arXiv:2603.05501v1 [math.LO] 5 Mar 2026

使用包含原子刻画对偶团队性质

Matilda H¨aggblom

赫尔辛基大学

摘要。 我们通过使用包含原子的变体，引入了在句法上以对偶方式对（准）向下封闭和（准）向上封闭性质表达完全的命题团队逻辑。特别是，在（准）向上封闭设定中使用的原始包含原子的变体，都具有使用可能模态变体表达的等价公式。这种对偶性体现在这些逻辑的范式中，映射出（准）向上封闭设定与向下封闭设定之间的对偶关系，其中拟变体特别处理空团队和完整团队。此外，我们还为每种逻辑定义了可靠且完备的自然演绎系统。

1 引言

我们探讨能否以一种对偶的方式定义命题团队逻辑，以反映向下封闭性质与向上封闭性质之间的对偶关系，并同时涵盖（以及不涵盖）空团队或完整团队。我们的回答是肯定的：我们通过引入使用包含原子变体的此类逻辑，得到了四种逻辑的范式中呈现出的、出人意料地对称的图景。我们还为每种逻辑引入了可靠且完备的自然演绎系统。值得注意的是，用于（准）向上封闭性质的逻辑中的原子，与文献中的可能模态有着密切联系。

我们证明，对于相关封闭性质的所有团队性质，四种逻辑中的每一种都是表达完全的，并定义可靠且完备的证明系统。所有命题团队逻辑都是紧致的，这一结论借鉴了 [3], 中提出、在 [9]中以团队语义记法表述的探究逻辑论证。因此，我们为每种逻辑都得到了强紧致性定理。

这是一篇工作论文。

2 向上封闭和向下封闭逻辑

我们回顾团队、团队性质和命题团队逻辑的基本定义。随后，我们介绍向上封闭和向下封闭命题团队逻辑的四种变体，并为每种逻辑给出表达完备性结果。

固定一个有限的命题符号集合 $\mathbb{P}$。赋值 v 的集合 $\mathbb{P} \to \{0,1\}$ 是一个团队。这里，如果 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{P}$ 上团队的非空集合，即 $\mathcal{C} \subseteq P(2^{\mathbb{P}})$，我们就称其为团队性质。

两个有趣的团队分别是空团队 $\emptyset$ 和完整团队 $\mathbb{F}:= 2^{\mathbb{P}}$，即 $\mathbb{P}$上的极大团队。我们考虑任意团队集合 $\mathcal{C}$的空团队/全团队性质。

- $\mathcal{C}$ 具有空团队性质，若 $\emptyset \in \mathcal{C}$。- $\mathcal{C}$ 具有全团队性质，若 $\mathbb{F} \in \mathcal{C}$。

本文结果的核心所涉及的四种封闭性质如下所列，其中我们注意到完整团队和空团队在拟变体中的特殊作用。

- $\mathcal{C}$ 是向下封闭的，当且仅当对所有 $T \in \mathcal{C}$ 和 $S \subseteq T$，都有 $S \in \mathcal{C}$。- $\mathcal{C}$ 是拟 向下封闭的，当且仅当 $\mathbb{F} \in \mathcal{C}$ 且 $\mathcal{C} \setminus \{\mathbb{F}\}$ 是向下封闭的。- $\mathcal{C}$ 是向上封闭的，当且仅当对所有 $T \in \mathcal{C}$ 和 $S \supseteq T$，都有 $S \in \mathcal{C}$。- $\mathcal{C}$ 是拟 向上封闭的，当且仅当 $\emptyset \in \mathcal{C}$ 且 $\mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$ 是向上封闭的。

请注意，如果一个向下封闭的性质包含完整团队，那么它就会包含所有团队，因此表示平凡团队性质。对包含空团队的向上封闭团队性质，也存在对称的情形。相比之下，拟性质避免了这种平凡化。

对于基于团队的逻辑 $\mathcal{L}$，每个公式 $\phi \in \mathcal{L}$ （其命题符号取自 $\mathbb{P}$）都定义一个团队性质 $\|\phi\| := \{t \subseteq \mathbb{F} \mid T \models \alpha\}$。对于一组公式 Γ，若 $\|\psi\| \supseteq \bigcap_{\phi\in\Gamma}\|\phi\|$，我们记作 $\Gamma \models \psi$ 。如果 Γ 是单元素集 $\{\phi\}$，我们省略括号，直接写作 $\phi \models \psi$。如果两个公式 ϕ 和 ψ 满足 $\|\psi\| = \|\phi\|$ ，我们就称它们语义等价，并用 $\phi \equiv \psi$表示。

如果某个逻辑中的所有公式 ϕ 都具有某种（闭包）性质 $\|\phi\|$ ，我们就说该逻辑具有这种性质。此外，如果对于任何具有所需性质的团队集合 $\mathcal{C}$，该逻辑中都存在某个 ϕ ，使得 $\mathcal{C} = \|\phi\|$，那么我们就说该逻辑对于这类团队性质是表达完全的。例如，当且仅当， $\mathcal{L}$对于所有包含空团队的向下闭包团队性质都是表达完全的

$$\{\|\phi\| \mid \phi \in \mathcal{L}\} = \{\mathcal{C} \mid \emptyset \in \mathcal{C} \text{ and } \mathcal{C} \text{ is downward closed}\}.$$

经典命题团队逻辑（PL）扩展了全局析取 $\vee$，因此 $PL^{\vee}$对于所有包含空团队[8]的向下封闭团队性质都是表达完全的。 $PL^{\vee}$的语法由以下文法给出：

$$\phi ::= \bot \mid p \mid \neg p \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \vee \phi),$$

其中 $p \in \mathbb{P}$。通过限制为不含 $\vee$的片段，我们得到逻辑 PL。下面回顾 $PL^{\vee}$的语义条款。

$T \models \top$ 当且仅当始终。$T \models \bot$ 当且仅当 $T = \emptyset$.$T \models p$ 当且仅当 $v(p) = 1$ 对于所有 $v \in T$.$T \models \neg p$ 当且仅当 $v(p) = 0$ 对于所有 $v \in T$.$T \models \phi \wedge \psi$ 当且仅当 $T \models \phi$ 且 $T \models \psi$.$T \models \phi \vee \psi$ 当且仅当 $T_1 \models \phi$ 且 $T_2 \models \psi$ 对于某个 T_1，$T_2 \subseteq T$ 使得 $T_1 \cup T_2 = T$.$T \models \phi \vee \psi$ 当且仅当 $T \models \phi$ 或 $T \models \psi$.

特别容易看出，团队性质 $\|p\|$ 是向下封闭的，而不是向上封闭的。由于我们的目标是以对偶的方式定义向上与向下封闭逻辑，因此需要一些替代的原子公式。为此，我们使用带常数的包含原子的变体作为主要原子。

带常数的命题包含原子形式为 $\mathsf{a} \subseteq \mathsf{b}$，其中 a 和 b 是由命题符号和常数组成的等长序列$\top$ and $\bot$。我们将赋值的定义域扩展为包含这些常数，使得赋值形式为 $v : \mathbb{P} \cup \{\top, \bot\} \to \{0, 1\}$ and $v(\top) = 1$ and $v(\bot) = 0$始终成立。我们还规定 $\bigwedge \emptyset = \top$ and $\bigvee \emptyset = \bot$。

对于赋值 v and 由命题符号和常数组成的序列 $\mathsf{a} = a_1 \dots a_n$，我们将 $v(\mathsf{a})$ 作为元组 $v(a_1) \dots v(a_n)$ 的简写。现在

$T \models \mathsf{a} \subseteq \mathsf{b}$ 当且仅当对于所有 $v \in T$，存在某个 $v' \in T$ 使得 $v(\mathsf{a}) = v'(\mathsf{b})$。

包含原子既不向下封闭也不向上封闭，但它们具有空团队性质，并且是并封闭的，也就是说，如果对所有 $i \in I \neq \emptyset$ 都有 $T_i \models \mathsf{a} \subseteq \mathsf{b}$，则$\bigcup_{i \in I} T_i \models \mathsf{a} \subseteq \mathsf{b}$。

我们现在引入包含原子的两种新颖变体，即非空包含原子 $\mathsf{a} \subseteq\!\!\!| \, \mathsf{b}$ 和完全包含原子 $\mathsf{a} \subseteq\!\!\!\bullet \mathsf{b}$，其语义条款如下。

$$T \models \mathsf{a} \subseteq\!\!\!| \, \mathsf{b} \quad \text{iff} \quad t \neq \emptyset \text{ and } T \models \mathsf{a} \subseteq \mathsf{b}.$$
$$T \models \mathsf{a} \subseteq\!\!\!\bullet \, \mathsf{b} \quad \text{iff} \quad T = \mathbb{F} \text{ or } T \models \mathsf{a} \subseteq \mathsf{b}.$$

为了获得具有所需（准）向上封闭性质的包含原子，我们限制序列 a 和 b 的语法。设 p 为来自 $\mathbb{P}$ 的命题符号序列，并设 x 为常数序列 $\top, \bot$ 使得 $|\mathsf{p}| = |\mathsf{x}|$。来自 [6] 的原始包含原子形如 $\mathsf{x} \subseteq \mathsf{p}$。对于非空团队 T，$T \models \mathsf{x} \subseteq \mathsf{p}$ 当且仅当存在一个赋值 $v \in T$ 使得 $v(\mathsf{p}) = v(\mathsf{x})$。原始包含原子是准向上封闭的，因为如果 $T \models \mathsf{x} \subseteq\!\!\!| \, \mathsf{p}$ 且 $S \supseteq T$，则存在一个赋值$v \in T$ 使得 $v(\mathsf{p}) = v(\mathsf{x})$，因此也有 $v \in S$，从而 $S \models \mathsf{x} \subseteq \mathsf{p}$ 成立。

根据类似的观察，非空原始包含原子 $\mathsf{x} \subseteq\!\!\!| \, \mathsf{p}$ 是向上封闭的，因为此时，对于所有团队 T, $T \models \mathsf{x} \subseteq \mathsf{p}$，当且仅当存在一个赋值$v \in T$ 使得 $v(\mathsf{p}) = v(\mathsf{x})$。由于我们的目标是获得对非空团队性质表达完全的逻辑，因此我们进一步要求，非空包含原子 $\mathsf{x} \subseteq\!\!\!| \, \mathsf{p}$ 中命题符号 p 的序列不含重复的命题符号。否则，我们就会得到 $\top\bot \subseteq\!\!\!| \, p_1 p_1$，没有任何团队满足它。为保持一致，我们选择将这一句法限制也应用于原始包含原子 $\mathsf{x} \subseteq\!\!\!| \, \mathsf{p}$，并将其纳入逻辑 $\mathcal{L}_{qu}$。

为获得适用于向下封闭设定的原子，我们考虑形式为 $\mathsf{p} \subseteq \mathsf{x}$ 的包含原子，它是原始包含原子的对偶。特别地，对于 $\mathsf{p} = p_1 \dots p_n$ 和 $\mathsf{x} = x_1 \dots x_n$，我们有语义等价关系 $\mathsf{p} \subseteq \mathsf{x} \equiv \mathsf{p}^{\mathsf{x}}$，其中 $\mathsf{p}^{\mathsf{x}} = p_1^{x_1} \wedge \dots \wedge p_n^{x_n}$且 $p_i^{\top} = p$和 $p_i^{\bot} = \neg p$。由于文字合取定义了向下封闭的团队性质，对偶原始包含原子也具有这一性质。同样，形式为 $\mathsf{p} \subseteq\!\!\!\bullet \, \mathsf{x}$ 的完全包含原子定义了准向下封闭的团队性质。

总而言之，我们得到了每种包含原子所需的性质：原始包含原子 $\mathsf{x} \subseteq\!\!\!| \, \mathsf{p}$ 是准向上封闭的，非空原始包含原子 $\mathsf{x} \subseteq\!\!\!| \, \mathsf{p}$ 是向上封闭的，对偶完全原始包含原子 $\mathsf{p} \subseteq\!\!\!\bullet \, \mathsf{x}$ 是拟向下封闭的，而对偶原始包含原子 $\mathsf{p} \subseteq \mathsf{x}$ 是向下封闭的。

定义好主要原子后，我们现在可以给出四种逻辑的语法。

定义 2.1。逻辑 $\mathcal{L}_{qu}$、 $\mathcal{L}_{u}$、 $\mathcal{L}_{qd}$ 和 $\mathcal{L}_{d}$ 的语法如下。

$$(\mathcal{L}_{qu}) \quad \phi ::= \bot \mid \mathsf{x} \subseteq \mathsf{p} \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi).$$
$$(\mathcal{L}_{u}) \quad \phi ::= \top \mid \mathsf{x} \subsetneq \mathsf{p} \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi).$$
$$(\mathcal{L}_{qd}) \quad \phi ::= \bullet \mid \mathsf{p} \not\supseteq \mathsf{x} \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \vee \phi).$$
$$(\mathcal{L}_{d}) \quad \phi ::= \bot \mid \mathsf{p} \subseteq \mathsf{x} \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \vee \phi).$$

常数、原子和联结词的语义都很熟悉，我们还为全原子 $\bullet$添加了如下语义子句:

$$T \models \bullet \quad \text{iff} \quad T = \mathbb{F}.$$

接下来，我们证明这些逻辑具有所需的封闭性质。

命题 2.2. 逻辑 $\mathcal{L}_{qu}$ 是准向上封闭的， $\mathcal{L}_{u}$ 是向上封闭的， $\mathcal{L}_{qd}$ 是准向下封闭的，而 $\mathcal{L}_{d}$ 是向下封闭的。

证明。对每种逻辑，按公式的复杂度归纳即可直接证明该结论；这里我们给出逻辑 $\mathcal{L}_{qu}$中 $\wedge$ 和 $\vee$的归纳情形。

设 ϕ 和 ψ 是准向上封闭公式，并假设 $S \supseteq T$。由公式的空团队性质，显然 $\emptyset \models \phi \wedge \psi$。现在假设 T 非空且 $T \models \phi \wedge \psi$。于是 $T \models \phi$ 且 $T \models \psi$，因此由公式的准向上闭包性质以及 T 非空这一假设可知， $S \models \phi$ 且 $S \models \psi$，从而 $S \models \phi \wedge \psi$。

现在考虑全局析取公式 $\phi \vee \psi$。根据假设， ϕ 具有空团队性质，因此 $\emptyset \models \phi$ ，并且 $\emptyset \models \phi \vee \psi$ 成立。现在，考虑一个非空团队T，使得 $T \models \phi \wedge \psi$。那么 $T \models \phi$ 或 $T \models \psi$，因此根据这些公式的准向上闭包， $S \models \phi$ 或 $S \models \psi$，所以如所需，$S \models \phi \vee \psi$ 。 □

准向上闭情形的一个特别之处是，全局析取$\vee$与分裂析取 $\vee$一致。

命题 2.3. 设 ϕ 和 ψ 具有空团队性质，并进一步假设 ψ 是准向上封闭的，那么 $\phi \vee \psi \equiv \phi \vee \psi$。

证明。由于 ϕ 和 ψ 都具有空团队性质，因此该语义等价在空团队上成立。现在假设 $T \neq \emptyset$。

首先，设 $T \models \phi \vee \psi$。那么存在子团队 T_1， $T_2 \subseteq T$，使得 $T = T_1 \cup T_2$、 $T_1 \models \phi$和 $T_2 \models \phi$。如果 $T_2 = \emptyset$，那么 $T_1 = T$，因此 $T \models \phi$和 $T \models \phi \vee \psi$ 成立。否则， $T_2 \neq \emptyset$ ，于是根据 ψ的准向上闭包， $T \models \psi$ ，由此可得$T \models \phi \vee \psi$ 。

另一个方向可由这些公式的空团队性质得出。假设 $T \models \phi \vee \psi$。如果 $T \models \phi$，那么 $T = T \cup \emptyset \models \phi \vee \psi$。同样，如果 $T \models \psi$，那么$T = \emptyset \cup T \models \phi \vee \psi$。 □

我们还考虑严格析取 $\vee_s$ ，其语义条款如下。

$T \models \phi \vee_s \psi$ 当且仅当存在不相交的团队 T_1 和 T_2 ，使得 $T_1 \cup T_2 = T$，
$T_1 \models \phi$ and $T_2 \models \psi$.

不难看出，在准向上闭情形下， $\phi \vee_s \psi \equiv \phi \vee \psi \equiv \phi \vee \psi$，这使得该情形能够适应其析取式语义条款的变化。

在向上封闭的情形下，若不要求空团队性质， $\phi \vee \psi \models \phi \vee \psi$ 仍然成立，但反向不成立： $\phi \vee \psi \not\models \phi \vee \psi$ 的例子是 $\emptyset \models \top \vee \top \subseteq p$，但 $\emptyset \not\models \top \vee \top \subseteq p$。相反，我们观察到另一种语义等价：分裂析取与合取之间的语义等价。

命题 2.4. 设 ϕ 和 ψ 是向上封闭公式。那么 $\phi \vee \psi \equiv \phi \wedge \psi$。

证明。 从右到左的方向显然，因此我们证明 $\phi \vee \psi \models \phi \wedge \psi$。若 $T \models \phi \vee \psi$，则存在 T 的子团队 T_1 和 T_2，使得 $T_1 \cup T_2 = T$、 $T_1 \models \phi$ 且 $T_2 \models \psi$。由公式的向上闭包可知， $T_1 \cup T_2 \models \phi$ 且 $T_1 \cup T_2 \models \psi$，因此 $T_1 \cup T_2 = T \models \phi \wedge \psi$。 □

最后，我们给出一个已知事实：分裂析取和合取无条件地对全局析取满足分配律。

事实 2.5. 设 ϕ、 ψ 和 χ 是任意公式。那么 $\psi \wedge (\chi \vee \theta) \equiv (\psi \wedge \chi) \vee (\phi \wedge \theta)$ 和 $\psi \vee (\chi \vee \theta) \equiv (\psi \vee \chi) \vee (\phi \vee \theta)$。

接下来的四节中，我们将逐一详细研究这四种逻辑，展示其确切的表达能力，并介绍各自可靠且完备的自然演绎证明系统。

为了得到表达完备性结果，我们为每种逻辑定义一种范式，借此可以表达所需的每项性质。这些范式对于证明我们所引入的证明系统的完备性定理也起着重要作用。对于（准）向上封闭逻辑，我们通过改编命题包含逻辑 [6] 的证明系统来构造该系统。对于（准）向下封闭逻辑，我们则改编 [8] 中针对 $PL^{\vee}$ 的证明系统。

2.1 准向上封闭逻辑

我们证明，逻辑 $\mathcal{L}_{qu}$ 对所有包含空团队的准向上封闭团队性质都是表达完全的，并给出一个完备公理化。

回顾 $\mathcal{L}_{qu}$ 的语法。

$$\phi ::= \bot \mid \mathsf{x} \subseteq \mathsf{p} \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi).$$

定义 $\top := \langle\rangle \subseteq \langle\rangle$，其中 $\langle\rangle$ 表示空序列。

我们的目标是证明，对于任意准向上封闭团队性质 $\mathcal{C}$，都存在一个 $\mathcal{L}_{qu}$ 中的公式对其进行定义。我们通过使用该逻辑的范式得到这一结果。

令序列 p 包含 $\mathbb{P}$ 中的所有命题符号，并回顾一下，我们假设 $\mathbb{P}$ 是有限的。对于团队 T，定义

$$\psi'_T := \bigwedge_{v \in T} \mathsf{x}^v \subseteq \mathsf{p},$$

其中，若 $v(i) = \top$，则 $\mathsf{x}^v = v(1) \ldots v(n)$；否则 $v(p_i) = 1$ and $\bot$。公式 ψ'_T 本质上作为 [6] 中 $PL(\subseteq_0)$ 的范式中的一个子公式出现。注意，由于我们将 p 定义为包含 $\mathbb{P}$ 中所有命题符号，因此存在唯一的

赋值 v' 在 $\mathbb{P}$ 上，使得 $\{v'\} \models \mathbf{x}^v \subseteq \mathbf{p}$，因此 $v' = v$。此外，对于非空团队 T， $T \models \mathbf{x}^v \subseteq \mathbf{p}$ 当且仅当 $v \in T$。

我们将在下一个引理中考察 ψ'_T-公式的一些基本性质，其中 (i) 归功于 [6]。

引理 2.6. 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是两个不包含空团队的非空团队性质。

(*i*) $S \models \psi'_T$ 当且仅当 $S = \emptyset$ 或 $S \supseteq T$。(*ii*) $\bigvee_{S\in\mathcal{D}} \psi'_S \models \bigvee_{T\in\mathcal{C}} \psi'_T$ 当且仅当对每个 $S \in \mathcal{D}$，都存在某个 $T \in \mathcal{C}$ 使得$S \supseteq T$。

证明。 (i) 若 $S = \emptyset$，则由空团队性质可得结论。若 $T = \emptyset$，则等价式两边显然都成立，因为 $\bigwedge \emptyset = \top$。

假设 $S \neq \emptyset$ 且令 $S \models \psi'_T$，其中 $\psi'_T = \bigwedge_{v\in T} \mathbf{x}^v \subseteq \mathbf{p}$。于是，对于每个赋值 $v \in T$，都有 $S \models \mathbf{x}^v \subseteq \mathbf{p}$，这意味着 $v \in S$，因此 $S \supseteq T$。反过来，假设 $S \supseteq T$，显然有 $T \models \psi'_T$，于是由公式的准向上闭包可得$S \models \psi'_T$。

(ii) 令 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 如上所述。首先假设 $\bigvee_{S\in\mathcal{D}} \psi'_S \models \bigvee_{T\in\mathcal{C}} \psi'_T$。那么对于每个 $T \in \mathcal{D}$，都存在某个 $S \in \mathcal{C}$ 使得 $\psi'_S \models \psi'_T$。由于 $S \models \psi'_S$，根据条目 (i) 还可推出 $S \models \psi'_T$ 和 $S \supseteq T$。

反过来，令 $S' \models \bigvee_{S\in\mathcal{D}} \psi'_S$。如果 $S' = \emptyset$，则根据空团队性质可得该结论，因此设 S' 非空。现在存在某个 $S \in \mathcal{D}$ 使得 $S' \models \psi'_S$，由条目 (i) 可推出 $S' \supseteq S$。根据假设，存在某个 $T \in \mathcal{C}$ 使得 $S' \supseteq S \supseteq T$。由于 $T \models \psi'_T$，且 $T \neq \emptyset$，根据公式的弱向上闭包可知 $S' \models \psi'_T$，因此 $S' \models \bigvee_{T\in\mathcal{C}} \psi'_T$。

□

现在通过考察范式，得到了表达完备性结果

$$\Psi'_{\mathcal{C}} := \bigvee_{T\in\mathcal{C}} \psi'_T,$$

其中 $\mathcal{C}$ 是一个不含空团队的非空团队性质。我们分别定义$\Psi'_{\{\emptyset\}} := \bot$。

定理 2.7. $\mathcal{L}_{qu}$ 对于所有拟向上闭团队性质 $\mathcal{C}$都是表达完全的。

证明。 每个 $\phi \in \mathcal{L}_{qu}$ 都定义了一个非空的拟向上闭性质，因此只需证明， $\mathbb{P}$ 上的任意非空拟向上闭性质 $\mathcal{C}$ 都可由某个公式 $\phi \in \mathcal{L}_{qu}$定义，即 $\mathcal{C} = \|\phi\|$。

如果 $\mathcal{C} = \{\emptyset\}$，则公式 $\bot$ 显然刻画了该团队性质。因此假设 $\{\emptyset\} \subsetneq \mathcal{C}$。现在，对于 $\mathbb{P}$ 上的任意团队 S，我们有

$$\begin{aligned} S \models \bigvee_{T\in\mathcal{C}\setminus\{\emptyset\}} \psi'_T &\iff S \models \psi'_T \text{ for some } T \in \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\} \\ &\iff S = \emptyset \text{ or } S \supseteq T \text{ for some } T \in \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\} \\ &\iff S \in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

其中第二个等价由引理 2.6 第 (ii) 项得出，最后一个等价由 $\mathcal{C}$ 的准向上闭包得出。因此得到 $\mathcal{C} = \| \bigvee_{T\in\mathcal{C}\setminus\{\emptyset\}} \psi'_T \|$，即为所求。 □

现在我们在表 1 中给出逻辑 $\mathcal{L}_{qu}$ 的一个证明系统。

$$\frac{\bot}{\phi}\,\bot\mathrm{E} \qquad \frac{}{\langle\rangle \subseteq \langle\rangle}\,\top\mathrm{I} \qquad \frac{\phi \quad \psi}{\phi\wedge\psi}\,\wedge\mathrm{I} \qquad \frac{\phi\wedge\psi}{\phi}\,\wedge\mathrm{E} \qquad \frac{\phi\wedge\psi}{\psi}\,\wedge\mathrm{E}$$

$$\frac{\phi}{\phi\vee\psi}\,\vee\mathrm{I} \qquad \frac{\psi}{\phi\vee\psi}\,\vee\mathrm{I} \qquad \frac{\phi\vee\psi \qquad \begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\,\vee\mathrm{E}$$

$$\frac{\mathrm{x}y \subseteq \mathrm{p}q}{\mathrm{x} \subseteq \mathrm{p}}\,\subseteq\text{投影规则} \qquad \frac{\mathrm{xyz} \subseteq \mathrm{uvw}}{\mathrm{xzy} \subseteq \mathrm{uwv}}\,\subseteq\text{置换 (1)} \qquad \frac{\mathrm{x} \subseteq \mathrm{p} \qquad \begin{array}{c}[\mathrm{x}\top \subseteq \mathrm{p}q]\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\mathrm{x}\bot \subseteq \mathrm{p}q]\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\,\subseteq\mathrm{Ext}$$

（1）前提是 $|y| = |v|$ 以及 $|z| = |w|$。

表 1： $\mathcal{L}_{qu}$的系统。

该系统是 [6] 中针对 $PL(\subseteq_0)$ 的系统在准向上闭片段中的一个变体。我们加入规则 $\bot$E 和 $\top$I，并回顾一下，$\langle\rangle \subseteq \langle\rangle$ 是一个重言式。合取的规则 $\wedge$I 和 $\wedge$E，以及全局析取的规则 $\vee$I 和 $\vee$E，都是标准规则。请回想，在准向上闭情形中，我们也可以用 $\vee$ 替换 $\vee$；这样得到的 $\vee$E 规则就无需对公式施加任何额外限制。这与 $PL(\subseteq_0)$ 中的并闭情形不同；在那里，我们必须要求未解除的假设来自逻辑的向下闭片段。我们为原始包含原子添加的规则包括标准的 $\subseteq$Proj 和 $\subseteq$Perm 规则。我们可以省略允许推出 $\mathrm{x}y \subseteq \mathrm{p}q \vdash \mathrm{x}yy \subseteq \mathrm{p}qq$ 以及 $\mathrm{a} \subseteq \mathrm{b}, \mathrm{b} \subseteq \mathrm{c} \vdash \mathrm{a} \subseteq \mathrm{c}$ 的弱化规则和传递规则，因为该逻辑中原始包含原子的形式在句法上阻止了这类相互作用。最后，规则 $\subseteq$Ext 是新颖的，它表明：如果我们知道某个原始包含原子 $\mathrm{x} \subseteq \mathrm{p}$ 在一个非空团队中成立，那么团队中存在一个满足它的赋值 v，并且要么 $v(q) = 1$，要么 $v(q) = 0$。如果我们在两种情况下都能推出 χ，那么就能推出 χ。

定理 2.8。 表 *1* 中的规则对于准向上封闭公式是可靠的。

证明。 我们证明规则 $\subseteq$扩展的可靠性。由于 χ 具有空团队性质，对于空团队而言，可靠性显然成立，因此假设 $T \neq \emptyset$。令 $T \models \mathrm{x} \subseteq \mathrm{p}$ 且 $T \models \Gamma$。进一步假设 $\Gamma, \mathrm{x}\top \subseteq \mathrm{p}q \models \chi$ 且 $\Gamma, \mathrm{x}\bot \subseteq \mathrm{p}q \models \chi$。回想一下，我们假设 q 不会出现在 p 中。由于 $T \models \mathrm{x} \subseteq \mathrm{p}$，存在某个赋值 v 属于 T，使得 $\{v\} \models \mathrm{x} \subseteq \mathrm{p}$。若 $v(q) = 1$，则显然 $\{v\} \models \mathrm{x}\top \subseteq \mathrm{p}q$，因此 $T \models \mathrm{x}\top \subseteq \mathrm{p}q$

并且我们可以得出结论 $T \models \chi$。否则， $v(q) = 0$ 且 $\{v\} \models \mathrm{x}\bot \subseteq \mathrm{p}q$ ，我们同样可以得出结论 $T \models \chi$。 □

与命题团队逻辑中通常的做法一样，我们证明每个公式都可证地等价于该逻辑范式中的某个公式。

引理 2.9。对于 $\phi \in \mathcal{L}_{qu}$，存在一个团队性质 $\mathcal{C}$，它要么是 $\{\emptyset\}$ ，要么不包含空集，使得 $\phi \dashv\vdash \Psi'_{\mathcal{C}} = \bigvee_{T\in\mathcal{C}} \psi'_T$。

证明。- 若 $\phi = \bot$，则令 $\mathcal{C} = \{\emptyset\}$。此时 $\Psi'_{\mathcal{C}} = \bot$ ，推导显然成立。

- 若 $\phi = \mathrm{y} \subseteq \mathrm{q}$，则令 $\mathcal{C} = \|\mathrm{y} \subseteq \mathrm{q}\| \setminus \{\emptyset\}$。我们先证明 $\Psi'_{\mathcal{C}} \vdash \mathrm{y} \subseteq \mathrm{q}$。根据 $\vee$ E，只需证明对于每个 $T \in \mathcal{C}$，都有 $\psi'_T \vdash \mathrm{y} \subseteq \mathrm{q}$。令 $T \in \mathcal{C}$。由于 $T \neq \emptyset$，存在一个赋值 $v \in T$ ，使得 $v(\mathrm{q}) = v(\mathrm{y})$，因此根据 $\wedge$E、 $\subseteq$置换和 $\subseteq$投影规则，可得 $\psi'_T \vdash \mathrm{y} \subseteq \mathrm{q}$。对于另一方向，我们证明 $\mathrm{y} \subseteq \mathrm{q} \vdash \Psi'_{\mathcal{C}}$。根据 $\subseteq$扩展、 $\vee$I 和 $\subseteq$置换，可得 $\mathrm{y} \subseteq \mathrm{q} \vdash \bigvee_{\mathrm{x}\in\{\top,\bot\}^{|r|}} \mathrm{yx} \subseteq \mathrm{qr}$，其中 $\mathrm{qr} = \mathrm{p}$。注意，每个析取项和 yx 都对应一个唯一的赋值，使得 $\{v\} \in \mathcal{C}$，因此根据 $\vee$I 可得 $\bigvee_{\mathrm{x}\in\{\top,\bot\}^{|r|}} \mathrm{yx} \subseteq \mathrm{qr} = \bigvee_{\{v\}\in\mathcal{C}} \psi'_{\{v\}} \vdash \bigvee_{T\in\mathcal{C}} \psi'_T = \Psi'_{\mathcal{C}}$。

(归纳假设) 设 $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ 是非空团队性质，且 $\phi_1 \dashv\vdash \Psi'_{\mathcal{D}_1}$ 和 $\phi_2 \dashv\vdash \Psi'_{\mathcal{D}_2}$。另外假设 $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ 各自要么是 $\{\emptyset\}$ ，要么不包含空集。

- 设 $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$。如果 $D_2 = \{\emptyset\}$，那么我们通过$\vee$I、 $\vee$E和 $\bot$E推导出 $\Psi'_{\mathcal{D}_1} \vee \Psi'_{\{\emptyset\}} = \Psi'_{\mathcal{D}_1} \vee \bot \dashv\vdash \Psi'_{\mathcal{D}_1}$。当 $\mathcal{D}_1 = \{\emptyset\}$ 时的推导类似。因此，假设两个团队性质都不包含空团队。根据归纳假设，$\vee$E和 $\vee$I，我们有 $\phi_1 \vee \phi_2 \dashv\vdash \Psi'_{\mathcal{D}_1} \vee \Psi'_{\mathcal{D}_1} = \Psi'_{\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2}$。

- 设 $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$。我们自然地令 $\mathcal{C} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$，并注意到根据假设，该交集要么是 $\{\emptyset\}$，要么不包含空团队。若 $\mathcal{C} = \{\emptyset\}$，则要么 $\mathcal{D}_1$ 要么 $\mathcal{D}_2$ 是 $\{\emptyset\}$。若 $\mathcal{D}_2 = \{\emptyset\}$，则我们由 $\wedge$E 和 $\bot$E 推导出 $\phi_1 \wedge \phi_2 \dashv\vdash \Psi'_{\mathcal{D}_1} \wedge \bot \dashv\vdash \bot = \Psi'_{\mathcal{D}_2}$。 $\mathcal{D}_1 = \{\emptyset\}$ 的情形类似。现假设 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 都不包含空团队。现在

$$\mathcal{C} = \{S \mid S \supseteq T_1 \cup T_2 \text{ for some } T_1 \subseteq \mathcal{D}_1 \text{ and } T_2 \subseteq \mathcal{D}_2\}.$$

我们首先证明 $\Psi'_{\mathcal{C}} \vdash \phi_1 \wedge \phi_2$。根据 $\vee$E 和归纳假设，只需对每个 $S \in \mathcal{C}$ 证明 $\psi'_S \vdash \Psi'_{\mathcal{D}_1} \wedge \Psi'_{\mathcal{D}_2}$。由 $\mathcal{C}$ 的构造，存在某个 $T_1 \in \mathcal{D}_1$ 使得 $S \supseteq T_1$，因此我们由 $\wedge$E 和$\vee$I 推导出 $\psi'_S \vdash \psi'_{T_1} \vdash \Psi'_{\mathcal{D}_1}$。$\Psi'_{\mathcal{D}_2}$ 的推导类似，我们由此得出 $\Psi'_{\mathcal{C}} \vdash \Psi'_{\mathcal{D}_1} \wedge \Psi'_{\mathcal{D}_2}$。

对于另一个方向，根据归纳假设，只需推导出 $\Psi'_{\mathcal{D}_1}$， $\Psi'_{\mathcal{D}_2} \vdash \Psi'_{\mathcal{C}}$。根据 $\vee$E，这归结为证明：对于所有 $T_1 \in \mathcal{D}_1$ 和$T_2 \in \mathcal{D}_2$， ψ'_{T_1}， $\psi'_{T_2} \vdash \Psi'_{\mathcal{C}}$。由于 $T_1 \cup T_2 \in \mathcal{C}$ 和 $S \supseteq T_1 \cup T_2$，我们使用 $\wedge$I 和 $\vee$I 得到所需的推导ψ'_{T_1}， $\psi'_{T_2} \vdash \psi'_{T_1\cup T_2} \vdash \Psi'_{\mathcal{C}}$。

□

借助引理 2.9 的结果，证明该系统的完备性是显而易见的。

定理 2.10。 表 *1* 中的规则构成了针对 $\mathcal{L}_{qu}$ 的完备证明系统；也就是说，对于一组 $\mathcal{L}_{qu}$-公式 $\Gamma \cup \{\phi\}$，若 $\Gamma \models \phi$，则 $\Gamma \vdash \phi$。

证明。 由紧致性，只需证明若 $\gamma \models \phi$，则 $\gamma \vdash \phi$。由引理 2.9，存在非空团队性质 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{C}$，使得 $\gamma \dashv\vdash \Psi'_{\mathcal{D}}$ 且 $\phi \dashv\vdash \Psi'_{\mathcal{C}}$。由可靠性，$\Psi'_{\mathcal{D}} \models \Psi'_{\mathcal{C}}$。若 $\Psi'_{\mathcal{D}} = \bot$，我们通过 $\bot$E 完成证明；若 $\Psi'_{\mathcal{C}} = \bot$，则同样有$\Psi'_{\mathcal{D}} = \bot$，结论立即可得。假设两个范式都不是 $\bot$，则由范式的构造，我们可以假定 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 都不包含空团队。由引理 2.6 第 (ii) 项，存在某个非空团队 $T \in \mathcal{C}$，使得 $S \supseteq T$，从而我们推出 $\psi'_S \vdash_{\wedge E} \psi'_T \vdash_{\vee I} \Psi'_{\mathcal{C}}$。现在由 $\vee$E 可得 $\Psi'_{\mathcal{D}} \vdash \Psi'_{\mathcal{C}}$。我们得出结论 $\gamma \vdash \phi$。 □

我们以一个 $\mathcal{L}_{qu}$ 推导结束本小节。

例 2.11。 我们可以在 $\mathcal{L}_{qu}$的系统中推导出 $\vdash \top \subseteq q \vee \bot \subseteq q$。

$$\dfrac{\langle\rangle \subseteq \langle\rangle \qquad \dfrac{[\top \subseteq q]}{\top \subseteq q \vee \bot \subseteq q} \vee I \qquad \dfrac{[\bot \subseteq q]}{\top \subseteq q \vee \bot \subseteq q} \vee I}{\top \subseteq q \vee \bot \subseteq q} \subseteq Ext$$

2.2 向上封闭逻辑

我们证明，逻辑 $\mathcal{L}_u$ 对于所有向上封闭的团队性质都是表达完全的，并给出一个完备公理化。

回顾向上封闭逻辑 $\mathcal{L}_u$的语法，

$$\phi ::= \top \mid \mathsf{x} \subseteqq \mathsf{p} \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi).$$

$\top$-自由片段中的任何公式都不由空团队满足，因此 $\mathcal{L}_u$ 不具有空团队性质。此外，$\langle\rangle \subseteqq \langle\rangle$ 不等价于 $\top$，因为 $T \models \langle\rangle \subseteqq \langle\rangle$ 当且仅当 $T \neq \emptyset$。回顾一下，我们将序列 p 中的变量限制为 $\mathsf{x} \subseteqq \mathsf{p}$；这样，逻辑中的所有公式都至少由一个团队满足。

我们已经看到，该逻辑只能表达向上封闭的团队性质；我们的目标是利用该逻辑的范式证明，它能够表达所有这类性质。

令序列 p 包含 $\mathbb{P}$ 中的所有命题符号。对于任意团队 T，定义

$$\psi^*_T := \bigwedge_{v \in T} \mathsf{x}^v \subseteqq \mathsf{p}.$$

注意，现在 $\psi^*_\emptyset = \bigwedge \emptyset = \top$，这正如所需，因为对于向上封闭的团队性质 $\mathcal{C}$，我们有：若 $\emptyset \in \mathcal{C}$，则 $\mathcal{C}$ 包含 $\mathbb{P}$ 上的所有团队。

公式 ψ^*_T 的行为与准向上封闭情形中的相应公式类似，但现在无需针对空团队作特殊处理。

引理 2.12. 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是非空团队性质。

(i) $S \models \psi^*_T$ 当且仅当 $S \supseteq T$。(ii) $\bigvee_{S \in \mathcal{D}} \psi^*_S \models \bigvee_{T \in \mathcal{C}} \psi^*_T$ 当且仅当对于每个 $S \in \mathcal{D}$，都存在某个 $T \in \mathcal{C}$ 使得$S \supseteq T$。

证明。 证明过程直接明了，与引理 2.6 中的证明类似。 □

现在通过考察范式得到了表达完备性结果

$$\Psi^*_{\mathcal{C}} := \bigvee_{T\in\mathcal{C}} \psi^*_T,$$

其中 $\mathcal{C}$ 是一个非空团队性质。

定理 2.13. $\mathcal{L}_u$ 对于所有非空向上闭团队性质 $\mathcal{C}$都是表达完全的。

证明. 由该逻辑的向上闭包可知，对于任意 $\phi \in \mathcal{L}_u$，都存在某个非空的 $\mathcal{C}$，使得 $\mathcal{C} = \|\phi\|$。

对于反方向，设 $\mathcal{C}$是一个非空向上闭团队性质，并考虑公式 $\Psi^*_{\mathcal{C}} = \bigvee_{T\in\mathcal{C}} \psi^*_T$。

对于 $\mathbb{P}$上的任意团队 S，我们有

$$\begin{aligned} S \models \bigvee_{T\in\mathcal{C}} \psi^*_T &\iff S \models \psi^*_T \text{ for some } T \in \mathcal{C} \\ &\iff S \supseteq T \text{ for some } T \in \mathcal{C} \\ &\iff S \in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

其中第二个等价关系由引理 2.12 的第 (i) 项得出，最后一个等价关系则由此得出。我们得出 $\mathcal{C} = \| \bigvee_{T\in\mathcal{C}} \psi^*_T \|$。 □

我们在表 2 中给出逻辑 $\mathcal{L}_u$ 的一个证明系统。该系统与 $\mathcal{L}_{qu}$ 的证明系统非常相似，只需省略规则 $\bot$E，将规则 $\top$I 中的 $\langle\rangle \subseteq \langle\rangle$ 替换为 $\top$，最后将包含符号 $\subseteq$ 替换为其非空变体 $\subseteq$。联结词 $\wedge$ 和 $\vee$ 的规则保持不变。

$\dfrac{}{\top}\ \top\text{I}$ 表 1 中的规则 $\wedge$I、 $\wedge$E、 $\vee$I 和 $\vee$E。

$$\frac{\mathbf{x}y \subseteq \mathbf{p}q}{\mathbf{x} \subseteq \mathbf{p}}\ \subseteq\text{投影规则} \qquad \frac{\mathbf{xyz} \subseteq \mathbf{uvw}}{\mathbf{xzy} \subseteq \mathbf{uwv}}\ \subseteq\text{置换 (1)} \qquad \frac{\mathbf{x} \subseteq \mathbf{p} \qquad \begin{array}{c}[\mathbf{x}\top \subseteq \mathbf{p}q] \\ \vdots \\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\mathbf{x}\bot \subseteq \mathbf{p}q] \\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\ \subseteq\text{Ext}$$

(1) 前提是 $|y| = |v|$ 和 $|z| = |w|$。

表 2： $\mathcal{L}_u$的系统。

定理2.14。 表 *2* 中的规则对于向上封闭公式是可靠的。

证明。 这是一个常规证明，其中尤其是，证明 $\subseteq$扩展 的可靠性与定理 2.8 中 $\subseteq$扩展 的可靠性证明类似。 □

我们证明，每个公式都可证明地等价于该逻辑范式中的某个公式。

引理 2.15 $\phi \in \mathcal{L}_u$ $\mathcal{C}$ $\phi \dashv\vdash .. </style>$对于，存在 $\Psi^*_{\mathcal{C}} = \bigvee_{T\in\mathcal{C}} \psi^*_T$ 一个非空团队性质，使得。

证明。 - 如果 $\phi = \top$，那么令 $\mathcal{C} = \{\emptyset\}$。现在 $\Psi^*_{\mathcal{C}} = \psi^*_{\emptyset} = \top$，因此推导是平凡的。

- 如果 $\phi = \mathsf{y} \subseteq \mathsf{q}$，则令 $\mathcal{D} = \|\mathsf{y} \subseteq \mathsf{q}\|$。我们首先证明 $\Psi^*_{\mathcal{D}} \vdash \mathsf{y} \subseteq \mathsf{q}$。注意，$\emptyset \notin \mathcal{D}$。因此，每个 $T \in \mathcal{D}$ 都有一个赋值 $v \in T$，使得 $v(\mathsf{q}) = v(\mathsf{y})$，于是我们通过 $\vee$E、 $\wedge$E、 $\subseteq$置换和 $\subseteq$投影规则推导出 $\mathsf{y} \subseteq \mathsf{q}$。

对于另一个方向，使用引理 2.9 证明中相应 $\subseteq$-情形的论证，并使用规则 $\subseteq$扩展，而不是 $\subseteq$扩展。

(IH) 设 $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ 是非空团队性质，使得 $\phi_1 \dashv\vdash \Psi^*_{\mathcal{D}_1}$ 且 $\phi_2 \dashv\vdash \Psi^*_{\mathcal{D}_2}$。

- 若 $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$，则根据 $\vee$E、 $\vee$I 和归纳假设，我们有 $\phi_1 \vee \phi_2 \dashv\vdash \Psi^*_{\mathcal{D}_1} \vee \Psi^*_{\mathcal{D}_1} = \Psi^*_{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2}$。
- 若 $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$，令

$$\mathcal{C} = \{T \mid S_1 \cup S_2 \subseteq T \text{ for some } S_1 \subseteq \mathcal{D}_1 \text{ and } S_2 \subseteq \mathcal{D}_2\}.$$

接下来，我们按照引理 2.9 证明中相应的 $\wedge$-情形进行推理，但不考虑与空团队有关的特殊情形。

□

现在我们可以证明向上封闭逻辑 $\mathcal{L}_u$ 的证明系统具有完备性。

定理 2.16. 表 *2* 中的规则构成了 $\mathcal{L}_u$ 的完备证明系统；也就是说，对于一组 $\mathcal{L}_u$-公式 $\Gamma \cup \{\phi\}$，若 $\Gamma \models \phi$，则 $\Gamma \vdash \phi$。

证明。 根据紧致性，只需证明如果 $\gamma \models \phi$，那么 $\gamma \vdash \phi$。根据引理 2.15，存在非空团队性质 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$，使得 $\gamma \dashv\vdash \Psi^*_{\mathcal{D}_1}$ 和 $\phi \dashv\vdash \Psi^*_{\mathcal{D}_2}$。根据可靠性， $\Psi^*_{\mathcal{D}_1} \models \Psi^*_{\mathcal{D}_2}$。根据引理 2.12 的第 (ii) 项，对于每个 $S \in \mathcal{D}$，都存在某个$T \in \mathcal{C}$使得 $S \supseteq T$。因此我们推导出 $\psi^*_S \vdash \psi^*_T \vdash_{\vee I} \Psi^*_{\mathcal{C}}$；如果 $S \in \mathcal{D}$，第一步显然成立，否则则通过 $\wedge$E 推导，或者在 $\emptyset \in \mathcal{C}$时通过 $\top$I 推导。因此根据 $\vee$E， $\Psi^*_{\mathcal{D}} \vdash \Psi^*_{\mathcal{C}}$。由此得出 $\gamma \vdash \phi$。□

我们以一个示例推导结束本小节 $\mathcal{L}_u$。

例2.17。 我们可以在针对 $\mathcal{L}_u$ 的系统中推导出 $\top \subseteq p \vdash \top\top \subseteq pq \vee \top\bot \subseteq pq$。该推导与在针对 $\mathcal{L}_{qu}$ 的系统中推导 $\vdash \top \subseteq q \vee \bot \subseteq q$ 类似，但请注意此处 $\emptyset \not\models \top \subseteq q \vee \bot \subseteq q$。

$$\dfrac{\mathsf{x} \subseteq \mathsf{p} \qquad \dfrac{[\mathsf{x}\top \subseteq \mathsf{p}q]}{\mathsf{x}\top \subseteq \mathsf{p}q \vee \mathsf{x}\bot \subseteq \mathsf{p}q} \vee I \qquad \dfrac{[\mathsf{x}\bot \subseteq \mathsf{p}q]}{\mathsf{x}\top \subseteq \mathsf{p}q \vee \mathsf{x}\bot \subseteq \mathsf{p}q} \vee I}{\mathsf{x}\top \subseteq \mathsf{p}q \vee \mathsf{x}\bot \subseteq \mathsf{p}q} \subseteq Ext$$

2.3 拟向下闭逻辑

我们从（拟）向上闭情形转向拟向下封闭的情形，并旨在证明逻辑 $\mathcal{L}_{qd}$ 对所有拟向下封闭的团队性质都是表达完全的。我们还通过修改 [8] 中针对 $PL^{\vee}$ 的证明系统，为该逻辑引入一个可靠且完备的证明系统。回顾逻辑 $\mathcal{L}_{qd}$ 的语法，

$$\phi ::= \bullet \mid \mathsf{p} \subseteq \mathsf{x} \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \vee \phi).$$

我们已经看到，这种逻辑具有完整团队性质，且是拟向下封闭的。请注意，由于全团队原子 $\bullet$，这种逻辑不具有空团队性质。不过， $\bullet$自由片段具有空团队性质。借助全对偶原始包含原子，我们有 $\|\mathsf{p} \subseteq \mathsf{x}\| = \|\mathsf{p}^{\mathsf{x}}\| \cup \{\mathbb{F}\}$，并且 $\|p_1 p_1 \subseteq \top\bot\| = \{\emptyset, \mathbb{F}\}$。

接下来，我们将逻辑 $PD^{\vee}$ 从 [8] 的范式改造为适用于本逻辑的范式，同时特别注意完整团队。首先，我们定义能够刻画子团队（模去完整团队）的公式。对于团队 T 以及一个包含$\mathbb{P}$中所有变量的序列p，定义

$$\theta'_T := \bigvee_{v \in T} \mathsf{p} \subseteq \mathsf{x}^v,$$

其中我们规定 $\theta'_\emptyset := p_1\mathsf{p} \subseteq \top\bot \ldots \bot$。因此，对于所有团队 T，公式 θ'_T是并封闭的，并具有空团队性质。

引理 2.18. （本质上 *[8]*）设 T 与 S 是关于 $\mathbb{P}$中变量的团队，并设 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{C}$ 是不包含完整团队 $\mathbb{F}$的非空团队性质。

(i) $S \models \theta'_T$ 当且仅当 $S \subseteq T$ 或 $S = \mathbb{F}$。

(ii) $\bigvee_{S\in\mathcal{D}} \theta'_S \models \bigvee_{T\in\mathcal{C}} \theta'_T$ *iff for each* $S \in \mathcal{D}$ *there exists* $T \in \mathcal{C}$ *such that* $S \subseteq T$.

证明。 (i) 显然，若 $S = \mathbb{F}$ 或 $S = \emptyset$，则等价式两边均成立。假设既非 $S \neq \mathbb{F}$ 亦非 $S \neq \emptyset$。则$S \models \bigvee_{v\in T} \mathsf{p} \subseteq \mathsf{x}^v$ 当且仅当每个 $v' \in S$ 都使得对某个 $v \in T$有 $\{v'\} \models \mathsf{p} \subseteq \mathsf{x}^v$，而这仅在 $v' = v$时成立。因此，得到与 $S \subseteq T$ 的等价。

(ii) 假设 $\mathcal{D}$与 $\mathcal{C}$是不包含完整团队 $\mathbb{F}$的非空团队性质。首先假设 $\bigvee_{S\in\mathcal{D}} \theta'_S \models \bigvee_{T\in\mathcal{C}} \theta'_T$。注意到对每个$S \in \mathcal{D}$，由(i)可得 $S \models \theta'_S$，因此 $S \models \bigvee_{S\in\mathcal{D}} \theta'_S$。于是由假设可得$S \models \bigvee_{T\in\mathcal{C}} \theta'_T$，从而对某个 $T \in \mathcal{C}$有 $S \models \theta'_T$，对此由(i)可得 $S \subseteq T$。

对于另一个方向，设 $S' \models \bigvee_{S\in\mathcal{D}} \theta'_S$。我们证明 $S' \models \bigvee_{T\in\mathcal{C}} \theta'_T$。若$S' = \mathbb{F}$，则由全团队性质即可得证，因此假设 $S' \neq \mathbb{F}$。于是由第 (i) 项以及存在某个 $S \in \mathcal{D}$ 使得 $S' \models \theta'_S$ 这一事实，可得 $S' \subseteq S$。根据假设，存在某个 $T \in \mathcal{C}$使得 $S' \subseteq S \subseteq T$。再次由第 (i) 项，我们有 $S' \models \theta'_T$。我们得出结论 $S' \models \bigvee_{T\in\mathcal{C}} \theta'_T$。

□

我们现在定义不含完整团队的 $\mathcal{C}$ 的范式，即

$$\Theta'_{\mathcal{C}} := \bigvee_{T\in\mathcal{C}} \theta'_T,$$

并规定 $\Theta'_{\{\mathbb{F}\}} := \bullet$。

我们改编了 $PD^\vee$ 的向下封闭逻辑完备性证明，该证明出自 [8]。

定理 2.19. *$\mathcal{L}_{qd}$ 对所有准向下封闭团队性质而言都是表达完全的。*

证明. 每个 $\phi \in \mathcal{L}_{qd}$ 都定义了一种包含完整团队的准向下封闭性质，因此只需证明，任意关于 $\mathbb{P}$ 的准向下封闭性质 $\mathcal{C}$，都可由某个公式 $\phi \in \mathcal{L}_{qd}$ 定义，即 $\mathcal{C} = \|\phi\|$。

若 $\mathcal{C} = \{\mathbb{F}\}$，则公式 $\Theta'_{\mathcal{C}} = \bullet$ 显然定义了该性质。因此，假设 $\{\mathbb{F}\} \subsetneq \mathcal{C}$。现在，对于任意关于 $\mathbb{P}$ 的团队 S，我们有

$$\begin{aligned} S \models \bigvee_{T\in\mathcal{C}\setminus\{\mathbb{F}\}} \theta'_T &\iff S \models \theta'_T \text{ for some } T \in \mathcal{C}\setminus\{\mathbb{F}\} \\ &\iff S = \mathsf{F} \text{ or } S \subseteq T \text{ for some } T \in \mathcal{C}\setminus\{\mathbb{F}\} \\ &\iff S \in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

其中第二个等价关系由引理 2.18 的 (i) 项得出。因此 $\mathcal{C} = \| \bigvee_{T\in\mathcal{C}\setminus\{\mathbb{F}\}} \theta'_T \|$，正如所需。 □

接下来，我们定义一个用于表 3 中 $\mathcal{L}_{qd}$ 的证明系统，其灵感来自 [8] 中用于 $PL^\vee$ 的证明系统。

联结词的规则与 [8], 中用于 $PL^\vee$ 的系统完全相同，但有两点例外。第一，推导 $\phi\vee(\psi\vee\chi) \vdash (\phi\vee\psi)\vee\chi$ 的规则可以省略，另一系统中也可以省略（正如 [7] 中所指出的）；在证明 [8], 中系统 $PL^\vee$ 的完备性时，该规则只用于 PL 中的公式，而这些公式可由规则 $\vee$E 和 $\vee$I 推导。第二，为保证可靠性，我们将由 $\vee$I 引入的析取限制在具有空团队性质的 $\mathcal{L}_{qd}$ 片段内，即不含 $\bullet$ 的片段。与他们的系统类似，$\vee$E 的可靠性取决于结论是否并封闭，而 $\mathcal{L}_{qd}$ 中不含 $\vee$ 的片段具有这一性质。

我们的规则 $\bot\vee$E 是将 [8] 中相应的规则转换到具有全团队性质的情形所得，可由等式 $\|qq \mathbin{⫅} \top\bot\| = \|\bot\| \cup \{\mathbb{F}\}$ 看出。类似地，规则 $\bot$E 将 [8] 中的相应规则转换到我们的情形；注意到$\|q \mathbin{⫅} \top \wedge q \mathbin{⫅} \bot\| = \{\emptyset, \mathbb{F}\}$，因此为保证可靠性，我们在此也假设该规则的结论属于逻辑的无 $\bullet$ 片段。通过 $\top$I 和 $\subseteq$Ext，我们可以推导出排中律；用我们的记号表示，即 $q \mathbin{⫅} \top \vee q \mathbin{⫅} \bot$。

我们在系统中加入两条新规则，以处理完整的对偶原始包含原子：$\mathbin{⫅}$Proj 和 $\mathbin{⫅}$Perm。这样做只是为了能够消去完整对偶原始包含原子中的隐藏合取项，例如：$qr \mathbin{⫅} \bot\top \vdash rq \mathbin{⫅} \top\bot \vdash r \mathbin{⫅} \top$；在 $PL^\vee$ 中，它对应于以下推导 $\neg q \wedge r \vdash \neg q$，该推导可由 $\wedge$E 推得。

最后，我们加入两条新规则来处理 $\bullet$：$\bullet$I 使我们能够从分裂析取中消去 $\bullet$，而 $\bullet$E 则允许我们从 $\bullet$ 推导出任意公式，这归功于该逻辑的全团队性质。

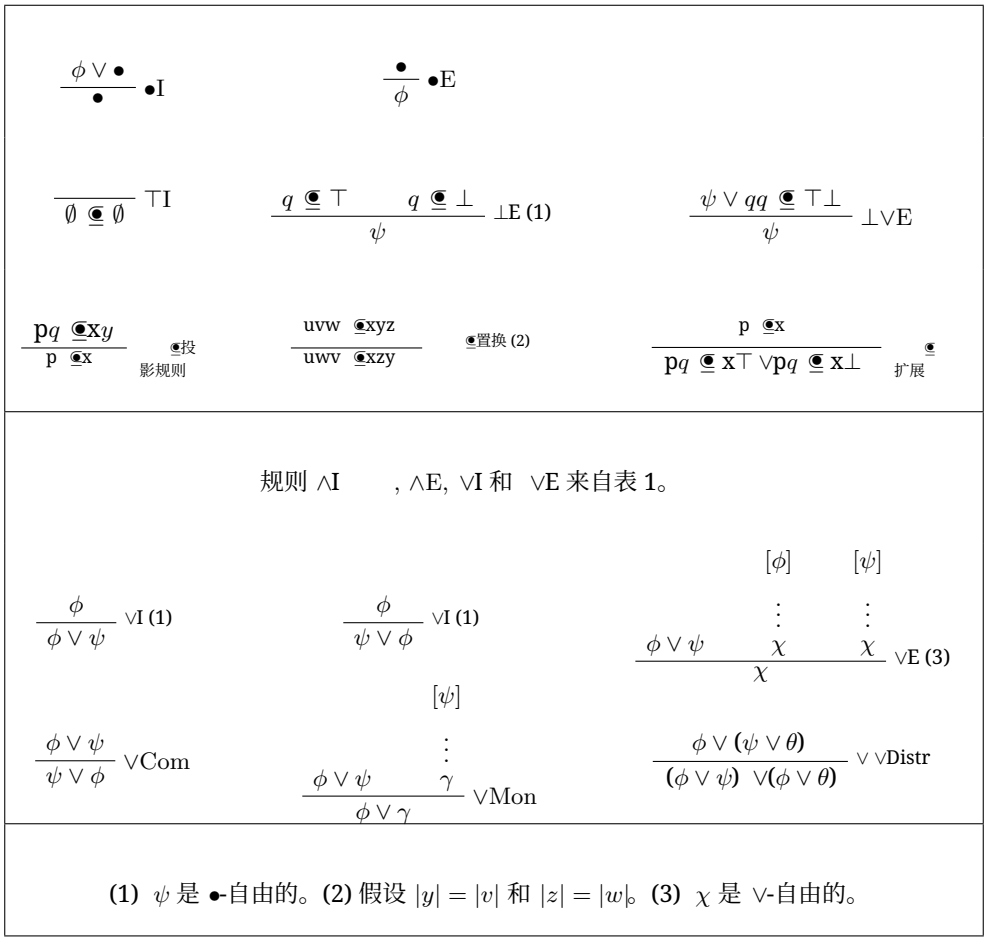

表 3： $\mathcal{L}_{qd}$的系统。

定理2.20。 表 *3* 中的规则对于准向下封闭公式是可靠的。

证明。 这是一个常规证明，我们列出涉及 •I和 ⩒扩展的情形。首先，我们证明$\psi \vee \bullet \vdash \bullet$若 $T \models \psi \vee \bullet$，则存在子团队 T_1，T_2属于 T，使得 $T_1 \cup T_2 = T$且$T_1 \models \phi$ 且 $T_2 \models \bullet$。因此 $T_2 = \mathbb{F}$，这意味着 $T = \mathbb{F}$，由此可得 $T \models \bullet$。

接下来，我们证明 $\mathrm{p} \Subset \mathrm{x} \vdash \mathrm{p}q \Subset \mathrm{x}\top \vee \mathrm{p}q \Subset \mathrm{x}\bot$。设 $T \models \mathrm{p} \Subset \mathrm{x}$，且 $T \models p_i p_i \Subset \top\bot$ 对于序列 p中的某个变量 p_i，那么 T 要么为空，要么是完整团队，因此满足结论。因此，假设不存在这样的 p_i，且 T 既非空团队也非完整团队。考虑子团队 $T_1 = \{v \in T \mid v(q) = 1\}$和 $T_2 = \{v \in T \mid v(q) = 0\}$。显然， $T_1 \cup T_2 = T$，$T_1 \models \mathrm{p}q \Subset \mathrm{x}\top$ 且 $T_2 \models \mathrm{p}q \Subset \mathrm{x}\bot$。由此得出 $T \models \mathrm{p}q \Subset \mathrm{x}\top \vee \mathrm{p}q \Subset \mathrm{x}\bot$。 □

我们在该系统中给出一些有趣的推导。

引理2.21。 设 α、β_1 和 β_2 属于 $\mathcal{L}_{qd}$的 •-自由片段和 ∨-自由片段。

(i) $\phi \vee \bullet \dashv\vdash \bullet$.

(ii) $\phi \vee \bullet \dashv\vdash \phi$。

(*iii*) p $\Subset$ x, q $\Subset$ y $\dashv\vdash$ pq $\Subset$ xy。 *($\Subset Aug$)*

(iv) pq $\Subset$xy $\dashv\vdash$pqq $\Subset$xyy.

(v) $(\phi \vee \psi) \vee (\phi \vee \chi) \vdash \phi \vee (\psi \vee \chi)$. *($\vee\vee\vee Distr$)*

(vi) $\phi \wedge (\psi_1 \vee \psi_2) \dashv\vdash (\phi \wedge \psi_1) \vee (\phi \wedge \psi_2)$ *($\wedge\vee Distr$)*

(vii) $\alpha \wedge (\beta \vee \beta_2) \dashv\vdash (\alpha \wedge \beta_1) \vee (\alpha \wedge \beta_2)$ *($\wedge\vee Distr$)*

证明。 (i) 根据 •I和 •E。

(ii) 从左到右的方向由 $\vee$E 和 •E 得出，反方向则由 $\vee$I 得出。

(iii) 从右到左的方向由 $\Subset$Perm 和 $\Subset$Proj 得出。对于另一个方向，我们使用规则 $\Subset$Ext、 $\vee$E、 $\Subset$Perm、 $\Subset$Proj 和 $\perp$E。我们在表4中详细展示一元情形 $p \Subset \top$, $q \Subset \perp \vdash pq \Subset \top\perp$ 的推导。

$$\dfrac{\dfrac{p \Subset \top}{pq \Subset \top\top \vee pq \Subset \top\perp}\,\Subset\text{Ext} \qquad [pq \Subset \top\perp] \qquad \dfrac{\dfrac{[pq \Subset \top\top]}{p \Subset \top}\,\Subset\text{投影规则, }\Subset\text{置换} \qquad \dfrac{[pq \Subset \perp\perp]}{p \Subset \perp}\,\Subset\text{投影规则, }\Subset\text{置换}}{pq \Subset \top\perp}\,\perp\text{E}}{pq \Subset \top\perp}\,\vee\text{E} \qquad \dfrac{\dfrac{q \Subset \perp}{pq \Subset \top\perp \vee pq \Subset \perp\perp}\,\Subset\text{扩展, }\Subset\text{置换 (1)} \qquad [pq \Subset \top\perp]}{pq \Subset \top\perp}\,\vee\text{E}}{pq \Subset \top\perp}\,\vee\text{E}$$

表4

(iv) 根据 $\Subset$投影规则、 $\Subset$置换以及条目 (iii)。

(v)-(vii) 与 [8],中联结词的规则相同。

□

在给出完备性证明之前，我们先证明 $\mathcal{L}_{qd}$ 中的任意公式都可证明地等价于一个范式中的公式。

引理 2.22. 对于 $\phi \in \mathcal{L}_{qu}$，存在一个非空团队性质 $\mathcal{C}$，它要么是 $\mathbb{F}$，要么不包含完整团队，使得 $\phi \dashv\vdash \Theta'_{\mathcal{C}} = \bigvee_{T\in\mathcal{C}} \theta'_T$。

证明. 关于 • 和 $\Subset$-原子的情形是新的，而其他归纳步骤（对 • 子公式的处理除外）基本上源自 [8] 中关于 $PL^{\vee}$ 的相应结果。

- 若 $\phi = \bullet$，则对于 $\Theta'_{\{\mathbb{F}\}} = \bullet$，推导是平凡的。- 令 $\phi =$ q $\Subset$ y。若根据 $\Subset$投影规则和 $\perp$E 可以得到带有 $y_i \neq y_j$ 的 q $\Subset$ y $\dashv\vdash rr \Subset y_iy_j$，那么我们也有 $rr \Subset y_iy_j \dashv\vdash p_1$p $\Subset \top\perp\ldots\perp$：从左到右的方向由 $\vee$I 和 $\perp\vee$E 得出，而从右到左的方向则使用

$\Subset$投影规则、 $\vee$I 和 $\perp\vee$E。因此，假设情况并非如此，那么 $T = \{v \mid v \models$ q$_{\mathrm{x}}\}$ 非空。现在 q $\Subset$ y $\dashv\vdash \bigvee_{v\in T}$p $\Subset$ x$^v = \Theta'_{\{t\}}$，其中从左到右的方向由 $\Subset$置换 和 $\Subset$扩展 得出，而从右到左的方向则由 $\Subset$投影规则、 $\Subset$置换 和 $\vee$E 得出。

(IH) 令 $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ 为非空团队性质，使得 $\phi_1 \dashv\vdash \Theta'_{\mathcal{D}_1}$ 且 $\phi_2 \dashv\vdash \Theta'_{\mathcal{D}_2}$。此外，假设 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 各自要么是 $\{\mathbb{F}\}$，要么不包含全集。

- 设 $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$。若 $\mathcal{D}_2 = \{\mathbb{F}\}$，则只需推导 $\Theta'_{\mathcal{D}_1} \vee \bullet \dashv\vdash \Theta'_{\mathcal{D}_1}$，其从左到右方向由 $\vee$E 与 $\bullet$E 得出，从右到左方向由 $\vee$I 得出。当 $\mathcal{D}_1 = \{\mathbb{F}\}$ 时的情形类似，因此我们可以假设两个团队性质都不包含完整团队。由 $\vee$E 与 $\vee$I 可得
$\phi_1 \vee \phi_2 \dashv\vdash \bigvee_{T \in \mathcal{C}} \theta'_T \vee \bigvee_{S \in \mathcal{D}} \theta'_S \dashv\vdash \bigvee_{T'} \theta'_{T'}$，其中 $T' \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$。
- 设 $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$。若 $\mathcal{D}_2 = \{\mathbb{F}\}$，则有 $\phi_1 \vee \phi_2 \dashv\vdash \phi_1 \vee \bullet \dashv\vdash \bullet = \Theta'_{\{\mathbb{F}\}}$，其从左到右方向由 $\vee$Mon 与 $\bullet$I 得出，从右到左方向由 $\bullet$E 得出。当 $\mathcal{D}_1 = \{\mathbb{F}\}$ 时的情形类似。现假设 $\mathcal{D}_1$ 与 D_2 都不包含完整团队。我们有如下推导。

$$
\begin{aligned}
\phi_1 \vee \phi_2 &\dashv\vdash \bigvee_{T \in \mathcal{D}_1} \theta'_T \vee \bigvee_{S \in \mathcal{D}_2} \theta'_S && (\vee Mon) \\
&\vdash \bigvee_{T \in \mathcal{D}_1} (\theta'_T \vee (\bigvee_{S \in \mathcal{D}_2} \theta'_S)) && (\vee \vee Distr, \vee Com) \\
&\vdash \bigvee_{T \in \mathcal{D}_1} \bigvee_{S \in \mathcal{D}_2} (\theta'_T \vee \theta'_S) && (\vee \vee Distr) \\
&\vdash \bigvee_{(T,S) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2} \theta'_{T \cup S} && (\vee E, \bot \vee E)
\end{aligned}
$$

对于最后一步，我们使用 $\vee$E 移除重复的（拆分）析取项 $\mathrm{p} \trianglelefteq \mathbf{x}^v$ in case$T \cap S \neq \emptyset$，同时记住，对于所有团队 T'，特征公式 $\theta'_{T'}$都属于不含 $\vee$ 的片段。同理，若 $T = \emptyset$ or $S = \emptyset$，我们使用 $\bot \vee$E 移除除一个之外的所有全局析取项 $\theta'_\emptyset$。

我们可以先使用 $\vee$I，再使用 $\vee \vee \vee$Distr，最后使用 $\vee$Mon，从而反向进行推导。注意，公式满足 $\vee$I 所要求的空团队性质。

- 令 $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$。若 $\mathcal{D}_2 = \{\mathbb{F}\}$，则根据 $\wedge$E、$\wedge$I 和 $\bullet$E，我们有 $\phi_1 \wedge \phi_2 \dashv\vdash \phi_1 \wedge \bullet \dashv\vdash \bullet = \Theta'_{\{\mathbb{F}\}}$。现在假设 $\mathcal{D}_1$ 和 D_2 都不包含完整团队。我们证明 $\phi_1 \wedge \phi_2 \dashv\vdash \bigvee_{T' \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2} \theta'_{T'}$。

$$
\begin{aligned}
\phi_1 \wedge \phi_2 &\dashv\vdash \bigvee_{T\in\mathcal{D}_1} \theta'_T \wedge \bigvee_{S\in\mathcal{D}_2} \theta'_S && (\wedge I, \wedge E)\\
&\dashv\vdash \bigvee_{T\in\mathcal{D}_1}\bigvee_{S\in\mathcal{D}_2} (\theta'_T \wedge \theta'_S) && (\wedge \vee Distr)\\
&\dashv\vdash \bigvee_{T\in\mathcal{D}_1}\bigvee_{S\in\mathcal{D}_2}\bigvee_{v\in T}\bigvee_{w\in S} (\mathsf{p} \subseteq \mathsf{x}^v \wedge \mathsf{p} \subseteq \mathsf{x}^w) && (\vee I, \vee E, \wedge \vee Distr)\\
&\vdash \bigvee_{T\in\mathcal{D}_1}\bigvee_{S\in\mathcal{D}_2}\bigvee_{v'\in T\cap S} (\mathsf{p} \subseteq \mathsf{x}^{v'} \wedge \mathsf{p} \subseteq \mathsf{x}^{v'}) && (\bot \vee E(\subseteq Proj/Perm/Aug))\\
&\vdash \bigvee_{T\in\mathcal{D}_1}\bigvee_{S\in\mathcal{D}_2}\bigvee_{v'\in T\cap S} (\mathsf{p} \subseteq \mathsf{x}^{v'}) && (\wedge E)\\
&= \bigvee_{(T,S)\in\mathcal{D}_1\times\mathcal{D}_2} \theta'_{T\cap S}.
\end{aligned}
$$

在倒数第二步中，我们消去所有满足 $v \neq w$ 的形如 $(\mathsf{p} \subseteq \mathsf{x}^v \wedge \mathsf{p} \subseteq \mathsf{x}^w)$ 的析取分支。对于从右到左的方向，使用 $\wedge I$ 和 $\vee$I 反向执行前几步。

□

现在我们可以证明该系统的完备性了。

定理 2.23. 设 $\Sigma \cup \{\psi\}$ 是 $\mathcal{L}_{qd}$ 中的公式集合。那么 $\Sigma \models \psi$ 蕴含 $\Sigma \vdash \psi$。

证明。根据紧致性，只需证明如果 $\gamma \models \phi$，那么 $\gamma \vdash \phi$。因此，假设$\gamma \models \phi$。由引理 2.22，存在非空团队性质 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$，它们要么是 $\{\mathbb{F}\}$，要么不包含完整团队，并且满足 $\phi_1 \dashv\vdash \Theta'_{\mathcal{D}_1}$ 和 $\phi_2 \dashv\vdash \Theta'_{\mathcal{D}_2}$。因此，根据可靠性，$\Theta'_{\mathcal{D}_1} \models \Theta'_{\mathcal{D}_2}$，只需推导出 $\Theta'_{\mathcal{D}_1} \vdash \Theta'_{\mathcal{D}_2}$

如果 $\mathcal{D}_1 = \{\mathbb{F}\}$，那么我们可由 $\bullet$E 推导出 $\Theta'_{\mathcal{D}_1} = \bullet \vdash \Theta'_{\mathcal{D}_2}$；如果 $\mathcal{D}_2 = \{\mathbb{F}\}$，那么也有 $\mathcal{D}_1 = \{\mathbb{F}\}$，因此结论显然成立。

现在我们可以假设 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 不包含 $\mathbb{F}$。根据引理 2.18 的第 (ii) 项，对于每个 $T \in \mathcal{D}_1$，存在某个 $S \in \mathcal{D}_2$ 使得 $S \supseteq T$。现在由 $\vee$I得到 $\theta'_T \vdash \theta'_T \vee \theta'_{S\setminus T} = \theta'_S$，因为 $\theta'_{S\setminus T}$ 是 $\bullet$-自由的，所以可以使用该规则。然后我们应用$\vee$I得到推导 $\theta'_S \vdash \Theta'_{\mathcal{D}_2}$。由$\vee$E可得 $\Theta'_{\mathcal{D}_1} \vdash \Theta'_{\mathcal{D}_2}$，因此$\gamma \vdash \phi$。 □

2.4 向下封闭逻辑

我们现在介绍逻辑 $\mathcal{L}_d$，以完成本节所考察的（准）向上和向下封闭逻辑的对偶图景。我们简要讨论该逻辑的表达完备性和完备证明系统，因为它们基本上可以由 [8] 中的 $PL^{\vee}$的相关结果推出。回顾一下，$PL^{\vee}$具有如下语法 $\phi ::= \bot \mid p \mid \neg p \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \vee \phi)$，而向下封闭逻辑 $\mathcal{L}_d$ 的语法为

$$\phi ::= \bot \mid \mathsf{p} \subseteq \mathsf{x} \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \vee \phi).$$

由于以下等价关系 $q \subseteq \top \equiv q$ 和 $q \subseteq \bot \equiv \neg q$，我们可以对 $PL^{\vee}$ 使用与 [8] 中相同的语义论证。

设 p 包含 $\mathbb{P}$ 中的所有命题符号。由于 $\mathsf{p} \subseteq \mathsf{x} \equiv \mathsf{p}^{\mathsf{x}}$，我们直接转换 [8] 中 $PL^{\vee}$ 的范式，从而得到

$$\Theta_{\mathcal{C}}^{*} := \bigvee_{T \in \mathcal{C}} \bigvee_{v \in T} \mathsf{p} \subseteq \mathsf{x}^{v},$$

它刻画了非空团队性质 $\mathcal{C}$ 的向下闭包。因此，我们省略证明，仅陈述关于 $\mathcal{L}_d$ 的表达完备性结果。

定理 2.24。 $\mathcal{L}_d$ 对于所有非空的向下封闭团队性质 $\mathcal{C}$ 都是表达完全的。

自然演绎证明系统也类似于 [8], 中用于 $PL^{\vee}$ 的系统，我们在表 5 中定义了用于 $\mathcal{L}_d$ 的证明系统。

$\dfrac{}{\langle\rangle \subseteq \langle\rangle}\ \top\mathrm{I}$ $\qquad$ $\dfrac{q \subseteq \top \qquad q \subseteq \bot}{\psi}\ \bot\mathrm{E}$ $\qquad$ $\dfrac{\psi \vee \bot}{\psi}\ \bot\vee\mathrm{E}$

$\dfrac{\mathsf{p}q \subseteq \mathsf{x}y}{\mathsf{p} \subseteq \mathsf{x}}$ ⊆投影规则 $\qquad$ $\dfrac{\mathsf{uvw} \subseteq \mathsf{xyz}}{\mathsf{uwv} \subseteq \mathsf{xzy}}\ \subseteq$置换 (1) $\qquad$ $\dfrac{\mathsf{p} \subseteq \mathsf{x}}{\mathsf{p}q \subseteq \mathsf{x}\top \vee \mathsf{p}q \subseteq \mathsf{x}\bot}\ \subseteq\mathrm{Ext}$

规则 $\wedge$I $\quad$, $\wedge$E, $\vee$I 与 $\vee$E 来自表 1。

$\dfrac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee\mathrm{I}$ $\qquad$ $\dfrac{\phi}{\psi \vee \phi}\ \vee\mathrm{I}$ $\qquad$ $\dfrac{\phi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\phi] \\ \vdots \\ \chi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}\ \vee\mathrm{E}\ (2)$

规则 $\vee$Com $\quad$, $\vee$Mon 与 $\vee\vee$Distr 来自表 5。

(1) 假定 $|y| = |v|$ 与 $|z| = |w|$。 (2) χ 不含 $\vee$。

表 5： $\mathcal{L}_d$的系统。

联结词的规则与 $PL^{\vee}$ 在 [8], 中的系统相同，但推导 $\phi \vee (\psi \vee \chi) \vdash (\phi \vee \psi) \vee \chi$ 的规则除外；正如在介绍 $\mathcal{L}_{qd}$的系统时所讨论的，该规则可以从两个系统中省略。我们的规则 $\bot\vee$E也出现在 [8], 中，而规则 $\bot$E是对 [8]中相应规则的直接翻译。借助 $\top$I和 $\subseteq$扩展，我们可以推导出排中律，按我们的记法即 $q \subseteq \top \vee q \subseteq \bot$。我们向该系统添加两条新规则： $\subseteq$投影规则和 $\subseteq$置换。这样做只是为了能够消除对偶原始包含原子中的隐藏合取项，例如：$qr \subseteq \bot\top \vdash rq \subseteq \top\bot \vdash r \subseteq \top$，它在 $PL^{\vee}$ 中翻译为 $\neg q \wedge r \vdash \neg q$，可由$\wedge$E推导得出。

基于上述讨论，我们仅陈述该系统的可靠性与完备性定理。

定理 2.25。 表 5 中的规则构成了针对$\mathcal{L}_d$的可靠且完备的证明系统；也就是说，对于一组 $\mathcal{L}_d$ 公式 $\Gamma \cup \{\phi\}$，若 $\Gamma \models \phi$，则 $\Gamma \vdash \phi$。

2.5 对称性与可能模态

我们通过展示（准）向上封闭设定与向下封闭设定中范式的句法对偶性，总结这些逻辑的表达能力结果。

设 $\mathcal{C}$ 是任意非空团队性质。在我们考察的四种设定中，我们将 $\mathcal{C}$ 的闭包定义如下：

- $\mathcal{C}$ 的准向上闭包是 $qu(\mathcal{C}) := \{\emptyset\} \cup \{T \mid T \supseteq S$，其中某个非空 $S \in \mathcal{C}\}$。- $\mathcal{C}$ 的向上闭包是 $u(\mathcal{C}) := \{T \mid T \supseteq S$，其中某个 $S \in \mathcal{C}\}$。- $\mathcal{C}$ 的准向下闭包是 $qd(\mathcal{C}) := \{\mathbb{F}\} \cup \{T \mid T \subseteq S$，其中某个非满 $S \in \mathcal{C}\}$。- $\mathcal{C}$ 的向下闭包是 $d(\mathcal{C}) := \{T \mid T \subseteq S$，其中某个 $S \in \mathcal{C}\}$。

利用四种逻辑的范式，我们得出结论：可以刻画任意非空团队性质 $\mathcal{C}$ 的（准）向上／向下闭包。我们在 $\mathcal{L}_{qu}$ 中通过 $\bot$ 刻画 $\{\emptyset\}$，并在 $\mathcal{L}_{qd}$ 中通过 $\bullet$ 刻画 $\{\mathbb{F}\}$。对于既非 $\{\emptyset\}$ 也非 $\{\mathbb{F}\}$ 的非空团队性质 $\mathcal{C}$，我们展示了四种逻辑范式中的句法对偶性，并借此刻画其闭包。具体而言，在（准）向上封闭情形的范式中出现的是合取式，而在（准）向下封闭情形中，与之对应的是分裂析取式。此外，（非空）原始包含原子的变体在（准）向下封闭情形中会变为（完全）对偶原始包含原子。

准向上闭情形：	拟向下闭情形：
$\| \bigvee_{T \in \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}} \bigwedge_{v \in T} \mathrm{x}^v \subseteq \mathrm{p} \| = qu(\mathcal{C})$。	$\| \bigvee_{T \in \mathcal{C} \setminus \{\mathbb{F}\}} \bigvee_{v \in T} \mathrm{p} \subseteq \bullet \mathrm{x}^v \| = qd(\mathcal{C})$。
向上封闭情形：	向下封闭设定：
$\| \bigvee_{T \in \mathcal{C}} \bigwedge_{v \in T} \mathrm{x}^v \subseteq \mathrm{p} \| = u(\mathcal{C})$。	$\| \bigvee_{T \in \mathcal{C}} \bigvee_{v \in T} \mathrm{p} \subseteq \mathrm{x}^v \| = d(\mathcal{C})$.

最后，我们将建立文献 [5, 4, 1], [2] 中的（非空）原始包含原子与（非空）可能模态之间的联系。回顾三种可能模态的语义：

$T \models \nabla\phi$ 当且仅当 $T = \emptyset$，或者存在 $v \in T$ 使得 $\{v\} \models \phi$.$T \models \nabla\phi$ 当且仅当 $T = \emptyset$，或者存在一个非空的 $S \subseteq T$ 使得 $S \models \phi$.$T \models \blacklozenge\phi$ 当且仅当存在一个非空的 $S \subseteq T$ 使得 $S \models \phi$.

我们列举原始包含原子（非空）与 themight 模态之间的一些语义联系。

$$\top \subseteq p \equiv \nabla p, \quad \mathsf{x}^v \subseteq \mathsf{p} \equiv \nabla(\mathsf{p}^v), \quad \top \subseteq p \equiv \blacklozenge p, \quad \text{and} \quad \mathsf{x}^v \subseteq \mathsf{p} \equiv \blacklozenge(\mathsf{p}^v),$$

容易看出，对于经典公式 $\alpha, \nabla\alpha \equiv \nabla\alpha$，因此，上述对 成立的等价关系对于 也成立。

∇ ∇

我们还可以考虑 $\top \subseteq p$ 与“可能 p”之间对应关系的对偶，即 $p \subseteq \top$ 与“必然 p”之间的对应关系，因为 $T \models p \subseteq \top$ 意味着整个团队中的 p 必然 为真。

此外，我们可以将团队视为信息状态，其中断言是否p ，相当于 p 在整个团队中具有相同的真值。因此，“可能 p”描述的是这样一种可能性：在细化信息状态后，可以断言 p 为真。这种观点也促使我们将全团队性质视为空团队性质的对偶。如果一个团队代表一种信息状态，那么完整团队代表所有可能性，因而不包含任何信息。反过来，如果将团队视为数据点的集合，那么空团队就表示没有数据。

3 结论与未来工作

最后，我们来总结一下。首先，我们引入了表达完全的逻辑，用于表达（准）向下封闭和（准）向上封闭性质。特别是，在（准）向上封闭设定中使用的原始包含原子的变体，都有使用可能模态变体的等价公式。基于这一视角，我们可以将向下封闭设定中使用的对偶原始包含原子的变体解释为必然模态。此外，在这些逻辑的范式中，（准）向下封闭设定与（准）向上封闭设定之间的句法对偶性显而易见。最后，我们为每种逻辑定义了可靠且完备的自然演绎系统。

让我们来探讨一些未来的研究方向。首先，可以研究实质上结合了（准）向下封闭逻辑与（准）向上封闭逻辑的逻辑。

- 我们为 $PL(\subseteq)$ 添加全局析取，得到 $\mathcal{L}_\emptyset$；对于所有包含空团队的团队性质， $\mathcal{L}_\emptyset$ 都是表达完全的。

$$\phi ::= \bot \mid p \mid \neg p \mid \mathsf{x} \subseteq \mathsf{p} \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \veebar \phi).$$

很容易看出， $\mathcal{L}_\emptyset$ 具有范式 $\bot$ 和：

$$\bigvee_{t \in \mathcal{C}\setminus\{\emptyset\}} (\bigvee_{v \in t} \chi_v \wedge \bigwedge_{v \in t} \mathsf{x}^v \subseteq \mathsf{p}).$$

- $\mathcal{L}_\mathsf{F}$ 对于所有包含完整团队的团队性质都是表达完全的。

$$\phi ::= \bullet \mid \top \mid \mathsf{p} \mathbin{⫅} \mathsf{x} \mid \mathsf{x} \subseteq \mathsf{p} \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \veebar \phi).$$

现在， $\mathcal{L}_\mathsf{F}$ 具有以下范式： $\bullet$ 和：

$$\bigvee_{t \in \mathcal{C}\setminus\{\mathsf{F}\}} (\bigvee_{v \in t} \mathsf{p} \mathbin{⫅} \mathsf{x}^v \wedge \bigwedge_{v \in t} \mathsf{x}^v \subseteq \mathsf{p}).$$

这两种逻辑的公理化仍有待作为未来的研究工作。

对于本文讨论的（准）向上封闭逻辑，可以通过考察它们与自然语言、复杂性问题、相继式演算证明系统及其模态变体之间的联系，进一步深入研究。

参考文献

[1] Aleksi Anttila、Matilda H¨aggblom 和 Fan Yang。模态包含逻辑及其变体的公理化。《数学逻辑档案》，64(5-6)：755–793，2025年7月。doi:10.1007/s00153-024-00957-y。[2] Aleksi Anttila 和 Søren Knudstorp。凸团队逻辑，2025年。手稿。arXiv:2503.21850。[3] Ivano A Ciardelli。探询语义学与中间逻辑。硕士论文，阿姆斯特丹大学，2009年。[4] Lauri Hella 和 Johanna Stumpf。带包含原子的模态逻辑的表达能力。载于第六届国际博弈、自动机、逻辑与形式化验证研讨会论文集，第193卷，《电子理论计算机科学论文集》（*EPTCS*），第129–143页，2015年。doi:10.4204/EPTCS.193.10。[5] Frank Veltman。更新语义中的默认规则。《哲学逻辑杂志》，25：221–261，1996年6月。doi:10.1007/BF00248150。[6] Fan Yang。命题并封闭团队逻辑。《纯粹与应用逻辑年刊》，173(6)：103102，2022年6月。doi:10.1016/j.apal.2022.103102。[7] Fan Yang。在命题团队语义学中否定的（其他）方式。载于《探索否定、模态与证明》，亚洲逻辑，2026年。[8] Fan Yang 和 Jouko V¨a¨an¨anen。命题依赖逻辑。《纯粹与应用逻辑年刊》，167(7)：557–589，2016年。doi:10.1016/j.apal.2016.03.003。[9]Fan Yang 和 Jouko V¨a¨an¨anen。命题团队逻辑。《纯粹与应用逻辑年刊》，168(7)：1406–1441，2017年。URL：https://www.sciencedirect. com/science/article/pii/S0168007217300088, doi:10.1016/j.apal.2017. 01.007。