arXiv:2603.05466v1 [math.OA] 5 Mar 2026

自由概率中的Obata刚性定理

CHARLES-PHILIPPE DIEZ†

摘要。我们建立了Obata刚性定理的自由类比。更确切地说，程和周（2017年）证明，在加权黎曼流形上，最佳谱隙（Poincaré 常数）仅当该空间等距地分裂出一个一维高斯因子时才能达到，从而给出了Obata刚性定理的无穷维对应。我们在自由概率中得到了相应的现象，并将其推广到解析自伴势函数的设定之外：

假设一个自伴 n元组 $X = (X_1, \dots, X_n)$在Dabrowski（2014年）的意义下具有Lipschitz共轭变量。在适当的非交换曲率–维数条件下，我们证明，沃伊库列斯库自由庞加莱不等式的任一非零取等元必为生成元的仿射函数。因此，我们推出冯·诺依曼代数 $M = W^*(X_1, \dots, X_n)$必然分裂出一个自由补半圆分量 $W^*(Y_1) \simeq L^\infty([-2, 2], \mu_{sc})$，且该分量在 M中也是极大可和的。

更一般地，只要自由拉普拉斯算子 $\Delta := \partial^* \bar{\partial}$ 的第一特征空间是秩为$r \geq 1$的有限维空间，我们的刚性论证就表明，这些 r 极端方向构成一个自由半圆族，从而得到一个带有 $L(\mathbb{F}_r)$因子的自由积分解。这为经典的高斯分裂现象提供了自由类比，并揭示了非交换曲率下的一种刚性机制。

1. 引言

1.1. 谱几何中的经典刚性与稳定性。 几何分析的一个核心主题，是理解在自然类别中使某个几何或解析量最大化 或最小化 的空间结构。极值现象往往会带来强刚性，例如揭示乘积结构或典范几何模型。一个很好的例子，也为我们的工作提供了指导性类比，即切格–格罗莫尔分裂定理 [16]：具有非负里奇曲率且包含一条直线（即一条长度无限的极小测地线）的完备黎曼流形，必定等距分裂为与 $\mathbb{R}$的乘积。该结果是一个更广泛原理的出发点：无论极值几何行为涉及直径、曲率、等周问题还是谱量等，通常都会迫使底层空间受到严格的结构约束，并与某个参照空间进行比较。

谱几何中的刚性始于小侯定理 [61], ，该定理指出，标准球面是利希纳罗维奇估计 [51]取到极值的唯一情形。若一个 n维黎曼流形 $(M^n,\ g)$ 满足 $\mathrm{Ric} \geq (n-1)g$，那么拉普拉斯–贝尔特拉米算子的第一个非零特征值 λ_1 满足 $\lambda_1 \geq n$；若等号成立，则 $(M^n,\ g)$ 与标准球面 $(\mathbb{S}^n,\ g_{\mathrm{can}})$ 等距。这一原理表明，锐利的特征值界能够刚性地确定几何，推动了一系列后续发展：切格不等式 [15]将 λ_1 与等周问题联系起来，佩恩–温伯格 [62] 为凸区域建立了锐利的谱隙估计，而程的比较定理 [17] 则揭示了分析不等式如何编码全局几何信息。

谱隙可通过庞加莱不等式作概率刻画：概率测度 μ以常数 $C_P > 0$ 满足该不等式，当且仅当

$$\int f^2 \, d\mu \ \leq \ C_P \int |\nabla f|^2 \, d\mu \quad \text{whenever} \int f \, d\mu = 0,$$

且最优常数为 $C_P = 1/\lambda_1$。该不等式支配方差、混合与集中，适用于许多对数凹测度，并且在一维情形下由穆肯豪普特判据 [58]刻画。

† Technion – 以色列理工学院, 数学系 of 数学, Technion 城, 海法 3200003, 以色列。
chphdiez@campus.technion.ac.il。

它属于泛函不等式的层级体系：对数 Sobolev [35], 超收缩性、输运不等式，并对凸几何 [9, 48], 遍历理论以及高维概率 [57]产生深远影响。Bakry–Émery Γ-演算 [2] 通过曲率–维数条件$CD(K,\ N)$统一了这些思想；特别是，$CD(1,\ \infty)$意味着对 Poincaré 常数 $C_P \leq 1$的一个上界。这一综合曲率框架通过 Sturm [69, 70]、Lott–Villani [71], 以及 Ambrosio–Gigli–Savaré [1]的工作扩展到了非光滑度量测度空间。

与我们的工作最相关的刚性现象是程和周 [18], 的定理。该定理表明，在满足曲率–维数条件 $CD(1,\ \infty)$ 的空间上，庞加莱不等式的极值函数（等价地，达到最优谱隙 $\lambda_1 = 1$ 的函数）会迫使空间发生高斯分裂。Gigli、Ketterer、Kuwada 和 Ohta 将他们的结果推广到 RCD$(1,\ \infty)$ 空间 [34, 49], ，识别出一个一维高斯方向，并得到等距且测度论意义下的乘积分解。为清晰起见，我们回顾光滑情形下的陈述：

定理 1.1 (Cheng–Zhou [18]; Gigli–Ketterer–Kuwada–Ohta [34])。 设 (M, g, μ) 是满足 $CD(1,\ \infty)$ 的光滑加权黎曼流形。若存在一个中心化的非零 $f \in W^{1,\ 2}(M, \mu)$，使得

$$\int_M f^2 \, d\mu \ = \ \int_M |\nabla f|^2 \, d\mu,$$

则在度量和测度意义下等距分裂为(M, g, μ)

$$(M, g, \mu) \ \simeq \ (\mathbb{R}, |\cdot|, \gamma) \ \times \ (M', g', \mu'),$$

其中 γ 是上的标准高斯测度 $\mathbb{R}$.

近期研究还确立了这一刚性现象的稳定性：谱隙接近最优的测度必定在定量意义上接近高斯测度。De Philippis–Figalli[28], 证明了这一点，Courtade–Fathi [21] 随后运用 Stein 方法加以改进；之后，Bertrand–Fathi [4] 借助 Cavaletti–Mondino [13]将 Klartag 针分解 [50] 推广到 RCD 框架，将这一结果扩展至 RCD$(1, \infty)$ 空间。总而言之，这些结果表明，极值和近极值的泛函不等式蕴含着重要的几何信息。这个经典图景，尤其是 Cheng–Zhou 分裂定理 1.1，因而为我们的工作提供了指导性类比：我们旨在自由概率的框架下，寻找此类刚性现象的自由类比。

1.2. 自由概率框架。自由概率由 Voiculescu [75, 76, 77, 78, 79], 提出，为经典概率提供了一种非交换类似，其中独立性由自由性取代。随机变量由带迹冯·诺依曼代数中的算子建模，其联合分布由混合矩刻画。Voiculescu 对渐近自由性 [72, 73] 的发现，搭建起随机矩阵理论与算子代数之间的重要桥梁：独立的高斯或酉系综在维数趋于无穷时，表现为自由独立的非交换随机变量。半圆律扮演着高斯分布的角色，许多经典分析工具都有自由类比，包括自由庞加莱不等式 [80, 23] （以及 Biane 和 Speicher [7, 8]提出的自由对数 Sobolev 不等式）；这些不等式通过自由差商来表达，并与 Voiculescu 的自由熵和自由 Fisher 信息 [76, 78, 79, 82]密切相关。

自由熵理论对自由群因子 $L(\mathbb{F}_n)$ $n \geq 2$的结构理论产生了重大影响。Voiculescu的主要成就之一，是证明自由群因子中不存在Cartan子代数 [76] ：即无法经由测度等价关系（通过Feldman–Moore [32]）实现自由群因子，以及Ge的素性定理 [33]。这些结果展示了自由熵的分析力量；详见Charlesworth–Nelson [14] 的详细综述。尽管我们并未直接使用这些推论，但它们构成了推动本文工作的分析图景的一部分。

自由随机分析与非交换传输方面的若干突破性进展，已将该理论的范围远远扩展到预期之外。Biane的自由超压缩性 [5], 、Biane–Speicher的自由Malliavin微积分 [6], 以及Guionnet–Shlyakhtenko的自由扩散理论 [38, 39] ，在自由概率、随机分析与随机矩阵模型之间建立了深刻联系。Dabrowski、Guionnet、Jekel、Shlyakhtenko等人的后续工作 [24, 26, 27, 36, 44, 46, 47, 45] 在自由熵方面取得了重大进展（包括微观态自由熵与非微状态自由熵的相等），发展了自由随机偏微分方程，并在自由传输、自由Wasserstein流形以及非交换蒙日–坎托罗维奇对偶方面建立了基础性结果。

自由输运技术为冯·诺依曼代数和 C^*-代数带来了强有力的结构性结论，包括在 q变形自由群因子的同构问题 [38]上取得进展。Jekel、Li 和 Shlyakhtenko [47] 提供了自由Gibbs律的变分构造，并将三角传输扩展到 C^*-代数环境中。Jekel 的三角传输 [36] 推动了 Popa 的自由补问题（*FC*） [64], 取得突破；该问题询问每个极大可和子代数 $B \subset L(\mathbb{F}_n)$ 是否都具有自由补，即是否存在某个带迹von Neumann代数 $N \neq \mathbb{C}1$, 使得 $L(\mathbb{F}_n) = B * N$ 。最近，Boschert、Davis 和 Hiatt [10]证明，由生成元极大阿贝尔自伴子代数的角进行“切割与粘贴”得到的极大阿贝尔自伴代数同样具有自由补，这为满足（*FC*）问题的情形提供了更一般的例子。

1.3. 自由庞加莱不等式。 Voiculescu 首先在一篇未发表的笔记 [80] 中观察到经典庞加莱不等式的自由类比（另见 Dabrowski [24, 引理 2]）。这一重要发现开创了非交换谱隙理论，其中自由差商扮演经典梯度的角色，并提供一种适用于非交换随机变量的无穷小演算。一个关键观察是，自由庞加莱不等式普遍成立，无需对这类变量的分布 作任何假设，这与经典情形形成鲜明对比。与高斯情形完全类似，半圆系统的自由庞加莱常数为 $C_P = 1$ ，这由 Biane [8], 证明；但在半圆律之外，关于其他非交换分布的最佳常数，本质上几乎一无所知。

在一维情形中，Ledoux 与 Popescu [52]发展了一种精简方法，并研究了自由庞加莱常数在变量光滑变换下的行为。Voiculescu 不等式断言，对任意紧支撑概率测度 μ,

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \;\le\; C \iint \left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right)^2 d\mu(x)\, d\mu(y), \tag{1}$$

满足 $C \le 2\rho(\mu)^2$。这是经典谱隙估计的自由类比，其中自由差商取代了通常的导数。

Ito [43], 最近在算子值情形中作出了一项贡献：他通过一个尖锐的 B 值自由庞加莱不等式刻画了 B 值半圆系统，从而推广了 Biane 的结果 [8]。Ito 还证明，Voiculescu 关于 B 值自由庞加莱不等式的猜想 [81] 按照原本的表述并不成立。 [43] 中的方法依赖于显式的切比雪夫多项式计算，与我们在本文中将采用的泛函分析方法有很大不同。

如今也已知，自由庞加莱不等式会带来重要的算子代数后果。具体而言，Dabrowski [24] 证明，有限的自由 Fisher 信息迫使 $W^*(X_1, \ldots\ldots, X_n)$ 成为一个不具有性质 Γ 的因子，这里的性质 Γ 是指 Murray 和 von Neumann [60] 意义下的性质。因子性证明中的一个关键步骤是：自由差商的核仅由标量构成。对于非-Γ 部分，Dabrowski 建立了一个精细的混合庞加莱–非-Γ 不等式：对于属于 $Z \in W^*(X_1, \ldots\ldots, X_n) \cap \mathrm{Dom}(\partial)$（自由差商的定义域）的元素，其方差可由它与生成元 X_i 及共轭变量的交换子定量控制，从而确保所有中心序列都是平凡的。

1.4. 我们的结果概述。 除了半圆情形（或可分势函数的情形；不过后者可化归为自由性），自由吉布斯测度在凸势下的自由泛函不等式尚未得到充分理解

。即便在自然的非交换凸性假设下，自由庞加莱常数的行为也基本上仍不为人所知。与具有 $e^{-V}dx$ 和 $\nabla^2 V \geq cI_n$ 的一致对数凹测度的经典理论相比，自由情形缺乏一般性的曲率框架。我们的首个主要结果填补了这一空白的部分：在适当的非交换曲率条件下，自由庞加莱常数受凸性参数倒数控制。这里通过对非交换海森矩阵施加界来刻画凸性，从而为在自由概率中建立泛函不等式提供了一种稳健的解析机制。

我们将这些结果推广到*Lipschitz*共轭变量的框架中；这一框架由 Dabrowski 的重要工作 [26] 引入。该框架具有显著的灵活性：它不要求势存在，同时又保留了足够的解析结构，能够支持弱-L^2 Bakry–Émery 类型的论证（积分始终是相对于迹态 τ 进行的，不过我们认为，在完全正映射的层面上也应当存在更强的版本）。生成元与自由差商之间的关键交换关系由 Dabrowski 的开创性工作 [26]，建立，在这里发挥着核心作用；我们的曲率条件也可以完全用共轭变量来表述。

我们的主要结果是一个解析—代数刚性定理。在满足非交换曲率–维数条件 $CD(1, \infty)$ 时，沃伊库列斯库自由庞加莱不等式的任意极值函数都必须是变量 $(X_1, \ldots\ldots, X_n)$ 的仿射线性函数。更确切地说，如果共轭变量的非交换海森矩阵满足

$$\mathscr{J}\xi \geq (1 \otimes 1) \otimes I_n,$$

于是，常数小于或等于 1 的自由庞加莱不等式成立，而任何取等的函数都必须是仿射线性的，这与经典情形（或自由情形）完全相同；在这些情形中，Ornstein–Uhlenbeck 算子的第一个非零特征函数都是线性的。经过归一化后，这就迫使半圆方向的出现。由自由性可得一个自由积分解

$$W^*(X_1, \ldots, X_n) \simeq W^*(Y_1) * N,$$

其中，$W^*(Y_1)$ 是由半圆方向生成的弥散阿贝尔代数。由于 $W^*(Y_1)$ 有自由补代数，Popa 定理 [64] 意味着，对于 $n \geq 2$，它实际上是$W^*(X_1、\ldots\ldots、X_n)$ 内的极大可和 子代数（进而也是一个极大阿贝尔自伴代数）。这提供了小侯定理的一个自由类比。

我们的计算强烈表明，完整的自由 *Bakry–Émery* 理论 已触手可及，并可能与随机矩阵模型、冯·诺依曼代数或非交换几何产生联系并应用于这些领域。第 4 节概述了若干未来研究方向。在经典情形下，对于足够正则的对数凹测度 $\mu \propto e^{-V}dx$，（正的）生成元 $-\mathcal{L}_V$ 具有纯点谱，且重数有限，其特征函数呈现指数衰减 [22, 65]。自由 Ornstein–Uhlenbeck 算子具有类似的谱性质（但没有指数衰减；在这里这没有意义），因此很自然会问，这些特征是否也适用于更一般的自由吉布斯态或具有利普希茨共轭变量的元组。

一个更深层的概念方向涉及自由里奇曲率这一概念。在本文中，我们仍停留在自由差商的“平坦”设定中，其精确的余结合性意味着不存在任何内在的几何曲率。因此，所有曲率都仅来自势，并通过共轭变量的雅可比矩阵 $\mathscr{J}\xi$ 产生，这与 $\mathbb{R}^n$上的经典 Bakry–Émery 理论直接类似。在这一平坦框架之外，Dabrowski 关于几乎余结合的 导子 [25] 的理论，为真正几何的自由黎曼张量 （因而也包括里奇张量）提供了一个自然候选，它由一个度量余结合性失效的缺陷张量来编码。在这一更一般的设定中发展曲率-维数估计与刚性现象，将相当于一种非交换的 Bakry–Émery 理论，而自由差商构成其中余结合的、里奇平坦的特殊情形。我们将在第 4.2节回到这一视角，并概述几乎余结合性如何在由共轭变量的雅可比矩阵所产生的势曲率之外，再提供一个几何曲率项。

2. 预备知识

2.1. 带迹 von Neumann 代数。 全文中，我们在带迹 W^*–概率空间（$\mathcal{M},\tau$）中工作，其中 $\mathcal{M}$ 是具有可分前对偶的有限冯诺依曼代数，并配备忠实正规迹态 τ。我们用 L^2（$\mathcal{M},\tau$）表示 $\mathcal{M}$ 关于 L^2–内积的希尔伯特空间完备化，该内积定义为

$$\langle x,y\rangle_{L^2(\mathcal{M})} := \tau(y^*x),$$

关于第一个变量是线性的，关于第二个变量是共轭线性的，并且我们通过左乘将 $\mathcal{M}$ 与其在 $B(L^2(\mathcal{M},\tau))$中的像等同。我们将 $1\in\mathcal{M}\subset L^2(\mathcal{M})$记为典范循环分离向量。由于 τ 是迹性的，映射 $x\mapsto x^*$ 唯一延拓为 $L^2(\mathcal{M},\tau)$上的共轭线性等距对合；我们将其记为 J。因此 J 是Tomita共轭，即 *运算的 L^2延拓，并且满足 $J=J^*=J^{-1}$。对于 $f\in L^2(\mathcal{M},\tau)$，我们记 $f^*:=Jf$，并定义

$$\Re f := \tfrac{1}{2}(f+f^*),\qquad \Im f := \tfrac{1}{2i}(f-f^*),$$

它们是自伴随的，即 $J\,\Re f=\Re f$ 与 $J\,\Im f=\Im f$，并且满足

$$\tau(\Re f)=\Re\,\tau(f),\qquad \tau(\Im f)=\Im\,\tau(f),$$

其中我们仍将 $\tau(x):=\langle x,1\rangle_{L^2(M)}$ 记为迹的典范 L^2延拓。

给定自伴元素 X_1、……、$X_n\in\mathcal{M}_{sa}$，我们用 $M:=W^*(X_1$、……、$X_n)$ 表示它们生成的冯·诺依曼代数，并用 $L^2(M)$ 表示由 M 关于 τ 所诱导的 L^2 范数取完备化后得到的 L^2 空间。

对于冯·诺依曼子代数 $M\subset\mathcal{M}$，我们用 $M\bar{\otimes}M^{op}$ 表示 M 与其反代数 M^{op} 的冯·诺依曼张量积（即相同的 * 代数，但乘法顺序相反）。这一约定对于双模而言很自然，因为右 M 作用对应于 M^{op} 的左作用。代数 $M\bar{\otimes}M^{op}$ 通过在每个张量因子上的左乘，在 $L^2(M)\,\bar{\otimes}L^2(M^{op})$ 上正规作用。由于 τ 是迹的，我们可以将 $L^2(M^{op})$ 与 $L^2(M)$ 等同，因此 $L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})\;\simeq\;L^2(M)\,\bar{\otimes}_{1\otimes\mathcal{O}}\,L^2(M)$。

更精确地说，对于每个 n，都有典范识别

$$HS(L^2(M))^{\oplus_n}\;\simeq\;\big(L^2(M)\bar{\otimes}L^2(M)\big)^{\oplus_n}\;\simeq\;\big(L^2(M)\bar{\otimes}_{1\otimes\mathcal{O}}L^2(M^{op})\big)^{\oplus_n},$$

其中，第二个同构利用迹性将右腿置于反代数中。在标准识别 $L^2(M)\otimes L^2(M)\simeq HS(L^2(M))$ 下，张量 $a\otimes b$ 对应于有限秩算子$x\mapsto a\,\tau(bx)$。作为实 M–M双模，$a(b\otimes c)d=ab\otimes cd$，且实结构由下式给出

$$(a\otimes b)^\dagger=b^*\otimes a^*.$$

这对应于希尔伯特–施密特算子的伴随性。

最后，$1\otimes\mathcal{O}$在 $L^2(M)\otimes L^2(M^{op})$ 与 $L^2(M)\otimes L^2(M)$ 之间的识别来自迹性。在此识别下，$(1\otimes\mathcal{O})(a\otimes b)=a\otimes b$，其中 b 被视为 M^{op} 的一个元素。由于我们将在全文中使用这一识别，通常会省略下标，并在上下文明确时省略符号 $1\otimes\mathcal{O}$。

最后，除非另有说明，$\|\cdot\|$ 表示某个 $B(\mathcal{H})$ 上的算子范数（以及矩阵放大上的相关）。

2.2. **自由差商与共轭变量**。 本节主要遵循Dabrowski的论述 [23, 26], , 但我们也参考了Voiculescu的原始论文 [78] , 最后建议阅读Mai-Speicher的著作[56] , 以进一步了解自由微分演算和循环微分演算的更多细节。

设 $(X_1,\dots,X_n) \in \mathcal{M}_{\text{s.a.}}^n$ 是一个自伴 n元组（始终假设其代数自由）, 并令$M = W^*(X_1,\dots,X_n)$ 和 $M_0 = \mathbb{C}\langle X_1,\dots,X_n\rangle$。

定义 2.1 （偏自由差商）。偏自由差商是导子

$$\partial_i : M_0 \longrightarrow L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op}),$$

由生成元上的取值确定

$$\partial_i(X_j) = \delta_{ij}.1 \otimes 1.$$

定义 2.2。（自由 *Fisher* 信息，*Voiculescu* [78, 定义 6。1]）自由 Fisher 信息是$(X_1,\dots,X_n)$ 的

$$\Phi^*(X_1,\dots,X_n) := \sum_{i=1}^n \left\|\partial_i^*(1\otimes 1)\right\|^2_{L^2(M)},$$

当每个 $\partial_i^*(1\otimes 1)$ 都在 $L^2(M)$中存在时; 否则我们定义 $\Phi^*(X) = +\infty$。

命题 2.3。 （可闭性，*Voiculescu* [78, 引理 3。3]）若 $\Phi^*(X_1,\dots,X_n) < \infty$, 则每个 ∂_i 都可闭为无界算子

$$L^2(M) \longrightarrow L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op}),$$

并将其闭包记为 $\bar{\partial}_i$。我们记作 $\bar{\partial} = (\bar{\partial}_1,\dots,\bar{\partial}_n)$。

定义 2.4。 （共轭变量，*Voiculescu* [78, 定义 3。1]）若伴随值

$$\xi_i := \partial_i^*(1\otimes 1) \in L^2(M)$$

存在, 则称之为与 X_i 相关联的共轭变量 。

注 2.5。 自由差商是实 导子: 对所有 $x \in M_0$,

$$\partial_i(x^*) = (\partial_i(x))^\dagger,$$

其中再次有 $(a\otimes b)^\dagger := b^*\otimes a^*$。假设每个 ∂_i 都作为算子可闭 $L^2(M) \to L^2(M)\bar{\otimes}L^2(M^{op})$, 令 $\bar{\partial}_i$ 表示其闭包, 且

$$\mathrm{Dom}(\bar{\partial}) = \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Dom}(\bar{\partial}_i).$$

左侧的包含关系显然成立, 而反向包含关系可通过重复的伴随论证得到, 参见 *Dabrowski* [23]。于是, $\mathrm{Dom}(\partial)$在 * 下封闭, 并且

$$\bar{\partial}_i(x^*) = \big(\bar{\partial}_i(x)\big)^\dagger, \qquad \forall\, x \in \mathrm{Dom}(\bar{\partial}).$$

更一般地 也存在涉及较弱假设的共轭系统的一般概念, 详见下文 .

定义 2.6. （共轭系统，*Mingo–Speicher* [68, 定义 12]）设 $X = (X_1,\dots,X_n) \in \mathcal{M}^n$。若族 $\xi_1,\dots,\xi_n \in L^2(\mathcal{M})$ 满足以下条件, 则称其为 X 的共轭系统 : 对任意非交换多项式$P \in M_0 = \mathbb{C}\langle X_1,\dots,X_n\rangle$, 都有

$$\tau(\xi_i P(X)) = \tau\otimes\tau(\partial_i P(X)), \qquad 1 \le i \le n. \tag{2}$$

严格来说，共轭变量 ξ_i 属于 $L^2(M)$（其中 $M = W^*(X_1, \dots, X_n)$）这一要求并非必要。事实上，即使先构造满足 (2) 的元素 $\xi_i \in L^2(\mathcal{M})$，也可以通过投影到 $L^2(M)$，在 $L^2(M)$ 中得到真正的共轭系统：

$$p : L^2(\mathcal{M}) \longrightarrow L^2(M), \qquad \xi_i \longmapsto p\xi_i.$$

由于 p 是到 $L^2(M)$ 上的正交投影，关系式 (2) 对 $p\xi_i$ 仍然成立。这便引出了上面的一般定义：变量 ξ_i 只需满足共轭关系，而不论它们最初是否属于 $L^2(M)$。

注 2.7。 共轭关系确定了 ξ_i 与 $L^2(M)$ 中一个稠密子集的内积；因此，如果共轭系统存在，那么它是唯一的。

假设偏自由差商具有可闭性（等价地，自由 Fisher 信息有限），还可以得到一个具有若干附加性质的非交换狄利克雷形式，概述如下。

命题 2.8 (Cipriani-Sauvageaot、 [66, 19], Peterson[63], Dabrowski [23])。 设 $M = W^*(X_1, \dots, X_n)$ 是由带迹 W^*-概率空间 $(\mathcal{M}, \tau)$ 中的自伴变量 $(X_1, \dots, X_n)$ 生成的带迹冯·诺依曼代数，并假设 $\Phi^*(X) < \infty$。那么：

(1) 该算子

$$\Delta := \partial^* \bar{\partial}, \qquad \bar{\partial} = (\bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_n),$$

是 $L^2(M)$ 上完全狄利克雷型的生成元（证明见 [66]）：
the amplification $\Delta \otimes I_n$ *generates a Dirichlet form on* $M_n(M)$.

(2) 预解映射的倍数

$$\eta_\alpha := \alpha(\alpha + \Delta)^{-1}, \qquad \alpha > 0,$$

在 $L^2(M)$ 与 M 上均为含幺的、迹的（$\tau \circ \eta_\alpha = \tau$）、正的、完全正的且压缩的（参见例如 [53]）。此外（参见例如 [19,命题 2.5]），

$$\|x - \eta_\alpha(x)\| \le 2\|x\|, \qquad \|x - \eta_\alpha(x)\|_{L^2(M)} \longrightarrow 0 \quad (\alpha \to \infty).$$

(3) 半群 $\varphi_t = e^{-t\Delta}$ 是强连续的，其生成元为 $-\Delta$，且预解式具有积分表示（二者均理解为逐点黎曼积分）

$$\eta_\alpha = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, \varphi_t \, dt.$$

(4) 平方根预解式（参见 [63]）

$$\zeta_\alpha := \eta_\alpha^{1/2} = \pi^{-1} \int_0^\infty \frac{t^{-1/2}}{1+t}\, \eta_{\alpha(1+t)/t}\, dt$$

满足

$$\mathrm{Ran}(\eta_\alpha) = \mathrm{Dom}(\Delta) \subset \mathrm{Dom}(\bar{\partial}), \qquad \mathrm{Ran}(\zeta_\alpha) = \mathrm{Dom}(\Delta^{1/2}) = \mathrm{Dom}(\bar{\partial}),$$

从而 $\bar{\partial} \circ \zeta_\alpha$ 是有界的。

关于非交换狄利克雷型的更精确背景，请参阅 Cipriani–Sauvageot 的奠基性工作 [66, 19], 以及 Cipriani [20]。将其应用于冯·诺依曼代数理论的工作始于 Peterson [63]（他引入了 L^2-刚性的概念）以及 Dabrowski 的多篇著作 [23, 24, 26]

我们记录共轭变量的两个基本性质。

命题 2.9. 共轭变量 $\xi_i \in L^2(M)$， $i = 1, \ldots, n$ 是自伴的：

$$J(\xi_i) = \xi_i,$$

其中， J 表示富田共轭算子。

命题 2.10 (Voiculescu [79])。 设$(X_1, \ldots\ldots, X_n) \in \mathcal{M}^n_{\text{s.a.}}$，并设 $\xi_1, \ldots\ldots, \xi_n \in L^2(M)$ 是 X的共轭系统。那么

$$\sum_{i=1}^{n} [\xi_i, X_i] = 0,$$

其中， $[a, b] = ab - ba$ 表示交换子。

在更强假设下提升共轭变量的正则性时，这个单位元将发挥关键作用。

2.3. **自由庞加莱不等式**。 Voiculescu 在 [80]中引入了自由庞加莱不等式这一稳健概念，后来 Dabrowski [23] 对其进行了强化和发展。这些不等式已成为自由概率的基石，并对冯·诺依曼代数的结构产生了深远影响。

引理 2.11 (自由庞加莱不等式，Voiculescu [80])。 令 ∂_i 表示关于 $X_1, \ldots, X_n$的偏自由差商$^-$，并令 Y为所有算子 ∂_i （视为无界算子）的定义域中的一个自伴变量

那么存在一个正的常数 C，它依赖于 X_i ，但不依赖于 Y，使得

$$\big\| Y - \tau(Y).1 \big\|^2_{L^2(M)} \ \leq \ C \sum_{j=1}^{n} \big\| \bar{\partial}_j Y \big\|^2_{L^2(M)\bar{\otimes}L^2(M^{op})}.$$

此外，称为自由庞加莱常数的最佳（最小）常数 C_P 满足以下界

$$C_P \ \leq \ 4n \max_{i=1,\ldots,n} \|X_i\|^2.$$

这个结果令人惊讶：对于 $(X_1, \ldots, X_n)$ 的任意 选择，它都成立，这与上文提到的经典情形形成鲜明对比。

2.4. **吉布斯情形与Lipschitz共轭变量**。 自由吉布斯态模型为检验这些思想提供了天然的试验场。在这一设定中，共轭变量表现得尤为良好：它们是有界算子，事实上是吉布斯组中的显式多项式。具体而言，给定一个自伴非交换多项式势 V，自由吉布斯律 τ_V 定义如下（注意，我们没有严格定义什么是非微状态自由熵，更多细节请参阅前述论文，尤其是 [76]）：

定义 2.12 (自由吉布斯律， [37, 31, 82])。 与势 V 相关联的自由吉布斯律 τ_V （若存在）是下列泛函的极小化者

$$\chi_V(\tau') := -\chi(\tau') + \tau'(V), \tag{3}$$

其中 $\chi(\tau')$表示 ***Voiculescu*** 的微观态自由熵；极小化范围为自由 $*$-代数$\mathscr{P} := \mathbb{C}\langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ 上的迹态 τ'：该代数是由 n-自伴非交换（形式）变量 $t_1, \ldots, t_n$ 生成的非交换多项式 $*$-代数。

Voiculescu 的变分论证 [82, 第 3 节7] （另见 Fathi-Nelson [31, 引理 16]）利用其关于微观态自由熵的无穷小变量替换公式，表明这样的临界态 τ_V 在$V = V^* \in \mathscr{P}$ 必然满足施温格–戴森方程：

$$\tau_V(\mathscr{D}_i V P) \ = \ \tau_V \otimes \tau_V(\partial_i P), \tag{4}$$

对所有 n 非交换多项式 $P \in \mathscr{P}$。其中，对每个 $i = 1, \ldots, n$以及每个单项式 $q \in \mathscr{P}$ ，

$$\mathscr{D}_i P = \sum_{P = AX_iB} BA \tag{5}$$

然后通过线性性扩展。接着，我们将循环梯度 $\mathscr{D}q = (\mathscr{D}_1 q, \ldots, \mathscr{D}_n q)$记作如此。因此，共轭变量（假设势 $V = V^*$ 是自伴的）可明确写为 显式 b y

$$\xi_i := \mathscr{D}_i V(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n \rangle \subset W^*(X_1, \ldots, X_n) \subset L^2(W^*(X_1, \ldots, X_n)),$$

and

$$\partial_j \xi_i = \partial_j \mathscr{D}_i V \in \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n \rangle \otimes \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n \rangle^{op} \subset W^*(X_1, \ldots, X_n) \bar{\otimes} W^*(X_1, \ldots, X_n)^{op}.$$

这类 Gibbs 态的存在性是一个微妙的问题，直到最近，人们只知道对二次势的微小半圆扰动情形（ Guionnet–Maurel-Ségala [37]）。然而，Dabrowski、Guionnet 和 Shlyakhtenko [27], 以及 Jekel [46] 最近分别取得了突破，他们引入了两种合适（但不同）的凸性概念，以确保此类自由Gibbs律的存在性和唯一性。Jekel、Li 和 Shlyakhtenko 还在 [47,第 7] 节中通过纯粹的变分论证证明了自由Gibbs律的存在性（但在凸情形下仍使用随机微分方程方法来获得唯一性）。

虽然具有良好解析势的循环梯度作为共轭变量是一种极佳的情形，但这仍是相当严格的假设，因此促使我们寻找一种更灵活的框架。更一般地，对于任意的 n 元组，要求 $\xi_i \in \mathrm{Dom}(\bar{\partial}) := \bigcap_{j=1}^n \mathrm{Dom}(\bar{\partial}_j)$，并且 满足正则性条件 $\partial_j \xi_i \in M \bar{\otimes} M$ ，构成了一个中间情形，能够为我们的目的提供恰当的框架。这让人联想到自由 Gibbs 情形，尤其是自由群因子 $L(\mathbb{F}_n)$, $n \geq 1$上的半圆情形。Dabrowski [26] 正式引入了这一条件，并将其称为*Lipschitz*共轭变量，以此指代单变量情形中 Lipschitz函数的 Sobolev型刻画。该术语反映了其背后的直觉：这类元素的自由导数（其事先可能无界；不过，接下来的命题 2.14 将排除这种可能）表现得如同有界算子。

定义 2.13。 *(Dabrowski* [26, 定义 1]*)* 设 $M = (W^*(X_1, \ldots, X_n)\ \tau)$ 是一个带迹*von Neumann*代数。若 M 满足利普希茨共轭变量条件 ，则称：

(1) 偏自由差商 ∂_i 有定义且可闭；*(2)* 对所有 $i = 1, \ldots, n$，共轭变量 $\xi_i := \partial_i^*(1 \otimes 1)$ 都存在于 $L^2(M)$ 中；此外，这些 共轭变量属于闭包 $\bar{\partial} = (\bar{\partial}_1, \ldots, \bar{\partial}_n)$ 的定义域，其中

$$\bar{\partial}_j \partial_i^*(1 \otimes 1) \in M \bar{\otimes} M^{op} \subset L^2(M \bar{\otimes} M^{op}) \cong L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op}) \cong L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M),$$

对每个 $j = 1, \ldots\ldots, n$。

现在我们来注意一个关于 Lipschitz共轭变量的显著且多少有些出人意料的事实，这一事实最早由 Dabrowski 在 [26, 推论 25（a’）的证明概要]中观察到。上述定义中的第一项要求，即条件 $\xi_i \in L^2(M)$，实际上可以大幅加强为 $\xi_i \in M$。利用 Voiculescu 建立的自由差商的交换子 恒等式（见 Dabrowski [23, 等式（1）]），再结合稠密性论证，便可得出这一结论。不过，我们在此给出另一种证明：我们不采用上述方法，而是仔细处理 Voiculescu 关于共轭变量与生成元的基本交换关系 （2.10），从而对这一现象作出更直接的概念性解释。

命题 2.14. 设 $M = (W^*(X_1, \ldots\ldots, X_n)\ \tau)$ 满足利普希茨共轭变量条件。则：

(1) $\xi_i := \partial_i^*(1 \otimes 1) \in M$ *for all* i.

(2) $\xi_i^{(2)} := \partial_i^*(1\otimes\partial_i^*(1\otimes 1)) = \partial_i^*(1\otimes\xi_i) = \partial_i^*(\xi_i\otimes 1) \in M$对所有 i。*(3)* $(\partial_i\otimes\mathrm{id})\circ\partial_j\colon\ M_0 = \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \to L^2(M)^{\bar\otimes 3}$对所有 i、$j = 1, \ldots, n$ 均为稠定且可闭的。

证明：

（1）对于第一点。回顾 Voiculescu 的 L^2 交换命题 2.10 给出

$$\sum_{i=1}^n [\xi_i, X_i] \;=\; 0 \qquad \text{in } L^2(M).$$

固定 $j\in\{1,\ldots,n\}$。由于 $\xi_i\in\mathrm{Dom}(\bar\partial_j)$，存在多项式 $p_k^{(i)}\in\mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ 使得

$$p_k^{(i)} \to \xi_i \;\text{ in } L^2(M), \qquad \partial_j p_k^{(i)} \to \bar\partial_j\xi_i \;\text{ in } L^2(M)\bar\otimes L^2(M^{op}),$$

对于每个 i。对每个 k，定义

$$a_k := \sum_{i=1}^n [p_k^{(i)}, X_i] = \sum_{i=1}^n \big(p_k^{(i)}X_i - X_i p_k^{(i)}\big) \;\in \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle.$$

由于每个 $X_i\in M$ 都是有界的，左乘和右乘 X_i 在$L^2(M)$上定义有界算子，其范数至多为 $\|X_i\|$。因此，对于每个 i,

$$\|p_k^{(i)}X_i - \xi_i X_i\|_{L^2(M)} \le \|X_i\|\,\|p_k^{(i)} - \xi_i\|_{L^2(M)} \;\longrightarrow\; 0,$$

类似地 $\|X_i p_k^{(i)} - X_i\xi_i\|_{L^2(M)}\to 0$。因此

$$[p_k^{(i)}, X_i] \longrightarrow [\xi_i, X_i] \quad \text{in } L^2(M),$$

并对 i 求和（有限和），得到

$$a_k \longrightarrow \sum_{i=1}^n [\xi_i, X_i] = 0 \qquad \text{in } L^2(M).$$

On 核心 $\mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$，对 ∂_j 应用莱布尼茨法则：$\mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \to L^2(M)\,\bar\otimes\, L^2(M^{op})$，得到 s

$$\partial_j(p_k^{(i)}X_i) = \partial_j(p_k^{(i)})(1\otimes X_i) + (p_k^{(i)}\otimes 1)\,\partial_j X_i,$$

$$\partial_j(X_i p_k^{(i)}) = \partial_j X_i\,(1\otimes p_k^{(i)}) + (X_i\otimes 1)\,\partial_j p_k^{(i)}.$$

因此,

$$\partial_j\big([p_k^{(i)}, X_i]\big) = \partial_j(p_k^{(i)}X_i - X_i p_k^{(i)})$$

$$= \partial_j(p_k^{(i)})(1\otimes X_i) - (X_i\otimes 1)\,\partial_j p_k^{(i)} \;+\; (p_k^{(i)}\otimes 1)\,\partial_j X_i - \partial_j X_i\,(1\otimes p_k^{(i)}).$$

由于在 $L^2(M)$ 中 $\partial_j X_i = \delta_{ij}(1\otimes 1)\,\bar\otimes\, L^2(M^{op})$，这可简化为

$$\partial_j\big([p_k^{(i)}, X_i]\big) = \partial_j(p_k^{(i)})(1\otimes X_i) - (X_i\otimes 1)\,\partial_j p_k^{(i)} \;+\; \delta_{ij}\big(p_k^{(j)}\otimes 1 - 1\otimes p_k^{(j)}\big),$$

其中我们采用如下约定

$$[p_k^{(j)}, 1\otimes 1] := p_k^{(j)}\otimes 1 - 1\otimes p_k^{(j)} \in \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\otimes\mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle^{op}.$$

对 i 求和，得到

$$\begin{aligned}\partial_j(a_k) &= \sum_{i=1}^n \partial_j\big([p_k^{(i)}, X_i]\big) \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\partial_j p_k^{(i)}(1\otimes X_i) - (X_i\otimes 1)\,\partial_j p_k^{(i)}\Big) + \big(p_k^{(j)}\otimes 1 - 1\otimes p_k^{(j)}\big) \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\partial_j p_k^{(i)}(1\otimes X_i) - (X_i\otimes 1)\,\partial_j p_k^{(i)}\Big) + [p_k^{(j)}, 1\otimes 1]\end{aligned}$$

现在我们证明 $\partial_j(a_k)$ 在 $L^2(M)$ 中收敛到 $\bar{\otimes} L^2(M^{op})$，并确定其极限。首先，对于“梯度”项，注意对每个 i themaps

$$L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op}) \ni \eta \mapsto (X_i\otimes 1)\eta, \qquad \eta \mapsto \eta(1\otimes X_i)$$

都是有界线性算子。事实上，在通常的同一化 $L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op}) \simeq L^2(M\bar{\otimes}M^{op})$ 下，它们分别就是左乘和右乘 $X_i\otimes 1$ 和 $1\otimes X_i$，因此其算子范数有界于 $\|X_i\otimes 1\| = \|X_i\|$，因为 $X_i\in M$ 是有界的。

由于 $\partial_j p_k^{(i)} \to \bar{\partial}_j\xi_i$ 属于 $L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})$，我们有

$$\partial_j p_k^{(i)}(1\otimes X_i) \longrightarrow \bar{\partial}_j\xi_i(1\otimes X_i), \qquad (X_i\otimes 1)\,\partial_j p_k^{(i)} \longrightarrow (X_i\otimes 1)\,\bar{\partial}_j\xi_i$$

在 $L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})$ 中，因此

$$\partial_j p_k^{(i)}(1\otimes X_i) - (X_i\otimes 1)\,\partial_j p_k^{(i)} \longrightarrow \bar{\partial}_j\xi_i(1\otimes X_i) - (X_i\otimes 1)\,\bar{\partial}_j\xi_i$$

属于 $L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})$。

再次对 i 求和（有限和）得到

$$\sum_{i=1}^n \Big(\partial_j p_k^{(i)}(1\otimes X_i) - (X_i\otimes 1)\,\partial_j p_k^{(i)}\Big) \longrightarrow \sum_{i=1}^n \Big(\bar{\partial}_j\xi_i(1\otimes X_i) - (X_i\otimes 1)\,\bar{\partial}_j\xi_i\Big)$$

属于 $L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})$。

接下来，对于另一项，考虑线性映射

$$T : L^2(M) \to L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op}), \qquad T(x) := x\otimes 1 - 1\otimes x.$$

直接计算表明，T 在中心化子空间 $L_0^2(M)$ 上几乎是（相差一个 $\sqrt{2}$-因子）等距映射，即

$$\|T(x)\|^2_{L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})} = (\tau\otimes\tau)\big((x\otimes 1 - 1\otimes x)^*(x\otimes 1 - 1\otimes x)\big) = 2\|x - \tau(x).1\|^2_{L^2(M)},$$

因此特别地，T 是连续的，并且

$$\|T(x)\|_{L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})} \le \sqrt{2}\,\|x\|_{L^2(M)}, \qquad x\in L^2(M).$$

由于 $p_k^{(j)} \to \xi_j$ 属于 $L^2(M)$，我们得到

$$p_k^{(j)}\otimes 1 - 1\otimes p_k^{(j)} = T(p_k^{(j)}) \longrightarrow T(\xi_j) = \xi_j\otimes 1 - 1\otimes\xi_j$$

在 $L^2(M)$ 中，$\bar{\otimes} L^2(M^{op})$。

综合这些收敛（它们均属于 $L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})$），我们得出

$$\partial_j(a_k) \longrightarrow \eta := \sum_{i=1}^{n} \Big(\bar{\partial}_j \xi_i (1 \otimes X_i) - (X_i \otimes 1)\, \bar{\partial}_j \xi_i \Big) \; + \; \big(\xi_j \otimes 1 - 1 \otimes \xi_j \big)$$

在 $L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})$ 中（事实上它属于 $M \bar{\otimes} M^{op}$）。
因此我们证明了：

$$a_k \to \sum_{i=1}^{n} [\xi_i, X_i] \;\text{ in } L^2(M), \qquad \partial_j(a_k) \to \eta \;\text{ in } L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op}).$$

根据 ∂_j 的闭包 $\bar{\partial}_j$ 的定义，这意味着 $\sum_{i=1}^{n} [\xi_i, X_i] \in \mathrm{Dom}(\bar{\partial}_j)$，并且

$$\bar{\partial}_j \Big(\sum_{i=1}^{n} [\xi_i, X_i] \Big) = \eta.$$

由于 $\sum_{i=1}^{n} [\xi_i, X_i] = 0$ 属于 $L^2(M)$，左端为 $\bar{\partial}_j(0) = 0$，因此 $\eta = 0$。因此 e,

$$\xi_j \otimes 1 - 1 \otimes \xi_j = \sum_{i=1}^{n} \Big((X_i \otimes 1)\, \bar{\partial}_j \xi_i - \bar{\partial}_j \xi_i (1 \otimes X_i) \Big),$$

¯特别地，根据 Lipschitz 假设，每个 $\partial_j \xi_i \in M \bar{\otimes} M^{op}$，所以右端属于$M \bar{\otimes} M^{op}$，从而 $\xi_j \otimes 1 - 1 \otimes \xi_j \in M \bar{\otimes} M^{op}$ 也成立。应用 id $\otimes \tau$，可得一种非交换 Clark–Ocone–Bismut 公式（类似于 Biane-Speicher[6] 在 Wigner 空间上发展出的自由 Malliavin 微积分中的公式）

$$\xi_j - \tau(\xi_j).1 = (\mathrm{id} \otimes \tau) \left[\sum_{i=1}^{n} \Big((X_i \otimes 1)\, \bar{\partial}_j \xi_i - \bar{\partial}_j \xi_i (1 \otimes X_i) \Big) \right] \in M.$$

因此，对所有 j，$\xi_j \in M$。

（2）对于第二点，Voiculescu 伴随恒等式 [78, 命题 4.1] 给出

$$\xi_i^{(2)} := \partial_i^*(1 \otimes \xi_i) = \xi_i^2 - (\tau \otimes \mathrm{id}) \big(\bar{\partial}_i(\xi_i) \big) \in M,$$

由于 $\xi_i \in M$ 且 $\partial_i(\xi_i) \in M \bar{\otimes} M^{op}$，根据 Lipschitz 假设。
此外，众所周知（例如参见 Mai [54, 引理 4.6]），若 $u \in$ 属于定义域(∂_i^*)，则 $u^\dagger \in$ 属于定义域(∂_i^*)，并且

$$\partial_i^*(u^\dagger) \;=\; \partial_i^*(u)^*, \qquad \text{for every } i \in \{1, \dots, n\}. \tag{6}$$

特别地，这（通过另一种方式）表明共轭变量是自伴的。事实上，

$$\xi_i^* = \big(\partial_i^*(1 \otimes 1) \big)^* = \partial_i^* \big((1 \otimes 1)^\dagger \big) = \; \partial_i^*(1 \otimes 1) = \xi_i, \qquad \text{for every } i \in \{1, \dots, n\}. \tag{7}$$

此外，由于 $1 \otimes \xi_i \in$ 属于定义域(∂_i^*)，可得

$$(1 \otimes \xi_i)^\dagger = \xi_i^* \otimes 1 = \xi_i \otimes 1 \in \mathrm{Dom}(\partial_i^*),$$

因此

$$\partial_i^*(\xi_i \otimes 1) = \partial_i^*(1 \otimes \xi_i). \tag{8}$$

由于 ξ_i 是自伴的，只需检验 Voiculescu 伴随恒等式中的第二项，

$$\xi_i^{(2)} = \partial_i^*(1 \otimes \xi_i) = \xi_i^2 - (\tau \otimes \mathrm{id}) \big(\bar{\partial}_i(\xi_i) \big).$$

再次由 Mai 的 [54, 引理 4.6]，对于任意 $u \in$ 定义域(∂^*)，有

$$(\tau \otimes \mathrm{id})(u)^* = (\mathrm{id} \otimes \tau)(u^\dagger).$$

将此应用于 $u = \bar{\partial}_i(\xi_i)$，并利用 $\bar{\partial}_i$ 是实导子这一事实，从而有 $(\bar{\partial}_i\xi_i)^\dagger = \bar{\partial}_i(\xi_i^*) = \bar{\partial}_i(\xi_i)$，可得

$$\big((\tau\otimes\mathrm{id})(\bar{\partial}_i\xi_i)\big)^* = (\mathrm{id}\otimes\tau)(\bar{\partial}_i(\xi_i)) = (\tau\otimes\mathrm{id})(\bar{\partial}_i\xi_i).$$

因此，$(\tau\otimes\mathrm{id})(\partial_i(\xi_i))$与$(\mathrm{id}\otimes\tau)(\partial_i(\xi_i))$都是 M的自伴元素。

由于 ξ_i 是自伴的，且修正项$(\tau\otimes\mathrm{id})(\partial_i(\xi_i))$也是自伴的，因此二阶共轭变量

$$\xi_i^{(2)} = \partial_i^*(1\otimes\xi_i) \in M$$

本身是自伴的。

(3) 最后，由于 ξ_i，$\xi_i^{(2)} \in M$，X_i的一阶和二阶共轭变量存在于 M中。由 [27,引理 40], 可知，M 中一阶和二阶共轭变量的存在性蕴含：所有二阶自由差商$(\partial_i\otimes\mathrm{id})\circ\partial_j$ 弱-$*$ 可闭于 M，且 L^2-可闭于 $L^2(M,\tau)$，无论在对角情形 $i=j$ 还是在混合情形 $i\neq j$中皆然。

■

注 2.15. 人们可能会疑惑，为什么我们不直接将 ∂_j 应用于单位元 $\sum_i[\xi_i, X_i] = 0$，并用莱布尼茨法则展开。问题在于，在现阶段，我们只知道 $\xi_i \in L^2(M)\cap$定义域$(\bar{\partial}_j)$，而我们的目标恰恰是证明 $\xi_i \in M$。因此，我们不能假定交换子 $[X_i,\xi_i]$ 位于定义域$(\partial_j)\cap M$，后者是一个 $*$-代数，∂_j 在其上作为导子作用，参见例如 *Dabrowski* [23, 命题 6]。由于我们尚不知道 ξ_i 是有界的，该判别准则不能直接适用。

在黎曼几何中，曲率通过拉普拉斯算子与梯度之间的交换恒等式表现出来。一个基本例子是如下关系（为简便起见，在 $\mathbb{R}^n$中陈述），

$$[\nabla, \mathcal{L}_V] = -\nabla^2 V,$$

其中 $\mathcal{L}_V$ 是与势 V 相关联的朗之万生成元（通常势是凸的，因此 $\nabla^2 V \geq 0$）。还请注意，这一恒等式很容易推广至.....。这一恒等式曾在 Bakry–Gentil–Ledoux [3, 第 104],页中讨论。
它是 Γ–算子分解的基础，并在 Bakry–Émery
曲率-维数理论中发挥着核心作用。特别是，海森矩阵 $\nabla^2 V$ 充当曲率项，与非加权情形中的里奇张量直接类似。$\mathcal{L}_V$ 的显式形式在 (19) 中回顾，其中它作为朗之万扩散的生成元出现，该扩散的不变对数凹测度为 $\mu \propto e^{-V}dx$。

在自由情形中，也会出现类似现象：曲率体现在自由差商与相应自由拉普拉斯算子之间无法精确交换。现在我们回顾一个关键引理，它确立了这一近似交换关系。应将其视为上述经典恒等式在自由情形中的对应形式；它在自由 Γ–微积分的结构以及自由扩散生成元的分析中，同样发挥着根本作用。

引理 2.16. *(Dabrowski* [26, 引理 19]*)*。在定义 *2.13* 的假设下，我们有：

(1) 设 $\Delta_j := \partial_j^*\partial_j$。对于任意 $x \in$ 定义域(∂)，我们有 $x \in$ 定义域(Δ_j)，$\partial_i(x) \in$ 定义域$(\Delta_j\otimes 1 + 1\otimes\Delta_j)$，$x \in$定义域$(\Delta^{3/2})$ 以及：

$$\partial_i\Delta_j(x) = (1\otimes\Delta_j + \Delta_j\otimes 1)\partial_i(x) + \partial_j(x)\#(\bar{\partial}_i\partial_j^*(1\otimes 1)).$$

(2) 如果 $x \in$ 定义域(∂)（分别地，$x \in$ 定义域(Δ)），那么 恒等算子 $\otimes\,\tau(\partial_i(x))$ 也属于定义域。

(3) 定义域$(\Delta^{3/2}) \subset$ 定义域$(\overline{\Delta\otimes\mathrm{id} + \mathrm{id}\otimes\Delta}\circ\bar{\partial})$ 此外，对任意 $x \in$ 定义域$(\Delta^{3/2})$

$$\bar{\partial}_i\Delta(x) = \Delta^{\otimes}\bar{\partial}_i(x) + \sum_{j=1}^{N}\bar{\partial}_j(x)\#(\bar{\partial}_i\partial_j^*(1\otimes 1)).$$

我们还简记为 $\Delta^{\otimes} := \Delta \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \Delta$，因此它是一个稠密定义的闭自伴正算子：它是定义在核 定义域$(\Delta) \otimes$ 定义域(Δ)（代数张量积）上的 $\Delta \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \Delta$ 的闭包，并且在 $\varphi_t \otimes \varphi_t$ 下也保持不变。

根据此定义，我们将证明若干出乎意料且极为稳健的性质依然成立。特别地，我们得到一个改进的庞加莱不等式，其最优常数有界于自由差商的非交换雅可比矩阵的算子范数。可以将其视为一种自由的 *Hörmander-Brascamp–Lieb* 型不等式 [12], ，但它适用于更一般的情形：除了共轭变量满足 Lipschitz 正则性外，对底层状态不作任何结构性假设（尤其不要求其具有吉布斯形式）。

在继续之前，我们需要引入矩阵层面的右腿（“sharp”）作用；根据近似交换引理 2.16，这一作用至关重要且不可避免。

定义 2.17. 设(M, τ)为一个带迹的 W^*–概率空间。在代数张量积 $L^2(M) \otimes L^2(M^{op})$上，对于 $x \otimes y \in M \otimes M^{op}$和 $a \otimes b \in L^2(M) \otimes L^2(M^{op})$，我们定义：

$$(a \otimes b) \sharp (x \otimes y) := ax \otimes yb.$$

通过双线性和连续性，这扩展为冯·诺伊曼张量积$M \bar{\otimes} M^{op}$在 $L^2（M）\bar{\otimes} L^2（M^{op}）$上的有界右作用。

对于 $n \in \mathbb{N}$和 $T: = （T）_{ij} = （T_{i,\ j}）_{i,\ j=1}^{n} \in M_n（M \bar{\otimes} M^{op}）$，我们定义如下线性算子，称为右腿乘法（作用）

$$\mathcal{R}_T : \left(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n} \longrightarrow \left(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}$$

by

$$(\mathcal{R}_T \eta)_i := \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sharp T_{ji} \tag{9}$$

对于 $\eta = （\eta_1、\ldots\ldots、\eta_n）\in \left(L^2（M）\bar{\otimes} L^2（M^{op}）\right)^{\oplus_n}$和 $i = 1、\ldots\ldots、n$。

现在我们可以验证， $\mathcal{R}$ 满足以下表示性质。

命题 2.18。 对于每个 $n \geq 1$ 以及每个 $T \in M_n（M \bar{\otimes} M^{op}）$，定义于定义 *2.17* 中的算子 $\mathcal{R}$ 满足：

(1) 线性： $\mathcal{R}_{T+S} = \mathcal{R}_T + \mathcal{R}_S$*(2)* 有界性：$\|\mathcal{R}_T\| \leq \|T\|_{M_n(M \bar{\otimes} M^{op})}$·因此 $\mathcal{R}_T \in B(\left(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n})$ $\simeq M_n(B(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op}))$ *(3)* *–结构： $\mathcal{R}_{T^*} = (\mathcal{R}_T)^*$ 其中根据定义， T^* 由 $(T^*)_{ij} = T_{ji}^*$ 定义，这里采用 $M \bar{\otimes} M^{op}$上的通常 *–对合。*(4)* $\mathcal{R}_{(1 \otimes 1) \otimes I_n} = id_{\left(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}}$。*(5)* 乘法规则：对于 $M_n($ $M \bar{\otimes} M^{op})$ 中的通常矩阵乘积（此处也记作不带下标的形式或 $\sharp$）（即通常的矩阵乘积以及 $M \bar{\otimes} M^{op}$中的乘法 $\sharp$），

$$\mathcal{R}_S \circ \mathcal{R}_T = \mathcal{R}_{TS} = \mathcal{R}_{T \sharp S} \qquad for\ all\ T, S \in M_n(M \bar{\otimes} M^{op}).$$

特别地，如果 T 在 $M_n(M \bar{\otimes} M^{op})$ 中是可逆的，那么 $\mathcal{R}_T$ 也是可逆的，并且 $(\mathcal{R}_T)^{-1} = \mathcal{R}_{T^{-1}}$。

(6) 正性： 如果 $T \geq 0$ 属于 $M_n(M \bar{\otimes} M^{op})$（分别地， $T > 0$，即对于某个 $c > 0$，有 $T \geq c((1 \otimes 1)$ $\otimes I_n)）$，那么 $\mathcal{R}_T \geq 0$（分别地， $\mathcal{R}_T \geq c\mathrm{id}$）作为作用于 $\left(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}$ 上的算子。

因此， $\mathcal{R}$ 是反代数 $M_n(M \bar{\otimes} M^{op})^{op}$的反表示或表示 .

证明：

(1) 有界性。这是显然的（Dabrowski [26, 定理 17] 的 [25]证明中也已用到）。（2） *–结构。设 $\eta, \zeta \in \left(L^2(M)\bar{\otimes}L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}$。那么

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{R}_T\eta,\zeta\right\rangle_{\left(L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}} &= \sum_{i=1}^n \left\langle (\mathcal{R}_T\eta)_i,\zeta_i\right\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})}\\ &= \sum_{i=1}^n \Big\langle \sum_{j=1}^n \eta_j\sharp T_{ji},\zeta_i\Big\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})}\\ &= \sum_{i,j=1}^n \left\langle \eta_j\sharp T_{ji},\zeta_i\right\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})}\\ &= \sum_{i,j=1}^n \left\langle \eta_j,\zeta_i\sharp T_{ji}^*\right\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})}, \end{aligned} \tag{10}$$

利用以下平凡性质：对于所有 $\eta_1,\eta_2 \in L^2(M)\bar{\otimes}L^2(M^{op})$ 以及所有 $u \in M\bar{\otimes}M^{op}$，都有 $\left\langle \eta_1\sharp u,\eta_2\right\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})} = \left\langle \eta_1,\eta_2\sharp u^*\right\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})}$，其中再次有 $(a\otimes b)^*:=a^*\otimes b^*$ 在简单张量上。

但是对于每个 $j=1,\ .....,\ n$,

$$(\mathcal{R}_{T^*}\zeta)_j = \sum_{i=1}^n \zeta_i\sharp(T^*)_{ij} = \sum_{i=1}^n \zeta_i\sharp T_{ji}^*,$$

因此,

$$\left\langle \mathcal{R}_T\eta,\zeta\right\rangle_{\left(L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}} = \sum_{j=1}^n \left\langle \eta_j,(\mathcal{R}_{T^*}\zeta)_j\right\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})} = \left\langle \eta,\mathcal{R}_{T^*}\zeta\right\rangle_{\left(L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}}.$$

从而 $\mathcal{R}_{T^*}=(\mathcal{R}_T)^*$。

(3) 乘法结构。设 $T,S\in M_n(M\bar{\otimes}M^{op})$ 和 $\eta\in\left(L^2(M)\bar{\otimes}L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}$。则

$$(\mathcal{R}_T\eta)_j = \sum_{k=1}^n \eta_k\sharp T_{kj}.$$

因此，利用 $\sharp$ 的结合律,

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}_S\mathcal{R}_T\eta)_i &= \sum_{j=1}^n (\mathcal{R}_T\eta)_j\sharp S_{ji}\\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \eta_k\sharp T_{kj}\right)\sharp S_{ji}\\ &= \sum_{k=1}^n \eta_k\sharp\Big(\sum_{j=1}^n T_{kj}\sharp S_{ji}\Big) = \sum_{k=1}^n \eta_k\sharp\Big(\sum_{j=1}^n T_{kj}S_{ji}\Big)\end{aligned}$$

通常的矩阵乘积为

$$(T\sharp S)_{ki} := \sum_{j=1}^n T_{kj}S_{ji} = \sum_{j=1}^n T_{kj}\sharp S_{ji},$$

（请回忆，$\sharp$ 不过是 $M\bar{\otimes}M^{op}$ 中的典范乘法。）

so

$$(\mathcal{R}_S\mathcal{R}_T\eta)_i = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \sharp (TS)_{ki} = (\mathcal{R}_{TS}\,\eta)_i.$$

因此 $\mathcal{R}_S \circ \mathcal{R}_T = \mathcal{R}_{TS}$。

通过检验 $\mathcal{R}_{T^{-1}}$ 同时是 $\mathcal{R}_T$ 的左逆和右逆，我们便可轻易看出逆元性质。

(4) 正性。 设 $T \geq 0$ 属于 $M_n(M \bar{\otimes} M^{op})$。那么 $T = Q^*Q$，其中某个 $Q \in M_n(M \bar{\otimes} M^{op})$。由表示性质和 $*$–结构可得，

$$\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_{Q^*Q} = \mathcal{R}_Q\,\mathcal{R}_{Q^*} = \mathcal{R}_Q\,(\mathcal{R}_Q)^*.$$

因此，对于任意 $\eta \in \left(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}$，

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{R}_T\eta, \eta \right\rangle_{\left(L^2(M)\bar{\otimes} L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}} &= \left\langle \mathcal{R}_Q(\mathcal{R}_Q)^*\eta, \eta \right\rangle_{\left(L^2(M)\bar{\otimes} L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}} \\ &= \left\langle (\mathcal{R}_Q)^*\eta, (\mathcal{R}_Q)^*\eta \right\rangle_{\left(L^2(M)\bar{\otimes} L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}} \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

由此得到正性陈述。

若 $T \geq c.(1 \otimes 1) \otimes I_n$，特别地，$T = c.(1 \otimes 1) \otimes I_n + Q^*Q$，其中某个 $Q \in M_n(M \bar{\otimes} M^{op})$，因此 $\mathcal{R}_T = c\mathrm{id} + \mathcal{R}_Q(\mathcal{R}_Q)^*$，结论立即成立。

■

I特别是，由于定义域 $\Delta^{3/2}$ 上的近似交换关系，必须采用这一形式体系 :

$$\mathrm{Dom}(\Delta^{3/2}) \subset \mathrm{Dom}\left(\overline{\Delta \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \Delta} \circ \bar{\partial}\right),$$

且对任意 $x \in \mathrm{Dom}(\Delta^{3/2})$,

$$\bar{\partial}_i \Delta(x) = \Delta^{\otimes} \bar{\partial}_i(x) + \sum_{j=1}^{N} \bar{\partial}_j(x) \sharp \left(\bar{\partial}_i \partial_j^*(1 \otimes 1)\right).$$

这里，修正矩阵 $\left(\bar{\partial}_j(\partial_i^*(1 \otimes 1))\right)_{ij}$ 通过上述右乘以相反的顺序作用于 $\mathcal{R}_{(\cdot)}$（另请注意，我们对非交换雅可比矩阵采用了反向的指标约定）。由于我们将在命题 2.18 中证明，该矩阵上的任何 C^*–正性条件（例如

曲率–维数条件）都会直接转化为关于 $\mathcal{R}_T$ 的算子不等式，因此我们现在已具备良好的条件。

我们还要指出，在存在 Lipschitz共轭变量的情况下，这类共轭变量的非交换雅可比矩阵具有良好的对称性，从而使其成为自伴算子，并且在 $M \bar{\otimes} M^{op}$ 上关于希尔伯特–施密特算子伴随性的对合下保持不变，正如注 2.1 中所回顾的那样。

引理 2.19（雅可比矩阵的对称性）。 设 $M = (W^*(X_1, \ldots, X_n)\ \tau)$ 满足 Lipschitz 共轭变量条件。则：

(1) Schwarz 可积性 *(Dabrowski* [26,引理 36]*)*：

$$\bar{\partial}_j \xi_i = \sigma(\bar{\partial}_i \xi_j),$$

其中，翻转自同构在简单张量上由 $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$, $a \in M$, $b \in M^{op}$ 给出，并延拓为 $L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})$ 上的等距对合。

(2) 雅可比矩阵的自伴性：设定

$$\mathscr{J}\xi = (\bar{\partial}_j \xi_i)_{ij} \in M_n(M \bar{\otimes} M^{op}),$$

对所有 i、j，均有

$$(\mathscr{J}\xi)^*_{ij} = (\mathscr{J}\xi)_{ji},$$

其中 $(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$ 在简单张量上成立。

(3) 希尔伯特–施密特不动点：

$$((\mathscr{J}\xi)_{i,j})^\dagger = (\mathscr{J}\xi)_{i,j}.$$

(4) 若 $\mathscr{J}\xi$ 可逆，则 $(\mathscr{J}\xi)^{-1}$ 是自伴的。

证明：

(1) 第一处是 [26, 引理 36]。**(2)** 关于希尔伯特–施密特对合 $\dagger$ 下的不变性：由于对每个 $j = 1, \ldots, n$，都有 $\xi_j \in$ 定义域$(\bar{\partial})$，且自由差商是实导子，因此我们有

$$\bar{\partial}_j(\xi_i^*) = (\bar{\partial}_j \xi_i)^\dagger.$$

由于共轭变量是自伴的（参见命题 2.9），$\xi_i^* = \xi_i$，因此

$$(\bar{\partial}_j \xi_i)^\dagger = \bar{\partial}_j \xi_i.$$

(3) 关于自伴性，结合 Schwarz 可积性、前一点以及 σ 在一个对合自同构中：

$$(\bar{\partial}_j \xi_i)^* = \sigma\big((\bar{\partial}_j \xi_i)^\dagger\big) = \sigma(\bar{\partial}_j \xi_i) = \bar{\partial}_i \xi_j,$$

从而得到 $(\mathscr{J}\xi)^*_{i,j} = (\mathscr{J}\xi)_{j,i}$。

(4) 现在，逆算子的自伴性可由 $\mathscr{J}\xi$ 的自伴性推出。

证明至此完成。 ∎

现在我们可以陈述一个主要定理：在凸性和可逆性假设下，该定理通过自由庞加莱不等式中的海森矩阵项给出精确控制，并进而在曲率判据下控制庞加莱常数。在这种情况下，自由庞加莱常数小于或等于凸性常数的倒数，这与经典情形完全类似。

定理 2.20 (自由Brascamp–Lieb–Poincaré不等式)。 设 (M, τ) 是由一个自伴 n 元组 $X = (X_1, \ldots, X_n)$生成的带迹*von Neumann*代数，并假设该元组在定义 *2.13* 的意义下具有*Lipschitz*共轭变量。将共轭变量的非交换雅可比矩阵定义为

$$\mathscr{J}\xi := \big(\bar{\partial}_j \xi_i\big)_{i,j=1}^n \in M_n(M \bar{\otimes} M^{op}).$$

假设 t $\mathscr{J}\xi$ 在 C^*-代数 $M_n(M \bar{\otimes} M^{op})$中有界、可逆且为正。特别是，由于 e $\mathscr{J}\xi > 0$ 且可逆，其谱包含于 $[c, \infty)$ 的某个紧子集中，其中 $c > 0$，因此

$$\mathscr{J}\xi \;\geq\; c\,(1 \otimes 1) \otimes I_n \qquad in\ M_n(M \bar{\otimes} M^{op}), \tag{11}$$

即，曲率–维数条件 $CD(c, \infty)$ 以 C^*意义成立。

那么，对于每个 $Y \in$定义域$(\bar{\partial}) = \bigcap_{i=1}^n$定义域$(\bar{\partial}_i)$，都有

$$\left\|Y-\tau(Y).1\right\|_{L^2(M)}^2 \;\leq\; \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left\langle \bar\partial_j Y \sharp \big((\not\partial\xi)^{-1}\big)_{ji},\, \bar\partial_i Y \right\rangle_{L^2(M)\,\bar\otimes\, L^2(M^{op})}.$$

此外，在曲率–维数条件 (11) 下，函数演算给出 $(\not\partial\xi)^{-1} \leq \frac{1}{c}(1\otimes 1)\otimes I_n$，因此

$$\left\|Y-\tau(Y).1\right\|_{L^2(M)}^2 \leq \frac{1}{c}\sum_{i=1}^n \left\|\bar\partial_i Y\right\|_{L^2(M)\,\bar\otimes\, L^2(M^{op})}^2.$$

证明： 根据引理 2.19，共轭变量满足 Schwarz 可积性，

$$\bar\partial_j\xi_i = \sigma(\bar\partial_i\xi_j),$$

并且每个元素 $\partial_j\xi_i$ 在 dagger 对合下保持不变。特别地，$\not\partial\xi$ 是 *–自伴的，且在 $M_n(M\bar\otimes M^{op})$ 中严格为正，因此其逆元 $(\not\partial\xi)^{-1}$ 也同样是 *–自伴的，且严格为正。

回忆一下，拉普拉斯算子 $\Delta := \sum_{i=1}^n \partial_i^*\bar\partial_i$ 是 $L^2(M)$ 上的正自伴算子，且 $\ker(\Delta) = \mathbb{C}1$。事实上，若 $\Delta Y = 0$，则与 Δ 关联的狄利克雷型为零，即

$$\mathcal{E}(Y) := \sum_{i=1}^n \|\bar\partial_i Y\|^2_{L^2(M)\,\bar\otimes\, L^2(M^{op})}.$$

由自由庞加莱不等式（回忆一下，该不等式总是成立），可得 $\|Y-\tau(Y).1\|_{L^2(M)}$，因此 $Y=\tau(Y).1$ 于是 Δ 在 $L^2_0(M)$ 上是单射，而该空间显然是 $L^2(M)$ 的闭子空间。

此外，我们推得

$$\overline{\mathrm{Ran}(\Delta)} = \mathrm{Ker}(\Delta)^\perp = (\mathbb{C}1)^\perp = L^2_0(M) := \{Y\in L^2(M) : \tau(Y)=0\}. \tag{12}$$

并且由于我们知道 $\tau\circ\phi_t = \tau$ 其中 ϕ_t 是将 $-\Delta$指数化得到的半群，直接运用微分论证即可得出 $\tau\circ\Delta = 0$，因此$L^2_0(M)$在 Δ 作用下保持稳定（利用对偶性以及 $\bar 1 = 0$，甚至可以更容易地看出这一点）。

但我们还知道更多，因为 Δ 实际上是强制的。这是自由性的结果，源于自由庞加莱不等式（谱隙），它告诉我们存在常数 $C_P>0$，使得

$$\|Y-\tau(Y).1\|^2_{L^2(M)} \;\leq\; C_P\,\mathcal{E}(Y), \qquad Y\in \mathrm{Dom}(\Delta).$$

特别地，对于 $Z\in\mathrm{Dom}(\Delta)\cap L^2_0(M)$（即 $\tau(Y)=0$），我们有

$$\|Y\|^2_{L^2(M)} \;\leq\; C_P\,\langle \Delta Y, Y\rangle_{L^2(M)}.$$

等价地，

$$\langle \Delta Y, Y\rangle_{L^2(M)} \;\geq\; C_P^{-1}\,\|Y\|^2_{L^2(M)}, \qquad Y\in\mathrm{Dom}(\Delta)\cap L^2_0(M).$$

因此，在子空间 $L^2_0(M)$上，算子 Δ 严格为正，并满足

$$\Delta \;\geq\; C_P^{-1}\mathrm{id} \quad \text{on } L^2_0(M).$$

特别地，Δ 在 $L^2_0(M)$ 上是单射，且具有有界逆

$$\Delta^{-1} : L^2_0(M)\to \mathrm{Dom}(\Delta)\cap L^2_0(M),$$

其中 $\|\Delta^{-1}\|\leq C_P$。

因此，我们还得到 $\mathrm{Ran}(\Delta)$ 是闭的，所以 $\overline{\mathrm{Ran}(\Delta)} = \mathrm{Ran}(\Delta) = L^2_0(M)$。

现在，任取 $Y \in \mathrm{Dom}(\bar{\partial}) = \mathrm{Dom}(\Delta^{1/2})$。若有必要，将 Y替换为 $Y - \tau(Y)$.1 后，我们可以假设 Y是中心化的，因此 $Y \in L_0^2(M)$。由于 Δ在 $L_0^2(M)$ 上可逆，存在唯一的 $g := \Delta^{-1}Y \in \mathrm{Dom}(\Delta) \cap L_0^2(M)$，使得 $Y = \Delta g$ (由此给出一个 泊松-型方程的解)。

由于 Δ 是一个正的自伴无界算子，无界自伴算子的谱定理给出定义在 $\sigma(\Delta) \subset [0,\infty)$上的投影值测度 $E(\cdot)$，使得

$$\Delta = \int_{\sigma(\Delta)} \lambda \, dE(\lambda),$$

对于每个 $Z \in L^2(M)$，相应的标量谱测度为

$$\nu_Z(B) := \langle E(B)Z, Z\rangle_{L^2(M)}, \qquad B \subset \sigma(\Delta) \text{ Borel}.$$

特别地,

$$Z \in \mathrm{Dom}(\Delta^{1/2}) \iff \int_{\sigma(\Delta)} \lambda \, d\nu_Z(\lambda) < \infty, \qquad Z \in \mathrm{Dom}(\Delta^{3/2}) \iff \int_{\sigma(\Delta)} \lambda^3 \, d\nu_Z(\lambda) < \infty.$$

由 $Y \in \mathrm{Dom}(\bar{\partial}) = \mathrm{Dom}(\Delta^{1/2})$和 $Y = \Delta g$，我们现在证明 $g \in \mathrm{Dom}(\Delta^{3/2})$。根据谱定理,

$$Y(\lambda) = \lambda \, g(\lambda) \qquad \text{for a.e. } \lambda \in \sigma(\Delta),$$

并且标量谱测度满足

$$d\nu_Y(\lambda) = |Y(\lambda)|^2 \, d\mu(\lambda) = \lambda^2 \, |g(\lambda)|^2 \, d\mu(\lambda) = \lambda^2 \, d\nu_g(\lambda).$$

因此

$$Y \in \mathrm{Dom}(\Delta^{1/2}) \iff \int_{\sigma(\Delta)} \lambda \, d\nu_Y(\lambda) = \int_{\sigma(\Delta)} \lambda^3 \, d\nu_g(\lambda) < \infty,$$

这正是 $g \in \mathrm{Dom}(\Delta^{3/2})$ 的谱条件。因此

$$Y \in \mathrm{Dom}(\Delta^{1/2}) \text{ and } Y = \Delta g \iff g \in \mathrm{Dom}(\Delta^{3/2}).$$

在 Lipschitz 共轭假设下，近似交换关系 2.16

$$\bar{\partial}_i \, \Delta(x) = \Delta^{\otimes} \, \bar{\partial}_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \bar{\partial}_j(x) \sharp \big(\bar{\partial}_i \xi_j\big), \qquad x \in \mathrm{Dom}(\Delta^{3/2}),\ i = 1, \ldots, n.$$

由于 $g \in \mathrm{Dom}(\Delta^{3/2})$ 且 $Y = \Delta g$，我们可以将此应用于 $x = g$，从而对每个 i,

$$\bar{\partial}_i Y = \bar{\partial}_i(\Delta g) = \Delta^{\otimes}(\bar{\partial}_i g) + \sum_{j=1}^{n} \bar{\partial}_j g \sharp \big(\bar{\partial}_i \xi_j\big).$$

用向量形式可将其改写为

$$\bar{\partial} Y = \big(\Delta^{\otimes} \otimes I_n\big)(\bar{\partial} g) + \mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}(\bar{\partial} g),$$

其中 $\mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}$ 是与 $\mathscr{J}\xi$ 相关联的右作用乘法算子（定义 2.17）。现在定义

算子

$$\mathcal{A} := \Delta^{\otimes} \otimes I_n + \mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}$$

在定义域上

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{A}) = \mathrm{Dom}(\Delta^{\otimes} \otimes I_n) = \big(\mathrm{Dom}(\Delta^{\otimes})\big)^{\oplus_n}.$$

由于 Δ 生成一个完全狄利克雷型（见命题 2.8）。此外，张量扩张（$\partial \otimes 1$） $\oplus$ ($1 \otimes \partial$)在 $M_0 \otimes M_0$ 上再次稠密定义且可闭，因此这意味着 $\Delta^{\otimes} = \Delta \otimes 1 + 1 \otimes \Delta$是一个稠密定义的闭自伴正算子，同样生成一个完全狄利克雷型。因此，$\Delta^{\otimes} \otimes I_n \geq 0$在 $\big(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\big)^{\oplus_n}$上。另一方面， $\mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}$在 $\big(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\big)^{\oplus_n}$ 上是有界的、自伴且严格正的，因为 $\mathscr{J}\xi$在 $M_n(M \bar{\otimes} M^{op})$中是严格正的且可逆的，而 $\mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}$其对应的右乘算子因而根据命题 2.18 具有相同的性质：可逆性与强制性。特别地，存在 $c > 0$ （例如取 $c := \|(\mathscr{J}\xi)^{-1}\|^{-1}_{M_n(M \bar{\otimes} M^{op})}$，因为 $\mathcal{R}^{-1}_{\mathscr{J}\xi} = \mathcal{R}_{(\mathscr{J}\xi)^{-1}}$且 $\|\mathcal{R}_{(\mathscr{J}\xi)^{-1}}\| \leq \|(\mathscr{J}\xi)^{-1}\|_{M_n(M \bar{\otimes} M^{op})}$），使得

$$\langle \mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi} u, u \rangle_{\big(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\big)^{\oplus_n}} \geq c \, \|u\|^2_{\big(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\big)^{\oplus_n}}, \qquad u \in \big(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\big)^{\oplus_n}.$$

因此，对所有 $u \in$Dom($\mathcal{A}$),

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A} u, u \rangle_{\big(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\big)^{\oplus_n}} &= \langle (\Delta^{\otimes} \otimes I_n) u, u \rangle_{\big(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\big)^{\oplus_n}} + \langle \mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi} u, u \rangle_{\big(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\big)^{\oplus_n}} \\ &\geq c \, \|u\|^2_{\big(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\big)^{\oplus_n}}. \end{aligned} \tag{13}$$

因此， $\mathcal{A}$ 是自伴、严格为正且具有有界逆的

$$\mathcal{A}^{-1} : \big(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\big)^{\oplus_n} \to \big(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\big)^{\oplus_n}.$$

根据洛文 单调性（ $t \mapsto 1/t$ 在 $(0, \infty)$ 上的算子单调性），不等式 $\mathcal{A} \geq \mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}$蕴含 s

$$\mathcal{A}^{-1} \leq \mathcal{R}^{-1}_{\mathscr{J}\xi} \quad \text{on } \big(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\big)^{\oplus_n}.$$

根据命题 2.18，我们有逆规则：

$$\mathcal{R}^{-1}_{\mathscr{J}\xi} = \mathcal{R}_{(\mathscr{J}\xi)^{-1}},$$

因此

$$\mathcal{A}^{-1} \leq \mathcal{R}_{(\mathscr{J}\xi)^{-1}} \quad \text{on } \big(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\big)^{\oplus_n}.$$

由近似交换恒等式可得

$$\bar{\partial} Y = \mathcal{A} \, \bar{\partial} g,$$

并且由于 $\bar{\partial} g \in$定义域($\mathcal{A}$)，我们可以应用 $\mathcal{A}^{-1}$ 得到

$$\bar{\partial} g = \mathcal{A}^{-1} \bar{\partial} Y.$$

利用这一关系和分部积分单位元，我们计算得

$$\begin{aligned} \|Y\|^2_{L^2(M)} &= \big\langle \Delta g, Y \big\rangle_{L^2(M)} \\ &= \big\langle \bar{\partial} g, \bar{\partial}(\Delta g) \big\rangle_{(L^2(M) \,\bar{\otimes}\, L^2(M^{op}))^{\oplus_n}} \\ &= \big\langle \bar{\partial} g, \mathcal{A} \, \bar{\partial} g \big\rangle_{(L^2(M) \,\bar{\otimes}\, L^2(M^{op}))^{\oplus_n}} \\ &= \big\langle \mathcal{A}^{-1} \bar{\partial} Y, \bar{\partial} Y \big\rangle_{(L^2(M) \,\bar{\otimes}\, L^2(M^{op}))^{\oplus_n}} \\ &\leq \big\langle \mathcal{R}_{(\mathscr{J}\xi)^{-1}} \bar{\partial} Y, \bar{\partial} Y \big\rangle_{(L^2(M) \,\bar{\otimes}\, L^2(M^{op}))^{\oplus_n}}. \end{aligned}$$

展开最后一个不等式可得，对于每个 i,

$$(\mathcal{R}_{(\mathscr{J}\xi)^{-1}}\bar{\partial}Y)_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{\partial}_j Y \sharp \big((\mathscr{J}\xi)^{-1}\big)_{ji},$$

从而得到

$$\|Y\|^2_{L^2(M)} \le \sum_{i,j=1}^{n} \Big\langle \bar{\partial}_j Y \sharp \big((\mathscr{J}\xi)^{-1}\big)_{ji}, \bar{\partial}_i Y \Big\rangle_{L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})}.$$

此外，若 $\mathscr{J}\xi \ge c(1\otimes 1)\otimes I_n$ 在 C^*意义下（注意到 $\mathscr{J}\xi$的可逆性和正性假设会自动给出这样的 c：$= \|(\mathscr{J}\xi)^{-1}\|^{-1}_{M_n\,(M\bar{\otimes}M^{op})}$），则根据正性和函数演算（映射 $t\mapsto 1/t$ 在 $(c,\ \infty)$ 上是算子单调递减的），

$$(\mathscr{J}\xi)^{-1} \le \tfrac{1}{c}\,(1\otimes 1)\otimes I_n,$$

应用 $\mathcal{R}$可得

$$\mathcal{R}_{(\mathscr{J}\xi)^{-1}} \ \le\ \tfrac{1}{c}\,\mathrm{id} \quad \text{on } \big(L^2(M)\bar{\otimes}L^2(M^{op})\big)^{\oplus_n}.$$

将其代入前一个不等式，得到自由庞加莱（曲率–维数）不等式

$$\big\|Y-\tau(Y).1\big\|^2_{L^2(M)} \ \le\ \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n}\big\|\bar{\partial}_i Y\big\|^2_{L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})},$$

¯对所有 $Y\in$Dom(∂)均成立，这就是所需的结论。

■

注 2.21（推广到实强制余结合导子）。*Brascamp–Lieb–*庞加莱不等式可用相同的证明推广到任意取值于粗对应、具有 *Lipschitz*共轭变量（相对于该导子）的可闭实余结合导子；这里的 *Lipschitz*共轭变量是指满足 [26, 第 2.2 节，假设 2。1], 的情形，前提是具备适当的强制性和有界性假设。

令 $M = W^*(X_1,\dots,X_n)$，并令

$$\delta = (\delta_1,\dots,\delta_n) : \mathrm{Dom}(\delta) \longrightarrow \big(L^2(M)\bar{\otimes}L^2(M^{op})\big)^{\oplus_n}$$

是一个稠密定义的导子；它在如下意义下为实：对于所有 $x\in$ 定义域(δ)，均有 $(\delta_j(x))^\dagger = \delta_j(x^*)$；并且它在如下意义下为余结合的：

$$(\delta_j\otimes\mathrm{id})\circ\delta_i(x) = (\mathrm{id}\otimes\delta_i)\circ\delta_j(x), \qquad x\in\mathrm{Dom}(\delta),\ 1\le i,j\le n.$$

令 $\xi_j := \delta_j^*(1\otimes 1)$ 为 *Lipschitz*共轭变量（因此 δ 可闭），并定义闭雅可比矩阵

$$\mathscr{J}_\delta\xi := \big(\bar{\delta}_j\,\xi_i\big)_{i,j=1}^{n} \in M_n(M\bar{\otimes}M^{op}),$$

以及拉普拉斯算子 $\Delta_\delta := \sum_{j=1}^n \delta_j^*\bar{\delta}_j$，其定义在 $L^2(M)$上。

此外，假设：

(1) δ 是可闭的、实的且余结合的（因此，引理 *2.16* 的近似交换恒等式和定义域包含成立）；*(2)* $\mathscr{J}_\delta\xi$在 $M_n(M\bar{\otimes}M^{op})$中是有界的、正的且可逆的（等价地，在 $\big(L^2(M)\bar{\otimes}L^2(M^{op})\big)^{\oplus_n}$上是强制的）；*(3)* Δ_δ 在 $L^2_0(M)$上是强制的，因此 $\ker(\Delta_\delta) = \mathbb{C}1$。

于是，与自由差商情形中相同的论证表明，对于每个 $Y \in \mathrm{Dom}(\delta)$ $^{-}$，

$$\|Y-\tau(Y)1\|_{L^2(M)}^2 \le \sum_{i,j=1}^n \left\langle \bar{\delta}_j Y \sharp \left((\mathscr{J}_\delta \xi)^{-1}\right)_{ji}, \bar{\delta}_j Y \right\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}L^2(M^{op})}.$$

If $\mathscr{J}_\delta \xi \ge c\,(1\otimes 1)\otimes I_n$ 意义下，可以得到常数为 $1/c$ 的庞加莱不等式 .

注释 2.22（应用示例：自由吉布斯态）。设 $V = V^*$ 为一个自伴非交换势（为简便起见，取多项式），并设 τ_V 为由有界的 n-元组 X 生成的自由吉布斯态（假设其存在），该元组满足带有共轭变量 $\xi = \mathscr{D}V(X)$ 的施温格–戴森方程。若其非交换海森矩阵满足 $V\ CD(c,\infty)$

$$\mathscr{J}\mathscr{D}V = (\partial_j \mathscr{D}_i V)_{ij}$$

满足代数正性

$$\mathscr{J}\mathscr{D}V \ \ge\ c\,(1\otimes 1)\otimes I_n \qquad in\ M_n(\mathscr{P}\otimes\mathscr{P}^{op}),$$

也就是说，$\mathscr{J}\mathscr{D}V - c\,(1\otimes 1)\otimes I_n = Q^*Q$ 对某个 Q 成立。

等价地，在 $M_n(\mathscr{P}\otimes\mathscr{P}^{op})$ 上也成立，因为根据 ***Mai-Speicher-Weber*** [55] 和 ***Dabrowski*** [26, 引理 37]，这些 X_i在代数意义下自由。

由于 M_0 在 $M = W^*(X_1, \ldots\ldots, X_n)$ 中弱稠密，且 $M\bar{\otimes}M^{op}$ 的标准表示是忠实的，因此该正性可推广为

$$\mathscr{J}\mathscr{D}V(X) \ \ge\ c\,(1\otimes 1)\otimes I_n \qquad in\ M_n(M\bar{\otimes}M^{op}).$$

3. 自由 Obata 刚性原理

上一节的解析框架引出了本文的核心问题：***Cheng–Zhou*** 在经典情形下的刚性现象 [18] 能否转化到自由世界中？现在我们证明一个对本文方法至关重要的命题：自由庞加莱不等式的饱和会迫使拉普拉斯算子满足特征函数关系。

命题 **3.1.** 在定理 *2.20* 的设定下，假设曲率-维数界 $CD(1,\ \infty)$:

$$\mathscr{J}\xi \ \ge\ (1\otimes 1)\otimes I_n \quad in\ M_n\big(M\bar{\otimes}M^{op}\big).$$

那么对每个中心化的 $Y \in$ 定义域$(\Delta^{1/2}) =$ 定义域$(\bar{\partial})$,

$$\|Y\|_{L^2(M)}^2 \ \le\ \sum_{i=1}^n \|\bar{\partial}_i Y\|_{L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})}^2.$$

如果 $f \in$ 定义域$(\Delta^{1/2}) \cap L_0^2(M)$ 使这个自由庞加莱不等式达到等号,

$$\|f\|_{L^2(M)}^2 \ =\ \sum_{i=1}^n \|\bar{\partial}_i f\|_{L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})}^2 \ =:\ \mathcal{E}(f),$$

那么 $f \in$ 定义域(Δ) 和 $\Delta f = f$。

证明：回顾一下，$\mathrm{Dom}(\Delta^{1/2}) = \mathrm{Dom}(\bar{\partial})$ 是形式域，并固定 $h \in \mathrm{Dom}(\Delta^{1/2}) \cap L_0^2(M)$。对于 $\varepsilon \in \mathbb{R}$，扰动 $f+\varepsilon h$ 和 $f+\varepsilon(ih)$ 是中心化的（其中 $i^2=-1$），因此

$$\|f+\varepsilon h\|_{L^2(M)}^2 \ \le\ \mathcal{E}(f+\varepsilon h), \qquad \|f+\varepsilon(ih)\|_{L^2(M)}^2 \ \le\ \mathcal{E}(f+\varepsilon(ih)),$$

wit由饱和性，在 $\varepsilon = 0$ 处取等号。将 $\varepsilon = 0$ 处等式的左、右两边展开，得到

$$\|f + \varepsilon h\|^2_{L^2(M)} = \|f\|^2_{L^2(M)} + 2\varepsilon\, \Re\langle f, h\rangle_{L^2(M)} + O(\varepsilon^2),$$

and

$$\mathcal{E}(f + \varepsilon h) = \mathcal{E}(f) + 2\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Re\langle \bar{\partial}_i f, \bar{\partial}_i h\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}\, L^2(M^{op})} + O(\varepsilon^2).$$

由于 $\|f\|^2_{L^2(M)} = \mathcal{E}(f)$，比较 $f + \varepsilon h$ 的线性项可得

$$\Re\langle f, h\rangle_{L^2(M)} = \sum_{i=1}^{n} \Re\langle \bar{\partial}_i f, \bar{\partial}_i h\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes} L^2(M^{op})}.$$

对 $f + \varepsilon(ih)$ 应用相同的论证（利用内积关于第二个变量的共轭线性），可得,

$$\Re\langle f, ih\rangle_{L^2(M)} = \Im\langle f, h\rangle_{L^2(M)}, \qquad \Re\langle \bar{\partial}_i f, \bar{\partial}_i (ih)\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes} L^2(M^{op})} = \Im\langle \bar{\partial}_i f, \bar{\partial}_i h\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes} L^2(M^{op}}$$

), 因此，我们得到,

$$\Im\langle f, h\rangle_{L^2(M)} = \sum_{i=1}^{n} \Im\langle \bar{\partial}_i f, \bar{\partial}_i h\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes} L^2(M^{op})}.$$

因此，将实部和虚部相加，我们得到:

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \bar{\partial}_i f, \bar{\partial}_i h\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}\, L^2(M^{op})} = \langle \bar{\partial} f, \bar{\partial} h\rangle_{(L^2(M)\bar{\otimes} L^2(M^{op}))^{\oplus n}} = \langle f, h\rangle_{L^2(M)}, \qquad \forall h \in \mathrm{Dom}(\Delta^{1/2}) \cap L^2_0(M).$$

因此，根据伴随刻画，我们有,

$$\bar{\partial} f \in \mathrm{Dom}(\partial^*) \quad \text{and} \quad \partial^*(\bar{\partial} f) = f.$$

因此，根据定义,

$$f \in \mathrm{Dom}(\Delta) \quad \text{and} \quad \Delta f = \partial^* \bar{\partial} f = f.$$

■

注 3.2. 上述论证也可以改写为一种更简洁的变分方法。事实上，狄利克雷型 $f \mapsto \mathcal{E}(f)$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H} := \mathrm{Dom}(\Delta^{1/2}) \cap L^2_0(M)$上是实 *Fréchet* 可微的，该空间配备图范数 $\|f\|^2_{\mathcal{H}} := \|f\|^2_{L^2(M)} + \mathcal{E}(f)$。因此，在 $\mathcal{H} \setminus \{0\}$ 上，瑞利商

$$R(g) = \frac{\mathcal{E}(f)}{\|f\|^2_{L^2(M)}},$$

在 f 处取得最小值。相应的欧拉–拉格朗日方程给出 $\Delta f = f$，从而得出命题 *3.1* 的结论。这里省略细节，因为这只是对上述证明的改写。

我们来回顾一个简单的引理（其证明略去），它表明这类特征函数具有任意阶分数阶正则性。

Le引理 3.3。 设 Δ 是 $L^2(M)$ 上的一个自伴正算子。假设 $Y \in$ 定义域(Δ) 满足 s

$$\Delta Y = \lambda Y \qquad for\ some\ \lambda \geq 0.$$

那么，对每个 $\alpha \geq 0$ ，都有

$$Y \in \mathrm{Dom}(\Delta^\alpha) \qquad and \qquad \Delta^\alpha Y = \lambda^\alpha Y,$$

其中 Δ^α 由 Δ的博雷尔函数演算定义。

现在我们解释为什么等式和特征值关系会传递到复极值函数的实部和虚部。在本文后文中，当我们只需处理自伴元素时，这一点将很有用。

推论 3.4. 在曲率假设 $CD(1,\infty)$下，若 $f \in$定义域(Δ) $\cap\, L_0^2(M)$ 满足 $\Delta f = f$和 $\|f\|^2_{L^2(M)} = \mathcal{E}(f)$，那么 $\Re f$和 $\Im f$也满足。特别地，不失一般性，可以假设$f = f^* := Jf$。

证明: 将 $f = u + iv$写为 $u = \Re f$, $v = \Im f$。由于 $\tau(f) = 0$，同样有 $\tau(u) = \tau(v) = 0$。我们还有 Dom(Δ) 的 $*$稳定性以及复线性性，这可利用自由差商的实性质来验证。事实上，取 $x \in$ Dom(Δ), $y \in$ Dom(∂)，则

$$\begin{aligned}
\langle \Delta(x^*), y\rangle_{L^2(M)} &= \sum_{i=1}^n \langle \bar\partial_i(x^*), \bar\partial_i y\rangle_{L^2(M)\bar\otimes L^2(M^{op})} \\
&= \sum_{i=1}^n \langle (\bar\partial_i x)^\dagger, \bar\partial_i y\rangle_{L^2(M)\bar\otimes L^2(M^{op})} \\
&= \sum_{i=1}^n \langle (\bar\partial_i y)^\dagger, \bar\partial_i x\rangle_{L^2(M)\bar\otimes L^2(M^{op})} \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \bar\partial_i(y^*), \bar\partial_i x\rangle_{L^2(M)\bar\otimes L^2(M^{op})} \\
&= \langle y^*, \Delta x\rangle_{L^2(M)} = \langle (\Delta x)^*, y\rangle_{L^2(M)} \qquad (14)
\end{aligned}$$

其中，我们对 $a, b \in L^2(M)\bar\otimes L^2(M^{op})$ 使用了 $\langle a, b\rangle_{L^2(M)\bar\otimes L^2(M^{op})} = \langle b^\dagger, a^\dagger\rangle_{L^2(M)\bar\otimes L^2(M^{op})}$。因此 $x^* \in$ Dom(Δ)，且 $\Delta(x^*) = (\Delta(x))^* := J\Delta(x)$。

因此，我们有 $\Delta(f^*) = f^*$，并得到:

$$\Delta u = \Re(\Delta f) = \Re(f) = u, \qquad \Delta v = \Im(\Delta f) = \Im(f) = v.$$

对于范数，利用 τ 的迹性可得

$$\|f\|^2_{L^2(M)} = \|u\|^2_{L^2(M)} + \|v\|^2_{L^2(M)}.$$

对于 狄利克雷能量，自由差商的实 性质与正交性给出

$$\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}(u) + \mathcal{E}(v).$$

根据假设$\|f\|^2_{L^2(M)} = \mathcal{E}(f)$，因此

$$\|u\|^2_{L^2(M)} + \|v\|^2_{L^2(M)} = \mathcal{E}(u) + \mathcal{E}(v).$$

因此,

$$(\|u\|^2_{L^2(M)} - \mathcal{E}(u)) + (\|v\|^2_{L^2(M)} - \mathcal{E}(v)) = 0,$$

根据 $CD(1,\ \infty)$ 下的庞加莱不等式，我们有 $\|u\|_{L^2(M)}^2 \le \mathcal{E}(u)$ 和 $\|v\|_{L^2(M)}^2 \le \mathcal{E}(v)$，因此每个差值 $\|u\|_2^2 - \mathcal{E}(u)$ 和 $\|v\|_2^2 - \mathcal{E}(v)$ 都是非正的。由于它们的和为零，二者必然都为零，从而逐项取等：

$$\|u\|_{L^2(M)}^2 = \mathcal{E}(u), \qquad \|v\|_{L^2(M)}^2 = \mathcal{E}(v).$$

因此，$u,\ v$ 是使自由庞加莱不等式取等的中心化（特征）函数。因此，不失一般性，我们可以假设 $f = f^*$。

■

下面的引理展示了一个关于狄利克雷恒等式的漂亮张量化结果，其中涉及二阶自由差商，并且该结果是作为一阶狄利克雷恒等式的推论得到的。

命题3.5。 在定理 *2.20*的设定下，取生成元

$$\Delta \ := \ \sum_{j=1}^{n} \partial_j^* \, \bar{\partial}_j \ \ge 0, \qquad \mathrm{Dom}(\Delta^{1/2}) = \mathrm{Dom}(\bar{\partial}),$$

以及闭拉普拉斯算子的张量扩张

$$\Delta^{\otimes} \ := \ \overline{\Delta \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \Delta} \ \ge 0 \quad on\ L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op}).$$

那么，对于任意 U、$V \in \mathbb{C}\langle X_1$、.....、$X_n\rangle \otimes \mathbb{C}\langle X_1$、.....、$X_n\rangle^{op}$,

$$\begin{aligned}\left\langle \Delta^{\otimes} U,\ V \right\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes} L^2(M^{op})} = \sum_{j=1}^{n} \Big(& \left\langle (\partial_j \otimes \mathrm{id})U,\ (\partial_j \otimes \mathrm{id})V \right\rangle_{L^2(M)^{\otimes 3}} \\ & + \left\langle (\mathrm{id} \otimes \partial_j)U,\ (\mathrm{id} \otimes \partial_j)V \right\rangle_{L^2(M)^{\otimes 3}} \Big).\end{aligned}$$

证明： 根据 Voiculescu [78, 命题 4.4]，，我们有 $M_0 = \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n\rangle \subset \mathrm{Dom}(\Delta)$。因此，对于简单张量 $a \otimes b \in \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n\rangle \otimes \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n\rangle^{op}$,

$$\Delta^{\otimes}(a \otimes b) = \Delta a \otimes b \ + \ a \otimes \Delta b.$$

利用狄利克雷恒等式：

$$\langle \Delta a,\, c \rangle_{L^2(M)} = \sum_{j=1}^{n} \left\langle \partial_j a,\, \partial_j c \right\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes} L^2(M^{op})}.$$

取 $U = a \otimes b$, $V = c \otimes d$。对于第一条腿,

$$\begin{aligned}\left\langle (\Delta a) \otimes b,\, c \otimes d \right\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes} L^2(M^{op})} &= \tau(c^* \Delta a)\, \tau(b d^*) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \partial_j a,\, \partial_j c \right\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes} L^2(M^{op})} \tau(b d^*) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle (\partial_j a) \otimes b,\, (\partial_j c) \otimes d \right\rangle_{L^2(M)^{\otimes 3}} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle (\partial_j \otimes \mathrm{id})U,\, (\partial_j \otimes \mathrm{id})V \right\rangle_{L^2(M)^{\otimes 3}}.\end{aligned}$$

对于第二条边,

$$\left\langle a \otimes \Delta b,\, c \otimes d \right\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes} L^2(M^{op})} = \sum_{j=1}^{n} \left\langle (\mathrm{id} \otimes \partial_j)U,\, (\mathrm{id} \otimes \partial_j)V \right\rangle_{L^2(M)^{\otimes 3}}.$$

Summing两项后，我们随后通过线性性将其延拓到 $\mathbb{C}\langle X_1,\dots,X_n\rangle \otimes \mathbb{C}\langle X_1,\dots,X_n\rangle^{op}$。

■

下面的引理表明，Dom(Δ)嵌入到一个自然的二阶 Sobolev 型定义域$D\big(\partial \otimes \mathrm{id} \oplus \mathrm{id} \otimes \partial \circ \bar{\partial}\big)$中。这类似于 Malliavin（以及自由 Malliavin）演算 [6, 29] 中对 Ornstein–Uhlenbeck 算子 $\mathcal{L}$而言的经典恒等式 $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \mathbb{D}^{2,2}$。这里我们给出一个包含关系，将另一个包含关系留待以后研究；后者或多或少等价于得到所谓的自由版*Meyer*不等式（详见 Nualart [59,第 1.5] 节的经典情形）。

引理 3.6. 假设(M,τ) 满足定义 *2.13* 意义下的 *Lipschitz*共轭变量。若 $x \in \mathrm{Dom}(\Delta)$，则

$$x \in \mathrm{Dom}(\overline{\partial \otimes \mathrm{id} \oplus \mathrm{id} \otimes \partial} \circ \bar{\partial}), \qquad \textit{equivalently} \qquad x \in \mathrm{Dom}(\Delta^{\otimes} \circ \bar{\partial}).$$

证明： 令 $\xi_j = \partial_j^*(1 \otimes 1) \in M$ 为 Lipschitz共轭变量。定义雅可比矩阵

$$\mathscr{J}\xi = \big(\bar{\partial}_i \xi_j\big)_{i,j=1}^{n} \in M_n(M \bar{\otimes} M^{op}),$$

并且对于 $\eta = (\eta_1, \dots\dots, \eta_n) \in (L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op}))^{\oplus_n}$，令 $\mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi} \in B\big((L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op}))^{\oplus_n}\big)$ 为

$$\big(\mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}\eta\big)_i = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sharp \bar{\partial}_i \xi_j.$$

如前所述（见命题 2.18），$\mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}$ 是有界的，并且

$$\|\mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}\| \le \|\mathscr{J}\xi\|_{M_n(M \bar{\otimes} M^{op})}.$$

定义预解映射

$$\eta_\alpha := \alpha(\alpha + \Delta)^{-1}, \qquad \eta_\alpha^{\otimes} := \alpha(\alpha + \Delta^{\otimes})^{-1},$$

其中 $\Delta^{\otimes} = \Delta_{\overline{\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \Delta}}$作用于 $L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})$ 上。于是 η_α和 $\eta_\alpha^{\otimes}$是幺正的、完全正的、L^2–压缩算子，并且

$$\eta_\alpha \to \mathrm{id} \quad \text{on } L^2(M), \qquad \eta_\alpha^{\otimes} \to \mathrm{id} \quad \text{on } L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op}),$$

分别强（术语源于将它们分别视为作用在 $B(L^2(M))$ 和 $B(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op}))$ 上的算子）地作为 $\alpha \to \infty$。

接着将 $\eta_\alpha^{\otimes}$对角扩张到 $(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op}))^{\oplus_n}$，并将这一扩张记为 $(\eta_\alpha^{\otimes})^{(n)} := \eta_\alpha^{\otimes} \otimes I_n$。

现在考虑 $\eta_\alpha(x)$，其中 $x \in \mathrm{Dom}(\Delta^{1/2}) = \mathrm{Dom}(\bar{\partial})$。由谱演算可立即得到 $\eta_\alpha(x) \in \mathrm{Dom}(\Delta^{3/2}) \subset \mathrm{Dom}(\bar{\partial} \circ \Delta)$，此外还有 $\eta_\alpha(x) \to x$属于 $L^2(M)$，

同理，根据谱演算，若此外 $x \in$定义域(Δ)，我们立即得到，

$$\Delta\eta_\alpha(x) = \alpha(x - \eta_\alpha(x)) \longrightarrow \Delta x \quad \text{in } L^2(M),$$

现在我们检验 $\bar{\partial}\eta_\alpha(x) \to \bar{\partial}x$ 在 $\left(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}$ 中的收敛性。

论证稍微复杂一些，步骤如下。现在我们调用 Dabrowski 几乎交换公式的一个预解式变体，该变体将在下文推导（例如参见 [26, 引理 2]）。用我们的记号，对于 $x \in \mathrm{Dom}(\partial)$，我们有[¯]：

$$\bar{\partial}\,\eta_\alpha(x) = (\eta_\alpha^{\otimes})^{(n)}\,\bar{\partial}(x) + \tilde{\mathcal{R}}_\alpha(x),$$

其中 $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha\colon\ L^2(M) \to (L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op}))^{\oplus_n}$ 是一个有界算子，且

$$\tilde{\mathcal{R}}_\alpha = \frac{1}{\alpha}\,(\eta_\alpha^{\otimes})^{(n)}\,\mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}\big(\bar{\partial}\,\eta_\alpha\big), \quad \text{on } \mathrm{Dom}(\bar{\partial})$$

事实上，对于每个 $i = 1, \ldots\ldots, n$，从几乎交换关系出发（因为 $\eta_\alpha(x) \in \mathrm{Dom}(\Delta^{3/2}) \subset \mathrm{Dom}(\bar{\partial}\circ\Delta)$，

$$\bar{\partial}_i \circ \Delta\eta_\alpha(x) = \Delta^{\otimes} \circ \bar{\partial}_i\eta_\alpha(x) + (R_{\mathscr{J}\xi}\big(\bar{\partial}\,\eta_\alpha(x)\big))_i$$

并应用 $\eta_\alpha^{\otimes}$，得到

$$\eta_\alpha^{\otimes}\bar{\partial}_i \circ \Delta\eta_\alpha(x) = \eta_\alpha^{\otimes} \circ \Delta^{\otimes}\,\bar{\partial}_i(\eta_\alpha(x)) + \eta_\alpha^{\otimes}\big(\big(\mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}(\bar{\partial}\,\eta_\alpha(x))\big)_i\big),$$

现在除以 $\alpha > 0$，并利用恒等式 $\Delta\eta_\alpha = \alpha(\mathrm{id} - \eta_\alpha)$ 及其张量预解式 $\Delta^{\otimes}\eta_\alpha^{\otimes} = \alpha(\mathrm{id} - \eta_\alpha^{\otimes})$，

$$\eta_\alpha^{\otimes}\bar{\partial}_i(x) - \eta_\alpha^{\otimes}\bar{\partial}_i(\eta_\alpha(x)) = \bar{\partial}_i\eta_\alpha^{\otimes}(x) - \eta_\alpha^{\otimes}\bar{\partial}_i(\eta_\alpha(x)) + \frac{1}{\alpha}\eta_\alpha^{\otimes}\big(\big(\mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}(\bar{\partial}\,\eta_\alpha(x))\big)_i\big),$$

消去两边相同的项后，我们立即得到每个坐标对应的结论，并利用 $\eta_\alpha^{\otimes}$ 的对角扩张，将其立即写成向量形式；我们在上文将其记为 $(\eta_\alpha^{\otimes})^{(n)}$。

由于 $\eta_\alpha^{\otimes}$ 是压缩算子， $\mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}$ 也如此（至多相差常数 $C = \|\mathscr{J}\xi\|_{M_n(M\bar{\otimes}M^{op})}$），因此我们有

$$\|\tilde{\mathcal{R}}_\alpha(x)\|_{\left(L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}} \le \frac{C}{\alpha}\,\|\bar{\partial}\,\eta_\alpha(x)\|_{\left(L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}}.$$

利用 Δ 的狄利克雷恒等式和预解式恒等式，

$$\|\bar{\partial}\,\eta_\alpha(x)\|^2_{L^2(M)\bar{\otimes}L^2(M^{op})} = \langle\Delta\eta_\alpha(x),\,\eta_\alpha(x)\rangle_{L^2(M)} = \alpha\,\langle x - \eta_\alpha(x),\,\eta_\alpha(x)\rangle_{L^2(M)},$$

我们得到

$$\|\bar{\partial}\,\eta_\alpha(x)\|_{\left(L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}} \le \alpha^{1/2}\,\|x - \eta_\alpha(x)\|^{1/2}_{L^2(M)}\,\|x\|^{1/2}_{L^2(M)}.$$

因此

$$\frac{1}{\alpha}\,\|\bar{\partial}\,\eta_\alpha(x)\|_{\left(L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}} \le \alpha^{-1/2}\,\|x - \eta_\alpha(x)\|^{1/2}_{L^2(M)}\,\|x\|^{1/2}_{L^2(M)} \longrightarrow 0,$$

因为 $\eta_\alpha(x) \to x$ 属于 $L^2(M)$。由此可得

$$\|\tilde{\mathcal{R}}_\alpha(x)\|_{\left(L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}} \longrightarrow 0.$$

另一方面， $\eta_\alpha^{\otimes} \to \mathrm{id}$ 在张量空间上强收敛，因此其张量扩张也如此，进而 $(\eta_\alpha^{\otimes})^{(n)}\bar{\partial}x \to \bar{\partial}x$ 属于 $\left(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}$。因此

$$\bar{\partial}\eta_\alpha(x) = (\eta_\alpha^{\otimes})^{(n)}\bar{\partial}(x) + \tilde{\mathcal{R}}_\alpha(x) \longrightarrow \bar{\partial}x \quad \text{in } \left(L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}.$$

最后，利用平凡估计（同样由压缩性得出） $\|x - \eta_\alpha(x)\|_{L^2(M)} \le 2\|x\|_{L^2(M)}$，由狄利克雷恒等式可得一致估计

$$\|\bar{\partial}\,\eta_\alpha(x)\|^2_{\left(L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}} \le 2\alpha\,\|x\|^2_{L^2(M)}, \qquad x\in \mathrm{Dom}(\bar{\partial}),$$

因此

$$\|\tilde{\mathcal{R}}_\alpha(x)\| \le C\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\,\|x\|_{L^2(M)}.$$

因此， $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ 在稠密定义域 $\mathrm{Dom}(\bar{\partial}) = \mathrm{Dom}(\Delta^{1/2})$上是 $L^2(M)$中的有界算子。由稠密性和线性性，它唯一延拓为一个有界算子

$$\tilde{\mathcal{R}}_\alpha : L^2(M) \longrightarrow \left(L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})\right)^{\oplus_n}, \qquad \|\tilde{\mathcal{R}}_\alpha\| \le C\sqrt{\tfrac{2}{\alpha}}.$$

因此，我们可以应用几乎交换公式；对于每个 i，有

$$\bar{\partial}_i\Delta(\eta_\alpha(x)) = \Delta^{\otimes}\,\bar{\partial}_i(\eta_\alpha(x)) + \sum_{j=1}^n \bar{\partial}_j(\eta_\alpha(x))\sharp\bar{\partial}_i\xi_j,$$

或者用向量形式表示,

$$\bar{\partial}\Delta(\eta_\alpha(x)) = \Delta^{\otimes}\,\bar{\partial}(\eta_\alpha(x)) + \mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}\big(\bar{\partial}(\eta_\alpha(x))\big).$$

利用 Δ的狄利克雷恒等式，我们得到

$$\begin{aligned}
\|\Delta\eta_\alpha(x)\|^2_{L^2(M)} &= \sum_{i=1}^n \big\langle \bar{\partial}_i\Delta(\eta_\alpha(x)),\, \bar{\partial}_i(\eta_\alpha(x))\big\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})} \\
&= \sum_{i=1}^n \big\langle \Delta^{\otimes}\,\bar{\partial}_i(\eta_\alpha(x)),\, \bar{\partial}_i(\eta_\alpha(x))\big\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \big\langle (\mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}\bar{\partial}(\eta_\alpha(x)))_i,\, \bar{\partial}_i(\eta_\alpha(x))\big\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \big\|\overline{\partial_j\otimes\mathrm{id}}\,\bar{\partial}_i(\eta_\alpha(x))\big\|^2_{L^3(M)} + \sum_{i,j=1}^n \big\|\overline{\mathrm{id}\otimes\partial_j}\,\bar{\partial}_i(\eta_\alpha(x))\big\|^2_{L^3(M)} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \big\langle (\mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}\bar{\partial}(\eta_\alpha(x)))_i,\, \bar{\partial}_i(\eta_\alpha(x))\big\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})}. \qquad (15)
\end{aligned}$$

再次利用.....得到

$$\Delta^{\otimes} = \big((\partial\otimes\mathrm{id})\oplus(\mathrm{id}\otimes\partial)\big)^*\big((\partial\otimes\mathrm{id})\oplus(\mathrm{id}\otimes\partial)\big),$$

曲率项被有界地控制为

$$\left|\sum_{i=1}^n \big\langle (\mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}\bar{\partial}(\eta_\alpha(x)))_i,\, \bar{\partial}_i(\eta_\alpha(x))\big\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})}\right| \le \|\mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}\|\,\|\bar{\partial}\eta_\alpha(x)\|^2_{(L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op}))^{\oplus_n}}.$$

由于 $\mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}$ 是有界的，在 L^2中 $\alpha\to\infty$

$$\Delta\eta_\alpha(x)\to\Delta x, \qquad \bar{\partial}\eta_\alpha(x)\to\bar{\partial}x, \qquad \mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}\bar{\partial}(\eta_\alpha(x))\to\mathcal{R}_{\mathscr{J}\xi}\bar{\partial}(x).$$

因此，等式 15 的左端，即 $\|\Delta\eta_\alpha(x)\|^2_{L^2(M)}$，以及等式右端的第二项（等式的第二行和第三行中均如此）都在 $\alpha\to\infty$ 时收敛，这意味着下述项

$$\sum_{i,j=1}^{n} \big\|\overline{\partial_j \otimes \mathrm{id}}\,\bar{\partial}_i(\eta_\alpha(x))\big\|^2_{L^3(M)} \;+\; \sum_{i,j=1}^{n} \big\|\overline{\mathrm{id}\otimes \partial_j}\,\bar{\partial}_i(\eta_\alpha(x))\big\|^2_{L^3(M)},$$

也必须收敛，特别是关于 α 一致有界。

由于 $\bar{\partial}\eta_\alpha(x) \to \bar{\partial}x$ 属于 $\big(L^2(M)\,\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})\big)^{\oplus_n}$，且算子 $\partial\otimes\mathrm{id}\,\oplus\overline{\mathrm{id}\otimes\partial}$ 是闭的，这种一致有界性意味着序列 $\partial\otimes\mathrm{id}\,\oplus\mathrm{id}\otimes\partial\,\bar{\partial}(\eta_\alpha(x))$ 在 $(L^2(M)\,\bar{\otimes}L^2(M)\,\bar{\otimes}L^2(M))^{\oplus_{2n^2}}$ 中有界。根据巴拿赫–阿劳格鲁定理，我们可以抽取一个弱收敛子列；又由于 (15) 中的范数也收敛，这种弱收敛实际上是 L^2 强收敛。由闭性可知，极限 $\bar{\partial}x$ 因此属于 $\partial\otimes\mathrm{id}\oplus\mathrm{id}\otimes\partial$ 的定义域，这恰好表明条件：

$$x \in D\big(\overline{\partial\otimes\mathrm{id}\oplus\mathrm{id}\otimes\partial}\circ\bar{\partial}\big),$$

这又等价于 $x\in \mathrm{Dom}(\Delta^{\otimes}\circ\bar{\partial})$。

■

定义 3.7。对于 $Y\in \mathrm{Dom}(\Delta^{\otimes}\circ\bar{\partial})$：$=\mathrm{Dom}(\Delta\otimes\overline{\mathrm{id}\,+\mathrm{id}\,\otimes\Delta\circ\bar{\partial}})$，定义二阶梯度能量（类比于海森矩阵项 $\|\mathrm{Hess}(f)\|_2^2$，它确实出现在第二个 *Bakry-Emery* Γ_2 算子中）

$$\mathcal{E}_2(Y) := \sum_{i=1}^{n} \big\langle \Delta^{\otimes}(\bar{\partial}_i Y), \bar{\partial}_i Y\big\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})}.$$

在$\mathrm{Dom}(\Delta)$上（根据前面的引理 *3.6*），这等于

$$\mathcal{E}_2(Y) = \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\|\overline{\partial_j\otimes\mathrm{id}}\,\bar{\partial}_i Y\|^2_{L^2(M)^{\otimes 3}} + \|\overline{\mathrm{id}\otimes\partial_j}\,\bar{\partial}_i Y\|^2_{L^2(M)^{\otimes 3}}\Big),$$

并且根据可闭性，可将其延拓至所有 $Y\in\mathrm{Dom}(\Delta^{\otimes}\circ\bar{\partial})$。利用共轭变量 $\xi_j=\partial_j^*(1\otimes 1)$，定义共轭曲率收缩

$$C_\xi(Y) := \sum_{i,j=1}^{n} \big\langle \bar{\partial}_j Y \# \bar{\partial}_i\xi_j, \bar{\partial}_i Y\big\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}L^2(M^{op})}.$$

现在我们转而讨论一个关键恒等式，它与 Bakry–Émery 演算有着强烈的相似之处。它揭示了张量狄利克雷型与曲率收缩之间的精确关系，并将在我们的刚性论证中发挥核心作用。

引理 3.8。若 $Y\in$ 定义域(Δ) 且 $\Delta Y = Y$，则

$$\mathcal{E}_2(Y) = \mathcal{E}(Y) - C_\xi(Y).$$

证明：应用 近似交换关系于 Y（根据引理 3.3，在 $\Delta Y=Y$ 下其属于定义域$(\Delta^{3/2})$）：

$$\bar{\partial}_i\,\Delta(Y) = \Delta^{\otimes}(\bar{\partial}_i Y) + \sum_{k=1}^{n} \bar{\partial}_j Y \# \bar{\partial}_i\xi_j.$$

由于 $\Delta Y = Y$，

$$\bar{\partial}_i Y = \Delta^{\otimes}(\bar{\partial}_i Y) + \sum_{j=1}^{n} \bar{\partial}_j Y \# \bar{\partial}_i\xi_j.$$

$^-$与 $\partial_i Y$ 取内积，并对 i求和：

$$\sum_{i=1}^{n}\|\bar{\partial}_i Y\|^2_{L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})}=\sum_{i=1}^{n}\langle\Delta^{\otimes}(\bar{\partial}_i Y),\bar{\partial}_i Y\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})}+\sum_{i,j=1}^{n}\langle\bar{\partial}_j Y\#\bar{\partial}_i\xi_j,\bar{\partial}_i Y\rangle_{L^2(M)\bar{\otimes}\,L^2(M^{op})},$$

i.e., $\mathcal{E}_2(Y)=\mathcal{E}(Y)-C_\xi(Y)$.

■

注 3.9。 我们也可以利用几乎交换，并对两边取内积来推导 *Bracsamp-Lieb*不等式；同样，利用泊松方程和柯西-施瓦茨不等式即可得出结论。

命题 3.10 (关于 Δ的刚性)。 假设满足 $CD(1,\infty)$ 曲率判据。若 $Y\in$定义域$(\bar{\partial})\cap L^2_0(M)$ 是中心化的，且达到自由庞加莱不等式的等号：$\|Y\|^2_{L^2(M)}=\mathcal{E}(Y)$，则

$$\mathcal{E}_2(Y)=0.$$

此外，假设

$$Y\in D\big(\overline{\partial\otimes\mathrm{id}\ \oplus\ \mathrm{id}\otimes\partial}\circ\bar{\partial}\big).$$

那么对所有 $i,j=1,\dots,n$,

$$\overline{\partial_j\otimes\mathrm{id}}\,\bar{\partial}_i Y=0,\qquad \overline{\mathrm{id}\otimes\partial_j}\,\bar{\partial}_i Y=0.$$

证明： 由引理 3.8 可得单位元

$$\mathcal{E}_2(Y)=\mathcal{E}(Y)-C_\xi(Y).$$

在 $CD(1,\infty)$ 曲率判据下，收缩项满足

$$C_\xi(Y)\ \geq\ \mathcal{E}(Y),$$

由右腿比较估计。因此 $\mathcal{E}_2(Y)\leq 0$。
由于 $\mathcal{E}_2(Y)$ 是二次型，因而非负，我们得出

$$\mathcal{E}_2(Y)=0.$$

现在假设

$$Y\in D\big(\overline{\partial\otimes\mathrm{id}\ \oplus\ \mathrm{id}\otimes\partial}\circ\bar{\partial}\big).$$

根据 $S(Y)$ 的定义及其显式表达式

$$\mathcal{E}_2(Y)=\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\|\,\overline{\partial_j\otimes\mathrm{id}}\,\bar{\partial}_i Y\|^2_{L^2(M)^{\otimes 3}}+\|\,\overline{\mathrm{id}\otimes\partial_j}\,\bar{\partial}_i Y\|^2_{L^2(M)^{\otimes 3}}\Big),$$

等式 $S(Y)=0$ 迫使每一项都为零。因此，对所有 i,j,

$$\overline{\partial_j\otimes\mathrm{id}}\,\bar{\partial}_i Y=0,\qquad \overline{\mathrm{id}\otimes\partial_j}\,\bar{\partial}_i Y=0.$$

第二个恒等式实际上直接来自自由差商的余结合性（参见注 2.21）。

■

我们的下一个目标是证明，自由庞加莱不等式达到饱和会迫使极值函数关于变量 $X_1, \dots, X_n$ 为仿射 函数。这正是标准半圆模型中的情形，其中生成元$\Delta = -\mathcal{L}_{V_0}$（ $V_0 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} X_j^2$）是 Ornstein–Uhlenbeck 算子（负号遵循 Malliavin 演算的通常约定）。在这种情况下， $\Delta X_i = X_i$，而完整的谱分解由第二类切比雪夫多项式构成的正交基给出（参见 Biane–Speicher [6] 或 [29]）。例如，在自由 Malliavin 微积分中，这种显式结构至关重要。

然而，在一般情形下，与 [30, Proposition 3]，中仅在半圆情形下（目前）才有高阶自由庞加莱不等式可用的情况相反，仿射结论并非显而易见：目前尚不知高阶自由庞加莱不等式是否在一般情形下成立，而且它们只能提供一阶控制。建立这类不等式仍然是一个开放且有趣的问题。

为绕过这一困难，我们在下一个引理中采用一个关键的化约步骤：通过切片论证将问题转移到双模情形，并再次利用自由庞加莱不等式得出结论。这一思路在一定程度上受到 Dabrowski 的一种技巧的启发：在 [26, 证明引理 19(ii)]，中，利用$\bar{}$ $\bar{}$复合（$\mathrm{id} \otimes \tau$）$\circ \partial_i$的有界性来证明 D（∂）$\otimes \tau$在按 $\mathrm{id} \otimes \tau$切片时的稳定性。这里，我们将这一方法推广到一族分离切片映射。由于我们只处理范数和内积，因此通过固定典范识别 L^2（M^{op}）$\simeq L^2$（M），避免转到反模。

$\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$**引理 3.11**。设 $M = (W^*(X_1, \dots, X_n)\ \tau)$ 为一个迹 W^*–概率空间。令 $\partial := (\partial_1, \dots, \partial_n)$ 表示自伴变量 $X = (X_1, \dots, X_n)$的闭自由差商。

Let

$$\bar{\partial}_j : \mathrm{Dom}(\bar{\partial}_j) \subset L^2(M) \longrightarrow L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M).$$

$\bar{}$由于每个 ∂_j 都是闭的，映射

$$\overline{\partial_j \otimes \mathrm{id}}, \qquad \overline{\mathrm{id} \otimes \partial_j}$$

也稠密定义 （即 $\mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n\rangle \otimes \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n\rangle$ 构成一个核）于 $L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M$上也是闭算子 ），它们是通过闭包 多项式核上的算子得到的。

假设对所有 $j = 1, \dots, n$， $U \in$定义域$(\partial_j \otimes \mathrm{id} \oplus \mathrm{id} \otimes \partial_j)$，且满足

$$\overline{\partial_j \otimes \mathrm{id}}(U) = 0 \quad \textit{and} \quad \overline{\mathrm{id} \otimes \partial_j}(U) = 0.$$

那么，对某个 $c \in \mathbb{C}$，有 $U = c(1 \otimes 1)$。

证明： 我们将证明分为五个步骤：

(1) 步骤 1：对 $b \in L^2(M)$ 定义 ω_b：$L^2(M) \to \mathbb{C}$为 $\omega_b(y) := \tau(yb)$。利用 L^2内积$\langle y, z\rangle_{L^2(M)} = \tau(z^* y)$ 和迹性，我们有 $\omega_b(y) = \langle y, b^*\rangle_{L^2(M)}$。由柯西 - 施瓦茨不等式，

$$|\omega_b(y)| \le \|y\|_{L^2(M)} \|b\|_{L^2(M)},$$

因此 ω_b 是有界的，且$\|\omega_b\| \le \|b\|_{L^2(M)}$。

因此，切片映射

$$T_b := \mathrm{id} \otimes \omega_b : L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M) \longrightarrow L^2(M)$$

是有界的，且$\|T_b\| \le \|b\|_{L^2(M)}$。

设 $M_0^{\otimes 2} := \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n\rangle \otimes \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n\rangle$ 表示 X_i 中非交换多项式的代数张量积。由于 ω_b 是线性的，且 $\mathrm{id} \otimes \omega_b$ 按分量作用，我们特别有 T_b 将非交换多项式的张量积映到非交换多项式上，即 $T_b(M_0^{\otimes 2}) \subset M_0$。

(2) 步骤 2：在非交换多项式的（代数）张量积上，即对 $Q \in \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n\rangle \otimes \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n\rangle$，直接计算表明

$$\partial_j\big(T_b Q\big) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_b)\big((\partial_j \otimes \mathrm{id})Q\big).$$

现固定 $j = 1, \dots, n$，并假设 $U \in \mathrm{Dom}(\overline{\partial_j \otimes \mathrm{id}})$。我们选取一个序列 $U_n \in \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n\rangle \otimes \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n\rangle$，收敛到 $U \in \mathrm{Dom}(\overline{\partial_j \otimes \mathrm{id}})$，即满足 $U_n \to U$ in $L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M)$ 且 $(\partial_j \otimes \mathrm{id}) U_n \to W := \partial_j \otimes \mathrm{id}(U)$ in $L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M)$。由于 T_b and id $\otimes$ id $\otimes \omega_b$ 有界的，我们得到

$$T_b U_n \to T_b U, \qquad \partial_j(T_b U_n) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_b)\big((\partial_j \otimes \mathrm{id})U_n\big) \to (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_b)(W).$$

利用 ∂_j 的可闭性，我们得出

$$T_b U \in \mathrm{Dom}(\bar{\partial}_j), \qquad \bar{\partial}_j(T_b U) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega_b)\big((\overline{\partial_j \otimes \mathrm{id}})U\big).$$

特别地，如果 $(\overline{\partial_j \otimes \mathrm{id}})U = 0$，那么对所有 j，都有 $\partial_j(T_b U) = 0$。

(3) 步骤 3：将自由庞加莱不等式应用于 $T_b U \in \mathrm{Dom}(\partial)$，得到

$$\|T_b U - \tau(T_b U).1\|^2_{L^2(M)} \le C \sum_{j=1}^{n} \|\bar{\partial}_j(T_b U)\|^2_{L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M)} = 0,$$

因此

$$T_b U = \tau(T_b U).1 \qquad \text{for all } b \in L^2(M).$$

(4) 步骤 4：由步骤 3 可知，对于每个 $b \in L^2(M)$，都存在一个标量 $\lambda(b) := \tau(T_b U) \in \mathbb{C}$ 使得 t

$$T_b U = \lambda(b).1.$$

现在，我们借助希尔伯特–施密特结构来诠释这一条件。利用由等距同构（如预备知识 2.1 中所述）得到的标准识别 $L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M) \simeq HS(L^2(M))$，令 $T := \Psi(U) \in HS(L^2(M))$ 表示与 U 关联的希尔伯特–施密特算子。

对于简单张量 $a \otimes c \in M \otimes M$ 和 $b \in L^2(M)$，我们有 $T_b(a \otimes c) = a\,\omega_b(c) = a\,\tau(cb) = \Psi(a \otimes c)(b)$ 由线性性和连续性（这两个映射在代数张量积上相同，且这两个算子都是有界的），这一恒等式可推广到所有 $U \in L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M)$，特别是：

$$T_b U = T(b) \qquad \text{for all } b \in L^2(M).$$

结合上文的 $T_b U = \lambda(b).1$，我们得到

$$T(b) = \lambda(b).1 \qquad \text{for all } b \in L^2(M),$$

因此，希尔伯特–施密特算子 T 的值域包含于 $\mathbb{C}1$，从而 T 是秩为一的有限秩算子（除非它是平凡的，即等价地，$U = 0$，此时无须证明）。因此，存在有界线性泛函 $\varphi : L^2(M) \to \mathbb{C}$，使得对于所有 $b \in L^2(M)$，都有 $T(b) = \varphi(b).1$。由于 $T \in HS(L^2(M))$，φ 是连续的；根据里斯表示定理，存在 $d \in L^2(M)$，使得

$$\varphi(b) = \langle b, d\rangle_{L^2(M)} = \tau(d^* b) \qquad \text{for all } b \in L^2(M).$$

令 $b_0 := d^*$，我们得到 $\varphi(b) = \tau(b_0 b)$，因此

$$T(b) = \tau(b_0 b).1 \qquad \text{for all } b \in L^2(M).$$

另一方面，张量 $1 \otimes b_0$ 在 Ψ 下对应于算子

$$\Psi(1 \otimes b_0)(b) = \tau(b_0 b).1,$$

对于所有 b，它与 $T(b)$ 一致。因此

$$T = \Psi(U) = \Psi(1 \otimes b_0).$$

由于 Ψ 是等距同构（特别是单射），因此

$$U = 1 \otimes b_0.$$

(5) 步骤 5：由 $\mathrm{id} \otimes \partial_j(U) = 0$ 和 $U = 1 \otimes b_0$，可得

$$1 \otimes \bar{\partial}_j(b_0) = (\overline{\mathrm{id} \otimes \partial_j})(U) = 0,$$

so $\bar{\partial}_j(b_0) = 0$ 对于所有 j。将自由庞加莱不等式应用于 b_0，得到 $b_0 = \tau(b_0).1$，由此

$$U = \tau(b_0).(1 \otimes 1),$$

这就是所需的结论。

■

现在我们证明自由庞加莱不等式在利普希茨条件和 $CD(1, \infty)$ 判据下的极值函数有一个很好的推论：仿射刚性，这意味着这类极值函数必然是生成元 $X_1, \ldots, X_n$ 的仿射函数，这是证明主定理的关键。

推论3.12. 假设 $M = (W^*(X_1, \ldots, X_n)\ \tau)$ 具有定义 *2.13* 中的Lipschitz共轭变量 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$，且其雅可比矩阵满足 $CD(1, \infty)$ 判据。

令 $f \in$定义域$(\bar{\partial})$和 $=$定义域$(\Delta^{1/2})$中心化，并使自由庞加莱不等式取等（即 $\Delta f = f$）。那么

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j + c_0.1$$

对某些标量 $c_j \in \mathbb{C}$。

证明：由引理 3.8 和曲率界可得 $S(f) = 0$，因此

$$\overline{\partial_j \otimes \mathrm{id}}\, \bar{\partial}_i f = 0, \qquad \overline{\mathrm{id} \otimes \partial_j}\, \bar{\partial}_i f = 0$$

对所有 $i, j = 1, \ldots, n$。

现在，引理 3.11 进而得到 $\partial_i f = c_i.(1 \otimes 1)$。

定义 $g := f - \sum_{j=1}^{n} c_j X_j$。由于 $\partial_i X_j = \delta_{ik}(1 \otimes 1)$，我们有

$$\bar{\partial}_i g = \bar{\partial}_i f - c_i\, \partial_i X_i = c_i(1 \otimes 1) - c_i(1 \otimes 1) = 0$$

对所有 i。由自由庞加莱不等式，$g = c_0.1$ 对某个 $c_0 \in \mathbb{C}$，从而得到所需结论。

■

注 3.13. 如命题 *2.14* 所述，二阶差商 $(\partial_i \otimes \mathrm{id}) \circ \partial_j$ 是稠密定义且可闭的，因为二阶共轭变量存在。这意味着我们也可以直接考虑$(\partial_i \otimes \mathrm{id}) \circ \partial_j$，而无需加以区分。

引理 3.14. 在推论*3.12*的假设下，进一步假设 f 是自伴的。令$X_j^{\circ} := X_j - \tau(X_j).1$并令 $\sigma := \|f\|_{L^2(M)}$。则：

(1) 有

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \, X_j^{\circ},$$

与 $c_j \in \mathbb{R}$ 和 $\sum_{j=1}^{n} c_j^2 = \sigma^2$。

(2) 对于每个 $g \in \mathbb{C}\langle X_1, \ldots\ldots, X_n \rangle$,

$$\langle f, g \rangle_{L^2(M)} = \sum_{j=1}^{n} \langle \partial_j f, \partial_j g \rangle_{L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})} = \sum_{j=1}^{n} c_j \, \langle 1 \otimes 1, \partial_j g \rangle_{L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})} = \sum_{j=1}^{n} c_j \, \langle \xi_j, g \rangle_{L^2(M)},$$

hence $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \, \xi_j$.

(3) 定义导子（映射到 $L^{\infty}(M)^2 \bar{\otimes} L^{\infty}(M^{op})$）

$$\delta_f := \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\sigma} \, \partial_j$$

于是，这是一个可闭导子，满足 $\widehat{f} := \frac{f}{\sigma} = \delta_f^*(1 \otimes 1) = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\sigma} \xi_j$，此外还满足 $\delta_f(\widehat{f}) = 1 \otimes 1$。

(4) 元素 f 具有标准半圆分布。

证明：

(1) 由推论3.12，对于每个 $i = 1$、……、n，我们有

$$\partial_i f = c_i . (1 \otimes 1),$$

其中 $c_i \in \mathbb{C}$。由于 $\partial_i X_j^{\circ} = \delta_{ij}(1 \otimes 1)$ 且 f 是中心化的，

$$0 = \tau(f) = \sum_{j=1}^{n} c_j \tau(X_j) + c_0,$$

因此 $c_0 = -\sum_{j=1}^{n} c_j \tau(X_j)$，从而

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \big(X_j - \tau(X_j).1 \big) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j^{\circ}.$$

此外，

$$\|f\|_{L^2(M)}^2 = \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j f\|_{L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})}^2 = \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2,$$

因此 $\sigma^2 = \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2$。若 $f = f^*$，则由自由差商的实 性质，

$$c_i . (1 \otimes 1) = \partial_i f = \partial_i (f^*) = (\partial_i f)^{\dagger} = \overline{c_i} . (1 \otimes 1),$$

因此，对于所有 i，都有 $c_i \in \mathbb{R}$。这证明了第一项 m.

(2) 由于 f 使自由庞加莱不等式取等号，我们有 $\Delta f = f$。狄利克雷恒等式表明，对于任意 $g \in \mathbb{C}\langle X_1$、……、$X_n \rangle$,

$$\langle f, g \rangle_{L^2(M)} = \sum_{j=1}^{n} \langle \partial_j f, \partial_j g \rangle_{L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})} = \sum_{j=1}^{n} c_j \, \langle 1 \otimes 1, \partial_j g \rangle_{L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})}.$$

由于 根据命题 2.14 $\xi_j = \partial_j^*(1 \otimes 1) \in M$，Lipschitz 共轭变量是有界的，这等于 s

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \langle \xi_j, g \rangle_{L^2(M)}.$$

因此 $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \xi_j \in M$。这证明了第二点。

(3) 到此为止，我们得到了这两个表示

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j^{\circ} = \sum_{j=1}^{n} c_j \xi_j.$$

因此， f 同时属于中心化生成元的张成空间和共轭变量的张成空间。现在的关键步骤是适当地重新归一化。

我们定义

$$\widehat{f} := \frac{f}{\sigma}, \qquad \delta_f := \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\sigma} \partial_j.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$于是 $\tau(f) = 0, \|f\|_{L^2(M)} = 1,$ 且 $\Delta f = f$。

利用 $\partial_j f = c_j.(1 \otimes 1)$ 和 $\sigma^2 = \sum_j c_j^2$ 进行直接计算可得

$$\delta_f(\widehat{f}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\sigma} \partial_j \Big(\frac{f}{\sigma} \Big) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} c_j \, \partial_j f = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} c_j^2 . (1 \otimes 1) = 1 \otimes 1.$$

由第二项可知

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \, \xi_j, \qquad \xi_j = \partial_j^*(1 \otimes 1).$$

Set

$$h := \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\sigma} \xi_j \ \in \ M.$$

对于任意的 $g \in \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$，根据 δ_f 的定义，我们计算得:

$$\begin{aligned} \big\langle 1 \otimes 1, \delta_f g \big\rangle_{L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})} &= \Big\langle 1 \otimes 1, \ \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\sigma} \partial_j g \Big\rangle_{L^2(M \bar{\otimes} L^2(M^{op})} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\sigma} \big\langle 1 \otimes 1, \ \partial_j g \big\rangle_{L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\sigma} \big\langle \xi_j, g \big\rangle_{L^2(M)} \\ &= \big\langle h, g \big\rangle_{L^2(M)}. \end{aligned}$$

因此 $1 \otimes 1 \in$ 定义域(δ_f^*)，并根据伴随算子的定义，

$$\delta_f^*(1 \otimes 1) = h = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\sigma} \xi_j = \widehat{f}.$$

(4) 最后，我们证明最后一点。由于 $\delta_f^*(1\otimes 1) = f$，伴随关系可以完全用迹表示如下：对每个 $g \in \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n\rangle$，

$$\tau(\widehat{f}\, g) = \tau \otimes \tau(\delta_f(g)). \tag{16}$$

这是一个 Stein恒等式，与自由差商的共轭关系 (2) 完全类似。将 (16) 应用于多项式 $g = f^m$，$m \geq 0$，得到

$$\tau(\widehat{f}^{m+1}) = \tau \otimes \tau(\delta_f(\widehat{f}^m)), \qquad m \geq 0. \tag{17}$$

另一方面，由于 δ_f是导子，且 $\delta_f(f) = 1\otimes 1$，链式法则 （或简单的归纳法）表明，对所有 $m \geq 1$，

$$\delta_f(\widehat{f}^m) \;=\; \sum_{k=0}^{m-1} \widehat{f}^k \otimes \widehat{f}^{m-1-k}.$$

应用 $\tau \otimes \tau$ 得到

$$\tau \otimes \tau\big(\delta_f(\widehat{f}^m)\big) = \sum_{k=0}^{m-1} \tau(\widehat{f}^k)\, \tau(\widehat{f}^{m-1-k}), \qquad m \geq 1.$$

将此结果与 (17) 结合，我们得到矩递推

$$\tau(\widehat{f}^{m+1}) \;=\; \sum_{k=0}^{m-1} \tau(\widehat{f}^k)\, \tau(\widehat{f}^{m-1-k}), \qquad m \geq 1.$$

根据构造，$\tau(\widehat{f}) = 0$且 $\|\widehat{f}\|_2^2 = \tau(\widehat{f}^2) = 1$。因此，$\widehat{f}$的矩满足标准的卡塔兰递推，而该递推唯一刻画方差为 1 的中心化半圆分布。因此，f 服从半圆分布。

■

现在可以陈述我们的主要定理：它表明，自由庞加莱不等式达到饱和，不仅会导出一个半圆方向，还会在代数中产生自由补足。

定理 3.15 (自由小幡刚性定理)。设 (M, τ) 是由一个自伴 n-元组 $X = (X_1, \dots, X_n)$生成的迹 W^*-概率空间，并假设 X 存在 ***Lipschitz***共轭变量（定义 *2.13*），且满足曲率维数界 $CD(1, \infty)$。

假设存在一个非零的中心化 $f \in D(\Delta^{1/2})$，它是自伴的，并使自由庞加莱不等式达到饱和

$$\|f\|^2_{L^2(M)} = \mathcal{E}(f).$$

那么有以下结论：

(1) 存在 $U \in O(n)$，使得令 $:= X_j - \tau(X_j)$。1，

$$Y_i := \sum_{j=1}^{n} U_{ij}\, X_j^\circ, \qquad i = 1, \dots, n,$$

我们有

$$f = \|f\|_{L^2(M)}\, Y_1,$$

即 $Y_1 = f/\|f\|_{L^2(M)}$。*(2)* 变量 Y_1 是标准半圆变量（中心化，方差为1）。

(3) Y_1 相对于 τ 与族 $(Y_2, \dots, Y_n)$ 自由。

(4) 由 X 生成的冯·诺依曼代数满足

$$W^*(X_1,\dots,X_n) = W^*(Y_1,Y_2,\dots,Y_n).$$

(5) 因此，$(W^*(X_1,\dots,X_n)\ \tau)$ 存在如下保迹自由积分解：

$$(W^*(X_1,\dots,X_n),\tau) \cong (W^*(Y_1),\tau_{\mathrm{sc}}) * (W^*(Y_2,\dots,Y_n),\tau_N),$$

其中， τ_{sc} 是 $W^*(Y_1)$ 上的标准半圆状态，而 τ_N 是 τ 在 N $=W^*(Y_2,\dots,Y_n)$上的限制。特别地，

$$(W^*(X_1,\dots,X_n),\tau) \cong L^\infty([-2,2],\mu_{\mathrm{sc}}) * (W^*(Y_2,\dots,Y_n),\tau_N).$$

此外， $W^*(Y_1)$ 在 $W^*(X_1,\dots,X_n)$中有自由补空间，其（自由）补空间为 $W^*(Y_2,\dots,Y_n)$。

注 3.16. 在 $CD(1,\infty)$的情形下，显然有 $\sigma(\Delta) \subset \{0\} \cup [1,\infty)$。当自由庞加莱不等式存在非零取等元时，命题 *3.1* 表明它是特征值为1的特征函数。因此，1 是 Δ的首个正谱值，而$\ker(\Delta - \mathrm{id})$ 确实是首个非恒定特征空间（再参见定理 *2.20* 的证明，其中指出$\ker(\Delta)$仅由单位元的标量倍数组成）。

推论 3.17。 假设定理 *3.15* 的条件成立，并进一步假设自由拉普拉斯算子的第一特征空间

$$E_1 := \ker(\Delta - \mathrm{id}) \subset L^2_0(M)$$

是维数为 $r \geq 1$ 的有限维空间。

根据推论 *3.4*， E_1 由一个自由庞加莱不等式的中心化自伴饱和子张成（反向包含关系：由对偶性可立即得出特征函数 $\Longrightarrow$ 是饱和子）。由于假设 E_1 是有限维的，我们可以选取 f_1，……， f_r 作为 E_1的一组标准正交基。于是有以下结论：

(1) 存在 $U \in O(n)$ ，使得记 $X_j^\circ := X_j - \tau(X_j)$。1，

$$Y_i := \sum_{j=1}^n U_{ij}\, X_j^\circ, \qquad i = 1,\dots,n,$$

我们有

$$f_k = Y_k, \qquad k = 1,\dots,r.$$

(2) 变量 Y_1，……， Y_r 是标准半圆变量（中心化且方差为1).

(3) 在 τ 下，族 $(Y_1,\dots,Y_r)$ 与族 $(Y_{r+1},\dots,Y_n)$ 自由。*(4)* 由 X 生成的冯·诺依曼代数满足

$$W^*(X_1,\dots,X_n) = W^*(Y_1,\dots,Y_r,Y_{r+1},\dots,Y_n).$$

(5) 因此，$(W^*(X_1,\dots,X_n)\ \tau)$ 存在一个保迹自由积分解：

$$(W^*(X_1,\dots,X_n),\tau) \cong (W^*(Y_1,\dots,Y_r),\tau_{\mathrm{sc}}^{*r}) * (W^*(Y_{r+1},\dots,Y_n),\tau_N),$$

其中 τ_{sc}^{*r} 是 r 个标准半圆状态的自由积，而 τ_N 是 τ 在 $N = W^*(Y_{r+1},\dots,Y_n)$ 上的限制。特别地，

$$(W^*(X_1,\dots,X_n),\tau) \cong L(\mathbb{F}_r) * (W^*(Y_{r+1},\dots,Y_n),\tau_Y).$$

此外， $W^*(Y_1,\dots,Y_r)$ 在 $W^*(X_1,\dots,X_n)$中有自由补空间，其（自由）补空间为 $W^*(Y_{r+1},\dots,Y_n$).

备注 3.18. 假设存在一个第一特征空间 维数 $E_1 = r < \infty$ ，这是一个额外且非常强的谱假设。在半圆/*q*–高斯代数的情形下，该假设自动成立，因为 Δ 恰好是 *Fock/q-Fock*空间上的数算子 ，并且具有离散谱和有限重数。对于一般的自由吉布斯态，更不用说此处所考虑的更一般的Lipschitz共轭变量情形，预解式紧性（因而特征空间有限维）目前尚不清楚，仍是一个开放问题；参见第 *4* 节的讨论。

此外，根据仿射刚性结果（推论*3.12*），每个第一特征函数都具有如下形式： $f = \sum_{j=1}^n u_j X_j^\circ$其中 $u \in \mathbb{R}^n$。因此，与 E_1 的一组标准正交基 $u_1, \dots, u_r$ 相对应的系数向量在 $\mathbb{R}^n$中构成标准正交组，因此

$$r = \dim E_1 \le n.$$

因此，推论 *3.17* 应理解为一个条件刚性结论：只要第一特征空间是有限维的，其极端方向必然构成一个自由半圆族，并生成一个 $L(\mathbb{F}_r)$ 自由积因子。

证明：[定理 3.15] 的证明我们将证明分为四个步骤。

步骤 *1*。根据推论 3.4，我们可以假设 f 是自伴的。由于 f 是在 $CD(1, \infty)$条件下自由庞加莱不等式的非零中心化自伴取等元，引理 3.14(i)–(ii)给出了系数 $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$，使得

$$f = \sum_{j=1}^n c_j \, X_j^\circ \qquad \text{and} \qquad f = \sum_{j=1}^n c_j \, \xi_j,$$

其中 $X_j^\circ := X_j - \tau(X_j)$.1 和 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 是（有界的，即属于 M，而不仅仅属于 $L^2(M)$，由 2.1 得）4）Lipschitz 共轭变量 X。此外，由引理 3.14(i)，

$$\|f\|_{L^2(M)}^2 = \sum_{j=1}^n c_j^2 > 0.$$

设 $c = (c_1, \dots, c_n)$，则有 $\|c\|_2 = (\sum_{j=1}^n c_j^2)^{1/2} = \|f\|_{L^2(M)} > 0$，且 $u = c/\|c\|_2$。取$U \in O(n)$，其第一行为 $U_{1*} = u$ ，并定义

$$Y_i := \sum_{j=1}^n U_{ij} \, X_j^\circ, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Then

$$f = \sum_{j=1}^n c_j X_j^\circ = \|c\|_2 \sum_{j=1}^n u_j X_j^\circ = \|f\|_{L^2(M)} \, Y_1,$$

使得

$$Y_1 = \frac{f}{\|f\|_{L^2(M)}}.$$

由于 U 是正交的，线性变量变换 $X^\circ \mapsto Y$ 是可逆的，从而

$$W^*(X_1, \dots, X_n) = W^*(X_1^\circ, \dots, X_n^\circ) = W^*(Y_1, \dots, Y_n).$$

步骤 *2.* 由于共轭变量在对生成元加上单位元的标量倍数后保持不变，因此与 $X^\circ = (X_1^\circ, \dots, X_n^\circ)$ 相关联的共轭系统仍为 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$。

根据 Voiculescu 关于实可逆线性变量替换下导子和共轭变量的结果（[78, 备注 6.6，引理 6.7，推论 6.8]），由于 $Y = UX^{\circ}$，共轭系统按逆矩阵的转置进行变换，即 Y的共轭变量为 $\xi_{Y_i} = \sum_{j=1}^{n} (U^{-1})_{ji}\, \xi_{j^{\circ}}$。由于 U 是正交的，$U^{-1} = U^{T}$，即 $(U^{-1})_{ji} = U_{ij}$，因此 $\xi_{Y_i} = \sum_{j=1}^{n} U_{ij}\, \xi_{j^{\circ}}$。特别地，

$$\xi_{Y_1} = \sum_{j=1}^{n} U_{1j}\, \xi_j = \sum_{j=1}^{n} u_j\, \xi_j \tag{18}$$

利用 $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \xi_j$ 和 $c = \|c\|_2\, u$，我们得到

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j\, \xi_j = \|c\|_2 \sum_{j=1}^{n} u_j\, \xi_j = \|f\|_{L^2(M)}\, \xi_{Y_1}.$$

与 $f = \|f\|_{L^2(M)}$ Y_1比较后，我们得出

$$\xi_{Y_1} = Y_1.$$

步骤 *3.* 由步骤 2 可知，Y_1 的共轭等于其自身，即

$$\xi_{Y_1} = Y_1.$$

根据 Voiculescu 的自由 Cramér–Rao 等式刻画 [78, 命题 6.9]，（这也是一种 Stein 型刻画），可立即推出 Y_1 是一个方差为 1 的中心化半圆变量，且与 $Y_2, \ldots, Y_n$自由，即 $\mathbb{C}[Y_1]$ 与单位 $*$-代数 $N_0 := \mathbb{C}\langle Y_2, \ldots, Y_n\rangle$自由。接着，根据 Kaplansky 稠密性定理（参见 Mingo–Speicher[56, 命题 5]），N_0 在冯·诺依曼代数 N =W^*($Y_2, \ldots, Y_n$)中强稠密，且自由性可以延拓，因此 Y_1，即 $\mathbb{C}[Y_1]$，从而 W^*(Y_1)与 $N = W^*$($Y_2, \ldots,$ Y_n)自由，证明了第 (2) 和 (3) 项。

步骤 *4.* 由于 U 是正交的，

$$W^*(X_1, \ldots, X_n) = W^*(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n),$$

且 Y_1 是标 准半圆的，与 W^*(Y_2，……，Y_n)自由，因此由万有性 y 质刻画 自由积（详见 [74]）：

$$(W^*(X_1, \ldots, X_n), \tau) \cong (W^*(Y_1), \tau_{\mathrm{sc}}) \ * \ (W^*(Y_2, \ldots, Y_n), \tau_N),$$

其中 τ_{sc} 是 W^*(Y_1) 上的标准半圆状态是 τ 在 $N = W^*$(Y_2，……，Y_n 上的限制，且 τ_N). 由于 (W^*(Y_1) τ $_{\mathrm{sc}}$) $\cong L^{\infty}$([$-2, 2$]，μ_{sc})，因此得出条目 (5)，定理得证。

■

证明：[推论 3.17] 的证明。设 f_1，……，f_r 是 E_1 的一组自伴（且有界，即属于 M）标准正交基。由命题 3.1 可知，每个 f_k 都是自由庞加莱不等式的中心化自伴饱和子。对每个 f_k 应用定理 3.15，即得结论。

■

作为另一项直接推论，上文得到的自由积分解给出由此产生的冯·诺依曼代数的若干结构性质，适用于一维和多维分裂情形。特别地，这以更直接的论证重现了 Dabrowski [23] 在我们的特定情形下的相应结果，且无需使用自由费舍尔信息与熵技术。

我们首先记录自由积的一个一般因子性判据，它是众所周知的，例如可以在 Ioana 的讲义 [42, 习题 5.24] 中找到。

引理 3.19. 设 (M_1, τ_1) 与 (M_2, τ_2) 为带迹 *von Neumann* 代数，使得 M_1 是弥散的且 $M_2 \neq \mathbb{C}1$。设 $(M, \tau) = (M_1, \tau_1) * (M_2, \tau_2)$ 为其带迹自由积。则 M 是一个 II_1 因子。

推论 3.20。 假设定理 *3.15* 或推论 *3.17* 的条件成立，并设 $n \geq 2$。那么，对于$M = W^*（X_1、...、 X_n）$，我们有：

(1) M 是一个II_1 因子；
(2) M 是不可和的。

证明： Unde根据定理 3.15 或推论 3.17 的条件，我们得到一个自由积分解

$$(M, \tau) \simeq (W^*(Y_1), \tau_{\mathrm{sc}}) * (N, \tau_N),$$

其中， Y_1 是方差为 1 的中心化半圆变量，而 $N = W^*(Y_2、...、 Y_n)$带有限制迹（或在多维情形下为 $W^*(Y_{r+1}、...、 Y_n)$）。

根据 Voiculescu 的结果 [78, 推论 4.7], 有限自由 Fisher 信息（由自由对数 Sobolev 不等式可推出有限自由熵，参见 [78, 命题 7.9]）保证每个 X_j 具有弥散分布。由于平移保持弥散性，每个中心化变量 X_j° 都是弥散的。正交变量变换

$$(X_1^\circ, \ldots, X_n^\circ) \mapsto (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

表明每个 $(Y_2、.....、 Y_n)$ 都具有共轭变量，因此每个分量都是弥散的。对于 $n \geq 2$，至少有一个 Y_i 是非平凡的，因此 $N = W^*(Y_2、.....、 Y_n)$ 是非平凡的，并且包含一个弥散元素。

(1) 由于 $W^*(Y_1)$ 是弥散的且 $N \neq \mathbb{C}1$，引理 3.19 适用，由此可得 M 是一个 II_1 因子。(2) 将 $W^*(Y_1) \cong L^\infty([-2, 2], \mu_{\mathrm{sc}})$ 识别后，我们便可在 $W^*(Y_1)$ 中构造一个 Haar 酉元。由于 N 包含一个弥散元素，它包含一个弥散交换子代数 $A \subset N$，因此我们可以在 A 中找到 v 一个 Haar 酉元（详细信息参见 Mingo-Speicher [68, 定理 6]）。在自由积分解$M \simeq W^*(Y_1) * N$中，Haar 酉元 u和 v是自由的，因此 $W^*(u, v) \cong L(\mathbb{F}_2) \subset M$。由于 M是一个具有可分前对偶的 II_1 因子，如果它是可和的，那么根据 Connes 分类，它将同构于超有限 II_1 因子 R；但 R 的每个 II_1 子因子又都同构于 R，因而是超有限/可和的，而 $L(\mathbb{F}_2)$并非如此。因此 M 是非可和的。

■

更值得注意的是以下这一点。Popa 的突破性结果表明，在 II_1 因子中，具有自由补的弥散可容子代数自动是极大可和的。

定理 3.21 (Popa [64])。 如果 M 是一个II_1 因子，那么 M 中任何在其中具有自由补的弥散可容子代数 $B \subset M$ 都是 M中的极大可和子代数。

推论 3.22。 假设满足定理 *3.15* 或推论 *3.17* 的条件并采用其中的记号，则子代数$W^*(Y_1)$或 $W^*(Y_i)$ $1 \leq i \leq r$是 $W^*(X_1, \ldots, X_n)$中的极大可和子代数，因此尤其是极大阿贝尔自伴代数。

注 3.23。 在相同条件下，定理 *3.15* 的自由积分解还具有强得多的刚性性质。

(1) 非Γ。 在定理 *3.15* 给出的 M 分解中，两个自由分量都是弥散的且非平凡。因此，*Houdayer* 关于自由积 [40, 定理 A] 的 Γ-稳定性定理适用于包含关系$W^*(Y_1) \subset M$，由此可知 M 不具有性质 Γ。*(2)* 不存在 Cartan 子代数。 根据同一分解， M 是非平凡、无限维带迹 *von Neumann* 代数的自由积。因此，*Ioana* 关于自由积中不存在 *Cartan* 子代数的结果 [41,推论 1。5] 适用，且 M 不存在 *Cartan* 子代数。

4. 开放问题

4.1. 预解式紧性与离散谱。 在经典情形下，对于定义在 $\mathbb{R}^n$ 上、具有生成元的正则 对数凹概率测度 $\mu \propto e^{-V}dx$

$$\mathcal{L}_V u = \Delta u - \nabla V \cdot \nabla u, \tag{19}$$

算子 $-\mathcal{L}_V$ 本质自伴，并生成一个对称马尔可夫半群 $(P_t)_{t\geq 0}$，作用于$L^2(\mu)$，其狄利克雷型为 $\mathcal{E}(f) = \int |\nabla f|^2 \, d\mu$。一个基本事实是以下等价关系

$$(\alpha + \mathcal{L}_V)^{-1} \text{ compact} \quad \Longleftrightarrow \quad -\mathcal{L}_V \text{ has discrete spectrum}, \tag{20}$$

参见 [22, 65]。紧性可由若干泛函分析判据推出，例如 Rellich–Kondrachov 紧嵌入、超收缩性或 Nash 不等式 [3, 22]。在这些条件下，$-\mathcal{L}_V$ 具有由 Rayleigh 变分刻画确定的特征函数完备正交基；对于限制势（例如一致凸的 ψ），特征函数呈指数衰减 [67, 65]。

在自由情形中，设 $M = W^*(X_1、\ldots\ldots、X_n)$由自伴变量生成，这些变量带有（可能为 Lipschitz 连续的）共轭变量，并考虑保守生成元

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^* \, \bar{\partial}_j.$$

根据 Dabrowski [23, 26]， Δ 在 $L^2(M,\tau)$ 上生成一个完全狄利克雷型，且其预解式 $\eta_\alpha = \alpha(\alpha+\Delta)^{-1}$ 是完全正压缩算子，并满足 $\mathrm{Ran}(\eta_\alpha) \subset$ 定义域$(\bar{\partial})$。

这些谱 Δ 的l理论在很大程度上是开放的。在半圆情形中，自由Ornstein–Uhlenbeck生成 r 是数算 子在全福克空间上，并具有纯点谱

$$\mathrm{Sp}(-\mathcal{L}_{V_0}) = \{0, 1, 2, \ldots\}, \tag{21}$$

带有到维格纳混沌 [6, 29] 上的特征投影。这种代数（此处我们有多项式特征函数）对角化蕴含紧预解式。

目前，预解式紧性仅在半圆情形与 q-高斯情形（$|q| < 1$）中已知，后者经由超压缩性 [11]（例如具有一致凸势的自由吉布斯态）得到，而谱的离散性仍未知。经典判据的一个非交换类似便已足够：

(1) 紧预解式：一个自由Rellich型紧嵌入定义域$(\Delta^{1/2})$ =定义域$(\bar{\partial}) \hookrightarrow L^2(M,\tau)$将蕴含离散谱。(2) 超压缩性：若 $e^{-t\Delta}$ 将 L^2 映入 $L^\infty(M)$：$= M$ 对某个 $t > 0$，则 $e^{-t\Delta}$ （从而（α+Δ）$^{-1}$）是紧的 [19]。

将离散性推广到一般自由吉布斯态仍是一个开放问题。我们还注意到一个相关问题，它早在关于自由分析的AIM 2006研讨会上就已提出 [81], ，即半群exp$(-t\,\Delta)$在极限 $n \to \infty$中是否为紧。由于 $e^{-t\Delta}$ 的紧性等价于 Δ的离散谱，该问题与上文讨论的自由谱问题密切相关。即便在最简单的微扰情形$P = X_i^2 + t_i q_i$（$X_1, \ldots, X_m$）中，也一无所知。此外，即便在自由单调输运表明极限冯 · 诺依曼代数同构于一个自由群因子的情形中（参见例如 [38]），目前也没有已知的算子（酉算子或其他算子）能够以足够强的方式交织或比较相应的狄利克雷型，从而传递紧性或谱的离散性。

4.2. 自由里奇曲率与几乎余结合性。 在黎曼几何中，曲率通过交换恒等式体现出来。在几何层面，这由光滑向量场的基本关系表示： $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

其中 ∇ 是列维-奇维塔联络

在开集 $U \subset M$ 上的局部坐标 $(x^1, \ldots, x^n)$ 中，令

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \nabla_i := \nabla_{\partial_i}.$$

由于坐标向量场彼此交换，$[\partial_i, \partial_j] = 0$，黎曼曲率张量作用于向量场$X = X^k \partial_k$ 的方式为

$$[\nabla_i, \nabla_j] X^k = R^k{}_{\ell ij} X^\ell,$$

其中，$R^k{}_{\ell ij}$ 是曲率张量的坐标分量。这体现了协变导数在分量形式下不满足交换性。在 $\mathbb{R}^n$上的经典 Bakry–Émery 框架中，底层黎曼度量是平坦的（因此几何里奇张量为零），所有曲率信息都来自势 V，并通过其海森矩阵 $\nabla^2 V$体现。这由交换恒等式

$$[\nabla, \mathcal{L}_V] \;=\; -\nabla^2 V,$$

其中，$\mathcal{L}_V = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$ 是具有不变测度 $\mu \propto e^{-V} dx$的朗之万生成元。因此，在此情形下，Bakry–Émery 意义上的“曲率”纯粹属于势类型：它完全由$\nabla^2 V$刻画，不存在额外的几何里奇张量贡献。

因此，自然会问，什么概念应当扮演自由里奇曲率的角色。Dabrowski 的工作 [25]指明了这一方向，尽管其初衷或许并非赋予其几何意义，因为该工作主要是为了获得求得自由随机偏微分方程温和解所需的定义域与交换控制。特别是，他的几乎余结合导子框架 [25, 定义 20]提供了一个自然的候选概念，它可以被视为一种取值于粗对应的耦合导子，且比本文所考虑的自由差商情形一般得多。

在更精确地描述这一设定之前，我们先引入一些记号：对于 $U \in L^2(M \bar{\otimes} M^{op})$ 和 $C \in M \bar{\otimes} M \bar{\otimes} M^{op}$，通过将规则 $U\#C \in L^2(M \bar{\otimes} M \bar{\otimes} M^{op})$ 延拓，可定义

$$(a \otimes b)\#(d \otimes e \otimes f) := ad \otimes e \otimes bf,$$

这体现了自然的双模结构。等价地，由于 $U\#1$ 是嵌入三重张量积的典范映射，我们也可以写作 $U\#C = (U\#1)\, C$。

按照 Dabrowski 的定义，[25], 几乎余结合性要求导子的定义域与其张量扩张的定义域之间具有精确的相容性。令

$$\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n), \qquad \tilde{\delta} = (\tilde{\delta}_{n+1}, \ldots, \tilde{\delta}_M)$$

设有两族实可闭导子 δ: Dom(δ) $\to (L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op}))^{\oplus_n}$和 $\tilde{\delta}$: Dom($\tilde{\delta}$) $\to (L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op}))^{\oplus_n}$，满足 [25, 定义 20]中的通常定义域假设（Dom(δ) 和˜ ˜Dom(δ) 都是 $*$的弱稠密子代数）。我们称 δ 相对于 δ几乎余结合，其缺陷张量为

$$C = (C^k_{i,j}, C^k_{j,i}) \in (M_0 \bar{\otimes} M_0 \bar{\otimes} M_0^{op})^{2nM^2},$$

˜ ˜ ˜如果满足以下条件。对于每个 $x \in$定义域(δ)∩定义域(δ)，使得对所有$j = 1, \ldots, n,$ 均有 $\delta_j(x)$ ∈定义域($\delta \otimes 1$) ∩定义域($1 \otimes \delta$)，类似地，对所有 $i = 1, \ldots, M$，均有 $\delta_k(x) \in$定义域($\delta \otimes 1$) ∩定义域($1 \otimes \delta$)，则余结合子恒等式

$$(\delta_j \otimes 1) \circ \tilde{\delta}_i(x) - (1 \otimes \tilde{\delta}_i) \circ \delta_j(x) = \sum_{k=N+1}^{M} \tilde{\delta}_k(x) \# C^k_{j,i},$$

and

$$(\tilde{\delta}_i \otimes 1) \circ \delta_j(x) - (1 \otimes \delta_j) \circ \tilde{\delta}_i(x) = \sum_{k=1}^{N} \delta_k(x) \# C_{i,j}^k,$$

成立。

若 $\delta = \delta$，我们便简单地说 δ 是几乎余结合的。因此， δ 与 δ 的余结合子可表示为梯度 $\delta_k(x)$的受控线性组合，其系数属于 $M \bar{\otimes} M \bar{\otimes} M^{op}$。这直接类似于如下经典事实：向量场的交换子是带有标量系数的向量场的线性组合；在此意义上，几乎余结合性为导子提供了一种非交换李代数结构。缺陷张量 C 在这种余导子几何中扮演算子值曲率的角色。

[25]的主要技术成果之一在于：在附加的索伯列夫型正则性以及适当的（Γ_1–型）界条件下，几乎余结合性使我们能够推导出梯度与相应二阶算子之间的一种几乎交换关系。更确切地说，若 $\Delta = \delta^* \delta$ 是由导子族 δ 构造而成的散度形式生成元，且 δ 是相对于 δ几乎余结合的另一族，则存在一个有界算子

$$H : (L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op}))^{\oplus_n} \longrightarrow (L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op}))^{\oplus_n}$$

使得

$$\Delta^{\otimes} \circ \tilde{\delta}(x) - \tilde{\delta} \circ \Delta(x) = H(\tilde{\delta}(x)), \qquad x \in \mathrm{Dom}(\tilde{\delta} \circ \Delta),$$

其中

$$\Delta^{\otimes} = \overline{\Delta \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \Delta}$$

是作用在（$L^2(M) \bar{\otimes} L^2(M^{op})$）$^{\oplus_n}$上的自然（张量扩张）拉普拉斯算子。这个恒等式是前面提到的经典交换关系的自由类比，其中有界算子 H 扮演曲率算子的角色，作用于梯度。 H 的系数极其复杂，其显式表达涉及缺陷张量 C、伴随算子 $\delta_i^*(1 \otimes 1)$ 以及有界映射（$1 \otimes \tau$）$\circ \delta_i$（参见 [25, 第 2.1 节5]，尤其是 [25, 推论 32]）。

本文聚焦于底层非交换空间为欧几里得空间的自由类比（$\mathbb{R}^n$， $|\cdot|$）这一情形，因此背景冯·诺依曼代数 $M = W^*(X_1, \ldots\ldots, X_n)$ 中不存在内禀的几何里奇曲率。在这一平坦情形下，自由差商恰好是余结合的，因此缺陷张量 C 消失。由此，所有曲率都来自势，通过共轭变量 ξ 及其雅可比矩阵 $\mathscr{J}\xi$ 产生，正如经典 Bakry–Émery 理论在 $\mathbb{R}^n$ 中那样，其中 Ric $= 0$，唯一的曲率就是 $\nabla^2 V$。

相比之下，在 Dabrowski 完整的近似余结合框架中，一个非平凡的缺陷张量 C自然给出了独立于势的**自由里奇曲率**。在这一更一般的设定下，交换关系

$$\Delta^{\otimes} \tilde{\delta} - \tilde{\delta} \Delta = H(\tilde{\delta})$$

既包含来自势（通过 $\mathscr{J}\xi$）的贡献，也包含来自几何缺陷 C 的贡献，这与经典 Bakry–Émery 单位元中的分解 $\mathrm{Ric}_V = \mathrm{Ric} + \nabla^2 V$直接类似。因此，将本文的解析部分（曲率-维数估计、庞加莱不等式和刚性现象）扩展到这一更一般的情形，将会形成一种完整的非交换曲率-维数理论；在该理论中，几何曲率（由 C 编码）和势曲率（由 $\mathscr{J}\xi$ 编码）对曲率项作出同等贡献。

5. 致谢

本研究得到以色列科学基金会（ISF）2574/24 号基金和 NSF-BSF 2022707 号基金的支持。C. P. Diez 还获得了研究、创新与数字化部（罗马尼亚）CF-194-PNRR-III-C9-2023 号基金的支持。作者谨向 David Jekel 博士表示感谢，感谢他提出的许多宝贵意见并参与讨论；这些意见和讨论尤其促成了主要定理的简化。在本研究准备期间，作者还要感谢 Liran Rotem 教授给予的鼓励和富有洞见的评论。

参考文献

[1] *L. Ambrosio*、*N. Gigli*、*G. Savaré*，度量测度空间中的微积分与热流及其在具有*Ricci*下界的空间中的应用，《数学发明》*195*卷（*2014*年），*289–391*。[2] *D. Bakry*、*M. Émery*，超压缩扩散，《概率研讨班》*XIX*，*Lecture Notes in Math. 1123*，*Springer*，*1985*年，*177–206*。[3] *D. Bakry*、*I. Gentil*、*M. Ledoux*，《马尔可夫扩散算子的分析与几何》，*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 348*，*Springer*，*2014*年。[4] *J. Bertrand*、*M. Fathi*，$RCD(1,\infty)$空间中特征值与可观测直径的稳定性，*J. Geom. Anal. 32*（*2022*年），第*11*期，论文编号*270*。[5] *P. Biane*，自由超压缩性，《*Commun. Math. Phys.*》*184*卷（*1997*年），*457–474*。[6] *P. Biane*、*R. Speicher*，关于自由布朗运动的随机演算及*Wigner* 空间上的分析，*Probab. Theory Rel. Fields 112*（*1998*年），*373–409*。[7] *P. Biane*、*R. Speicher*，自由扩散、自由熵与自由 *Fisher* 信息，*Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 37*（*2001*年），第*5*期，*581–606*。[8] *P. Biane*，对数*Sobolev*不等式、矩阵模型与自由熵，*Acta Math. Sinica, English Series 19*（*2003*年），第*3*期，*497–506*。[9] *S. Bobkov*、*M. Ledoux*，从*Brunn–Minkowski*到*Brascamp–Lieb*再到对数 *Sobolev* 不等式，《几何与泛函分析》*10*卷（*2000*年），*1028–1052*。[10] *N. Boschert*、*E. Davis*、*P. Hiatt*，$L\mathbb{F}_n$的一类自由补冯·诺依曼子代数，*arXiv:2411.05136*。[11] *M. Bożejko*，q*–Ornstein–Uhlenbeck*半群的超压缩性与强*Sobolev*不等式（$-1 < q < 1$），*Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics 2*（*1999*年），*203–220*。[12] *H.J. Brascamp*、*E.H. Lieb*，*Brunn-Minkowski*定理与 *Prékopa-Leindler*定理的推广，包括对数凹函数的不等式及其在扩散方程中的应用，*Journal of Functional Analysis 22*，*366–389*。[13] *F. Cavalletti*、*A. Mondino*，具有里奇曲率下界的度量测度空间中的尖锐刚性等周不等式，《数学发明》*208*卷（*2017*年），*803–849*。[14] *I. Charlesworth*、*B. Nelson*，自由*Stein*不规则性与维数，《*J. Operator Theory*》*85:1*（*2021*年），*101–133*。[15] *J. Cheeger*，拉普拉斯算子最小特征值的下界，《分析中的问题》（献给*Salomon Bochner*的论文，*1969*年），*Princeton Univ. Press*，*1970*年，*195–199*。[16] *J. Cheeger*、*D. Gromoll*，非负*Ricci*曲率流形的分裂定理，*J. Differential Geom. 6*（*1971*年），*119–128*。[17] *S.-Y. Cheng*，特征值比较定理及其几何应用，*Math. Z. 143*（*1975*年），*289–297*。[18] *S.-Y. Cheng*、*D. Zhou*，完备度量测度空间上漂移拉普拉斯算子的特征值，*Commun. Contemp. Math.*，*19(1):1650001*，*17*，*2017*年。[19] *F. Cipriani*、*J.-L. Sauvageot*，作为狄利克雷型平方根的导子，*J. Funct. Anal. 201*（*2003*年），第*1*期，*78–120*。[20] *F. Cipriani*，非交换空间上的狄利克雷型，《量子位势论》，*Lecture Notes in Math. 1954*，*Springer*，柏林，*2008*年，*161–276*。[21] *T. Courtade*、*M. Fathi*，$\mathbb{R}^n$上*Bakry–Émery*定理的稳定性，*J. Funct. Anal. 279*（*2020*年），第*2*期，*108523*。[22] *E. B. Davies*，《热核与谱理论》，*Cambridge Tracts in Mathematics*，第*92*卷，*Cambridge University Press*，*1989*年。[23] *Y. Dabrowski*，关于在有限非微观态自由 *Fisher* 信息假设下证明非Γ 的注记，*J. Funct. Anal. 258*（*2010*年），第*11*期，*3662–3674*。[24] *Y. Dabrowski*，平稳自由随机微分方程的非交换路径空间方法，*arXiv:1006.4351v2*。[25] *Y. Dabrowski*，一个自由随机偏微分方程，*arXiv 1008.4742v2*。[26] *Y. Dabrowski*，一个自由随机偏微分方程，*Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 50 4, 1404 2014*年 *1455 ( ), no. –* 。[27] *Y. Dabrowski*、*A. Guionnet*、*D. Shlyakhtenko*，凸势的自由传输，*New Zealand J. Math. 52*（*2021*年），*259–359*。[28] *G. De Philippis*、*A. Figalli*，*Caffarelli*对数凹扰动定理的刚性与稳定性，*Nonlinear Anal. 154*（*2017*年），*59–70*。

[29] *C-P. Diez*，*Sobolev-Wigner*空间，*arXiv:2303.13487*。[30] *C-P. Diez*，自由*Stein*核、自由矩映射与高阶导数，*arXiv:2306.00967*。[31] *M. Fathi*、*B. Nelson*，自由*Stein*核及自由对数 *Sobolev* 不等式的改进，《*Adv. Math.*》*317*卷（*2017*年），*193–223*。[32] *J. Feldman*、*C. C. Moore*，遍历等价关系、上同调与冯·诺依曼代数，《*Trans. Amer. Math. Soc.*》*234*卷（*1977*年），第*2*期，*289–324*。[33] *L. Ge*，自由熵在有限冯·诺依曼代数中的应用，*II*，《数学年刊》（*2*）*147*（*1998*年），第*1*期，*143–157*。[34] *N. Gigli*、*C. Ketterer*、*K. Kuwada*、*S.-i. Ohta*，*RCD*(K,∞)空间上谱隙的刚性，《*Amer. J. Math.*》*142*卷（*2020*年），*1559–1594*。[35] *L. Gross*，对数*Sobolev*不等式，《*Amer. J. Math.*》*97*卷（*1975*年），*1061–1083*。[36] *W. Gangbo*、*D. Jekel*、*K. Nam*、*D. Shlyakhtenko*，自由概率中最优耦合的对偶性，《数学物理通讯》，第*396*卷，第*903–981*页，（*2022*年）。[37] *A. Guionnet*、*E. Maurel-Segala*，矩阵模型的组合方面，《*ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*》*1*卷（*2006*年），*241–279*。[38] *A. Guionnet*、*D. Shlyakhtenko*，具有严格凸相互作用的自由扩散与矩阵模型，《*Geom. Funct. Anal.*》*18*卷（*2008*年），第*6*期，*1875–1916*。[39] *A. Guionnet*、*D. Shlyakhtenko*，自由单调输运，*Invent. Maths*，第*197*卷，第*613–661*页，（*2014*年）。[40] *C. Houdayer*，自由积冯·诺依曼代数中的*Gamma*稳定性，《*Commun. Math. Phys.*》*336*卷，*831–851*（*2015*年）。[41] *A.Ioana*，融合自由积*II1 1, 71 4 48 2015*年 *130*因子的*Cartan* 子代数，*Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. ( ) ( ), no. –* 。[42] *A.Ioana*，冯·诺依曼代数导论，《算子代数模型论》，*De Gruyter*逻辑及其应用系列第*11*卷，*43-82*。*https://par.nsf.gov/servlets/purl/10530673*。[43] *H. Ito*， B值*Chebyshev*多项式与 B值半圆系统的自由庞加莱不等式，即将发表于《*Int. J. Math.*》。[44] *D. Jekel*，凸势自由熵理论的初等方法，《*Analysis & PDE*》*13.8*卷（*2020*年），第*2289-2374*页。[45] *D. Jekel*、*W. Li*、*D. Shlyakhtenko*，非交换变量的迹光滑函数与自由*Wasserstein*流形，《*Dissertationes Mathematicae*》*580*卷（*2022*年），*1-150*。[46] *D. Jekel*，自由概率中凸*Gibbs*律的条件期望、熵与输运，《*Inter Math. Research Notices*》*2022.6*：*4516-4619*。[47] *D. Jekel*、*W. Li*、*D. Shlyakhtenko*，迹非交换光滑函数与自由*Wasserstein*流形，《*Dissertationes Mathematicae*》*580*卷：*1-150*（*2022*年）。[48] *R. Kannan*、*L. Lovász*、*M. Simonovits*，凸体的等周不等式与整体几何，《*J. Funct. Anal.*》*22*卷（*1985*年），*247–273*。[49] *K. Kuwada*、*S.-i. Ohta*，加权流形上谱隙的刚性，*Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 64*（*2014*年），*2147–2168*。[50] *B. Klartag*，黎曼几何中的针分解，《*Mem. Amer. Math. Soc.*》*249*卷（*2017*年），第*1180*期，$v+77$。[51] *A. Lichnerowicz*，《变换群几何》，*Dunod*，巴黎，*1958*年。[52] *M. Ledoux*、*I. Popescu*，自由泛函不等式的质量输运证明与自由庞加莱不等式，《*J. Funct. Anal.*》*257*卷（*2009*年），*1175–1221*。[53] *Z.M. Ma*与*M Röckner*，《（非对称）狄利克雷型理论导论》，*Universitext*。*Springer*，柏林，*1992*年。[54] *T. Mai*，*Wigner*积分分布的正则性，*arXiv:1512.07593*。[55] *T. Mai*、*R. Speicher*、*M.Weber*，在满非微观态自由熵维数假设下代数关系与零因子的不存在性，《*Adv. Math.*》*304*卷（*2017*年），*1080–1107*。[56] *T. Mai*、*R. Speicher*，关于自由与循环微分演算的注记，《*J. Operator Theory*》*85*卷（*2021*年），第*1*期，*183–215*。[57] *E. Milman*，论凸性在等周问题、谱隙与集中中的作用，《*Invent. Math.*》*177*卷（*2009*年），*1–43*。[58] *B. Muckenhoupt*，带权的*Hardy*不等式，《*Studia Math.*》*44*卷（*1972*年），*31–38*。[59] *D. Nualart*，《*Malliavin*演算及相关主题》，第二版，*Springer*，*2006*年。[60] *F. J. Murray*与*J. von Neumann*，论算子环，*IV*。《数学年刊》（*2*），*44*，*1943*年。[61] *M. Obata*，黎曼流形与球面等距的若干条件，《*J. Math. Soc. Japan*》*14*卷（*1962*年），*333–340*。[62] *L. Payne*、*H. Weinberger*，凸区域的最优*Poincaré*不等式，《*Arch. Rational Mech. Anal.*》*5*卷（*1960*年），*286–292*。[63] *J. Peterson*，冯·诺依曼代数中的 L^2-刚性，《*Invent. math.*》*175*卷，*417–433*（*2009*年）。[64] *S. Popa*，与自由群相关的因子中的极大内射子代数，《*Adv. Math.*》*50*卷（*1983*年），*27-48*。[65] *M. Reed*、*B. Simon*，《现代数理物理方法 *IV*：算子分析》，*Academic Press*，*1978*年。[66] *J.-L. Sauvageot*，C^*-代数上的强*Feller*半群，《*J. Operator Theory*》*42*卷（*1999*年），*83–120*。[67] *B. Simon*，薛定谔半群，*Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 7*（*1982*年），第*3*期，*447–526*。[68] *J.A. Mingo*、*R. Speicher*，《自由概率与随机矩阵》，*Fields Institute*专著丛书，第*35*卷。

[69] *K.-T. Sturm*，《度量测度空间的几何 *I*》，《数学学报》*196 (2006*年*), 65–131.* [70] *K.-T. Sturm*，《度量测度空间的几何 *II*》，《数学学报》*196 (2006*年*), 133–177.* [71] *J. Lott, C. Villani*，《通过最优传输研究度量测度空间的里奇曲率》，《数学年刊》*169 (2009*年*), 903–991.* [72] *D. Voiculescu*，《随机矩阵与自由积的极限定律》，《数学发明》*104 (1991), no. 1, 201–220.* [73] *D. Voiculescu*，《自由随机变量：一种非交换概率方法，用于研究自由积及其在随机矩阵、算子代数和自由群上的调和分析中的应用》，*CRM* 专著丛书，第*1*卷，美国数学会，*1992*年. [74] *D. Voiculescu, K.Dykema, A. Nica*，《自由随机变量》，*CRM* 专著丛书，第*1*卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，*1992*年.[75] *D. Voiculescu*，《自由概率论中熵和费希尔信息量的类比 *I*》，《数学物理通讯》*155 (1993), 71-92.* [76] *D. Voiculescu*，《自由概率论中熵和费希尔信息量的类比 *II*》，《数学发明》*118 (1994), 411-440.* [77] *D. Voiculescu*，《自由概率论中熵和费希尔信息量的类比 *III*：*Cartan* 子代数的缺失》，《几何与泛函分析》*6 (1996), 172–199.* [78] *D. Voiculescu*，《自由概率论中熵和费希尔信息量的类比 *V*：非交换希尔伯特变换》，《数学发明》*132 (1998*年*), 189–227.* [79] *D. Voiculescu*，《自由概率论中熵和费希尔信息量的类比 *VI*：解放与互自由信息》，《数学进展》*146 (1999*年*), no. 2, 101–166.* [80] *D. Voiculescu*，《一个自由庞加莱不等式》，未发表手稿.[81] *AIM06*，美国数学研究所于*2006*年举办的“自由分析”研讨会提出的问题，*https://aimath.org/ WWN/freeanalysis/freeanalysis.pdf.* [82] *D.-V. Voiculescu*，《自由熵》，《伦敦数学会会报》*34 (2002), no. 3, 257–278.*