arXiv:2603.05505v1 [cond-mat.quant-gas] 5 Mar 2026

Gross-Pitaevskii 涡旋上的核束缚波

Evan Papoutsis，[1]，* Nathan Apfel，[1]，* 以及 Nir Navon[1,2]†

耶鲁大学物理系，美国康涅狄格州纽黑文 *06520*[2]耶鲁量子研究所，耶鲁大学，美国康涅狄格州纽黑文 *06520*（日期：2026年3月6日）

我们发现了 Gross-Pitaevskii（GP）涡旋的两类难以捉摸的核心束缚激发的色散关系，即串珠（轴对称）波和开槽（四极）波。当波长与愈合长度同量级时，这两类波以及广为人知的开尔文波都具有无穷多条核心束缚、涡旋特有的分支，其能量低于 Bogoliubov 色散关系。在短波长极限下，这些激发可解释为径向束缚于涡旋上的粒子，而涡旋起到波导的作用。在长波长极限下，开槽波从核心中解缚，串珠波变为沿涡旋传播的声子，而基态开尔文波则是唯一的核心束缚涡旋特有激发。最后，我们提出了一种切实可行的光谱学方案，用于产生和探测串珠波，并通过 GP 方程的直接数值模拟对其进行了检验。

量子涡旋——携带量子化环量的拓扑缺陷——在超流体和超导体的动力学中发挥着核心作用。昂萨格于1949年提出了量子涡旋，它们决定超流体如何响应旋转以及如何耗散能量。重要的是，涡旋是动态的对象，即它们能够支持激发。典型的例子是开尔文波，它是涡旋线的螺旋形变形。开尔文波已在理论 [1]和实验 [2–4], 中得到广泛研究，并被普遍认为在量子湍流的耗散过程中发挥着重要作用 [5, 6]。

在长波长下，开尔文波的性质通常不受涡旋核心结构的影响。然而，这种结构可能引发有趣的现象——例如束缚态 [7]——进而反过来影响涡旋动力学。然而，即便在最简单的超流性模型——Gross-Pitaevskii（GP）方程中，依赖于结构的激发究竟具有何种性质，仍未有定论。

有人推测，GP 涡旋也可能支持一种轴对称激发：核心半径的振荡，称为静脉曲张波。对于经典涡旋，开尔文勋爵求解了相应的问题，并表明其存在——

此类波的存在与行为对涡旋核心结构 [8]十分敏感。然而，对于量子涡旋，串珠波的存在一直众说纷纭。一种变分处理方法认为，GP涡旋支持串珠波 [9]，；但后来一本经典教材质疑了这类波是否存在 [10]。在圆柱形陷阱中对 GP 方程进行线性分析，发现了开尔文波，却没有发现串珠激发 [11]。后续模拟在谐振囚禁的玻色–爱因斯坦凝聚体（BEC）中报告了类似串珠波的激发。然而，人们发现这些激发是与外部囚禁势相关的模态，并非涡旋特有 [12]。此外，有人提出了第三种激发——四极开槽波，但尚未对其进行研究 [9]。

在这封短文中，我们证明，当波长足够短时，GP 涡旋上存在束缚于涡旋核心的膨胀波和开槽波激发。我们分析了无限尺寸和有限尺寸系统中相应的特征值问题，并计算了它们的色散关系。我们通过对 GP 方程进行直接模拟，验证了这些预测。

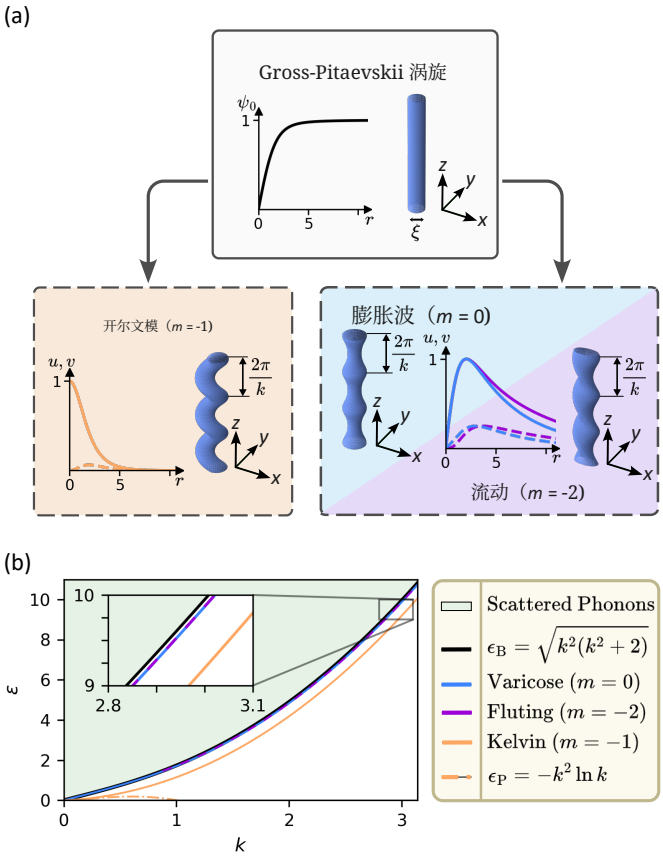


图 1. **Gross-Pitaevskii 涡旋的激发**(a)（上）含有涡旋 ψ_0 的凝聚体波函数及其三维密度等值线。（下）径向激发波函数 u（实线）和v（虚线）——见正文——以及相应激发态涡旋的密度等值线。(b) 这些激发的基本分支的色散关系 $\epsilon_m^{(n=0)}(k)$。图中展示了 Bogoliubov 色散关系 $\epsilon_{\mathrm{B}} = \sqrt{k^2(k^2+2)}$（黑线）、散射声子（绿色区域）、呼吸分支 $m = 0$（蓝线）和长笛状分支 $m = -2$（紫线）。开尔文分支$m = -1$ 以橙线表示，其长波近似 $\epsilon_{\mathrm{P}} = -k^2 \ln k$ 以橙色点划线表示。插图：色散关系的局部放大图。

我们的出发点是无量纲 GP 方程

$$i\partial_t\Psi(\mathbf{r},t) = \big(-\nabla^2 + |\Psi(\mathbf{r},t)|^2\big)\Psi(\mathbf{r},t), \qquad (1)$$

它描述了弱相互作用玻色–爱因斯坦凝聚体的平均场波函数 Ψ；这里，我们将凝聚体的化学势 μ 和愈合长度 $\xi = \hbar/\sqrt{2M\mu}$ 设为1（其中 M 是玻色子质量），并将 Ψ 归一化，使得 $\int |\Psi|^2 \mathrm{d}V = gN/\mu$，其中 $g = 4\pi\hbar^2 a_\mathrm{s}/M$ 是耦合常数，a_s 是 s 波散射长度，而 N 是总粒子数（详情见补充材料 [13]）。

我们在 $r = 0$处的单量子化直涡旋线附近对方程（1）进行线性化：$\Psi(r,\varphi,z,t) = e^{i(\varphi-t)}(\psi_0(r) + \delta\psi(r,\varphi,z,t))$，其中 ψ_0 是图 1 (a)]中的涡旋波函数 [。微扰 $\delta\psi$ 可写为

$$\delta\psi(r,\varphi,z,t) = u_m^{(n)}(k,r)e^{i(m\varphi+kz-\epsilon_m^{(n)}(k)t)} - v_m^{(n)*}(k,r)e^{-i(m\varphi+kz-\epsilon_m^{(n)}(k)t)}, \qquad (2)$$

其中，k 和 m 是沿 z 和 φ方向的波数，n 是分支指标，$\epsilon_m^{(n)}(k)$是能量。激发振幅 $u_m^{(n)}(k,\ r)$和 $v_m^{(n)}(k,\ r)$通过求解方程得到

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_m & -\psi_0^2 \\ -\psi_0^2 & \mathcal{L}_{-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

其中，$\mathcal{L}_m \equiv -\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{(1+m)}{r^2}^2 + k^2 + 2\psi_0^2(r) - 1$；此处，为了记号简洁起见，我们从 u、v 和 ϵ中省略了 m、n 和 k。

我们对涡旋芯束缚激发的搜寻由两条定性判据引导。首先，它们应当是局域化的，即$u(r)$和 $v(r)$应在大 r处指数衰减。其次，它们应当是涡旋特有的。在无限系统中——其中 $\psi_0(r\to\infty) = 1$——这些要求归结为单一不等式：$\epsilon(k) < \epsilon_\mathrm{B}(k) \equiv \sqrt{k^2(k^2+2)}$，其中 ϵ_B 是Bogoliubov 色散关系。对于 $\epsilon < \epsilon_\mathrm{B}$，式(3)的解表现为修正贝塞尔函数 K，它在大 r处衰减。对于 $\epsilon > \epsilon_\mathrm{B}$，物理上相关的解像未经修正的贝塞尔函数 J 和 Y那样振荡，形成散射态的连续谱。此外，在没有涡旋时，ϵ_B以下不存在激发，因此该不等式也保证了涡旋特异性。对于Gross–Pitaevskii模型，局域化的涡旋特有激发有三种类型：$m = 0$（曲张模）、$m = -1$（开尔文模）和 $m = -2$（开槽波）。它们的径向剖面示于图1(a)。

在图1(b) 中，我们展示了主要结果：这些激发的色散关系。我们在拉盖尔多项式基底中采用伪谱方法求解特征值问题式（3），其中动能项通过解析方法计算，势能项则使用高斯求积公式计算 [14, 15]（见补充材料 [13]）。蓝线表示最低的 $m = 0$ 模态，即轴对称缩颈模

波。由于其能量 $\epsilon(k)$ 对所有 $k > 0$ 都小于 $\epsilon_\mathrm{B}(k)$，因此它是束缚于涡核的。紫色曲线是 $m = -2$ 开槽波凹槽模，在较大的 k 下接近膨胀波色散关系。

开尔文波（$m = -1$）以橙色显示。在较小的 k 下，它趋近于 Pitaevskii 的解析结果 $\epsilon_\mathrm{P}(k)$（点划线，橙色）[1]，而在较大的 k 下则呈二次关系。

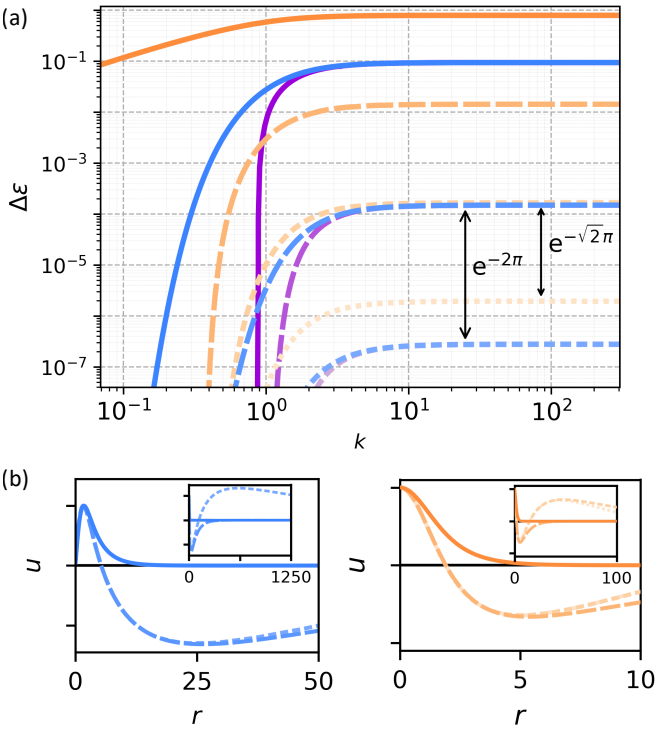


图 2. **GP涡旋激发的谱**(a) 串珠波（蓝色；$m = 0$）、凹槽波（紫色；$m = -2$）和开尔文波（橙色；$m = -1$）的束缚能 $\Delta\epsilon \equiv \epsilon_\mathrm{B} - \epsilon$；基本分支以实线表示，高阶分支以虚线表示，短划线表示更高的 n。两个双向箭头表示 $\mathrm{e}^{-2\pi}$ 和 $\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\pi}$ 的比值（见正文）。请注意，尽管图示看起来并非如此，在极限 $k\to\infty$下，$\Delta\epsilon_{-1}^{(2)} \neq \Delta\epsilon_0^{(1)}$。(b) 左侧（右侧）展示了极限 $k\to\infty$ 下前三个 $m = 0$（分别为 $m = -1$）模态的空间分布 u（r）；在此极限下，$v\to 0$。颜色和线型遵循与 (a) 中相同的约定。插图：相同图形的缩小视图。归一化是任意的。

为了更深入地了解涡核束缚态的结构，我们重点考察束缚能 $\Delta\epsilon_m^{(n)}(k) \equiv \epsilon_\mathrm{B}(k) - \epsilon_m^{(n)}(k)$，如图2(a)所示。每种模式（$n = 0$）的基本分支以实线表示，高阶分支则分别以长虚线（$n = 1$）、短虚线（$n = 2$）和点线（$n = 3$）表示；颜色与图1(b)相同。

该图呈现出一些显著特征。首先，在 k 较大时，每个分支的束缚能都趋于有限值。其中最大的是基本开尔文波的 $\Delta\epsilon_{-1}^{(0)} \approx 0.79$，其次是基本膨胀波和凹槽波的 $\Delta\epsilon_0^{(0)} = \Delta\epsilon_{-2}^{(0)} \approx 0.094$。其次，连续开尔文分支之间的比值相近（$\Delta\epsilon_{-1}^{(n+1)}/\Delta\epsilon_{-1}^{(n)} \approx e^{-\sqrt{2}\pi}$），表明它们可能具有几何间距；膨胀波和凹槽模对应的比值似乎为 $e^{-2\pi}$。第三，在 k 较小时，基本膨胀波平滑地减小

而基本长笛分支的 $\Delta\epsilon$ 则在 $k \approx 1$处骤降至零，表明发生了离域化。通过在适当的极限下分析方程（3），可以理解这三个特征。

首先，在 $k \to \infty$ 极限下，$v = 0$，而方程（3）化为关于u的类薛定谔方程 u:

$$\left(-\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + U_{\rm eff}(r)\right) u = -\Delta\epsilon\, u, \qquad (4)$$

其有效势为 $U_{\rm eff}(r) = 2\psi_0^2(r) + (1+m)^2/r^2 - 2$。这一形式给出了颇具说服力的物理图像：涡旋诱导的密度耗尽产生吸引势，可将模态束缚在核心附近。这也解释了为什么开尔文模束缚得更深：当 $m = -1$时，离心势垒 $(1+m)^2/r^2$ 消失。相反，对于其他方位波数，不会出现束缚态，因为当 $m \notin \{0, -1, -2\}$时，有效势是排斥性的。

其次，由于 $\psi_0^2(r) \sim 1 - 1/r^2$ 在 r较大时，有效势具有反平方尾部：$U_{\rm eff}(r) \sim -(1 - 2m - m^2)/r^2$。这带来了深远的影响：长距离下呈 $1/r^2$ 行为的势，其谱具有不依赖于短程细节的普适特征；[16], 著名的Efimov效应便是一个例子 [17]。当这种势为吸引势时——此处 $m \in \{0, -1, -2\}$——便会出现无限束缚态梯级，其间距渐近地呈几何级数。相邻能级之比趋近于 $e^{-2\pi/\sqrt{1-m^2-2m}}$，这解释了图2（a）中的间距。束缚态的径向剖面也按几何级数增长，如图2（b）所示。它们呈现对数振荡，直至径向转向点；相邻模态的转向点位置相差 $e^{\pi/\sqrt{1-m^2-2m}}$倍。

到目前为止，我们设定了 $v = 0$，它仅在大k极限下有效。一个对所有 k 都适用的更一般近似是$v(r) \sim u(r)(\sqrt{\epsilon^2+1}+\epsilon)^{-1}\left(1 - r^{-2}(\epsilon - 2m)/\sqrt{\epsilon^2+1}\right)$，在大 r 时成立（见文末附录 A）。因此，将 ϵ视为参数并针对 k求解方程(3)是方便的。在大r 极限下，所得方程与方程(4)具有相同形式，只是将 $\Delta\epsilon$ 替换为 $\Delta k^2 \equiv k^2 + 1 - \sqrt{\epsilon^2+1}$，并采用有效势 $U_{\rm eff}(r) \sim -\alpha_m^2(\epsilon)/r^2$，其中$\alpha_m^2(\epsilon) = 1 - m^2 - (1 + 2m\epsilon)/\sqrt{\epsilon^2+1}$。当 $\alpha_m^2(\epsilon) > 0$时，长程吸引再次产生无穷序列的束缚态，且 Δk^2 以比值$e^{-2\pi/\alpha_m}$(\epsilon)几何缩放。u 与 v 的短程行为通常较为复杂（并依赖于 Δk^2），但这并不破坏由吸引性长程尾部所保证的几何结构。相比之下，当 $\alpha_m^2(\epsilon) < 0$时，束缚的存在

态取决于短程物理。

重要的是，对于所有非零的 ϵ，$\alpha_0^2(\epsilon) > 0$，但当$\epsilon \to 0$时趋于零。这解释了我们的第三个观察结果：对于所有非零的 k，都存在缩颈模，但其束缚能随 k增大而减小。在 $k \to 0$的极限下，所有膨胀分支都趋近于$u = v = \psi_0$——由涡旋波函数 [18–21] 破缺的 U(1) 对称性的戈德斯通模（在有限系统中，即 令 $\Psi(r = R) = 0$，每条曲张色散关系都有能隙，并在有限的 k 处与 $\epsilon_{\rm B}(k)$相交；在无限系统极限下，该值趋于零，见补充材料）。相比之下，我们发现

仅当 $k \gtrsim 1$ 时才存在涡核束缚的凹槽模。对于 $k \lesssim 1$，它们的能量高于 $\epsilon_{\rm B}$：长程 $m = -2$势具有排斥性（$\alpha_{-2}^2(\epsilon) < 0$），而短程部分想必不够深，无法束缚它们。

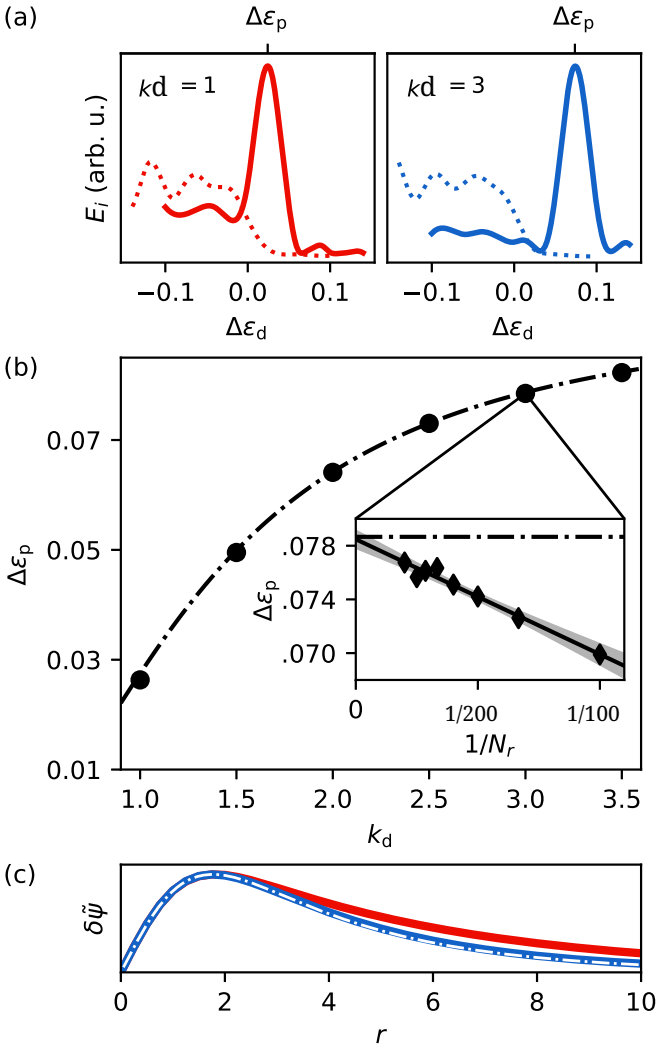


图 3. **串珠波的数值光谱学**。(a) 绘出了注入能量 $E_{\rm i}$ 随驱动频率 $\Delta\epsilon_{\rm d}$变化的典型响应曲线，分别对应 $k_{\rm d} = 1$（红色）和 $k_{\rm d} = 3$（蓝色），有涡旋时用实线表示，无涡旋时用虚线表示。每个谱均以 $r_{\rm d} = 0.25$ 驱动$T = 150$（傅里叶变换限线宽为 ≈ 0.04）；此处 $N_r = 200$、$N_z = 12$ $N_t = 2 \times 10^5$，以及。(b) 光谱提取的色散关系以实心圆表示；线性分析计算结果以点划线表示。插图：当 $k_{\rm d} = 3$时，缩颈峰位置随径向网格点数 $1/N_r$ 的变化，以及用于$N_r \to \infty$ 外推的线性拟合。每个共振均以 $r_{\rm d} = 5$ 驱动 $T = 100$（傅里叶变换限线宽为 ≈ 0.06）。本图中，$N_z = 12$ 和 $N_t = 3.5 \times 10^5$。灰色带表示拟合参数的 95% 置信区间；主图中由此产生的误差小于数据点的尺寸。(c) 对共振驱动下的 $k_{\rm d} = 1$（红色）和 $k_{\rm d} = 3$（蓝色），绘出了空间分布$\delta\tilde{\psi}(r,\ k_{\rm d},\ \epsilon_{\rm p})$；无限系统的预期结果以点划线表示。此处 $r_{\rm d} = 5$、$T = 150$、$N_r = 200$和 $N_t = 2 \times 10^5$。

为了展示一种实用的光谱学方案，用于创

为激发和探测这些涡核束缚态，我们对具有现实驱动的有限尺寸系统，针对完整的 GP 方程进行直接数值模拟。我们模拟方程（1），并加入驱动势 $U(r,\ z,\ t) = U_{\rm d}\exp(-r^2/r_{\rm d}^2)\sin(k_{\rm d}z)\sin(\epsilon_{\rm d}t)$，采用分步傅里叶-贝塞尔方法； $r_{\rm d}$ 为驱动半径，驱动振幅$U_{\rm d}$ 的选取确保系统处于线性响应区间（见补充材料 [13]）。边界条件在 z 方向为周期性，在 r方向为固定， $\Psi(r=R)=0$。

为量化系统对该驱动的响应，我们计算驱动持续时间为 $E_{\rm i}\equiv E(T)-E(0)$ 后注入的能量 T，其中 $E(t)=\int {\rm d}V\,\Psi^*(-\nabla^2+U+|\Psi|^2/2)\Psi$。在图3(a) 中，我们绘制了 $E_{\rm i}$ 随 $\Delta\epsilon_{\rm d}\equiv\epsilon_{\rm B}(k_{\rm d})-\epsilon_{\rm d}$ 的变化曲线，比较了存在涡旋（实线）与不存在涡旋（虚线）的情况，参数分别为 $k_{\rm d}=1$ （红色）和 $k_{\rm d}=3$ （蓝色）。存在涡旋时，可见两个特征：一个窄峰和一个宽平台。我们将窄峰识别为最低能级的膨胀波共振（其束缚能对应于峰值响应 $\Delta\epsilon_{\rm p}>0$），将平台识别为散射态（见补充材料图4）。不存在涡旋时，只剩下宽平台。

在图 3(b) 中，我们展示了从数值光谱学中提取的色散关系 $\Delta\epsilon_{\rm p}(k_{\rm d})$（黑色数据点），它与线性分析计算结果（点划线）高度吻合。这一结果为未来的实验带来了希望：在 GP 描述下，当驱动足够弱时，非线性效应确实可以忽略。最后，在图 3(c) 中，我们通过绘制空间分布 $\delta\tilde{\psi}(r,k,\epsilon)\equiv\int {\rm d}t\int {\rm d}z\sin(kz)\sin(\epsilon t+\delta)\Psi(r,z,t)$，直接验证了激发的空间特性，其中相移 δ经过调整以使信号最大化。正如预期的那样，当$k_{\rm d}$ 较小时，该分布的局域性较弱；而当 $k_{\rm d}$较大时，它趋近于 $k=\infty$线性化分布（点划线）。

总之，我们研究了 GP 涡旋上两类新型核束缚波——膨胀波模态和开槽波模态，并证实每一类都具有一个无限序列的束缚态，其能量在 Bogoliubov 色散关系下方按几何级数间隔分布。由于这些激发对涡旋核结构十分敏感，因此可能为更复杂系统（例如费米涡旋 [7]）中的微观物理提供一种光谱学探针。下一项重要工作是确定它们的寿命和相互作用。由于量子湍流中的耗散通常被描述为开尔文波与声子之间的相互作用，评估膨胀波模态和开槽波模态如何参与并可能改变这一耗散途径，将十分有趣。

我们感谢 Fr´ed´eric Chevy、Grisha Falkovich 以及耶鲁大学超冷量子物质研究组的成员所进行的讨论，并感谢 Vishvesha Sridhar 和 Siddhant Bhargava 在本项目早期阶段的贡献。我们感谢 Jack Harris 对手稿的评论。本工作得到美国国家科学基金会（资助号 PHY-2110303）、美国空军科学研究办公室（资助号 FA9550-23-1-0605）以及戴维和露西尔·帕卡德基金会的支持。

参考文献

* 这些作者对这项工作贡献相同 [1] L. P. Pitaevskii，非理想玻色气体中的涡旋线，苏联物理学报（JETP）13, 451 (1961)。[2] V. Bretin、P. Rosenbusch、F. Chevy、G. V. Shlyapnikov和J. Dalibard，单涡旋玻色–爱因斯坦凝聚体的四极振荡：开尔文模的证据，《物理评论快报》90, 100403 (2003)。[3] E. Fonda、D. P. Meichle、N. T. Ouellette、S. Hormoz和D. P. Lathrop，量子化涡旋重联激发的开尔文波的直接观测，美国国家科学院院刊111, 4707 (2014)。[4] Y. Minowa、Y. Yasui、T. Nakagawa、S. Inui、M. Tsubota和M. Ashida，量子化涡旋上开尔文波的直接激发，《自然·物理》21, 233 (2025)。[5] W. Vinen和J. Niemela，量子湍流，《低温物理学杂志》128, 167 (2002)。[6] C. F. Barenghi、L. Skrbek和K. R. Sreenivasan，《量子湍流》（剑桥大学出版社，2023）。[7] C. Caroli、P. De Gennes和J. Matricon，II型超导体中涡旋线上的束缚费米子态，《物理快报》9, 307 (1964)。[8] W. Thompson，XXIV. 柱状涡旋的振动，《哲学杂志》第5辑10, 155 (1880)。[9] A. L. Fetter，非理想玻色气体中的涡旋。II. 单粒子激发，《物理评论》138, A709 (1965)。[10] R. J. Donnelly，《氦II中的量子化涡旋》（剑桥大学出版社，1991）。[11] T. Isoshima和K. Machida，有涡旋与无涡旋受限几何中的玻色-爱因斯坦凝聚，《日本物理学会杂志》66, 3502 (1997)。[12] T. P. Simula、T. Mizushima和K. Machida，囚禁玻色-爱因斯坦凝聚体中的涡旋波，《物理评论A辑》78, 053604 (2008)。[13] 见补充材料。[14] H. Bahlouli、M. Abdelmonem和S. Al-Marzoug，振荡屏蔽库仑势的解析处理，《化学物理》393, 153 (2012)。[15] A. Alhaidari、E. Heller、H. Yamani和M. Abdelmonem，《J矩阵方法：发展与应用》（施普林格，纽约，2008）。[16] K. Case，奇异势，《物理评论》80, 797 (1950)。[17] V. Efimov，三体系统中由共振二体力产生的能级，《物理快报B辑》33, 563 (1970)。[18] D. Takahashi和M. Nitta，内部对称性与时空对称性的南部-戈德斯通模计数规则：Bogoliubov理论方法，《物理年鉴》354, 101-156 (2014)。[19] M. Kobayashi和M. Nitta，沿超流涡旋和相对论弦的开尔文模作为南部-戈德斯通模：有限体积尺寸效应，《理论与实验物理进展》2014, 021B01 (2014)。[20] D. A. Takahashi、M. Kobayashi和M. Nitta，沿拓扑缺陷传播的南部-戈德斯通模：从小系统到大系统的开尔文模和涟漪模，《物理评论B辑》91, 184501 2015( )。[21] 精确地说，Gross–Pitaevskii模型具有相位的U(1)对称性以及绕 z–轴旋转的U(1)对称性。当引入形式为 $\Psi=e^{i\varphi}\psi_0$ 的涡旋波函数时，这两个U(1)群约化为一个，因为改变整体相位等同于绕 z旋转。[22] P. V. Pikhitsa和U. R. Fischer，稀薄量子液体的精确表面波谱，《物理评论B辑》99, 184504 (2019)。

文末内容

附录 A。这里，我们对有效势 $U_{\text{eff}}(r)$ 作直观解释。我们将方程（3）改写为一个自旋为 1/2 的粒子在磁场 **B** 作用下的方程：

$$-\Delta k^2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + V(r) - \mathbf{B}(r)\cdot\boldsymbol{\sigma} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (5)$$

这里 $V(r) = (1+m^2)/r^2 + 2\psi_0^2 - 2 + \sqrt{\epsilon^2+1}$，$\mathbf{B}(r) = (\psi_0^2(r)\,0, \epsilon - 2m/r^2)$，$\Delta k^2 \equiv k^2 + 1 - \sqrt{\epsilon^2+1}$，且$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$为泡利矩阵。在大 r处，磁场角 $\theta \equiv \tan^{-1}(B_1/B_3)$变化缓慢（$\partial_r\theta \sim 1/r^3$）。这使我们能够采用玻恩-奥本海默近似，即自旋与磁场对齐，亦即$\mathbf{B}(r)\cdot\boldsymbol{\sigma} \approx |\mathbf{B}(r)|$。于是我们恢复有效势$U_{\text{eff}}(r) \equiv V(r) - |\mathbf{B}(r)| \sim -\alpha_m^2(\epsilon)/r^2$。

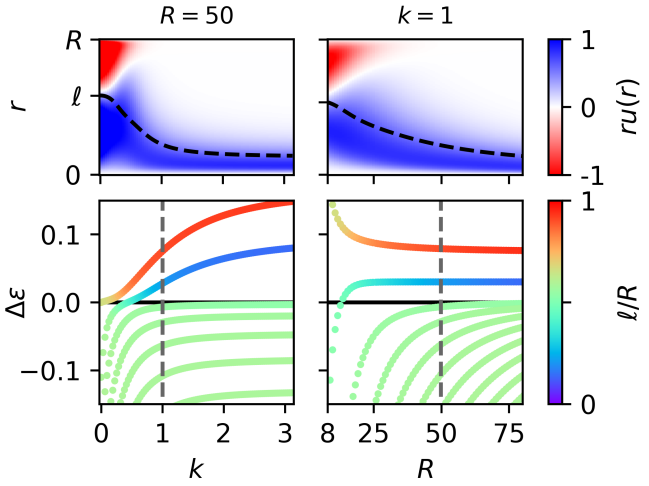


图 4. **有限尺寸效应对$m = 0$ 模态**（上）静脉曲张波的空间分布 $u(r)$和局域化长度 ℓ（虚线，见正文），系统尺寸固定为 R（左）和波数固定为 k（右）。（下）半径固定为 $(R = 50,$ 左) 和波数固定为 $(k = 1,$ 右) 时的激发谱。颜色表示 ℓ/R。

附录 B。这里我们讨论有限系统中串珠波的演变。为此，我们对经过贝塞尔变换的方程 (3) 进行对角化，并施加固定边界条件 $\psi_0(R) = u(R) = v(R) = 0$。图 4（上）展示了最低能的串珠波空间分布 $u(r)$：在 R 固定时随k 变化（左），以及在 k 固定时随 R 变化（右）。为刻画局域化程度，我们引入参数$\ell \equiv \int_0^R r^2\psi_0|u-v|\mathrm{d}r / \int_0^R r\psi_0|u-v|\mathrm{d}r$，它表示激发的密度扰动的典型半径。可以看到，在低 k 或小 R 时，ℓ 为 R 量级，即激发处于离域状态。对于给定的 k，当超过某个 R 后，ℓ 和 $\Delta\epsilon$ 对系统尺寸不再敏感。

在图 4（下图）中，我们展示有限尺寸系统的完整 $m = 0$ 谱。声子是离域的，$\ell \sim R/2$（绿色）。随着 $R \to \infty$，它们密集地填满区域 $\Delta\epsilon(k) < 0$，而膨胀波（$\ell \sim 1$，蓝色）的束缚能趋近于与系统尺寸无关的值 $\Delta\epsilon(k) > 0$。此外，$r = R$ 处的边界条件产生了一个能量更低的分支，它并非涡旋特有，并位于壁附近的低密度区域（$R - \ell \sim 1$，红色）[22]。当这一激发与膨胀波重叠时，两者会发生杂化。正如图4（下图）所示，这种杂化发生在较小的 R（右图）和较小的 k（左图）处。对于有限尺寸系统，膨胀波分支不会与U(1)分支相连，并获得正的能隙。

固定 k后，我们可以考察这种杂化在什么 R_c 下变得显著，即 $\Delta\epsilon = 0$。对于 $R \gg R_c$，有限尺寸效应很小。在图 5 中，我们绘出了 R_c 最低两个呼吸分支的情况。对于这两个分支，R_c 在 $k \to \infty$ 时趋于一个有限值，并在 $k \to 0$时发散。

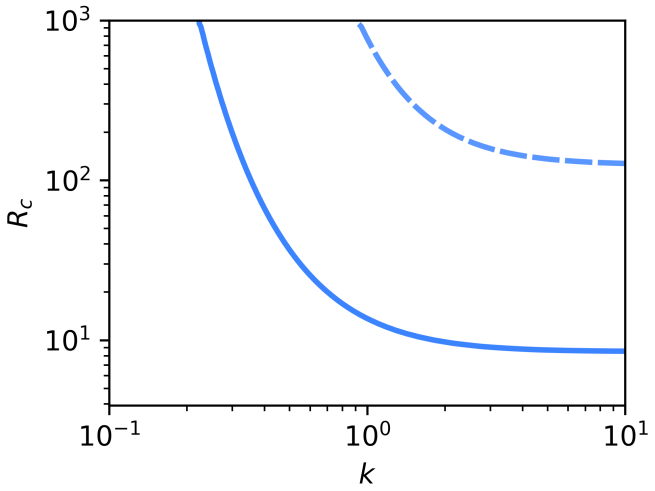


图 5. **缩颈模的有限尺寸效应**。系统半径R_c，在该半径处 $\Delta\epsilon_0^{(0)} = 0$（实线）和 $\Delta\epsilon_0^{(1)} = 0$（虚线）作为 k的函数。

补充材料

I. 单位的选择

有量纲的含时 Gross-Pitaevskii 方程

$$i\hbar\partial_t\Phi(\mathbf{r},t)=\left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2M}+V_{\rm ext}(\mathbf{r},t)+g|\Phi(\mathbf{r},t)|^2\right)\Phi(\mathbf{r},t) \tag{S1}$$

描述外势 $V_{\rm ext}(\mathbf{r}\ t)$ 中玻色–爱因斯坦凝聚体波函数 Φ 的行为，该外势可同时包含盒式囚禁和外力驱动； M 为玻色子质量， $N=\int|\Phi(\mathbf{r}\ t)|^2{\rm d}V$ 为粒子数，而 g 为耦合常数$4\pi\hbar^2a_{\rm s}/M$ （$a_{\rm s}$ 为 s 波散射长度）。对于圆柱形硬壁势（位于 $r=R$），定态解具有如下形式： $\Phi(\mathbf{r}\ t)=e^{i(s\varphi-\mu t/\hbar)}\phi(r)$ [1], ，其中 $\phi(r)$ 满足非线性特征值问题

$$\mu\phi(r)=\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r)-\frac{s^2}{r^2}\right)+g|\phi(r)|^2\right)\phi(r) \tag{S2}$$

边界条件为： $\phi(r)$ 在 $r=0$ 处正则，且 $\phi(R)=0$。对于无限系统，第二个边界条件变为 $\phi(r)\to1$，当 $r\to\infty$ 时成立。

我们将时间无关的 GPE 方程（S2）转换为正文中使用的无量纲形式，方法是定义一个长度尺度$\xi_\mu=\sqrt{\frac{\hbar^2}{2M\mu}}$和一个无量纲波函数 $\psi_0(r/\xi_\mu)=\sqrt{\frac{g}{\mu}}\phi(r)$。这样，方程（S2）就变为

$$\left(-\frac{1}{\tilde r}\partial_{\tilde r}(\tilde r\partial_{\tilde r})+\frac{s^2}{\tilde r^2}-1+|\psi_0(\tilde r)|^2\right)\psi_0(\tilde r)=0, \tag{S3}$$

满足以下边界条件：在 $s=1$ （涡旋）情况下， $\psi_0(0)=\psi_0(R/\xi_\mu)=0$ ；对于 $s=0$ （无涡旋）情况， $\psi_0'(0)=\psi_0(R/\xi_\mu)=0$。这里我们引入了无量纲坐标 $\tilde r=r/\xi_\mu$。从理论上说，使用 ξ_μ 比使用实验上更方便的 $\xi_n\equiv\hbar/\sqrt{2Mgn}$ 更简单（其中 $n\equiv N/V$，且 V为盒体积）。这两个长度尺度之间的映射由归一化条件 $gN/\mu=\int|\psi_0(r/\xi_\mu)|^2{\rm d}V$明确给出。图 S1 展示了这种映射；在大$R$ 极限下， $gn/\mu\to1-\frac{2\sqrt2}{R/\xi_\mu}$ 且 $R/\xi_\mu\to R/\xi_n+\sqrt2$。

II. 无限系统的线性分析

为了在无限系统中求解具有给定 m 的涡旋束缚态（正文中的方程 (3)），我们将解空间投影到一个有限维空间（维数为 $2N_{\rm b}$），该空间由以下加权拉盖尔多项式张成：

$$\mathbf{e}_\nu^m=a_\nu^{2|m+1|}\lambda(\lambda r)^{|m+1|}e^{-\lambda r/2}L_\nu^{2|m+1|}(\lambda r)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{e}_{N_{\rm b}+\nu}^m=a_\nu^{2|m-1|}\lambda(\lambda r)^{|m-1|}e^{-\lambda r/2}L_\nu^{2|m-1|}(\lambda r)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{S4}$$

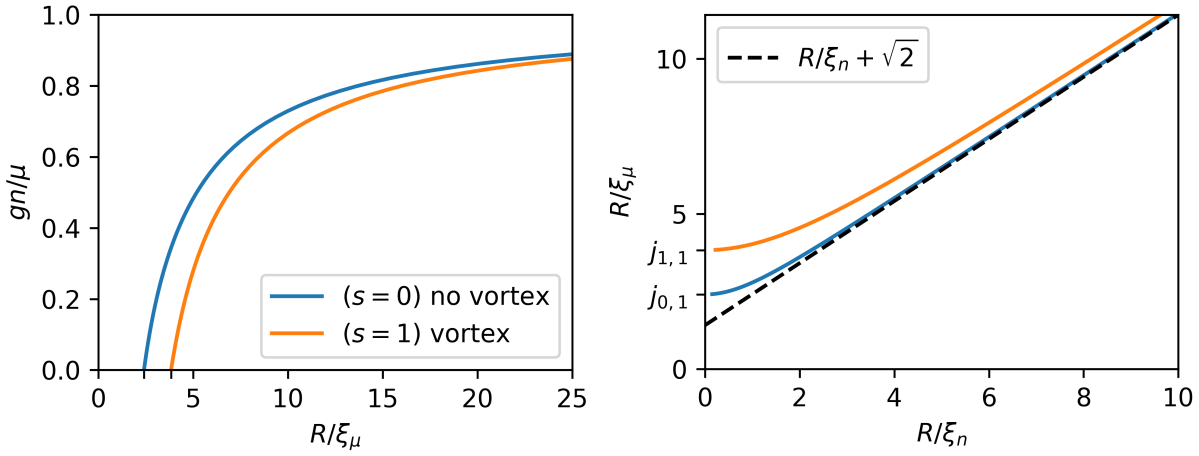


图 S1. 长度尺度单位的选择。（左）能量尺度比 gn/μ 作为无量纲边界半径 R/ξ_μ的函数。（右）参数依赖单位 R/ξ_n 下的边界与解依赖单位 R/ξ_μ下的边界之间的关系。蓝色和橙色分别对应无涡旋（$s=0$）和有涡旋（$s=1$）的情况；$j_{i,\ j}$是 $i^{\rm th}$ 贝塞尔函数 J_i的 $j^{\rm th}$ 零点。

其中 $\nu \in \{0, 1, ..., N_\mathrm{b}-1\}$， $a_\nu^m = \sqrt{\frac{\nu!}{(\nu+m)!}}$，且 λ 是一个变分长度尺度。我们的计划是找到一个 λ 的区间，在此区间内$\Delta\epsilon$ 呈现平台（相对于 λ），并将 N_b 外推至较大值（见 [2, 3]）。

定义内积 $\langle(u',\ v'),\ (u,\ v)\rangle \equiv \int r(u'^* u + v'^* v)\mathrm{d}r$，重叠矩阵 $\mathcal{S}_{ij}^m \equiv \langle \mathbf{e}_i^m,\ \mathbf{e}_j^m\rangle$ 具有分块对角形式：

$$\mathcal{S}^m = \begin{pmatrix} S^{2|m+1|} & 0 \\ 0 & S^{2|m-1|} \end{pmatrix} \tag{S5}$$

$$S^m_{\nu,\nu'} = (2\nu+m+1)\delta_{\nu,\nu'} - \sqrt{\nu(\nu+m+1)}\delta_{\nu,\nu'+1} - \sqrt{\nu'(\nu'+m+1)}\delta_{\nu+1,\nu'} \tag{S6}$$

其中 S^m 是一个三对角矩阵。

式 (3) 的“势”部分，

$$\mathcal{U} \equiv \begin{pmatrix} 2\psi_0(r)^2 - 1 & -\psi_0(r)^2 \\ -\psi_0(r)^2 & 2\psi_0(r)^2 - 1 \end{pmatrix}, \tag{S7}$$

其矩阵元通过高斯-拉盖尔求积计算：定义矩阵 $N_\mathrm{b} \times N_\mathrm{b}$，其矩阵元为$P^m_{\nu,\ \nu'} \equiv \sum_\mu \Omega^m_{\nu,\ \mu}\omega^m_\mu \psi_0(\omega^m_\mu/\lambda)^2 \Omega^m_{\nu',\ \mu}$，其中 Ω^m 的列为 S^m 的特征向量，ω^m 为特征值。这种形式是 $\int_0^\infty r\psi_0(r)^2\lambda^2 a^m_\nu a^m_{\nu'}(\lambda r)^m e^{-\lambda r} L^m_\nu(\lambda r) L^m_{\nu'}(\lambda r)\mathrm{d}r$的近似。

实际上，为了在求积点 ω^m/λ 处计算 $\psi_0(r)^2$，我们对 $\psi_0(r)$ 进行数值估计，直到 $r = 16$，并使用渐近展开 $\psi_0(r) \approx \psi_0^{\mathrm{approx}}(r)$，其中 $\psi_0^{\mathrm{approx}}(r) \equiv 1 - \frac{1}{2r^2} - \frac{9}{8r^4} + ...$ 对 $r > 16$ 截断至 r^{-12} 阶；对于所有 r，误差为 $e(r) \equiv |\psi_0^{\mathrm{approx}}(r)^2 - \psi_0(r)^2| \lesssim 10^{-9}$，从而确保 $e(r)$ 中对 $\Delta\epsilon$ 的一阶修正为 $\lesssim 3 \times 10^{-9}$。

对于 $m < 0$，传递矩阵 $\mathbf{e}^m_{\nu+N_\mathrm{b}} = \sigma_x \sum_{\nu'} T^m_{\nu,\ \nu'}\mathbf{e}^m_{\nu'}$ 可通过递推关系解析求得（σ_x 是泡利矩阵）。对于 $m = 0$，我们令 T^0 为单位矩阵。

因此，对于投影到 $\{\mathbf{e}^m\}$ 基组上的 $m \le 0, \mathcal{U}$，得到矩阵元 $\mathcal{V}^m_{ij} = \langle \mathbf{e}^m_i, \mathcal{U}\mathbf{e}^m_j\rangle$，因此

$$\mathcal{V}^m \approx \begin{pmatrix} 2P^{2|m+1|} - S^{2|m+1|} & -P^{2|m+1|}(T^m)^T \\ -T^m P^{2|m+1|} & 2P^{2|m-1|} - S^{2|m-1|} \end{pmatrix} \tag{S8}$$

在式 (3) 的（时间反演）对称性下，$u \leftrightarrow v, \epsilon \leftrightarrow -\epsilon$ 和 $m \leftrightarrow -m, m > 0$ 解均包含在 $m < 0$特征值问题中。我们施加条件 $\int(|u|^2 - |v|^2)\mathrm{d}V > 0$，以确定 m 的符号。

式 (3) 的“动能”部分

$$\mathcal{H}^m_\mathrm{kin} \equiv \begin{pmatrix} -\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{(1+m)^2}{r^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{(1-m)^2}{r^2} \end{pmatrix} \tag{S9}$$

其矩阵元为 $\mathcal{K}^m_{ij} = \langle \mathbf{e}^m_i,\ \mathcal{H}^m_\mathrm{kin}\mathbf{e}^m_j\rangle$，因此

$$\mathcal{K}^m = \begin{pmatrix} K^{2|m+1|}_{\nu,\nu'} & 0 \\ 0 & K^{2|m-1|}_{\nu,\nu'} \end{pmatrix}, \tag{S10}$$

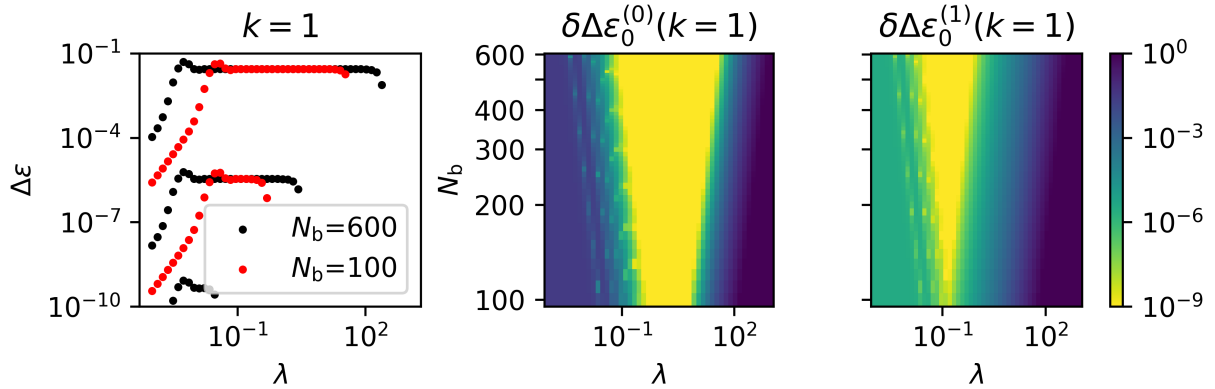


图 S2. **有限基组扫描** （左）计算得到的 $\Delta\epsilon$ 在 $m = 0, k = 1$ 处随 λ 变化的数值，其中 $N_\mathrm{b} = 600$ 和 $N_\mathrm{b} = 100$。可以看到，在 $\Delta\epsilon \approx 2.75 \times 10^{-2}$ 和 3.44×10^{-6}处形成平台。（中） $m = 0, k = 1$ 的最低本征值与提取的平台值之差，$\delta\Delta\epsilon_0^{(0)}(\lambda, N_\mathrm{b}) \equiv |\Delta\epsilon_0^{(0)}(\lambda, N_\mathrm{b}) - 2.74849740 \times 10^{-2}|$，随基组大小 N_b 和基组长度尺度 λ变化。（右）第二低本征值与提取的平台值之差，$\delta\Delta\epsilon_0^{(1)}(\lambda, N_\mathrm{b}) = |\Delta\epsilon_0^{(1)}(\lambda, N_\mathrm{b}) - 3.4442 \times 10^{-6}|$。

且 K^m 是一个 $N_\mathrm{b}\times N_\mathrm{b}$ 系数为.....的三对角矩阵

$$K^m_{\nu,\nu'}=\frac{\lambda^2}{4}(2\nu+m+1)\delta_{\nu,\nu'}+\frac{\lambda^2}{4}\sqrt{\nu(\nu+m+1)}\delta_{\nu,\nu'+1}+\frac{\lambda^2}{4}\sqrt{\nu'(\nu'+m+1)}\delta_{\nu+1,\nu'}. \tag{S11}$$

在固定 k 时，为了得到 ϵ，我们针对 $2N_\mathrm{b}$ 维向量$\mathbf{w}$求解广义特征值问题，

$$(\mathcal{K}^m+\mathcal{V}^m+k^2\mathcal{S}^m)\mathbf{w}=\epsilon\begin{pmatrix}S^{2|m+1|} & 0\\ 0 & -S^{2|m-1|}\end{pmatrix}\mathbf{w}. \tag{S12}$$

在图 S2中，我们展示了 $m=0$ 在 $k=1$下、不同基组大小 $N_\mathrm{b}\in[100,600]$和 $\lambda\in[10^{-3},10^{3}]$对应的本征值谱。我们观察到 $\Delta\epsilon$ 相对于 λ出现了平台；这些平台的宽度随基组大小增加而增大，从而可以外推至 $N_\mathrm{b}\to\infty$ 极限。我们将这些平台值解释为最低和次低曲张模态的束缚能。在正文的图（2）中，我们使用了 $N_\mathrm{b}=800$。

III. 数值光谱学

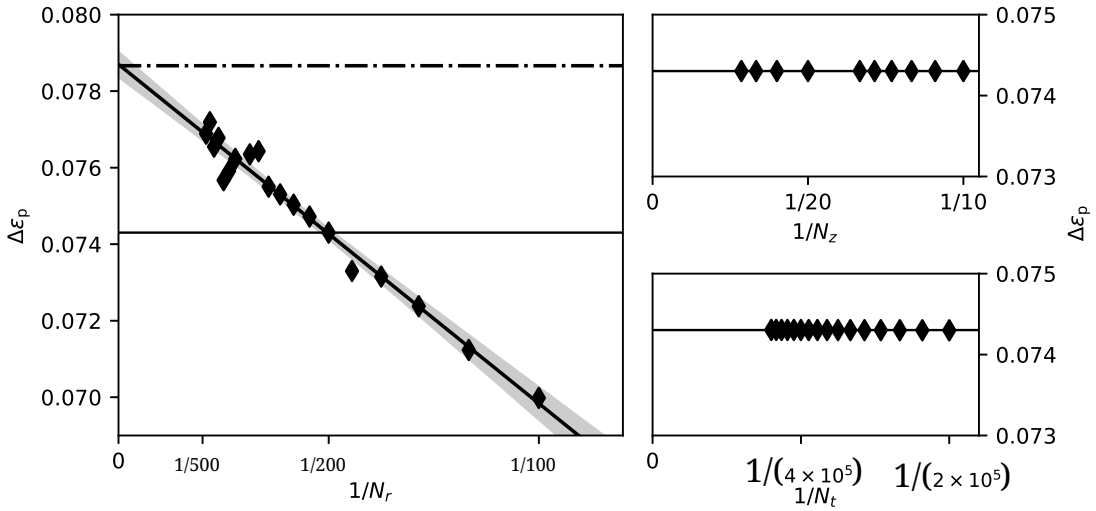


图 S3. **离散化误差**。（左）通过数值光谱学得到的曲张峰位置 $\Delta\epsilon_\mathrm{p}$ 随 N_r 的变化，其中 $N_z=12$ 和 $N_t=3.5\times10^5$；（右上）$\Delta\epsilon_\mathrm{p}$ 随 N_z 的变化，其中 $N_r=200$ 和 $N_t=3.5\times10^5$；（右下）$\Delta\epsilon_\mathrm{p}$ 随 N_t 的变化，其中 $N_r=200$ 和 $N_z=12$。所有图中的水平线表示 $N_r=200$、$N_z=12$ 和 $N_t=3.5\times10^5$ 对应的 $\Delta\epsilon_\mathrm{p}$。左图中的线性拟合给出的本征值为 $\Delta\epsilon_\mathrm{p}=0.0790\pm7\times10^{-4}$（误差由线性拟合的 98% 置信区间给出），与有限系统线性分析的预测值 0.0786（一点划线）一致。在整幅图中，$T=80$ 和 $k_\mathrm{d}=3$。

这里我们 提供关于数值光谱学方案的更多细节（见正文图 3）。
我们使用 分步傅里叶-贝塞尔方法来模拟无量纲 GP 方程

$$i\partial_t\Psi(r,\varphi,z,t)=\left(-\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r)-\frac{\partial^2_\varphi}{r^2}-\partial^2_z+U(r,z,t)+|\Psi(r,\varphi,z,t)|^2\right)\Psi(r,\varphi,z,t), \tag{S13}$$

其中，$U(r,z,t)=U_\mathrm{d}\exp(-r^2/r_\mathrm{d}^2)\sin(k_\mathrm{d}z)\sin(\epsilon_\mathrm{d}t)$是用于激发曲张模态的势（除图 S5 外，我们处处使用 $r_\mathrm{d}=5$），而边界条件 $\Psi(r=R=50)=0$施加了圆柱形囚禁势。方程（S13）的对称性使问题可以通过两种方式简化。首先，我们只需考虑阶数为 s的贝塞尔函数，其中 s 是方位波数（回想一下，有涡旋时 $s=1$，无涡旋时为 0），因为方位对称性禁止不同 s的傅里叶-贝塞尔分量之间发生耦合。其次，我们可以沿 z采用周期边界条件：$\Psi(z=0)=\Psi(z=2\pi/k_\mathrm{d})$ $\partial_z\Psi(z=0)=\partial_z\Psi(z=2\pi/k_\mathrm{d})$。这将 z 波数限制为 k_d的整数倍；由于势 U沿 z 具有离散平移对称性，因此这种限制是合理的。这或许有些违背直觉，因为某些物理过程会涉及高动量模态裂变为低动量模态（例如别利亚耶夫阻尼）；然而，给定方程（S13）以及沿 z均匀的初始条件，在这个经典模型中不会发生次谐波产生。

我们在包含 $N_r \times N_z$ 个点和 N_t 个时间步的网格上对方程（S13）进行离散化。我们采用由 $\lfloor 3N_r/4 \rfloor \times \lfloor 3N_z/4 \rfloor$ 个贝塞尔-傅里叶分量构成的基底，以防止混叠。为了估计这种离散化带来的误差，我们计算了 N_r、 N_z和 N_t取不同值时的谱。在图 S3 中，我们绘制了曲张峰位置 $\Delta\epsilon_\mathrm{p}$ 随 $1/N_r$ （左图）、 $1/N_z$ （右上图）和 $1/N_t$ （右下图）的变化。 N_r 的影响最为显著。我们通过经验发现， $\Delta\epsilon_\mathrm{p}$ 遵循形如 $c_1/N_r + c_2$的关系。我们使用线性拟合，将 $N_r \to \infty$时的峰位置 c_2 外推。右侧各图表明，与 N_r相比， N_z 和 N_t 对峰位置的影响可以忽略不计。

在图S4中，我们估计弱非线性响应对光谱学的影响。首先，我们针对不同的 U_d 进行模拟，并提取相应的曲张峰位置 $\Delta\epsilon_\mathrm{p}$ [图S4（b）]。结果表明，只要 U_d 足够小，非线性效应就可以忽略；作为参考，由 N_r 引起的误差以灰色误差棒表示。在正文图3中，我们使用 $U_\mathrm{d} = 10^{-3}$ （实心竖线）。

更一般地，为了量化非线性，我们定义 $a\ (U_\mathrm{d}) \equiv \sqrt{E_\mathrm{i}} \Big/ \left(\mathrm{d}\sqrt{E_\mathrm{i}} \Big|_{U_\mathrm{d}=0} \right) \mathrm{d}$。这是响应振幅的一种度量，并进行了归一化，使得$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}U_\mathrm{d}}\Big|_{U_\mathrm{d}=0} = 1$。在图S4（b）中，我们绘制了非线性部分 $a/U_\mathrm{d} - 1$ 与 U_d 的关系，其中谱给定（此处 $\epsilon_\mathrm{B} - \Delta\epsilon_\mathrm{d}$ 为驱动频率）。

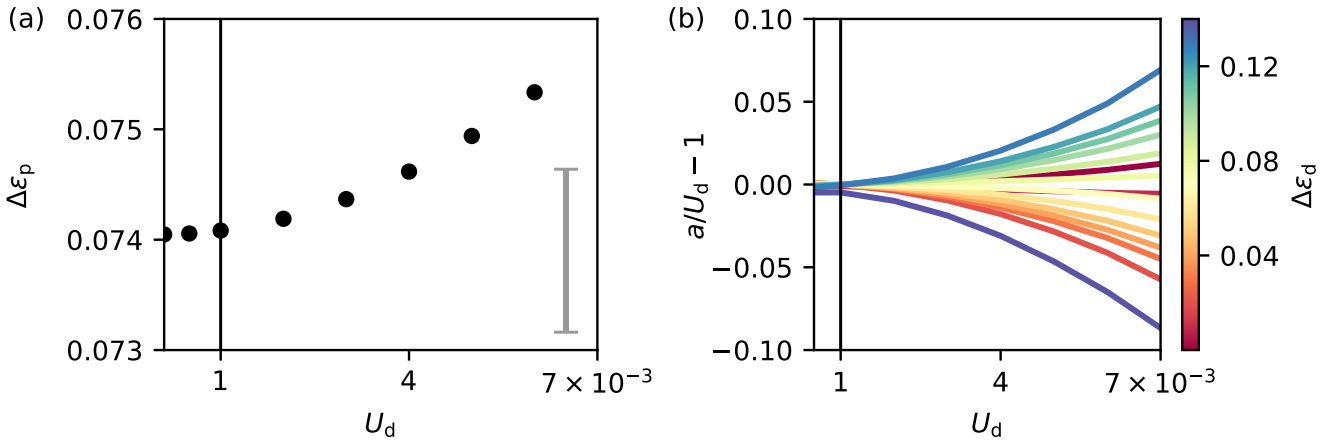


图 S4. **由非线性响应引起的误差**。 (a) 缩颈峰位置 $\Delta\epsilon_\mathrm{p}$ 随驱动振幅 U_d的变化；灰色误差棒表示由 N_r 的离散化引起的误差（见图S3）。(b) 非线性响应 $a/U_\mathrm{d} - 1$，其中 $a(U_\mathrm{d}) \equiv \sqrt{E_\mathrm{i}} \Big/ \left(\mathrm{d}\sqrt{E_\mathrm{i}}\, \mathrm{d}U_\mathrm{d} \Big|_{U_\mathrm{d}=0} \right)$，作为 U_d 的函数，对应不同的 $\Delta\epsilon_\mathrm{d}$。在两幅图中，$k_\mathrm{d} = 3$、 $N_r = 200$、 $N_z = 12$、 $T = 100$ 和 $N_t = 2 \times 10^5$；竖直实线标示正文图 3（及其他处）所使用的 $U_\mathrm{d} = 10^{-3}$。

最后，我们研究谱如何依赖于驱动半径 r_d，因为它会影响驱动与系统不同模态之间的空间重叠。在图S5中，我们展示了若干谱，分别对应 $k_\mathrm{d} = 1$ （上行，蓝色）和 $k_\mathrm{d} = 3$ （下行，红色），并针对不同的 r_d。对于较小的 r_d，驱动能与许多模态良好耦合。我们在图 S5最左侧的图中可以看到这一点：对于 $k_\mathrm{d} = 1$和 $k_\mathrm{d} = 3$，声子平台都非常明显。随着我们增大 r_d，声子脊开始减弱，曲张模态变得更加突出。对于过大的 r_d，驱动能与较低能的声子良好耦合。这在右下图（ $k_\mathrm{d} = 3$, $r_\mathrm{d} = 15$）中尤为显著，其中最低的声子模态汇聚在一起，形成第二个峰。

比较 r_d 对 $k_\mathrm{d} = 1$ 和 $k_\mathrm{d} = 3$ 的依赖关系颇有意思。对于 $k_\mathrm{d} = 1$，当 $r_\mathrm{d} = 8$ 时，曲张模态最为显著。然而，对于 $k_\mathrm{d} = 3$， $r_\mathrm{d} = 4$ 和 $r_\mathrm{d} = 8$ 曲线相似。在 $r_\mathrm{d} = 15$ 时， $k_\mathrm{d} = 3$ 曲张峰几乎被低能声子峰掩盖，而 $k = 1$ 峰仍然很明显。这表明，较大的驱动半径与更长波长的曲张波耦合得更好，反映了曲张模态在小 k_d 时逐渐离域化的特性。

参考文献

* 这些作者对本研究的贡献相同 [1] 在经过伽利略变换后 $t \to t + z/v$ 对于质心速度 v。 [2] A. Alhaidari、E. Heller、H. Yamani 和 M. Abdelmonem，*J*矩阵方法：进展与应用 (施普林格，纽约，2008)。

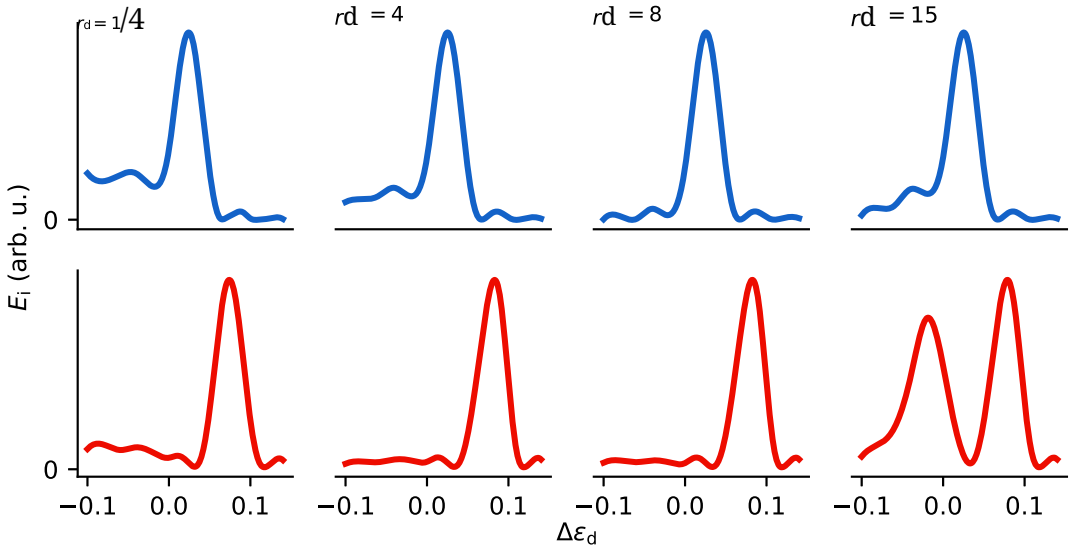


图 S5. **驱动半径对 r_d 注入能量谱的影响**。驱动半径为 $r_d = 1/4$、4、8 和 15（从左到右递增）时，注入能量 E_i 与 $\Delta\epsilon_d$ 的关系。顶行显示 $k_d = 1$（蓝色），底行显示 $k_d = 3$（红色）。对于这些谱，$T = 150$（傅里叶变换限线宽为 ≈ 0.04）、$N_t = 2 \times 10^5$、$N_r = 200$ 和 $N_z = 12$。

[3] H. Bahlouli、M. Abdelmonem 和 S. Al-Marzoug，《振荡屏蔽库仑势的解析处理》，化学物理 393, 153 (2012)。