(p)}(\sqrt{2Npq}x + Np;N) = H_n(x),$$

第 n 个埃尔米特多项式。然而，固定 N 时的近似仅对 $n = O(N^{1/3})$ 和 $x = O(n^{1/2})$ 成立。因此，无法利用已知的厄米多项式吉布斯常数推导出克拉夫丘克多项式的精确值。

Appendix A. Super Catalan Numbers

回顾 [5, §6]，超卡特兰数 $S(n,m)$ 定义为

$$S(p,q) = \frac{(2p)!(2q)!}{p!q!(p+q)!}.$$

我们进一步定义

$$T(p,q) = \frac{(2p+1)!(2q)!}{p!q!(p+q+1)!} = \frac{2p+1}{p+q+1}S(p,q).$$

我们在本附录中证明一个涉及超卡特兰数的引理；若将其放在正文中，会打断命题 12 证明的行文脉络。

引理 40。设 N 为偶数，n 为奇数，且 $n \le N$。那么

$$\sum_{v=0}^{n}\sum_{s=N/2+1-v}^{N-v}(-1)^v\binom{n}{v}\binom{N-n}{s} = (-1)^{\frac{n+1}{2}}T\left(\frac{N-n-1}{2},\frac{n-1}{2}\right).$$

为了证明引理 40，我们首先证明以下关于 $T(p,q)$ 的恒等式。

命题 41. 采用上述所有记号，我们有

$$(-1)^{q+1}T(p,q)=\sum_{v=0}^{2q+1}\sum_{s=p+q+2-v}^{2p+2q+2-v}(-1)^v\binom{2q+1}{v}\binom{2p+1}{s}.$$

证明. 考虑该和

$$\sum_{v=0}^{2q+1}\sum_{s=p+q+2-v}^{2p+2q+2-v}(-1)^v\binom{2q+1}{v}\binom{2p+1}{s} \tag{42}$$

并设 $n=2q+1$, $M=2p+1$, $K=p+q+2$ 和 $N=2p+2q+2$。则式 (42) 中的和可写为

$$\sum_{v=0}^{n}(-1)^v\binom{n}{v}\sum_{s=K-v}^{N-v}\binom{M}{s}. \tag{43}$$

令 $f(v)=\sum_{s=K-v}^{N-v}\binom{M}{s}$，使得

$$\sum_{v=0}^{n}(-1)^v\binom{n}{v}\sum_{s=K-v}^{N-v}\binom{M}{s}=\sum_{v=0}^{n}(-1)^v\binom{n}{v}f(v). \tag{44}$$

回忆一下，若 $h:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ 是一个函数，则前向差分 $\Delta f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$定义为

$$\Delta h(z)=h(z+1)-h(z).$$

反复应用（利用 Δ 的线性性），不难验证

$$\Delta^{(n)}f(0)=\sum_{v=0}^{n}(-1)^{n-v}\binom{n}{v}f(v),$$

由此可得

$$\sum_{v=0}^{n}(-1)^v\binom{n}{v}f(v)=(-1)^n\Delta^{(n)}f(0). \tag{45}$$

直接计算可得

$$\Delta f(v)=\binom{M}{k-v-1}-\binom{M}{N-v}.$$

Then

$$\begin{aligned}(-1)^n\Delta^{(n)}f(0)&=(-1)^n\Delta^{(n-1)}\Delta f(0)\\&=(-1)^n\sum_{v=0}^{n-1-v}\binom{n-1}{v}\Delta f(v)\\&=(-1)^n\sum_{v=0}^{n-1}(-1)^{n-1-v}\binom{n-1}{v}\left[\binom{M}{K-v-1}-\binom{M}{N-v}\right].\end{aligned}$$

将 n、M、K 和 N 代回:

$$(-1)^{2q+1}\sum_{v=0}^{2q}(-1)^{2q-v}\binom{2q}{v}\left[\binom{2p+1}{p+q+1-v}-\binom{2p+1}{2p+2q+2-v}\right].$$

化简后，并注意到 $\binom{2p+1}{2p+2q+2-v}=0$ 位于范围 $v\in[0,2q]$ 内，我们可以将式 (42) 中的和改写为

$$-\sum_{v=0}^{2q}(-1)^v\binom{2q}{v}\binom{2p+1}{p+q+1-v}. \tag{46}$$

我们已将问题归结为证明

$$(-1)^qT(p,q)=\sum_{v=0}^{2q}(-1)^v\binom{2q}{v}\binom{2p+1}{p+q+1-v}.$$

根据 [6, §3]，的研究，右侧的和可解释为 x^{p+q+1} 在乘积 $(1-x)^{2q}(1+x)^{2p+1}$ 中的系数；同上文 证明了该系数为

$$(-1)^q\frac{\binom{2p+1}{p}\binom{2q}{q}}{\binom{p+q+1}{q}},$$

这恰好就是 $(-1)^qT(p,\ q)$。 □

现在只需简单几步即可完成引理 40 的证明。

引理 *40* 的证明。 在命题 41 中令 $p=(N-n-1)/2$ 和 $q=(n-1)/2$。 □

Appendix B. Declarations

B.1. 经费资助。 第二作者获得了巴德学院AIMS$^+$ 项目的部分资助。

B.2. 利益冲突。 作者声明，与本文内容相关的利益冲突均不存在。

References

[1] J. Cullinan 和 A. Santanu。《迈向通用吉布斯常数》。即将发表。

Rocky Moun-[2] Desmos 图 *tain J. Math.*
形计算器。https://www.desmos.com/calculator（访问日期：2026年3月6日）。[3] J. Davis 和 P. Hagelstein。若干经典正交多项式的吉布斯现象。

J. ( )，第 号论文。

Math. Anal. Appl. **505** 2022 1, 125574
[4] T.H. Fay 和 P.H. Kloppers。正交多项式级数的吉布斯现象。*Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.* **37** (2006)，第 8 期，973–989。[5] **14** 1992 179 194 I.! [6]
Gessel。超投票数，《符号计算杂志》（），– I. Gessel、D. Stanton。超几何级数的奇异求值。《SIAM 数学分析杂志》**13** (1982)，第 2 期，295–308。[7] S.M. Kaber。雅可比展开的吉布斯现象。 *Commun. Appl. Anal.* **10** (2006)，第 2-3 期，133–148。[8] M. Krawtchouk。关于埃尔米特多项式的一种推广，《巴黎科学院院报》，数学系列，**189** (1929)，620–622。[9] A.R. Minabutdinov。克拉夫丘克多项式的渐近展开。《数学科学杂志》（纽约）**215** (2016)，第 6 期，738–747。
[10] 2.7.6 2016 http://pari.math.u-bordeaux.fr/ PARI/GP，版本，波尔多，
[11] ¨ 4
，G. Szego，《正交多项式》，第 版。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，1975。

Department of Mathematics, Bard College, Annandale-On-Hudson, NY 12504, USA
Email address: cullinan@bard.edu*URL*: http://faculty.bard.edu/cullinan/

Department of Mathematics, Bard College, Annandale-On-Hudson, NY 12504, USA
Email address: ey0200@bard.edu