# 用于气动声学散射的时空伽辽金边界元法

Maks Groom[a],*, Beckett Zhou[a]

[a]丹尼尔·古根海姆航空航天工程学院，佐治亚理工学院，亚特兰大，佐治亚州，美国

arXiv:2603.05469v1 [math.NA] 5 Mar 2026

**摘要**

飞行器表面的声散射会对总体噪声级产生显著影响。本文提出一种时空 Galerkin 时域边界元法（TDBEM），相较于现有散射方法，在预测螺旋桨和旋翼等复杂气动声源的声散射与声屏蔽方面具有若干显著优势。时域方法能够高效模拟瞬态、旋转及宽带噪声源，而伽辽金格式稳健且无条件稳定，无需任何经调校的数值参数。Galerkin 方法的主要挑战，即数值上困难的双重时空积分，通过一种高效的基于分解的求积方法得以解决。我们给出三个具有解析解的算例以验证该方法并研究其数值特性，结果表明该方法对多种不同几何构型的散射与声屏蔽均具有极好的一致性。随后，我们将时域边界元法应用于后缘安装式螺旋桨算例，并将数值预测与实验测量进行对比。结果表明，在实际应用算例中，预测与测量的散射和声屏蔽具有良好的一致性。

关键词：气动声学散射、时域边界元法、螺旋桨噪声

## 1. 引言

飞行器噪声是许多飞机设计中一项重要考量，旨在减轻其对健康和环境的不利影响，并提高公众接受度 [1]。飞行器表面对气动声源产生的噪声造成的散射和声屏蔽，可能显著改变辐射噪声，进而影响飞机的整体噪声级。广泛使用的基于积分的声学类比方法通常无法捕捉这些效应 [2]。在某些情况下，若采用高保真可压缩计算流体力学（CFD）模拟，获得声学分辨的流场解，并在随后积分中纳入所有噪声源，则声学类比可以直接捕捉散射效应 [3]。然而，常规CFD模拟对声波动的分辨能力，受到数值伪影和计算资源限制的严重制约 [4]。此外，许多本质上无法分辨声波动的计算方法，包括不可压缩CFD [5], ，也常与声学类比结合用于噪声预测。因此，开发计算效率高的散射预测工具十分重要，以便在设计过程早期准确评估飞行器噪声。

*通讯作者。电子邮箱：mgroom@gatech.edu（M. Groom）。

纳入散射效应有多种途径：既可以直接在单次声传播计算中处理，也可以通过额外计算实现。基于网格的方法通过求解一组传播方程的微分形式（例如线化欧拉方程 [6] 和声学扰动方程 [7], ），并在散射表面上施加适当的边界条件，直接将散射效应纳入声传播过程。基于网格的方法能够准确捕捉复杂表面几何形状、声源表示和背景流动的影响。然而，这类方法需要计算成本高昂的体积离散化，在许多应用中可能难以承受。此外，为避免数值色散和耗散伪影 [9] ，这类方法还需要专门的数值格式 [8] ，且无法自动满足索末菲辐射条件 [10]。几何声学（GA）方法 [11]将声波近似为沿射线传播的粒子，并利用模型描述声波在平滑表面和尖锐边缘处的衍射。这种近似在形式上仅在高频极限下成立，在较低频率下精度会降低。虽然几何声学方法在高频散射问题上效率很高，但需要计算连接声源区和观察区的射线路径；对于运动声源或分布式声源，这可能颇具挑战。边界元法（BEM）和等效源法（ESM）求解波动方程在时域 [12, 13] 或频域 [14, 15]中的积分形式。它们通常作为独立计算步骤使用，以积分声类比计算得到的入射声场为输入，确定满足散射表面声学边界条件的散射声场。随后将散射场与入射场相加，得到包含散射效应的总声场。边界元法求解散射表面上未知的层势分布，而等效源法则用位于散射体内部的等效声源表示散射场。这种做法避免了计算含有奇异被积函数的积分，从而简化数值实现；但代价是对薄体和边缘附近的处理性能下降，需要针对不同几何形状调节额外的自由参数（包括声源位置），并依赖特设稳定化方法 [16]。

螺旋桨和旋翼是多种新兴推进技术中尤为重要的气动噪声源，包括分布式电推进系统 [17] 和开式转子发动机 [18]。对于许多散射预测方法而言，螺旋桨叶片可能尤其难以处理，因为它们会产生旋转、分布式的宽带噪声源，且低频成分显著。尤其是在早期设计分析中，时域边界元法 (TDBEM) 对于具有这些特征的声源具有多项优势。与频域方法不同，时域方法能够在一次计算中模拟宽带信号中的所有频率 [19]。它们还能够模拟瞬态或非周期问题，并可自然地与计算流体力学求解器提供的时域声源数据耦合。边界元法兼具处理复杂几何形状的稳健性，以及在中等频率下的准确性和计算效率。

尽管时域边界元法具有诸多优势，但实施方面的挑战限制了其广泛应用。其中一个主要难题是确保时间积分的稳定性 [20]。此前针对气动声学问题的时域边界元法采用了点配点离散策略 [12, 21], ，但在对应于散射体内部共振的临界频率附近，离散系统不唯一，因此会出现不稳定性，且散射体的几何

形状也会导致这一问题。配置法通常通过采用 Burton-Miller 重构过程 [22] 来实现稳定。然而，这种技术会引入一个数值耦合参数，必须对其进行选择，才能在保证稳定性的同时获得准确结果 [23, 24, 25, 26]。另一种方法是采用完整的时空 Galerkin 离散；研究表明，这种方法能够形成无条件稳定的公式 [27] ，并带来诸多数值和实际优势。首先，Galerkin 方法无需引入数值参数，也就不必像 Burton-Miller 重构那样，根据几何和声源特性调整参数。这对于将其用作预测工具至关重要，因为每种情形下解的特性都无法事先获知。与只能模拟封闭散射体的 Burton-Miller 配置法不同，时空 Galerkin 方法还可模拟不围成体积的薄散射表面；对于板状散射几何体，这有助于改善表示效果并缩小问题规模。此外，与配置法相比，Galerkin 方法具有能量范数下的准最佳逼近性质，因而在给定分辨率下往往能得到更准确的解 [28], ，并且可以较为直接地进行基于残差的后验误差估计 [29, 30]。目前，时空 Galerkin 方法在声散射问题中的实际应用，受到在空间和时间上进行二重积分所需的高昂成本与复杂性的限制。

本文基于 Ha-Duong [31]针对波动方程提出的数学表述，开发了一种用于气动声学散射问题的时空 Galerkin 时域边界元法。针对气动声学应用，我们通过变量变换引入平均背景流的影响。我们提出了一种高效的积分方法，通过仔细分解被积函数和积分区域，克服伽辽金双重积分带来的数值困难。我们通过研究三个反映真实飞机散射问题不同特征的测试案例，对该方法进行验证。我们将数值结果与解析解进行比较，并研究了该方法的一些数值特性。最后，我们应用时域边界元法评估后缘安装螺旋桨构型中的散射和声屏蔽，展示了该方法成功耦合 CFD 声源数据，对实际案例进行数值模拟。

## 2. 理论

### *2.1.* 控制方程

稳态无旋背景流中声波的传播由线性化势波动方程 [32]描述：

$$\frac{D_0}{Dt}\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{D_0\phi}{Dt}\right) - \frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot(\rho_0\nabla\phi) = S(x,t), \tag{1}$$

其中， $\phi$为声势，$S$为声源分布，$D_0/Dt = \partial/\partial t + u\cdot\nabla$为线性化物质导数，$u$ 为背景流速度， $\rho_0$ 为背景密度，$c_0$ 为声速。声

势与声压和声速度的关系为：

$$p = -\rho_0 \frac{D_0 \phi}{Dt}, \tag{2a}$$

$$v = \nabla \phi. \tag{2b}$$

令 $\phi_i$ 表示入射声场，它满足方程（1），且已知（例如，由初始声学计算得出或以解析表达式给出）。散射求解器的目标是计算未知散射场 $\phi_s$，使总声场 $\phi = \phi_i + \phi_s$ 满足方程（1），并同时满足散射表面上的声硬边界条件，以表征散射体的不可穿透性。因此，散射场是方程（1）的齐次（$S = 0$）解，其边界条件残差在所有时刻都恰好抵消 $\phi_i$ 的边界条件残差。

在对背景流作出适当简化假设后，变量变换（$x$，$t$，$\phi$，$S$）$\rightarrow$（$\tilde{x}$，$\tilde{t}$，$\tilde{\phi}$，$\tilde{S}$）可以将方程（1）精确或近似地变换为标准波动方程（无量纲化后满足 $\tilde{c}_0 = 1$）：

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{t}^2} - \nabla_{\tilde{x}}^2 \tilde{\phi} = \tilde{S}(\tilde{x}, \tilde{t}), \tag{3}$$

$\tilde{}$其中（$\cdot$）表示变换变量。这类变量变换包括适用于均匀背景流的 Prandtl-Glauert-Lorentz（PGL）变换 [33]，以及适用于低马赫数非均匀背景流的 Taylor变换 [34]，，还包括各种扩展和组合形式 [35, 36]。散射表面上的不可穿透条件要求背景流分量和声流分量的表面法向速度均为零。对于一般散射体周围的非均匀背景流，这一条件可以精确满足，因此声学边界条件要求声势梯度在表面法向方向上的分量为零。对于均匀背景流以及具有有限厚度的散射体，背景流必须违反不可穿透条件。Hu等人（2019） [33], 指出，正确的声学边界条件要求穿过表面的零能量通量（ZEF）；当表面平行于背景流方向时，该条件可化简为法向速度为零边界条件。值得注意的是，应用PGL变换后，ZEF边界条件等价于要求法向声势梯度为零。因此，这两类变量变换在变换变量中得到相同的声学边界条件：

$$\hat{n} \cdot \tilde{v} = \hat{n} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\phi} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} = 0, \tag{4}$$

其中，$\hat{}n$表示（变换后的）散射表面上的单位法向量。因此，我们可以简化原散射问题的表述，求得 $\tilde{\phi}_s$，使得 $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_i + \tilde{\phi}_s$ 满足方程（3）和（4）。此外，我们在为每个散射问题选择最合适的背景流近似时拥有很大的自由度，且无需付出大量实现工作。由于流动效应完全包含在变换（$\cdot$）中，所有可用这些类别的背景流近似的问题，都可以通过一种统一的算法方法求解其变换后的问题。

*2.2.* 边界积分表述

现在，我们推导一个边界积分方程，以求得变换变量中的散射场。为使记号清晰，我们省略变换变量上的（·）。令 $\Gamma$ 表示一个有界、可定向的散射表面，该表面不一定围成一个体积。由于假设 $\phi_i$ 已知，散射场 $\phi_s$ 满足以下 Neumann问题：

$$\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi_s = 0,\ t \in [0, T], \tag{5a}$$

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_i}{\partial n} = g,\ x \in \Gamma, \tag{5b}$$

$$\phi_s = 0,\ t = 0, \tag{5c}$$

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t} = 0,\ t = 0, \tag{5d}$$

其中，式 (5c) 和 (5d) 是为保证唯一性而施加的初始条件。式 (5a) 的自由空间格林函数为：

$$G(x, y, t, \tau) = \frac{\delta\left(t - \tau - |x - y|\right)}{4\pi |x - y|}, \tag{6}$$

其中，$\delta$ 是狄拉克δ函数。我们在 $\Gamma$、$\sigma = [\partial \phi_s / \partial n]$和 $\psi = [\phi_s]$上定义单层和双层势分布，其中 $[\cdot]$ 表示沿法向量方向跨越 $\Gamma$ 的跳跃。借助初始条件，我们可以通过以下表示公式，用未知层势 $\sigma$ 和 $\psi$ 来定义 $\phi_s$：

$$\phi_s(x, t) = \int_0^t \int_\Gamma \frac{\partial G(x, y, t, \tau)}{\partial n_y} \psi(y, \tau) - G(x, y, t, \tau) \sigma(y, \tau)\, dy d\tau. \tag{7}$$

若允许 $\Gamma$ 表示不包围体积的薄几何体，则声学边界条件必须允许同时作用于其上、下两侧，因此，表面两侧的法向声势梯度跳跃为零。因此，我们设定 $\sigma = 0$。对式 (7) 求导，可得到 Neumann问题的第一类边界积分方程：

$$\int_0^t \int_\Gamma \frac{\partial^2 G}{\partial n_x \partial n_y} \psi(y, \tau)\, dy d\tau = \frac{\partial}{\partial n_x} \phi_s(x, t) = g(x, t), \tag{8}$$

对于$x \in \Gamma$。求解双层势分布 $\psi$ 后，散射场 $\phi_s$ 由表示公式（7）给出，其中 $\sigma = 0$。Bamberger 和 Ha-Duong [27]得到方程（8）的以下弱形式：

$$\begin{aligned} a(\psi, \eta) &= f(\eta), \\ a(\psi, \eta) &= \int_0^T \int_0^t \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\partial^2 G}{\partial n_x \partial n_y} \psi(y, \tau) \dot{\eta}(x, t)\, dy dx d\tau dt, \\ f(\eta) &= \int_0^T \int_\Gamma g(x, t) \dot{\eta}(x, t)\, dx dt, \end{aligned} \tag{9}$$

对于属于适当函数空间的检验函数与试探函数 [27]，其中 $\dot{(\cdot)}$ 表示时间求导。该弱形式具有强制性，由此得到的 Galerkin离散无条件稳定 [27, 31]。

双线性型包含超奇异被积函数，但可按如下方式计算 [31, 37]:

$$a(\psi,\eta)=\frac{1}{4\pi}\int_0^T\int_{\Gamma\times\Gamma}\left(\frac{n_x\cdot n_y}{|x-y|}\dot{\psi}(y,t-|x-y|)\ddot{\eta}(x,t)-\frac{\mathrm{curl}_\Gamma\,\psi(y,t-|x-y|)\cdot\mathrm{curl}_\Gamma\,\dot{\eta}(x,t)}{|x-y|}\right)dydxdt, \tag{10}$$

其中 $\mathrm{curl}_\Gamma$ 是切向旋度算子。

### *2.3.* 离散化

我们用三角剖分 $\Gamma^h$ 近似散射表面 $\Gamma$，该剖分由互不重叠的三角形单元$\Gamma_i$组成。我们对区间 $[0,T]$ 进行均匀时间离散化，时间步为 $t_k=k\Delta t$，其中 $\Delta t=T/N_t$是时间步长。为表示双层势，我们在空间和时间上均采用经典的分片线性基函数 $P^1$ 空间，这是满足所需正则性的最低阶函数类。离散化后的双层势 $\psi^h$ 可表示为每个时间步上 $\Gamma^h$ 各节点处的取值:

$$\psi^h(x,t)=\sum_{i=1}^{N_s}\sum_{k=1}^{N_t}\psi_{ik}\alpha_i(x)\beta_k(t),\ x\in\Gamma^h,\ t\in[0,T], \tag{11}$$

其中，$\alpha_i\in P^1(\Gamma^h)$为空间基函数，$\beta_k\in P^1(\{t_n\})$为时间基函数，$N_s$ 为节点数，$N_t$ 为时间步数，系数 $\psi_{ik}$ 表示节点 $i$ 在时间 $t_k$处的双层势。我们注意到，对于不包围体积的薄表面，其边缘处的声场无法在散射表面上维持不连续。因此，三角剖分边界上的节点处双层势设为零。这有助于确保数值稳定性并减小问题规模。

按照 Ha-Duong [31], 的做法，我们选择检验函数 $\dot{\eta}^h=\alpha_i(x)\chi_k(t)$，其中 $\chi_k$ 是支撑在$(t_{k-1},t_k]$上的常函数。将 $\psi^h$ 和 $\dot{\eta}^h$ 代入式（9），得到线性方程组:

$$K_{ijkl}\cdot\psi_{ik}=f_{jl}, \tag{12a}$$

$$K_{ijkl}=\frac{1}{4\pi}\int_0^T\int_{\Gamma^h\times\Gamma^h}\left(\frac{n_x\cdot n_y}{|x-y|}\alpha_i(y)\alpha_j(x)\dot{\beta}_k(t-|x-y|)\dot{\chi}_l(t)\right. \tag{12b}$$

$$\left.-\frac{\mathrm{curl}_\Gamma\,\alpha_i(y)\cdot\mathrm{curl}_\Gamma\,\alpha_j(x)}{|x-y|}\beta_k(t-|x-y|)\chi_l(t)\right)dydxdt,$$

$$f_{jl}=\int_0^T\int_{\Gamma^h}g(x,t)\alpha_j(x)\chi_l(t)\,dxdt. \tag{12c}$$

影响矩阵系数 $K_{ijkl}$仅当 $t-|x-y|\in(t_{k-1},t_{k+1})$ 对于$t\in(t_{l-1},t_l]$, $x\in\mathrm{supp}(\alpha_j)$，且$y\in\mathrm{supp}(\alpha_i)$时才非零。我们定义:

$$d_{ij}=\min\{|x-y|:x\in\mathrm{supp}(\alpha_j),y\in\mathrm{supp}(\alpha_i)\}, \tag{13a}$$

$$D_{ij}=\max\{|x-y|:x\in\mathrm{supp}(\alpha_j),y\in\mathrm{supp}(\alpha_i)\}. \tag{13b}$$

那么，当 $t_l-t_k\in(d_{ij}-\Delta t,D_{ij}+2\Delta t)$ 时，系数非零。由于假设散射体是有限的，$D_{ij}$有界，因此存在 $N_b\in\mathbb{N}$，使得当 $l-k>N_b$ 时，$K_{ijkl}=0$。重要的是，系数也并不

直接取决于 $k$ 和 $l$，而只取决于二者之间的差异。因此，式（12a）可改写为：

$$\sum_{m=0}^{N_b} K_{ij}^m \psi_{i,l-m} = f_{jl},\ K_{ij}^m = K_{ij,1,1+m}. \tag{14}$$

这便得到一种时间推进（MOT）算法：

$$K_{ij}^0 \psi_{il} = f_{jl} - \sum_{m=1}^{N_b} K_{ij}^m \psi_{i,l-m},\ l = 1, \ldots, N_t. \tag{15}$$

对于长时间模拟，必须计算的矩阵系数数量较少，且与模拟时长无关；MOT格式在每个时间步仅需重复求解一个相对较小的$N_s \times N_s$ 线性方程组。

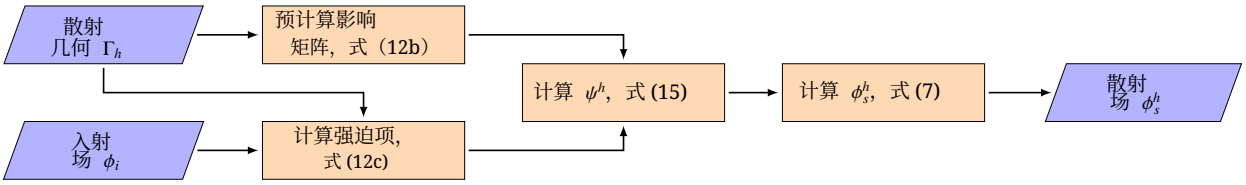



图1：流程图展示了由散射几何和入射场计算散射声场的过程。入射场通过与另一求解器耦合提供（例如，采用基于积分的声学类比的计算流体力学），或作为解析表达式给出。

Neumann问题式(5)的完整数值解过程总结于图1。影响矩阵直接由散射几何计算，因此可以预先计算。强迫项$f_{jl}$由入射场和散射几何求得。双层势 $\psi^h$ 利用影响矩阵和强迫项，通过MOT算法计算。最后，散射场由双层势经表示公式得到。这三个步骤既可以依次执行，也可以合并为单一时间推进算法以累积散射场。

所需的空间和时间分辨率不受稳定性要求的限制；但为避免信息损失，由于奈奎斯特采样极限，节点间距和时间步必须分别小于最高可分辨频率对应波长和周期的一半。节点间距与时间步可通过CFL参数相关联：

$$\mathrm{CFL} = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \tag{16}$$

通常需要满足因果性，即库朗数 $\leq 1$；尽管库朗数 $> 1$ 仍然稳定。对于单元尺寸近似均匀的表面网格，节点间距可估算为 $\Delta x \approx \sqrt{2A}$，其中 $A$ 为平均单元面积。

### *2.4.* 数值挑战

主要的数值难点在于计算双重时空积分，以求得影响矩阵系数。具体而言，被积函数包含多种不同的奇异性，这会降低标准

求积公式的精度。我们定义：

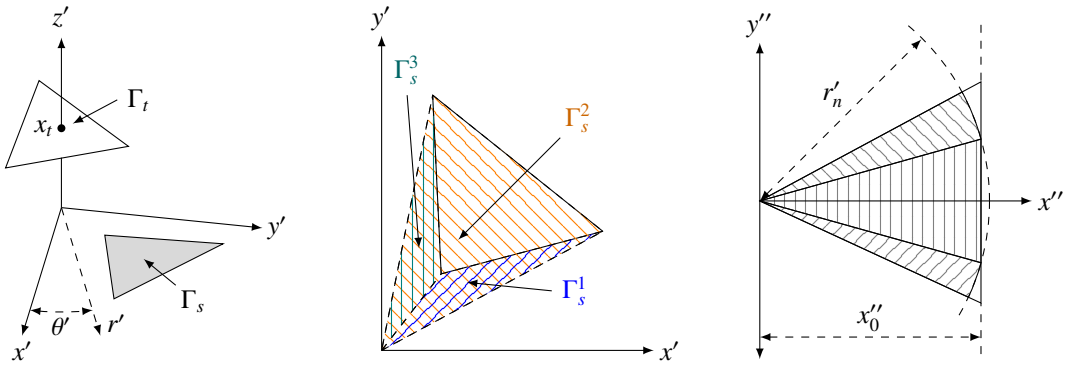
$$f_1^m(R) = \int_0^T \dot{\beta}_1(t-R)\dot{\chi}_{1+m}(t)\,dt, \tag{17a}$$

$$f_2^m(R) = \int_0^T \beta_1(t-R)\chi_{1+m}(t)\,dt, \tag{17b}$$

其中，$\beta_k(t)$ 和 $\chi_k(t)$ 分别是试函数和检验函数的时间基函数。函数 $f_1^m$和 $f_{m2}$ 是分段多项式，在 $R = n\Delta t$ 处具有间断点或导数间断点，其中 $n \in [m-2,\ m+1]$。通过交换积分次序，可以重写影响矩阵系数：

$$K_{ij}^m = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma^h\times\Gamma^h}\left(\frac{n_x\cdot n_y}{|x-y|}\alpha_i(y)\alpha_j(x)f_1^m(|x-y|) - \frac{\mathrm{curl}_\Gamma\,\alpha_i(y)\cdot\mathrm{curl}_\Gamma\,\alpha_j(x)}{|x-y|}f_2^m(|x-y|)\right)dydx. \tag{18}$$

显然存在两类奇异性：由格林函数导致的 $O(|x-y|^{-1})$ 奇异性，以及由 $f_1^m$和 $f_{m2}$ 的间断性导致的光锥奇异性，出现在 $|x-y| = n\Delta t$ 处。基于 Aimi 等人 [37], 此前的研究，我们采用迭代方法，依次计算内层和外层空间积分，从而能够围绕奇异性对积分区域进行几何分解。




（a）内层积分的坐标　（b）将 $\Gamma_s$ 分解为组成三角形　（c）组成三角形分解

图2：内层空间积分的几何：（a）局部笛卡尔坐标系（$x'$，$y'$，$z'$）和柱坐标系（$r'$，$\theta'$，$z'$）的定义；（b）将 $\Gamma_s$ 分解为三个顶点位于原点的组成三角形；（c）将由一个组成三角形与圆相交形成的区域分解为扇形区域和三角形区域。

矩阵系数 $K_{ij}^m$ 由与节点 i 和 j 相关的三角形对上的积分组装而成。因此，我们重点考察一组三角形 $\Gamma_s \in \mathrm{supp}(\alpha_i)$ 和 $\Gamma_t \in \mathrm{supp}(\alpha_j)$ 上的积分。为定义内层积分，固定一个目标点 $x_t \in \Gamma_t$。我们引入局部笛卡尔坐标系 (x′, y′, z′)，使 x′y′ 平面与三角形 $\Gamma_s$ 所在平面重合，且原点位于目标点的投影处，如图 2a 所示。定义 $r' = \sqrt{x'^2+y'^2}$ 和 $\theta' = \arctan(y'/x')$。这些变量便于进行内层积分，因为 $|x-y| = \sqrt{r'^2+z'^2}$，所以变换到柱坐标 $(r', \theta', z')$ 时的雅可比行列式会解析地抵消原点处的 $O(|x-y|^{-1})$ 奇异性，而函数 f m1 和 $f_2^m$与 $\theta'$ 无关。因此，光锥奇异性出现在 r′ 中积分限固定的位置。用柱坐标表示的被积函数

现在在由 $\Gamma_s$ 与由连续光锥边界定义的环域 $r'_n = \sqrt{n^2\Delta t^2 - z'^2}$ 相交所得的子域上是正则的，不过一般情况下这些子域的形状~~较为复杂。~~

为简化子域，我们注意到，相邻光锥边界之间的环形区域是两个圆形区域之差，并且 $\Gamma_s$ 可分解为三个组成三角形的并集或差集，每个三角形都有一个顶点位于原点（见图2b），从而使 $\theta'$中的积分限为常数。随后，内层积分可表示为若干常规积分之和，这些积分定义在组成三角形与半径为$r'_n$的圆的交集所形成的区域上。令 $(x'', y'', z')$ 和 $(r', \theta'', z')$ 分别表示坐标系 $(x', y', z')$ 和 $(r', \theta', z')$ 经平面内旋转后的坐标系，使组成三角形中与原点相对的边平行于$y''$轴。如图2c所示，组成三角形与半径为$r'_n$ 的圆的交集通常是两个扇形区域与一个三角形的并集，它们都简单易于定义。

现有积分策略使用二维求积规则计算常规积分，其形式为：

$$I_P = \int_{\theta''_{min}}^{\theta''_{max}} \int_0^{r'(\theta)} P(R(r))\alpha_j(r,\theta)\frac{r}{R(r)}\,dr d\theta, \tag{19}$$

其中，对于扇形，$r'(\theta'') = r'_n$；对于三角形，$x''_0/\cos(\theta'')$；$R(r) = \sqrt{r^2 + z'^2}$，而$P(R)$是一个多项式。空间基函数$\alpha_j$ 可用这些坐标表示为：

$$\alpha_j(r', \theta'') = c_1 + r'(c_2\cos(\theta'') + c_3\sin(\theta'')). \tag{20}$$

为了降低对内层积分应用二维求积规则的计算成本（这些积分随后还必须在 $\Gamma_t$上再次积分），我们引入额外的分解，并对式（19）进行解析积分，从而得到一维数值积分。注意，$P(R)$可分解为包含$R$整数次幂的单项式项。因此，我们关注以下二维积分：

$$I^c_\alpha = \int_{\theta''_{min}}^{\theta''_{max}} I_{\alpha,1}(r'(\theta), z')\,d\theta, \tag{21a}$$

$$I^{x''}_\alpha = \int_{\theta''_{min}}^{\theta''_{max}} I_{\alpha,2}(r'(\theta), z')\cos\theta\,d\theta, \tag{21b}$$

$$I^{y''}_\alpha = \int_{\theta''_{min}}^{\theta''_{max}} I_{\alpha,2}(r'(\theta), z')\sin\theta\,d\theta, \tag{21c}$$

其中：

$$I_{\alpha,\beta}(r,z) = \int_0^r \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \rho^\beta\,d\rho. \tag{22}$$

这些是具有简单精确表达式的标准积分（见附录 A）。对于我们所选的时间基函数，我们针对参数范围 $\alpha = -1$、0、1 以及 $\beta = 1$、2 实现了精确表达式。对于扇形子域，径向积分与角向积分可分离，式 (21) 中的全部二维积分均可轻易精确求得。对于三角形子域，式 (21) 的精确表达式同样可以获得 [38, 39]。然而，除非需要极高的精度，精确积分的数值稳定性较差，且求值成本高于采用数值求积 [39]。因此，我们使用一维高斯-勒让德求积规则来进行角向

在三角形子域上的积分。与依赖二维求积方案的现有方法相比，精确的径向积分以及相应的求积维数约化大幅降低了计算成本。

随后采用标准高斯求积方案（例如 Dunavant [40]提供的方案）计算关于 $\Gamma_t$ 的外层空间积分。尽管 [41], 外层被积函数并非完全光滑，但其正则性足以保证良好的收敛，无需采用专门的求积策略。

为计算通过表示公式由层势得到的散射场，也采用了针对内层空间积分所开发的基于分解的求积策略。将 $\psi^h$ 代入式（7），我们得到：

$$\phi_s^h(x,t) = \sum_{i=1}^{N_s}\sum_{k=1}^{N_t} \frac{\psi_{ik}}{4\pi} \int_{\Gamma^h} \frac{\hat{n}_y \cdot (x-y)}{|x-y|} \left( \frac{\beta_k(t-|x-y|)}{|x-y|^2} + \frac{\dot{\beta}_k(t-|x-y|)}{|x-y|} \right) \alpha_i(y)\, dy. \tag{23}$$

时间基函数 $\beta_k(t)$ 是分段多项式，其导数也是如此，因此在 $|x-y| = t - n\Delta t$ 处会产生光锥奇异性，其中 $n \in [k-1,\ k+1]$。对于每个 $\Gamma_i \in \Gamma^h$，在局部柱坐标（$r', \theta', z'$）中，$\hat{n}_y \cdot (x-y) = z'$，且与 $r'$ 和 $\theta'$无关。因此，每个 $\Gamma_i$ 上的积分都可以写成式（21）中各积分的组合，所用的几何和代数分解与上文针对Galerkin内层积分所述的相同。

## 3. 验证结果

为验证时域边界元法的公式和实现，我们考虑了三个具有代表性特征的测试案例，这些特征反映了现实中的气动声学散射问题，并将数值预测结果与解析参考解进行比较。测试案例的主要特征汇总于表 1。

表 1：验证案例的几何、流动和声源属性汇总。

| Case | 几何特征 | 背景流 | 声源类型 |
|---|---|---|---|
| 球体 | 光滑曲率，封闭物体 | None | 谐波，宽带 |
| Disk | 平坦表面，尖锐边缘 | None | 谐波 |
| 平面 | 平坦表面 | 均匀 | 瞬态 |

在这三种情况下，我们考虑均匀介质，并定义无量纲坐标，使得 $\rho_0 = 1$以及 $c_0 = 1$。我们规定由单极点源产生的入射场，其解析表达式为 [42]:

$$\phi_i(x,t) = -\frac{Q(t-R)}{4\pi R^*}, \tag{24}$$

其中 $R = (R^* - |x-y|M_r)/\beta^2$, $R^* = |x-y|\sqrt{M_r^2+\beta^2}$, $M_r = M_\infty \cdot (x-y)/|x-y|$, $\beta^2 = 1 - |M_\infty|^2$, $M_\infty$ 为均匀自由来流马赫矢量，$y$ 为单极源位置，而$Q$ 为单极源强度函数。

### *3.1.* 球体

第一个验证案例是在静止介质中球体的声散射。该案例代表一个平滑弯曲、包围一定体积的有限散射表面。由于背景流处于静止状态，因此不应用变量变换。几何由一个以原点为中心、半径为$a$ 的球体构成；点声源沿正$x$轴放置在距离原点 $2a$ 处，观察者则位于以原点为中心、半径为 $5a$ 的圆形阵列上（见图 3）。除非另有说明，球体采用 5120 个面和 2562 个节点进行离散化，计算所用的库朗数为 $= 0.5$。

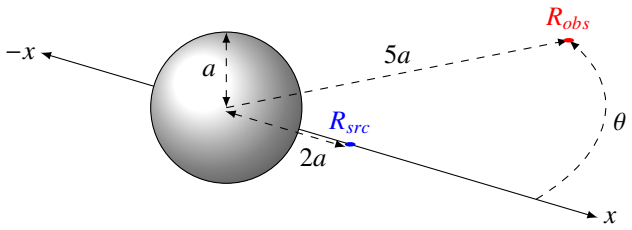



图 3：球体几何结构，显示声源（蓝点，$R_{src}$）和观察者（红点，$R_{obs}$）的位置。

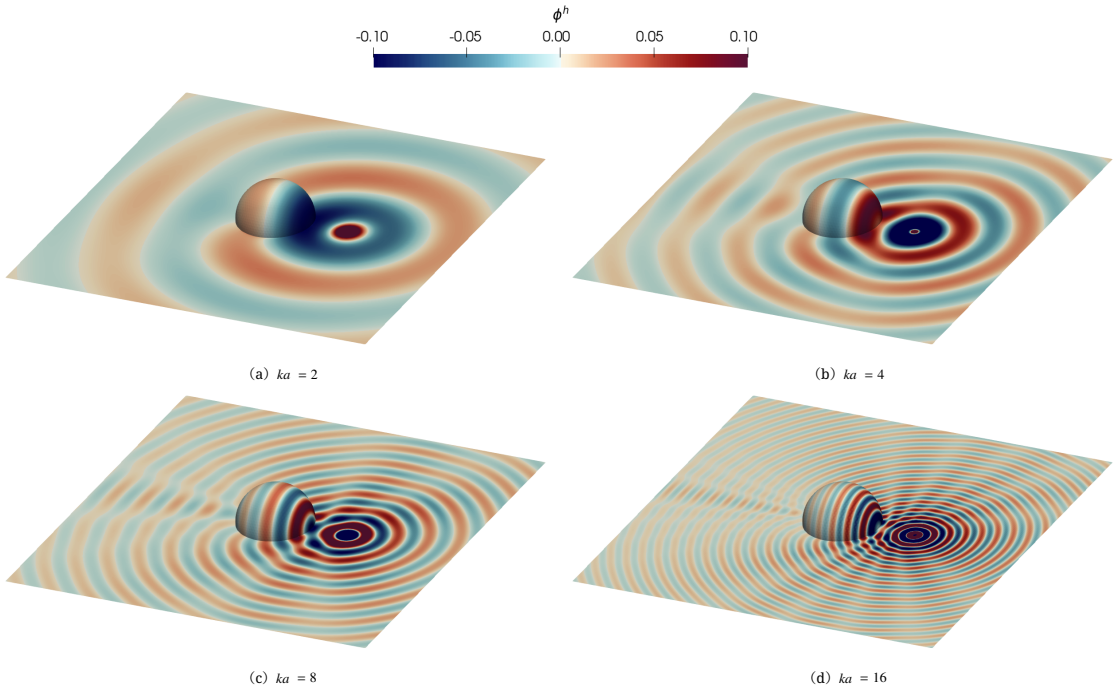



图4：球体散射的简谐点源声场预测可视化图，展示了选定频率下的结果：（a）$ka = 2$；（b）$ka = 4$；（c）$ka = 8$；（d）$ka = 16$。图中展示了无量纲时间$t = 50$时的瞬时声势。

我们首先考虑频率恒定的简谐激励，对应于$Q(t) = -\cos(kt)$。Bowman 等人 [43]给出了该问题的解析解。由于数值解以静止的

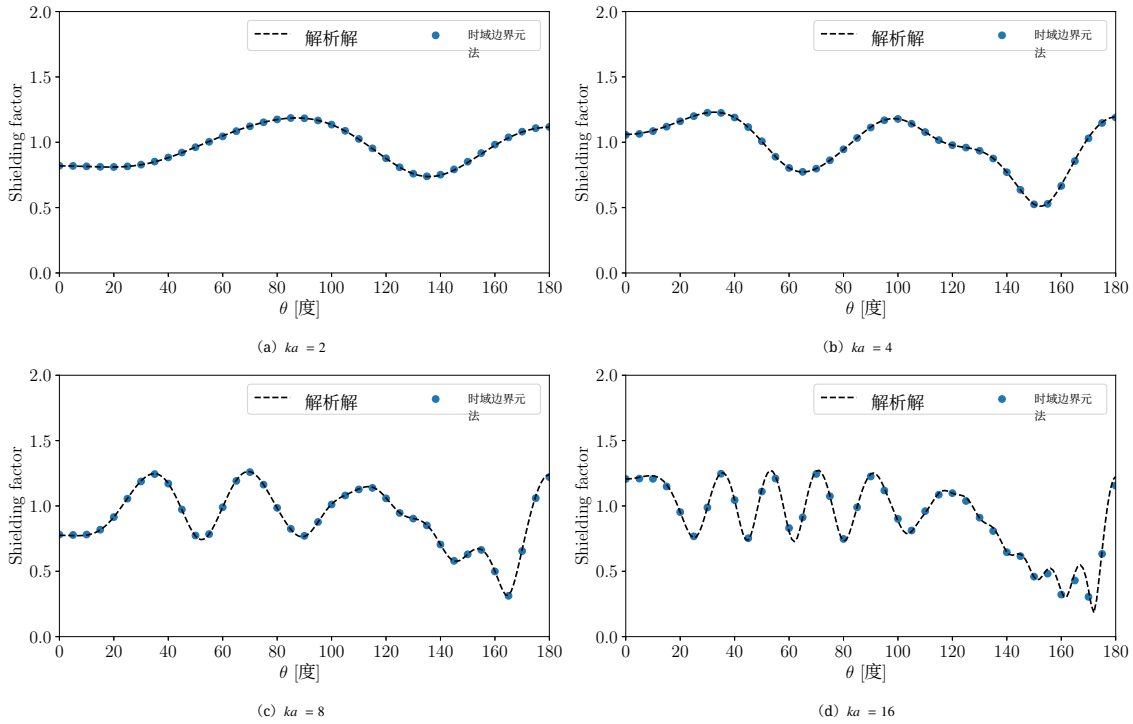



图5：在选定频率下，球体对简谐点源的散射所对应的预测屏蔽因子与解析解的比较：（a）$ka = 2$；（b）$ka = 4$；（c）$ka = 8$；（d）$ka = 16$。

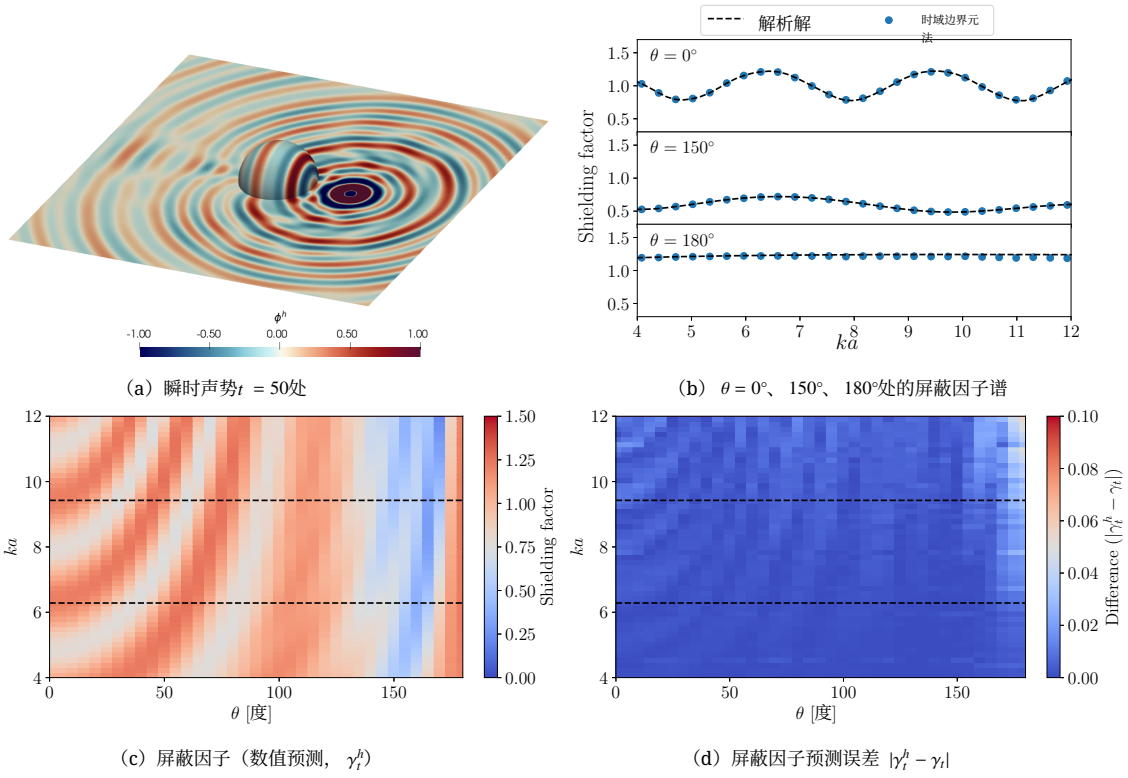
初始条件为起点，因此数值数据是在模拟开始很久之后收集的，此时初始瞬态效应已从区域的相关部分消退。图 4 展示了$ka = 2$、4、8、16 时简谐激励下的声势分布 $\phi^h$，包括球面和$x \in [-5, 5]$、$y \in [-5, 5]$观测平面上的分布。可视化结果显示，随着频率升高，散射体的影响增强，总场也变得更加复杂。

为评估散射效应，我们计算屏蔽因子 $\gamma_t$，即总场与入射场振幅之比：

$$\gamma_t = \frac{\phi_{rms}}{\phi_{i,rms}}, \tag{25}$$

其中 $(\cdot)_{rms}$ 表示均方根。图 5 对比了圆形观测阵列上计算得到的屏蔽因子指向性与$ka = 2$为 4、8、16 时的解析解。在所有频率和极角下，预测的屏蔽因子与解析解都高度吻合。低频时，两种解基本重合；随着频率升高，由于波长和周期相对于固定的空间分辨率和时间分辨率逐渐减小，数值误差开始显现。

为验证该散射方法对宽带信号的性能，我们采用带限白噪声激励。在频域中，通过为范围 $[k_{min}, k_{max}]$ 内的傅里叶系数赋予均匀振幅和随机相位来合成信号。随后，对信号应用傅里叶逆变换，得到时域源强。为构建解析解，我们采用 Bowman 等人提供的谐波解 [43]



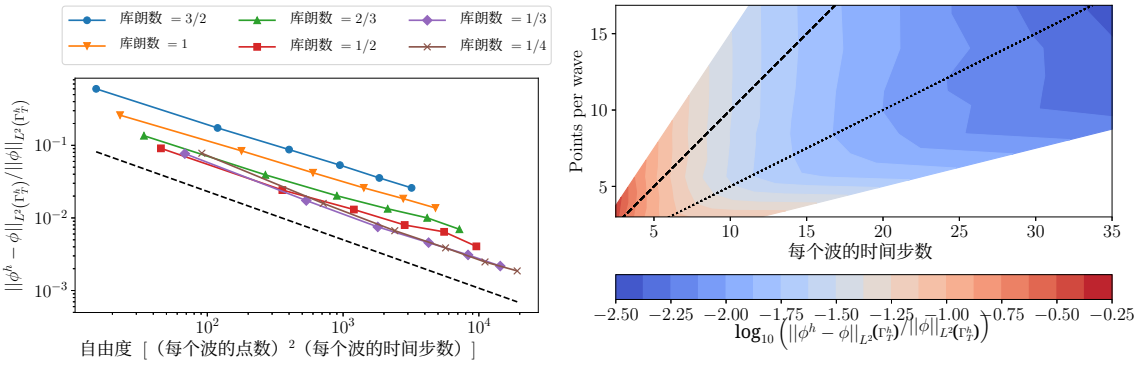

（a）瞬时声势$t$ = 50处　　（b） $\theta = 0°$、 150°、 180°处的屏蔽因子谱

（c）屏蔽因子（数值预测， $\gamma_t^h$）　　（d）屏蔽因子预测误差 $|\gamma_t^h - \gamma_t|$

图 6：宽带点声源经球体散射的预测结果与解析解对比：（a）无量纲时间 $t$ = 50 时，球面和观测平面上预测声势的可视化；（b）选定极角下预测与解析的屏蔽因子谱对比；（c）圆形观测阵列上预测屏蔽因子的谱图；（d）圆形观测阵列上的屏蔽因子预测误差 $|\gamma_t^h - \gamma_t|$ 的谱图。

在每个频率处计算该解，并乘以相应的傅里叶系数。图 6a 展示了波数介于$k_{min}a$ = 4 和$k_{max}a$ = 12 之间的带限信号所对应的预测声场。随后，在图 6b 中，对圆形观测阵列上选定极角处的预测屏蔽因子谱与解析解进行比较，二者吻合度很高。图 6c 和 6d 分别以谱图形式展示了整个观测阵列上的预测屏蔽因子和预测误差。所有频率和极角处的预测误差都很小，但在泊松亮斑 = $n\pi$附近（即障碍物正后方）明显增大。该区域的屏蔽因子误差增大，是因为散射场（其中包含预测误差）的幅值相较于入射场幅值较大，而非这些角度下散射场本身的预测精度较低。由于分辨率固定，误差还会随频率升高而增大。图 6c 和 6d 中的水平虚线表示临界频率 $ka$ = $n\pi$，这些频率与内部共振有关；内部共振会导致不稳定性，因此点配置时域边界元法和等效源法需要进行稳定化。本文方法能够模拟这些临界频率，且不会出现不稳定性或预测误差增大的情况。

最后，为了在为研究分辨率要求和收敛性质，我们进行网格加密研究，　　t




（a）固定库朗数下的空间与时间联合加密　　（b）空间与时间分别加密

图 7：$ka = 8$ 时球体散射的网格加密研究：（a）固定库朗数下的收敛情况，显示空间和时间均为二阶收敛；（b）空间与时间分别加密时的收敛情况，其中固定库朗数 $= 1$ 和库朗数 $= 0.5$ 分别用虚线和点线突出显示。

在多个网格上考察谐波频率 $ka = 8$，网格规模从 320 个面和 162 个节点到 11520 个面和 5762 个节点不等，并采用不同的库朗数参数。误差通过计算散射表面 $\Gamma^h$ 上瞬时声势误差 $\phi^h - \phi$ 在模拟时间 $t \in [t_{min}$至$T]$ 的无瞬态部分上的 $L^2$ 范数来衡量。空间和时间分辨率分别以每个波长 $\lambda$ 和周期$T_P$ 内的点数（$\lambda/\Delta x$）和时间步数（$T_P/\Delta t$）来衡量。图 7a 展示了固定库朗数下空间和时间的二阶收敛率，其中相对误差以用于描述层势的时空自由度（DOF）的相对数量为横轴绘制（定义为自由度 =(每波点数)²(每波时间步数)）。空间和时间上的理论二阶收敛率，即 $\Delta x$ 和 $\Delta t$，对应于 $\mathrm{DOF}^{-2/3}$ 参考线；该参考线与所有库朗数下观测到的收敛率都高度吻合。为探究库朗数参数的影响，图 7b 以等值线图呈现了分别进行空间和时间细化时的误差。误差等值线呈现出鲜明的“L”形，充分支持在库朗数为 $\approx 0.5$ 时同时进行空间和时间细化。对于固定的空间或时间分辨率，分别进行时间或空间细化时，误差会迅速下降，趋近库朗数为 $\approx 0.5$ 时的误差；继续细化后，误差则趋于停滞。这表明，当库朗数为 $\gg 0.5$ 时，总误差主要由时间误差决定；当库朗数为 $\ll 0.5$ 时，则主要由空间误差决定。库朗数值不会影响稳定性，并且在库朗数为 $> 1$时未观察到收敛行为发生变化。

### *3.2.* 圆盘

第二个验证案例是静止介质中圆形圆盘的声散射。该案例代表具有尖锐边缘的平坦有限散射表面。我们将圆盘表示为不包围任何体积的薄表面，并采用单层单元。对于适用的案例，使用单层单元表示薄表面的能力十分重要，因为这能大幅减小计算问题的规模。由于背景流处于

静止状态，因此不应用变量变换。散射体是一个半径为$a$ 的圆盘，其中心位于原点，且法线方向与$x$轴平行。点声源位于$a$ 的两倍半径处，沿$x$轴正方向分布；观察者则位于以原点为中心、半径为$a$ 的五倍处，组成圆形阵列（见图8）。圆盘离散为2400个面和1261个节点，计算在库朗数 = 0.5 下进行。

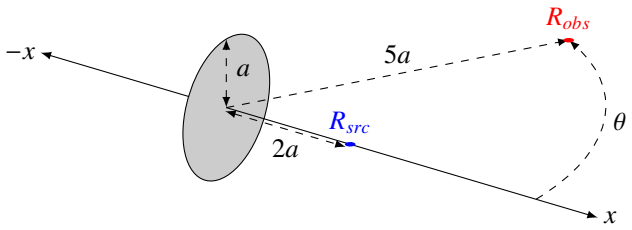



图 8：圆盘几何结构，显示声源（蓝点，$R_{src}$）和观察者（红点，$R_{obs}$）的位置。

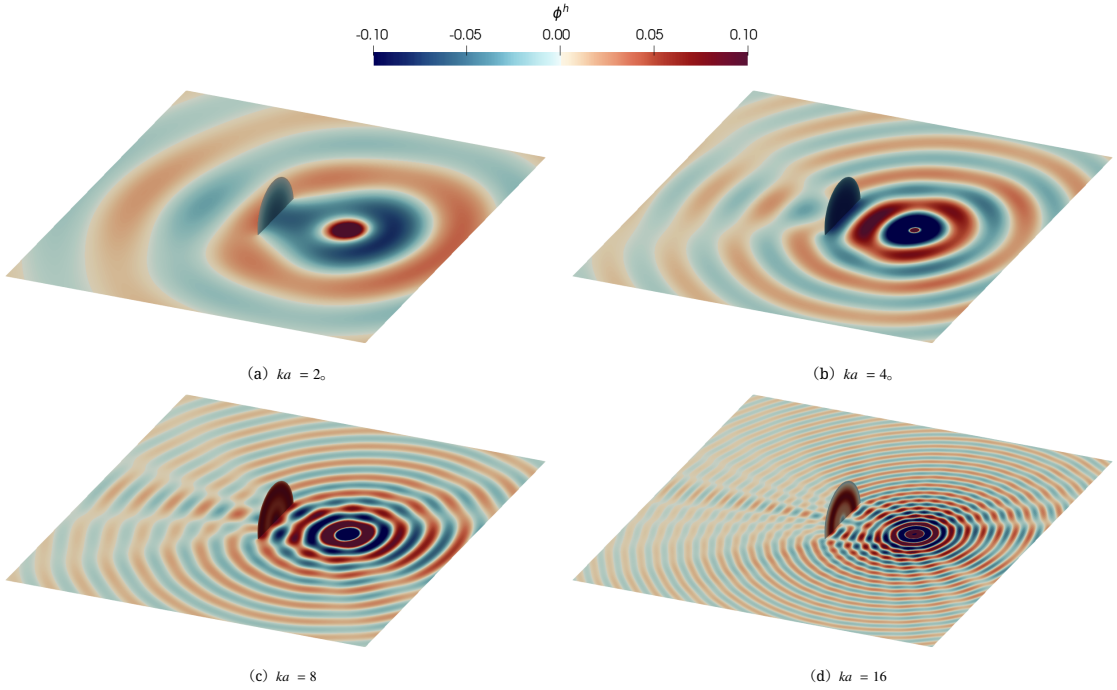



图 9：圆盘在选定频率下对谐波点声源产生的声场进行散射的预测结果可视化：（a）$ka$ = 2；（b）$ka$ = 4；（c）$ka$ = 8；（d）$ka$ = 16。图中显示无量纲时间$t$ = 50时的瞬时声势。

在此算例中，我们关注恒定谐波频率激励（$Q(t)$ = −cos($kt$)），并与 Bowman 等人给出的解析解进行比较 [43]。与球体算例一样，在模拟开始后，待初始瞬态效应退出区域的相关部分后，收集数值数据。图 9 展示了 $ka$ = 2 分别为 4、8、16 时简谐激励下的声势分布 $\phi^h$，包括圆盘表面以及观察平面 $x \in [-5, 5]$、$y \in [-5, 5]$。与球体算例相比，可视化结果呈现出显著的定性差异：由于几何形状扁平，散射体沿 $x$ 轴的影响更强。

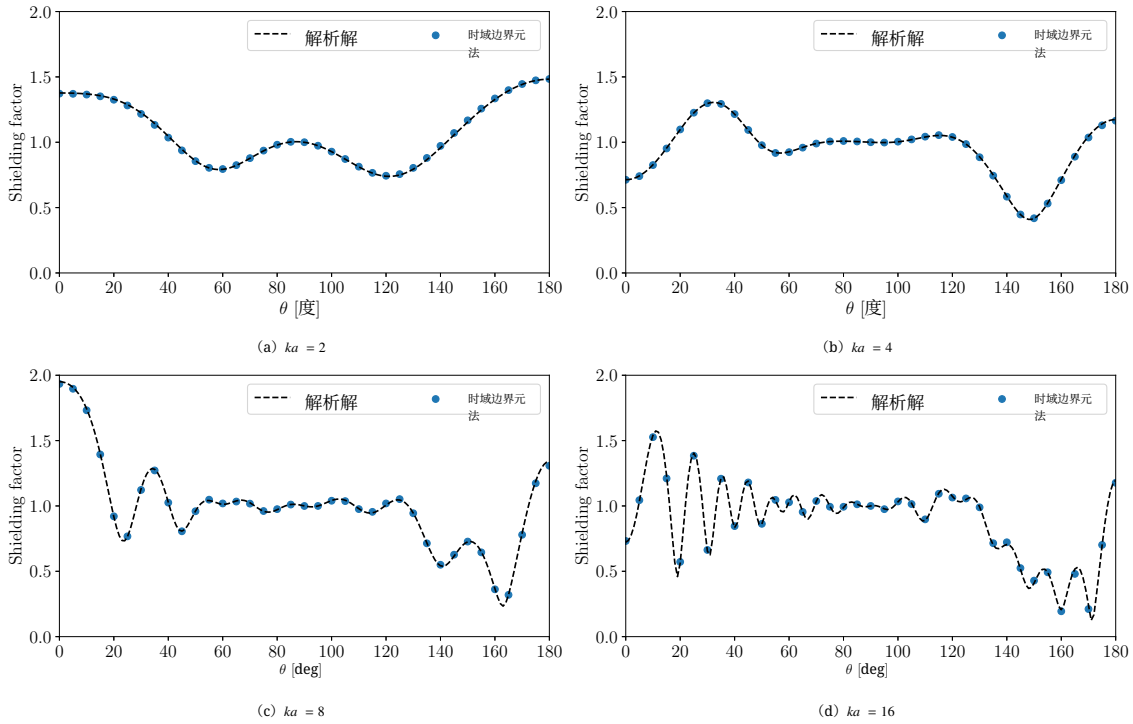



图 10：在选定频率下，圆盘对简谐点源散射的预测屏蔽因子与解析解的比较：（a）$ka = 2$；（b）$ka = 4$；（c）$ka = 8$；（d）$ka = 16$。

图 10 对比了圆形观测阵列上的屏蔽因子指向性与 $ka = 2$ 为 4、8、16 时的解析解。与球体算例一样，预测的屏蔽因子与解析解高度吻合。在较低频率下，所有极角处的解基本重合；而在较高频率下，由于分辨率固定，会出现较小的数值误差。

### *3.3.* 平面

最后一个验证案例是均匀流中平行于平坦平面的瞬态声源声散射。利用镜像法可以轻松构造无限平面散射的解析解。对于较短的时间，采用尺寸足够大的有限矩形板几何，可以对无限平面问题进行数值近似，如图 11 所示。尽管有限板会引入无限平面情形中不存在的边缘衍射效应，但因果性确保这些效应只有在入射波从源点传播到边缘、随后再传播到观测点之后，才会出现在解中。因此，我们可以选择一个较短的时间区间，使有限几何的数值案例能够直接与无限几何的解析解进行比较。

我们定义一个瞬态声源强度函数：

$$Q(t) = \frac{t - t_0}{\sigma} \exp\left(-\frac{(t - t_0)^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}\right). \tag{26}$$

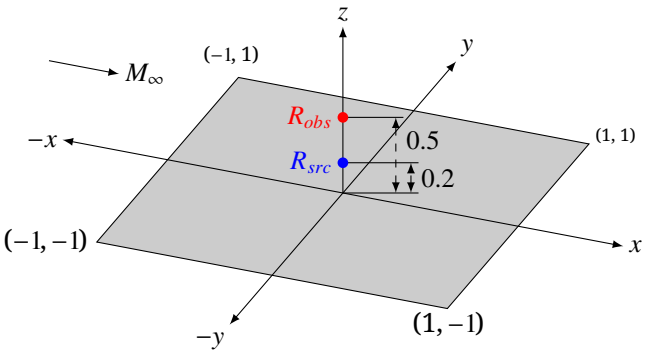



图11：平面几何，显示声源（蓝点，$R_{src}$）和观察者（红点，$R_{obs}$）的位置，以及沿正$x$方向的均匀背景流。

该函数与高斯函数的导数成正比，并归一化为单位振幅。对于这种情况，我们选择$t_0 = 2$和 $\sigma = 0.085$。

平均背景流是均匀的，且与正$x$轴平行。因此，在时域边界元法计算中，我们应用 PGL 变换来考虑背景流效应：

$$\tilde{x} = \frac{x}{\beta} + \frac{M_\infty \cdot x}{\beta^2(1+\beta)} M_\infty, \tag{27a}$$

$$\tilde{t} = t + \frac{M_\infty \cdot x}{\beta^2}. \tag{27b}$$

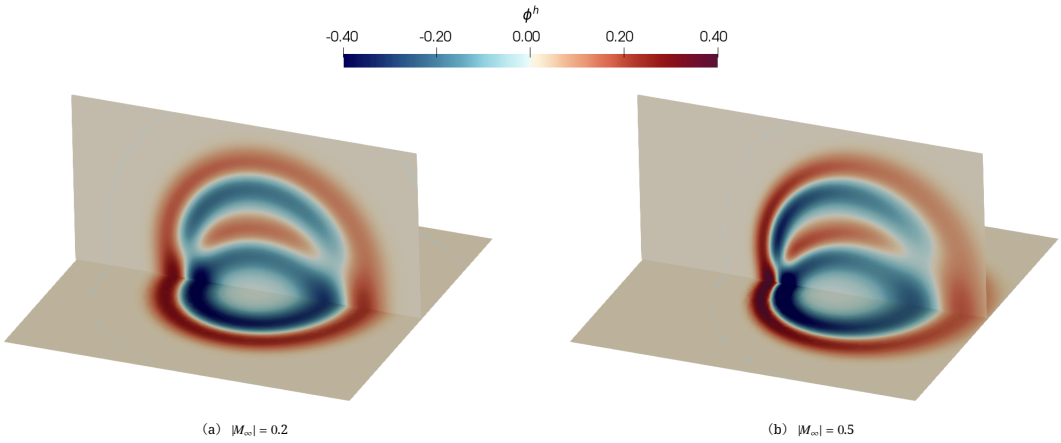
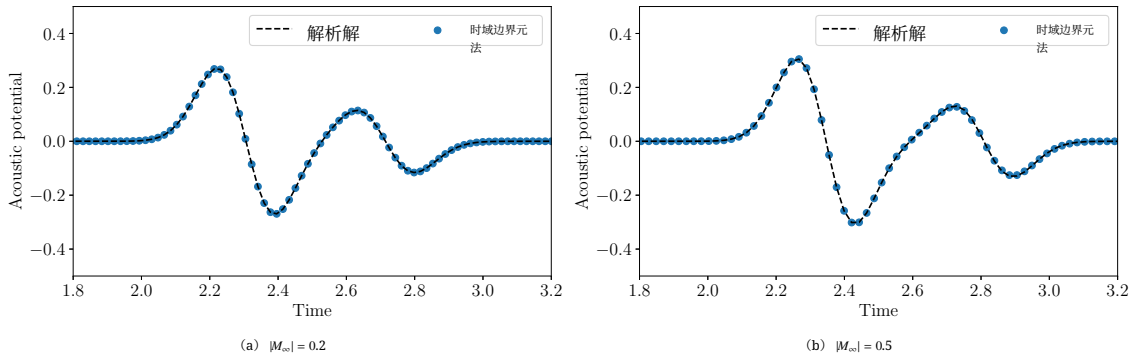



图12：均匀平均流中由平面散射的瞬态点声源预测声势场可视化：（a）$|M_\infty| = 0.2$；（b） $|M_\infty| = 0.5$。瞬时声势显示于无量纲时间 $t = 2.5$。

有限板采用单层单元进行离散化，包含 6282 个面和 3242 个节点，并在库朗数 = 0.5 下进行计算。请注意，PGL 变换会缩放空间坐标，因此，对于物理空间中相同的离散化，指定恒定的库朗数会导致不同马赫数下的时间步长略有差异。图 12 展示了马赫数为 $|M_\infty| = 0.2$ 和 $|M_\infty| = 0.5$ 时，$t = 2.5$ 处平面表面和中心观测平面上的瞬时声势分布；中心观测平面与流动方向对齐。




（a） $|M_\infty| = 0.2$　　（b） $|M_\infty| = 0.5$

图 13：均匀平均流中，平面散射瞬态点声源所产生的声势的预测值与解析解对比：（a）$M_\infty = (0.2, 0, 0)$；（b）$M_\infty = (0.5, 0, 0)$。图中显示了观测点 $R_{obs} = (0, 0, 0.5)$ 处的声势信号。

随着马赫数增加，背景流导致的上游放大现象清晰可见。图 13 对比了两种情况下，$R_{obs} = (0, 0, 0.5)$ 处预测得到的声势信号与解析解。两个马赫数下的信号在所有时间步上基本重合，表明二者高度一致。

## 4. 后缘安装式螺旋桨的应用

现在，我们将散射方法应用于安装在平板后缘附近的螺旋桨。该案例复现了 Hanson 等人开展的一项实验 [44], ，使我们能够将数值预测与实验测量进行比较。后缘安装式螺旋桨的几何形状如图 14 所示。一个单独的双叶片螺旋桨安装在矩形平板后缘附近。螺旋桨的螺距和直径为$D$ = 0.2286 m，并以 Ω = 7000 RPM 的转速在悬停状态下运行。研究了两块矩形板：一块长板，弦长为 1.7 m；另一块短板，弦长为 0.61 m。两块板的展长均为 1.5 m，厚度均为 0.012 m。每块板均位于展向中部，其法向和弦向位置各不相同，范围分别为 $H/D$ = 0.6 至$H/D$ = 1，以及 $L/D$ = −1 至 $L/D$ = 2；其中$H$ 是螺旋桨轴至平板的法向间距，$L$ 是桨盘平面至后缘的弦向距离。在以螺旋桨桨毂为中心、半径为 1.75 m 的两条弧线上布置了各含 14 个传声器的阵列，用于测量远场噪声；测量覆盖平板反射侧从 20° 至 150° 以及阴影侧从 210° 至 340° 的极角范围。

入射声场由采用 Ffowcs Williams-Hawkings (FWH) 声学比拟 [45] 的雷诺平均纳维-斯托克斯 (RANS) 计算流体力学模拟获得。实验结果表明，在所有运行工况下，螺旋桨与平板之间的气动干扰都极小；测得的安装效应归因于声散射和声屏蔽 [44]。因此，所有工况的入射场均由一次孤立螺旋桨模拟提供。流动解在旋转参考系中，使用开源 SU2 求解器 [46]，在包含 2.51 亿个网格点的超精细网格上计算。每个时间步在 2° 个叶片方位角处评估声场。

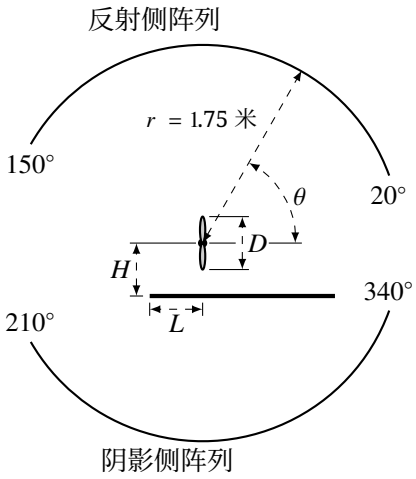



图14：后缘安装螺旋桨构型示意图，显示平板（粗线）以及相对于螺旋桨的反射侧和阴影侧麦克风阵列位置。

1.7 m 平板离散为 5398 个面和 2791 个节点，0.61 m 平板离散为 1938 个面和 1030 个节点，两种几何形状的库朗数均为 ≈ 0.5。由于实验是在悬停状态下进行的，因此假设背景流静止，不进行变量变换。模拟运行时长为 $H/D$ = 0.6、0.75、1 和 $L/D$ = −1、0、1、2。为与实验结果进行比较，鉴于 RANS 解未能捕捉到显著的宽带成分，我们重点关注叶片通过频率 (BPF) 处的声压级 (SPL)。

图15比较了$L/D$ = 0时叶片通过频率处预测和测量得到的声压级指向性，该情况对应于螺旋桨盘与后缘对齐。在每幅图中，均将孤立状态指向性与安装状态指向性一并列出，以突出声学安装效应。我们注意到，孤立螺旋桨指向性的形状存在一些系统性差异：对于约为 90° 和 270°的中间极角，RANS-FWH数值方法高估了测量值。这些差异大多从入射场预测延续到了安装状态螺旋桨预测中，后者在约为 90° 和 270°的位置也表现出非常相似的高估。这些差异可能源于数值和实验装置之间的气动及声学差异，包括实验中存在而数值几何模型中未包含的整流罩、电机和试验台，以及消声室中存在的风洞喷管和集流器；后者可能在实验装置中充当额外的散射表面。此外，这些差异也可能与螺旋桨叶片上的分离流现象有关，而RANS流场解未能充分捕捉这些现象。

尽管由于入射场预测的差异，绝对声级存在差异，但时域边界元法很好地捕捉到了声散射和声屏蔽导致的孤立状态与安装状态声级差异。在反射侧，平板散射使整个观测阵列的声级都得到增强，且在前端（约为 20°）最为显著。较小的 $H/D$ 也会带来更强的增强。长板在观测阵列前端产生的增强大于短板，但数值预测显示，长板在 20° 至 之间的增强幅度高于实验测量结果。

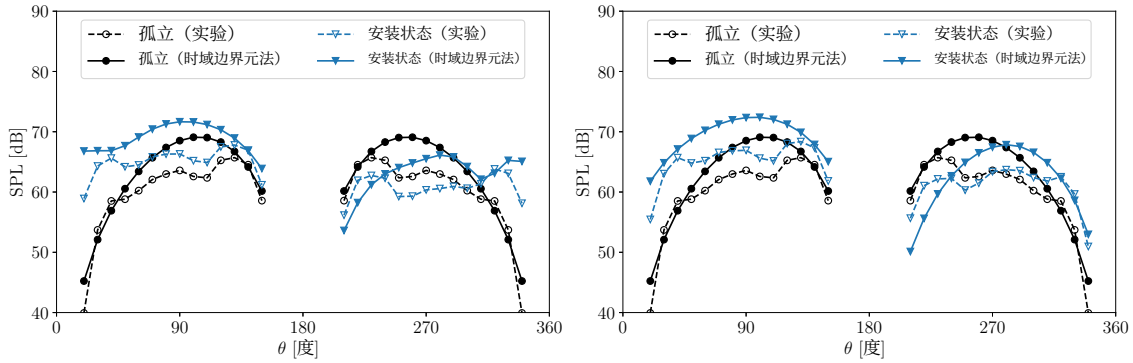
与短板相比，长板在观测阵列前端产生的增强更大，不过在 20° 和 40° 之间，数值预测显示长板的增强幅度高于实验测量结果。在阴影侧，散射效应更为复杂：前向角度（约为 340°）处声级增强，后向角度（约为 210°）处声级降低，并在约 270° 处出现交叉点。随着 $H/D$ 增大，以及采用长板构型，交叉点位置向前移动；这一趋势得到了很好的捕捉。其他关键参数趋势也同样得到了捕捉，例如，较小的 $H/D$ 会使增强和降低的幅度增大。与反射侧相同，在观测弧前端的 320° 至 340° 之间，长板的预测增强幅度高于实验测量结果。

为进一步表征不同螺旋桨位置处的散射和声屏蔽效应，我们直接比较在$H/D$ 和$L/D$ 参数范围内，安装构型与孤立构型在叶片通过频率处的声压级差异，计算方式如下：

$$\Delta\mathrm{SPL} = \mathrm{SPL}_{\mathrm{installed}} - \mathrm{SPL}_{\mathrm{isolated}}. \tag{28}$$

图 16 显示了不同$L/D$ 下预测和测得的 Δ声压级，以及两者差异的幅值。对于每个$H/D$，预测均能较好地反映放大和降低的分布规律。在反射侧，对于两种板尺寸，放大效应在$L/D = 0$ 时最强，并随着螺旋桨盘向前移动而减弱。短板上的这一减弱最快。在反射侧和阴影侧，当前移观察者处的螺旋桨盘移动到后缘前方时（$L/D = 0$），强烈的放大效应会显著减弱。阴影侧放大区域与降低区域之间的交叉角也明显向前移动。

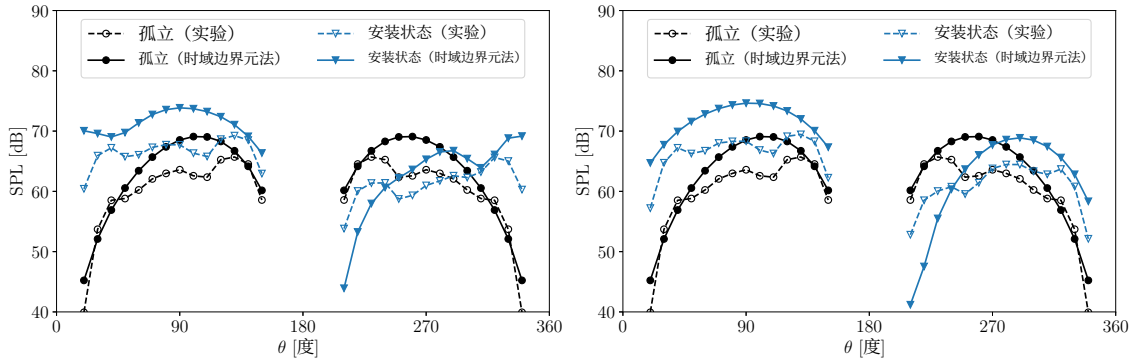
预测与测得的 Δ声压级差异大多低于 5 dB。例外情况几乎都出现在阵列的前端和后端。我们推测，这些观察者位置处较大的差异可能是由于风洞喷管和集流器（均未进行声学处理）距离实验装置中的麦克风较近所致。短板在$H/D = 0.6$ 和$L/D = 2$处还存在一处较大的差异：预测中阴影侧最大降低的位置相对于测量结果向前偏移，导致 Δ声压级在 290°附近存在显著差异。综合所有角度和位置来看，数值预测在$H/D$较大时通常与测量结果更加接近。我们推测，这些位置的吻合度较高，是因为随着$H/D$ 增大，气动隔离近似更加准确。




（a）长板，$H/D = 1$，$L/D = 0$



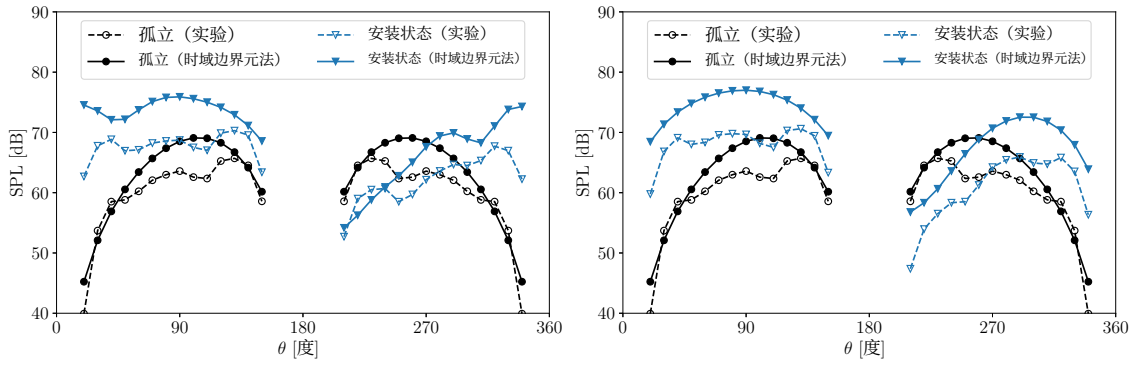

（b）短板，$H/D = 1$，$L/D = 0$




（c）长板，$H/D = 0.75$，$L/D = 0$




（d）短板，$H/D = 0.75$，$L/D = 0$

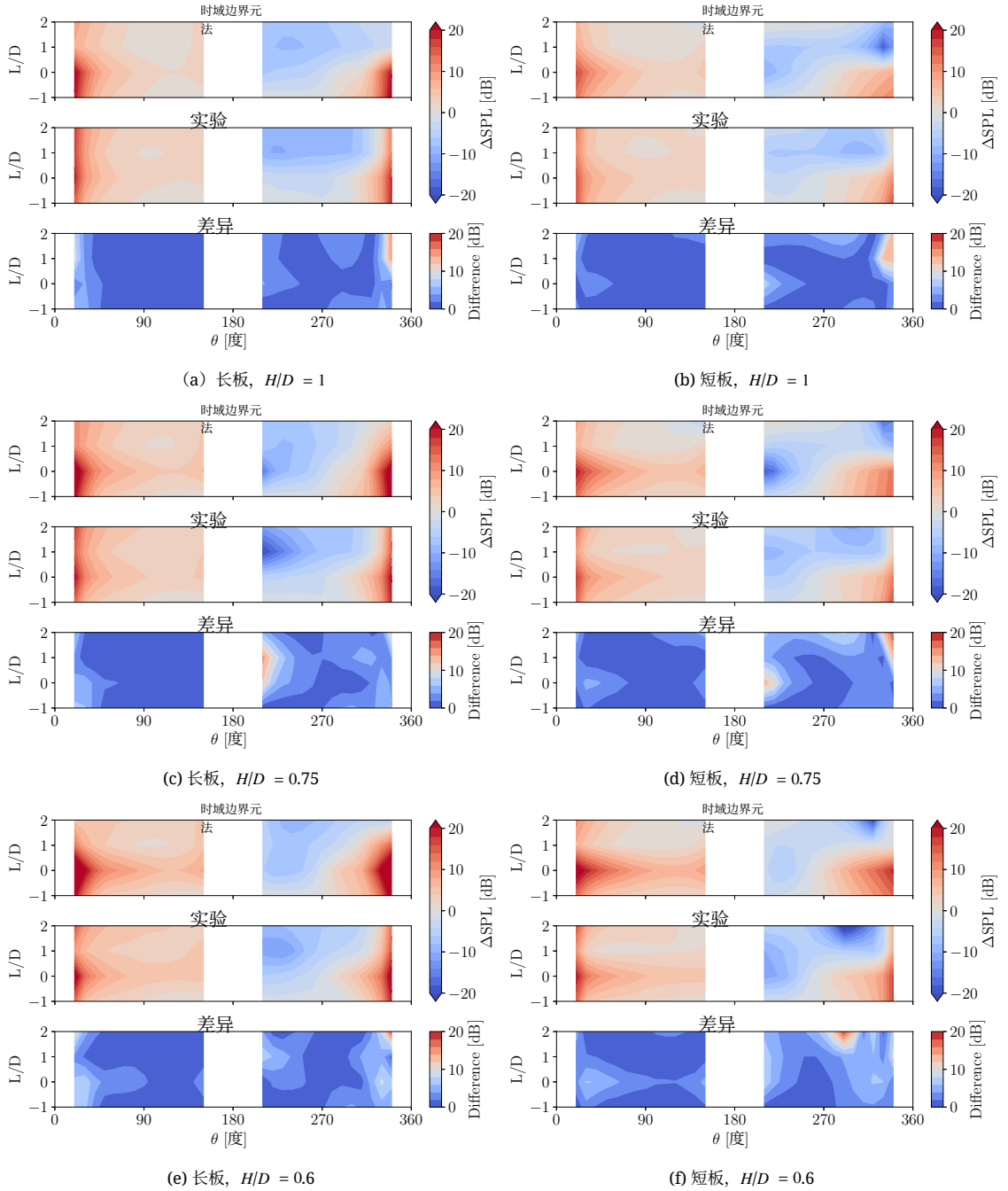



（e）长板，$H/D = 0.6$，$L/D = 0$




（f）短板，$H/D = 0.6$，$L/D = 0$

图15：螺旋桨盘与后缘对齐时，BPF处声压级预测值（实心标记和实线）与测量值（空心标记和虚线）的指向性比较，$L/D = 0$。（a）长板，$H/D = 1$；（b）短板，$H/D = 1$；（c）长板，$H/D = 0.75$；（d）短板，$H/D = 0.75$；（e）长板，$H/D = 0.6$；（f）短板，$H/D = 0.6$。




（a）长板，$H/D = 1$

(b) 短板，$H/D = 1$

(c) 长板，$H/D = 0.75$

(d) 短板，$H/D = 0.75$

(e) 长板，$H/D = 0.6$

(f) 短板，$H/D = 0.6$

图16：不同$L/D$条件下安装状态与孤立构型的 Δ声压级对比。（a）长板，$H/D = 1$；（b）短板，$H/D = 1$；（c）长板，$H/D = 0.75$；（d）短板，$H/D = 0.75$；（e）长板，$H/D = 0.6$；（f）短板，$H/D = 0.6$。每个子图分别显示预测的 Δ声压级等值线（上）、实测 Δ声压级（中），以及预测值与实测值之间的 Δ声压级差异幅值（下）。

## 5. 结论

本文提出了一种高效预测复杂安装式声源（如旋翼和螺旋桨）声散射效应的方法。提出采用时空 Galerkin 时域边界元法，对任意入射场在散射表面上施加声硬边界条件。针对伽辽金双重积分和因果传播积分的数值计算难题，我们采用了一种高效的基于分解的方法。时空伽辽金公式带来了一种稳健且无条件稳定的方法，即使采用粗糙离散化也能提供良好的精度。与其他公式不同，我们的方法能够仅用单层单元表示薄几何结构，从而大幅减小此类问题的规模。通过变量变换引入平均背景流效应，使我们能够针对不同问题灵活采用适当的背景流假设，而不会显著增加复杂性。

我们针对三个具有解析解的算例给出了时域边界元法的验证结果，结果显示出非常好的一致性。总体而言，这三个验证算例涵盖了实际气动声学散射问题中可能出现的一系列不同特征，包括平滑弯曲的散射表面和带有尖锐边缘的平面表面、包围某一区域的散射表面和采用单层单元表示的薄表面、静止介质中的散射和平均流动介质中的散射，以及谐波、宽带和瞬态声源的散射。无需像其他方法那样调节数值参数，该方法对所有算例均具有良好的精度。在球体算例上开展的网格细化研究表明，联合细化时空间和时间上具有二阶精度，并表明选择 CFL $\approx 0.5$ 可使总误差最小。

最后，我们展示了散射方法在后缘安装螺旋桨构型中的应用。该案例表明，通过声学比拟指定入射场，可成功将时域边界元法与计算流体力学耦合。数值结果与 Hanson 等人的实验测量结果进行了比较， [44]，显示出良好的定性和定量一致性。尤其是，数值结果准确捕捉了声散射随板尺寸和位置变化而产生的增强与减弱趋势。

## 致谢

作者衷心感谢 Filipi Kunz 和 Shaun Pullin 分享用于后缘安装式螺旋桨案例的 SU2 计算流体力学模拟数据。作者还感谢 Leonard Lopes 博士和 Qiqi Wang 教授在研究期间为本工作提出的宝贵建议。本研究部分得益于先进计算环境合作伙伴计划（PACE）在佐治亚理工学院（美国佐治亚州亚特兰大）提供的计算资源支持（RRID:SCR_027619）。

## 附录 A。$I_{\alpha,\beta}$ 的精确表达式

为计算伽辽金积分而提出的求积策略，需要以下积分的精确表达式：

$$I_{\alpha,1}(r,z) = \int_0^r \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \rho \, d\rho, \tag{A.1}$$

$$I_{\alpha,2}(r,z) = \int_0^r \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \rho^2 \, d\rho. \tag{A.2}$$

注意，对于 $\beta > 2$，$I_{\alpha,\beta}$ 可以表示为式 (A.1) 和式 (A.2) 的组合。

对于式 (A.1)，令 $R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$。则：

$$I_{\alpha,1}(r,z) = \int_{|z|}^{\sqrt{r^2+z^2}} R^{\alpha+1} dR = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+2}\left(\left(r^2+z^2\right)^{\frac{\alpha+2}{2}} - |z|^{\alpha+2}\right), & \alpha \neq -2, \\ \frac{1}{2}\log\left(\frac{r^2}{z^2}+1\right), & \alpha = -2. \end{cases} \tag{A.3}$$

我们可以将式 (A.2) 直接化简为若干较简单积分的组合：

$$I_{\alpha,2}(r,z) = \int_0^r \left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{\alpha+2}{2}} - z^2\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \, d\rho = J_{\alpha+2}(r,z) - z^2 J_\alpha(r,z), \tag{A.4}$$

其中：

$$J_\alpha(r,z) = \int_0^r \left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} d\rho. \tag{A.5}$$

分部积分后，得到：

$$J_\alpha(r,z) = r\left(r^2+z^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} - \alpha\int_0^r \left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{\alpha-2}{2}} \rho^2 d\rho = r\left(r^2+z^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} - \alpha\left(J_\alpha(r,z) - z^2 J_{\alpha-2}(r,z)\right), \tag{A.6}$$

从而得到两个递推关系：

$$J_\alpha(r,z) = \frac{1}{\alpha+1}\left(r\left(r^2+z^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} + \alpha z^2 J_{\alpha-2}(r,z)\right), \qquad \alpha \neq -1, \tag{A.7}$$

$$J_\alpha(r,z) = -\frac{1}{(\alpha+2)z^2}\left(r\left(r^2+z^2\right)^{\frac{\alpha+2}{2}} - (\alpha+3)J_{\alpha+2}(r,z)\right), \qquad \alpha \neq -2. \tag{A.8}$$

然后，我们可以使用以下基例写出精确表达式：

$$J_{-1}(r,z) = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} d\rho = \operatorname{arsinh}\left(\frac{r}{z}\right), \tag{A.9}$$

$$J_{-2}(r,z) = \int_0^r \frac{1}{\rho^2+z^2} d\rho = \frac{1}{z}\arctan\left(\frac{r}{z}\right). \tag{A.10}$$

## 参考文献

[1] S. A. Rizzi, D. L. Huff, D. D. Boyd, P. Bent, B. S. Henderson, K. A. Pascioni, D. C. Sargent, D. L. Joseph- son, M. Marsan, H. B. He, R. Snider，《城市空中交通噪声：当前实践、差距与建议》，技术出版物 NASA/TP–2020-5007433，美国国家航空航天局（2020）。

[2] M. H. Dunn, 《四维中的声学比拟》，国际气动声学期刊 18（8）（2019）711–751。doi:10.1177/1475472X19890259。[3] G. Romani, D. Casalino, 《格子玻尔兹曼方法在旋翼机空气动力学与气动声学中的应用》，载于：第43届欧洲旋翼机论坛，2017年，第816–828页。[4] C. K. Tam, 《计算气动声学：波数方法》，剑桥航空航天丛书第33卷，剑桥大学出版社，2012年。doi:10.1017/CBO9780511802065。[5] J. Yangzhou, J. Wu, Z. Ma, X. Huang, 《尾流吸入螺旋桨噪声的气动声源分析》，流体力学杂志 962（2023）A29。doi:10.1017/jfm.2023.295。[6] C. Bogey, C. Bailly, D. Juvé, 《使用线性化欧拉方程中的源项计算流动噪声》，AIAA Journal 40（2）（2002）235–243。doi:10.2514/2.1665。[7] R. Ewert, W. Schröder, 《基于通过源项滤波进行流动分解的声学扰动方程》，计算物理学杂志 188（2）（2003）365–398。doi:10.1016/S0021-9991(03)00168-2。[8] C. K. Tam, J. C. Webb, 《用于计算声学的色散关系保持有限差分格式》，计算物理学杂志 107（2）（1993）262–281。doi:10.1006/jcph.1993.1142。[9] C. K. Tam, 《螺旋桨噪声问题有限差分解中固有的离散化误差》，AIAA Journal 30（3）（1992）608–615。doi:10.2514/3.10963。[10] F. Q. Hu, 《适用于非分裂物理变量线性化欧拉方程的稳定完美匹配层》，计算物理学杂志 173（2）（2001）455–480。doi:10.1006/jcph.2001.6887。[11] R. H. Thomas, Y. Guo, 《PAAShA屏蔽预测方法的系统验证》，国际气动声学期刊 21（5-7）（2022）558–584。doi:10.1177/1475472X221107369。[12] F. Q. Hu, M. E. Pizzo, D. M. Nark, 《均匀平均流中刚体声散射的时域边界积分方程表述》，美国声学学会会刊 142（6）（2017）3624–3636。doi:10.1121/1.5017734。[13] S. Lee, K. S. Brentner, P. J. Morris, 《使用等效源方法进行时域声散射》，AIAA Journal 48（12）（2010）2772–2780。doi:10.2514/1.45132。[14] M. Barbarino, D. Bianco, 《将边界元-快速多极法应用于组合对流亥姆霍兹积分公式以求解气动声学问题》，应用力学与工程中的计算机方法 342（2018）585–603。doi:10.1016/j.cma.2018.07.034。[15] A. F. Tinetti, M. H. Dunn, 《快速散射代码（FSC）：验证研究与程序指南》，承包商报告 NASA/CR-2011-217158，美国国家航空航天局（2011）。

[16] S. Lee，《等效源方法在计算声学中的应用》书评，《计算声学杂志》25 (01) (2017) 1630001。doi:10.1142/S0218396X16300012。[17] E. Greenwood, K. S. Brentner, R. F. Rau, Z. F. Ted Gan，低噪声电动飞机面临的挑战与机遇，《国际气动声学期刊》21 (5-7) (2022) 315–381。doi:10.1177/1475472X221107377。[18] H. Brouwer，圆柱形机身及其边界层对开放式转子音调的散射，载于：第 22 届 AIAA/CEAS 气动声学会议，2016，第 2741 页。doi:10.2514/6.2016-2741。[19] F. Q. Hu, M. E. Pizzo，基于时域边界积分方程解评估声散射与声屏蔽，载于：第 22 届 AIAA/CEAS 气动声学会议，2016，第 2779 页。doi:10.2514/6.2016-2779。[20] M. Costabel，边界积分方程法中的时变问题，载于：《计算力学百科全书》，John Wiley & Sons, Ltd，2004，第 25 章，第 703–721 页。doi:10.1002/0470091355.ecm022。[21] Y. W. Lee, D. J. Lee，时域对流声波方程边界积分公式的推导与实现，《美国声学学会会刊》136 (6) (2014) 2959–2967。doi:10.1121/1.4898427。[22] A. Burton, G. Miller，积分方程方法在若干外部边值问题数值求解中的应用，《Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences》323 (1553) (1971) 201–210。doi:10.1098/rspa.1971.0097。[23] D. Chappell, P. Harris，时域 Burton-Miller 公式中耦合参数的选择，《力学与应用数学季刊》62 (4) (2009) 431–450。doi:10.1093/qjmam/hbp018。[24]C.-J. Zheng, H.-B. Chen, H.-F. Gao, L. Du，Burton-Miller 公式是否真的不存在伪特征频率？《《Engineering Analysis with Boundary Elements》》59 (2015) 43–51。doi:10.1016/j.enganabound.2015.04.014。[25] S. Marburg，Burton-Miller 方法：揭开其耦合参数的另一层奥秘，《计算声学杂志》24 (01) (2016) 1550016。doi:10.1142/S0218396X15500162。[26] W. Kreuzer，关于低频区域中的 Burton-Miller 因子，《《Engineering Analysis with Boundary Elements》》167 (2024) 105883。doi:10.1016/j.enganabound.2024.105883。[27] A. Bamberger, T. Ha-Duong，刚性表面对声波衍射的变分公式，Mathematical Methods in the Applied Sciences 8 (1) (1986) 598–608。doi:10.1002/mma.1670080139。

[28]K. H. Yu, A. H. Kadarman, H. Djojodihardjo，边界元法若干变体的发展与实现——批判性综述，《《Engineering Analysis with Boundary Elements》》34 (10) (2010) 884–899。doi:10.1016/j.enganabound.2010.05.001。[29] E. Kita, N. Kamiya，边界元法中的误差估计与自适应网格细化：综述，《《Engineering Analysis with Boundary Elements》》25 (7) (2001) 479–495。doi:10.1016/S0955-7997(01)00018-2。[30] H. Gimperlein, C. Özdemir, D. Stark, E. P. Stephan，时域边界元法的残差后验误差估计，《《Numerische Mathematik》》146 (2) (2020) 239–280。doi:10.1007/s00211-020-01142-y。[31] T. Ha-Duong，关于延迟势边界积分方程及其离散化，载于：M. Ainsworth, P. Davies, D. Duncan, B. Rynne, P. Martin（编），《计算波传播专题：正问题与反问题》，Springer Berlin Heidelberg，2003，第 301–336 页。doi:10.1007/978-3-642-55483-4_8。[32] L. Campos，势流和非均匀介质中声波方程的 36 种形式，《《Applied Mechanics Reviews》》60 (4) (2007) 149–171。doi:10.1115/1.2750670。[33] F. Q. Hu, M. E. Pizzo, D. M. Nark，普朗特-格劳特-洛伦兹变换在均匀流中刚体声散射问题中的应用，《《Journal of Sound and Vibration》》443 (2019) 198–211。doi:10.1016/j.jsv.2018.11.043。[34] K. Taylor，一种声学方程变换及其对风洞和低速飞行试验的影响，《Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences》363 (1713) (1978) 271–281。doi:10.1098/rspa.1978.0168。[35] S. Mancini, R. J. Astley, S. Sinayoko, G. Gabard, M. Tournour，弱非均匀势流中波传播的积分形式，《《Journal of Sound and Vibration》》385 (2016) 184–201。doi:10.1016/j.jsv.2016.08.025。[36] A. F. Tinetti, M. H. Dunn，使用快速散射代码进行气动声学噪声预测，载于：第 11 届 AIAA/CEAS 气动声学会议，2005，第 3061 页。doi:10.2514/6.2005-3061。[37] A. Aimi, M. Diligenti, A. Frangi, C. Guardasoni，诺伊曼外部波传播问题：三维能量型伽辽金边界元法的计算方面，《《Computational Mechanics》》51 (2013) 475–493。doi:10.1007/s00466-012- 0796-5。[38] M. J. Carley，三角形上势积分的解析公式，《《Journal of Applied Mechanics》》80 (4) (2013) 041008。doi:10.1115/1.4007853。[39] J. Milroy, S. Hinduja, K. Davey，弹性静力三维边界元法：线性等参三角形单元的解析积分，《《Applied Mathematical Modelling》》21 (12) (1997) 763–782。doi:10.1016/S0307-904X(97)00098-X。

[40] D. Dunavant, 《三角形高阶高效对称高斯求积公式》, International Journal for Numerical Methods in Engineering 21 (6) (1985) 1129–1148。doi:10.1002/nme.1620210612。[41] E. Ostermann, 《延迟势边界积分方程时空变分公式的数值方法》, 博士论文, 汉诺威莱布尼茨大学（2010）。[42] S. W. Rienstra、A. Hirschberg, 《声学导论》, 埃因霍温理工大学, 2004。[43] J. J. Bowman、T. B. Senior、P. L. Uslenghi（编）, 《简单形状的电磁与声散射》, North-Holland Publishing Company, 1969。[44] L. P. Hanson、K. Baskaran、B. Zang、M. Azarpeyvand, 《后缘安装螺旋桨与平板的气动声学相互作用》, 载于: 第28届AIAA/CEAS 2022气动声学会议, 2022, 第2937页。doi:10.2514/6.2022-2937。[45] J. E. Ffowcs Williams、D. L. Hawkings, 《任意运动中的湍流与表面的声音生成》, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences 264 (1151) (1969) 321–342。doi:10.1098/rsta.1969.0031。[46] T. D. Economon、F. Palacios、S. R. Copeland、T. W. Lukaczyk、J. J. Alonso, 《SU2: 用于多物理场仿真与设计的开源套件》, AIAA Journal 54 (3) (2016) 828–846。doi:10.2514/1.J053813。