arXiv:2603.05550v1 [math.NT] 5 Mar 2026

一个平方与更高次幂的华林–哥德巴赫问题

Geovane Matheus Lemes
Andradegmla.andrade@gmail.com

巴西利亚大学数学系，巴西利亚，DF，巴西

摘要

我们证明了，每个充分大的奇整数都可以表示为一个平方与十四个素数的五次方之和。此外，我们还证明了，每个充分大的偶整数都可以表示为一个平方、一个四次幂和十二个素数的五次方之和。

1 引言

将大整数表示为一个平方与自然数的高次幂之和的问题由来已久。最早的重要贡献归功于 Stanley [1], 定理10–12。她证明，若要保证每个充分大的整数都能表示为一个平方与 $s(k)$ k次幂之和，所需的最小数目 $s(k)$ 满足

$$s(3) \le 7, \quad s(4) \le 14, \quad s(5) \le 28, \quad s(k) \ll 2^{k-2}\left(\tfrac{1}{2}k - 1\right), \quad (k > 5).$$

随着时间推移，这些界不断得到改进。目前已知的最强结果是 $s(3) \le 5$, 由 Watson [2] 得出；Br¨udern 和 Wooley [3] 证明了$s(4) = 7$，并且

$$s(k) \le 2k - 1 \quad (3 \le k \le 6), \qquad s(k) \le 2k \quad (7 \le k \le 11),$$

而对于所有 $k \ge 3$ ，都有

$$s(k) \le \left\lfloor \left(\tfrac{3}{4} + 2\log 2\right) k \right\rfloor + 2.$$

此外，他们证明了每个充分大的整数都可以表示为一个素数的平方与 $s_1(k)$ 个 k 次自然数幂的和，其中

$$s_1(3) \le 6, \qquad s_1(4) \le 8, \qquad s_1(5) \le 12.$$

Mathematics Subject Classification: 主要分类号 11P55；次要分类号 11P32。
Key words and phrases: 华林-哥德巴赫问题，圆法，加性表示。

当所有变量都限定为素数时，目前已知的结果不多。对于 $k = 3$，迄今最好的近似结果由 Li 和 Zhang [4]，给出，他们证明每个充分大的偶整数都可以表示为一个至多有六个素因子的自然数的平方与五个素数的立方之和。对于 $k = 4$，L¨u 和 Cai [5] 建立了涉及一个平方与九个素数的四次方的表示。当 $k = 5$ 时，M. Zhang、J. Li 和 F. Xue [6] 建立了 Br¨udern 和 Kawada [7]，的华林–哥德巴赫类比，并证明每个充分大的偶整数都可以表示为一个平方与十七个素数的五次方之和。本文通过证明以下定理改进了这一结果。

定理1。 对于每个充分大的奇整数 n，方程

$$n = x_1^2 + x_2^5 + \cdots + x_{15}^5 \tag{1}$$

都有一个所有变量均为素数的解。此外，对于每个充分大的偶整数 n，方程

$$n = x_1^2 + x_2^4 + x_3^5 + \cdots + x_{14}^5 \tag{2}$$

存在一个使所有 x_j 均为素数的解。

这些结果通过圆法获得。我们结合了 Hooley [8]，、Br¨udern [9]，、Thanigasalam [10, 11]，、Kawada 和 Wooley 的均值估计。应用 H¨older 不等式后，还需估计一个涉及五次幂的分数贡献。这一部分利用维诺格拉多夫均值定理 [13]，的最新进展，以及 Kumchev 关于素数上的指数和的界 [14] 来处理。随后，剪枝论证完成了证明。

记号。在全文中， p表示一个素数， $e(\alpha)$ 是 $\exp(2\pi i\alpha)$ 的缩写，而 $\phi(q)$ 表示欧拉函数。维诺格拉多夫符号和朗道符号中的隐含常数取决于赋予 ϵ 的值。

2 预备知识

令 n 为一个较大的正整数。对于 $k \geq 2$，定义

$$P_k = n^{1/k}, \qquad L = \log n, \qquad f_k(\alpha) = \sum_{\frac{1}{2}P_k < p \leq P_k} e(\alpha p^k) \log p.$$

现在引入从 [12]中提取的参数。令

$$\lambda_j = \left(\frac{33}{40}\right)^{j-1} \qquad (1 \le j \le 6),$$

$$\lambda_7 = \left(\frac{33}{40}\right)^5 \frac{136}{163}, \qquad \lambda_8 = \left(\frac{33}{40}\right)^5 \frac{576}{815}, \qquad \lambda_9 = \left(\frac{33}{40}\right)^5 \frac{512}{815},$$

$$\Lambda = 2\lambda_9 + \sum_{j=1}^{8} \lambda_j.$$

经过直接计算可得 $\Lambda = 5(1-\lambda)$，其中

$$\lambda = \frac{304\,729\,213}{83\,456\,000\,000}. \tag{3}$$

对于 $1 \le j \le 9$，令

$$g_j(\alpha) = \sum_{\frac{1}{2}P_5^{\lambda_j} < p \le P_5^{\lambda_j}} e(\alpha p^5) \log p.$$

定义

$$\mathcal{G}(\alpha) = g_9(\alpha)^2 \prod_{j=1}^{8} g_j(\alpha).$$

为简便起见，我们常将 $f_k(\alpha)$ 和 $g_j(\alpha)$ 分别记作 f_k 和 g_j。我们还引入

$$F_1(\alpha) = f_2(\alpha) f_5(\alpha)^4 \mathcal{G}(\alpha),$$
$$F_2(\alpha) = f_2(\alpha) f_4(\alpha) f_5(\alpha)^2 \mathcal{G}(\alpha).$$

对于 $j = 1$，2，根据正交性，这些积分

$$\nu_j(n) = \int_0^1 F_j(\alpha) e(-\alpha n)\, d\alpha \tag{4}$$

分别计算 (1) 和 (2) 在限制于某些区间内、并以 $\log x_j$ 的乘积加权的素数变量中的解的个数。定义

$$\Theta_1 = \frac{3}{10} + \frac{\Lambda}{5},$$
$$\Theta_2 = \frac{3}{20} + \frac{\Lambda}{5}.$$

我们的目标是建立下界

$$\nu_j(n) \gg n^{\Theta_j}$$

对所有充分大的 $n \equiv j$ （模 2）。

固定一个实数 $B \geq 1$。令 $\mathfrak{M}$ 为所有区间的并集

$$\mathfrak{M}(q,a) = \{\alpha \in [0,1] : |\alpha - a/q| \leq L^B/n\}, \tag{5}$$

其中 $0 \leq a \leq q$，$(a,\ q) = 1$ 且 $1 \leq q \leq L^B$。令 $\mathfrak{m} = [0,1] \setminus \mathfrak{M}$。我们旨在证明，对于所有充分大的 $n \equiv j$ （模 2），

$$\int_{\mathfrak{M}} F_j(\alpha)e(-\alpha n)d\alpha \gg n^{\Theta_j}, \qquad \int_{\mathfrak{m}} F_j(\alpha)e(-\alpha n)d\alpha \ll n^{\Theta_j}L^{-1}. \tag{6}$$

由此，定理1得证。我们先分析来自 $\mathfrak{M}$ 的贡献。

3 大弧

对于 $k \geq 2$ 和 $0 < \eta \leq 1$，定义

$$S_k(q,a) = \sum_{\substack{x=1 \\ (x,q)=1}}^{q} e\left(\frac{ax^k}{q}\right), \qquad v_{k,\eta}(\beta) = \frac{1}{k}\sum_{2^{-k}n^\eta < m \leq n^\eta} m^{1/k-1}e(\beta m).$$

仿照华罗庚在 [15], 中引理6的证明，我们建立下面的结果。

引理 2. 设 a, q 为满足 $0 \leq a \leq q$、$(a, q) = 1$且 $1 \leq q \leq L^B$的整数。那么，对于 $\alpha \in \mathfrak{M}(q, a)$，有

$$\sum_{\frac{1}{2}P_k^\eta < p \leq P_k^\eta} e(\alpha p^k)\log p = \frac{S_k(q,a)}{\phi(q)}v_{k,\eta}(\alpha - a/q) + O(P_k^\eta e^{-c_1\sqrt{L}}),$$

其中 $c_1 > 0$ 为一个绝对常数。

我们将把引理 2 应用于 $\eta = \lambda_r$。为方便起见，我们将 $v_{5,r}$ 记作v_{5,λ_r}。当 $\eta = 1$ 时，我们直接用 v_k 代替$v_{k,1}$。

引理3. 设 $1 \leq j \leq 2$。当 $n \equiv j$ 充分大时$(\mathrm{mod}\ 2)$ 有

$$\int_{\mathfrak{M}} F_j(\alpha)e(-\alpha n)d\alpha \gg n^{\Theta_j}.$$

证明。 我们首先利用辅助函数 $S_k(q, a)$ 和 $v_{k,\ell}$，对 $F_j(\alpha)$ 进行近似。设 $\alpha \in \mathfrak{M}(q, a)$，其中 $q \leq L^B$ and $(a, q) = 1$。令 $\beta = \alpha - a/q$,

并定义

$$U_1(q,a) = S_2(q,a)S_5(q,a)^{14},$$
$$w_1(\beta) = v_2(\beta)v_5(\beta)^4 v_{5,9}(\beta)^2 \prod_{j=1}^{8} v_{5,j}(\beta),$$

$$U_2(q,a) = S_2(q,a)S_4(q,a)S_5(q,a)^{12},$$
$$w_2(\beta) = v_2(\beta)v_4(\beta)v_5(\beta)^2 v_{5,9}(\beta)^2 \prod_{j=1}^{8} v_{5,j}(\beta).$$

令 $\ell_1 = 15$ 和 $\ell_2 = 14$。由引理 2，我们得到

$$F_j(\alpha) = \phi(q)^{-\ell_j} U_j(q,a) w_j(\alpha - a/q) + O(n^{1+\Theta_j} L^{-4B}).$$

在 $\mathfrak{M}$ 上对其积分，其中该集合的测度为 $O(L^{3B}/n)$，得到

$$\int_{\mathfrak{M}} F_j(\alpha) e(-\alpha n) d\alpha$$
$$= \sum_{q \le L^B} \frac{A_{n,j}(q)}{\phi(q)^{\ell_j}} \int_{-L^B/n}^{L^B/n} w_j(\beta) e(-\beta n) d\beta + O(n^{\Theta_j} L^{-B}), \tag{7}$$

其中

$$A_{n,j}(q) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} U_j(q,a) e(-an/q).$$

由 [15], 的引理 5 可知，对于互素的 a, q，有 $U_j(q,a) \ll q^{\ell_j/2+\epsilon}$，因此 $A_{n,j}(q) \ll q^{\frac{\ell_j+2}{2}+\epsilon}$ 关于 n 一致成立。由此可知级数

$$\mathfrak{S}_j(n) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{A_{n,j}(q)}{\phi(q)^{\ell_j}}$$

绝对收敛。此外，经过常规计算可得

$$\sum_{q \le L^B} \frac{A_{n,j}(q)}{\phi(q)^{\ell_j}} = \mathfrak{S}_j(n) + O(L^{-B})$$

关于 n 一致成立。此外，由 [16], 的引理 6.2 可知

$$w_j(\beta) \ll n^{\Theta_j+1}(1 + n|\beta|)^{-2}. \tag{8}$$

因此，式 (7) 中的求和可以用 $\mathfrak{S}_j(n)$ 代替，误差可忽略不计。

我们旨在证明，对于所有充分大的 $n \equiv j \pmod 2$，$\mathfrak{S}_j(n) \gg 1$。仿照 [16], 中引理 2.11 的证明，同样可以证明

$A_{n,\,j}(q)$ 是积性函数。此外，[15] 中的引理 4 表明，除非 q 是无平方因子的，否则 $A_{n,\,j}(q) = 0$。由此可得

$$\mathfrak{S}_j(n) = \prod_p (1 + (p-1)^{-\ell_j} A_{n,j}(p)). \tag{9}$$

对于 $j = 1,2$，令 $M_{n,j}(p)$ 分别表示在有限域 $\mathbb{F}_p$ 上满足 (1) 和 (2) 且所有变量均非零的解数。利用模 p 的正交性，

$$1 + (p-1)^{-\ell_j} A_{n,j}(p) = p(p-1)^{-\ell_j} M_{n,j}(p).$$

应用柯西–达文波特定理（[16] 的引理 2.14）可得 $M_{n,j}(p) \geq 1$，除非 $p = 2$ 且 $2 \mid n$ 对于 $j = 1$，以及 $p = 2$ 满足 $2 \nmid n$ 对于 $j = 2$。因此，对于所有 $n \equiv j \pmod 2$，(9) 中的因子均为正；又由关于 n 的一致收敛，存在一个数 p_0，使得对于 $n \equiv j \pmod 2$，

$$\mathfrak{S}_j(n) \geq \frac{1}{2} \prod_{p \leq p_0} (1 + (p-1)^{-\ell_j} A_{n,j}(p)) \geq \frac{1}{2} \prod_{p \leq p_0} p^{-\ell_j + 1}.$$

因此，对于所有充分大的 $n \equiv j \pmod 2$，下界 $\mathfrak{S}_j(n) \gg 1$ 成立。

为完成证明，尚需证明 (7) 右端的积分是 $\gg n^{\Theta_j}$。利用估计式 (8)，我们得到

$$\int_{-L^B/n}^{L^B/n} w_j(\beta) e(-\beta n) d\beta = \int_{-1/2}^{1/2} w_j(\beta) e(-\beta n) d\beta + O(n^{\Theta_j} L^{-B}). \tag{10}$$

假设 $j = 1$。根据正交性，右侧的积分为 (10)

$$\frac{1}{2 \cdot 5^{14}} \sum (m_1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=2}^{15} m_j \right)^{-\frac{4}{5}}, \tag{11}$$

其中求和遍历满足以下条件的 $m_1, \ldots, m_{15}$

$$\sum_{j=1}^{15} m_j = n, \tag{12}$$

with

$$2^{-2} n < m_1 \leq n, \qquad 2^{-5} n < m_j \leq n \qquad (j = 2,3,4,5), \tag{13}$$

$$2^{-5} n^{\lambda_{j-5}} < m_j \leq n^{\lambda_{j-5}} \qquad (j = 6, \ldots, 15). \tag{14}$$

对于满足（13）和（14）的任意 $m_1 \leq \frac{17}{64} n$、$m_2, \ldots m_3$，$m_4 \leq \frac{3}{64} n$，以及 $m_j \leq \frac{3}{64} n^{\lambda_{j-5}}$（$j$ =取 6,...,15），都可以求解（12），其中 m_5 满足（13）。因此，（11）中的求和有下界 n^{Θ_1}。

假设 $j=2$。（10）右端的积分为

$$\frac{1}{2\cdot 4\cdot 5^{12}}\sum (m_1)^{-\frac{1}{2}}(m_2)^{-\frac{3}{4}}\left(\prod_{j=3}^{14} m_j\right)^{-\frac{4}{5}}, \tag{15}$$

其中求和遍历 $m_1,\dots,m_{14}$，且满足

$$\sum_{j=1}^{14} m_j = n, \tag{16}$$

with

$$2^{-2}n < m_1 \le n, \qquad 2^{-4}n < m_2 \le n, \tag{17}$$

$$2^{-5}n < m_3, m_4 \le n, \qquad 2^{-5}n^{\lambda_{j-4}} < m_j \le n^{\lambda_{j-4}} \qquad (j=5,\dots,12), \tag{18}$$

$$2^{-5}n^{\lambda_9} < m_{13}, m_{14} \le n^{\lambda_9}. \tag{19}$$

每当 $m_1 \le \frac{17}{64}n$、$m_2 \le \frac{5}{64}n$、$m_3 \le \frac{3}{64}n$、$m_j \le \frac{3}{64}n^{\lambda_{j-4}}$对 $j=5,\dots,12$以及 $m_{13}, m_{14} \le \frac{3}{64}n^{\lambda_9}$按照(17)、(18)和(19)取值时，便可在 m_4 满足(18)的条件下求解(16)。因此，(15)中的求和以n^{Θ_2}为下界。至此即完成该引理的证明。

□

4 小弧

有必要先作一点说明。后续引理的证明中出现的均值，其上界可由 L 的某个幂乘以相应丢番图方程的整数解个数给出。由此观点，我们可以省去对数权重，从而将f_k 视为经典的韦尔和。

引理 4. 设 k_1、k_2、$k_3 \ge 3$ 为满足 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3} \ge \frac{3}{5}$的整数。那么

$$\int_0^1 |f_2 f_{k_1} f_{k_2} f_{k_3}|^2\, d\alpha \ll n^{2\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}\right)+\epsilon}.$$

证明。 由 [8],的引理 11，方程的解数 N_0 满足

$$z_1^2 - z_2^2 = x_1^{k_1} + x_2^{k_2} + x_3^{k_3} - y_1^{k_1} - y_2^{k_2} - y_3^{k_3},$$

其中 $\frac{1}{2}P_2 < z_1,\ z_2 \le P_2$且 $\frac{1}{2}P_{k_j} < x_j,\ y_j \le P_{k_j}$，对于 $j=1,2,3$，右端等于零，满足

$$N_0 \ll P_2 n^{\frac{7}{6}\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}\right)+\epsilon}.$$

使右端非零的 x_j, y_j 的选择个数为$O(P_{k_1}^2 P_{k_2}^2 P_{k_3}^2)$。对于每一个这样的选择，$x_1-x_2$和 x_1+x_2都整除此

边。因此，由因数计数论证，对于x_1, x_2有 $O(P_2^{\epsilon})$种可能。由此得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_2 f_{k_1} f_{k_2} f_{k_3}|^2 \, d\alpha &\ll P_2 n^{\frac{7}{6}\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}\right)+\epsilon} + P_2^{\epsilon} n^{2\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}\right)} \\ &\ll n^{2\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}\right)+\epsilon},\end{aligned}$$

其中，在最终估计中，我们使用假设 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3} \geq \frac{3}{5}$。— — - □

考虑以下均值:

$$J_1 = \int_0^1 |f_2|^2 |f_5|^6 \, d\alpha, \qquad J_2 = \int_0^1 |f_2|^2 |f_4|^4 \, d\alpha, \qquad J_3 = \int_0^1 |\mathcal{G}(\alpha)|^2 \, d\alpha.$$

应用引理 4 和 $k_1 = k_2 = k_3 = 5$，再结合 [9]，的引理 1，我们得到

$$J_1 \ll n^{\frac{6}{5}+\epsilon}, \qquad J_2 \ll n^{1+\epsilon}. \tag{20}$$

此外，Kawada & Wooley [12] 的引理 6.1 给出

$$J_3 \ll n^{1-\lambda+\epsilon}, \tag{21}$$

其中 λ 在 (3) 中定义。

做好这些准备后，我们将 (4) 中来自集合的贡献单独提取出来

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \{\alpha \in [0,1] : |f_5(\alpha)| \leq P_5^{1-3\lambda-10\tau}\}, \\ \mathcal{E}_2 &= \{\alpha \in [0,1] : |f_5(\alpha)| \leq P_5^{1-5\lambda-20\tau}\},\end{aligned}$$

其中 $\tau = 2^{-100}$。

引理 5. 对于 $1 \leq j \leq 2$，有

$$\int_{\mathcal{E}_j} F_j(\alpha) e(-\alpha n) d\alpha \ll n^{\Theta_j - \tau}.$$

证明. 由 H¨older 不等式可推得

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{E}_1} |F_1(\alpha)| \, d\alpha &\leq J_1^{1/2} J_3^{1/2} \sup_{\alpha \in \mathcal{E}_1} |f_5(\alpha)|, \\ \int_{\mathcal{E}_2} |F_2(\alpha)| \, d\alpha &\leq J_1^{1/4} J_2^{1/4} J_3^{1/2} \sup_{\alpha \in \mathcal{E}_2} |f_5(\alpha)|^{1/2}.\end{aligned}$$

利用 (20) 和 (21) 中的界，结合 $\mathcal{E}_j$ 的定义以及直接计算，即可得到所需的估计。

□

对于 $\mathcal{E}_j$ 的补集，我们结合分部求和应用 [13] 中的引理2.2，其中取 $k=5$ 和 $X=\frac{1}{2}P_5$。由此可得

$$[0,1]\setminus \mathcal{E}_j \subset \mathfrak{R},$$

其中 $\mathfrak{R}$ 是由以下互不相交区间构成的并集

$$\mathfrak{R}(q,a)=\{\alpha\in[0,1]:|q\alpha-a|\le n^{-\frac{118}{119}}\},$$

其中 $0\le a\le q$，$(a,q)=1$，且 $1\le q\le n^{\frac{1}{119}}$。

定义函数 $\Upsilon:\ \mathfrak{R}\to[0,1]$ 如下：

$$\Upsilon(\alpha)=(q+n|q\alpha-a|)^{-1}\qquad(\alpha\in\mathfrak{R}(q,a)).$$

于是，根据 [14] 的定理2和分部求和，存在常数$C>0$，使得当 $\alpha\in\mathfrak{R}$ 且 $k=2,4,5$ 时，有

$$f_k(\alpha)\ll P_kL^C\Upsilon(\alpha)^{1/2-\epsilon}.$$

注意到 $g_1(\alpha)=f_5(\alpha)$。因此，对 $g_r(\alpha)$ 使用平凡界，可得

$$F_j(\alpha)\ll n^{1+\Theta_j}L^{5C}\Upsilon(\alpha)^{39/16}.$$

现在我们对 $\mathfrak{R}\setminus\mathfrak{M}$ 积分。经常规计算可得

$$\int\limits_{\mathfrak{R}\setminus\mathfrak{M}}|F_j(\alpha)|d\alpha\ll n^{1+\Theta_j}L^{5C}\int\limits_{\mathfrak{R}\setminus\mathfrak{M}}|\Upsilon(\alpha)|^{39/16}d\alpha\ll n^{\Theta_j}L^{5C-\frac{7}{16}B}.$$

由此得出以下结果。

引理6。设 $B\ge 80C+16$。则

$$\int\limits_{\mathfrak{R}\setminus\mathfrak{M}}|F_j(\alpha)|d\alpha\ll n^{\Theta_j}L^{-1}.$$

现在我们可以完成定理1的证明。选取 B，使引理6适用。根据集合 $\mathfrak{M},\mathfrak{R}$ 和 $\mathcal{E}_j$ 的定义，可得

$$\mathfrak{m}\subset\mathcal{E}_j\cup\mathfrak{R}\setminus\mathfrak{M}.$$

因此，结合引理5、引理6和引理3，我们得到（6），从而完成定理1的证明。

经费资助

本研究得到了 CAPES（巴西高等教育人员培训协调机构）的资助。

致谢

作者谨此感谢巴西利亚大学数学研究生项目在本研究开展期间提供的学术支持。

利益声明

作者声明，不存在任何已知的竞争性经济利益或个人关系可能影响本文所报告的工作。

参考文献

[1] G. K. Stanley，数表示为一个平方数与若干个 k 次幂之和，《伦敦数学学会会刊》s2-31 (1) (1930) 512–553。doi:10.1112/plms/s2-31.1.512。[2] G. L. Watson，关于一个平方数与五个立方数之和，伦敦数学会杂志 s2-5 (2) (1972) 215–218。doi:10.1112/jlms/s2-5. 2.215。[3] J. Br¨udern，T. D. Wooley，数的分拆：平方数与高次幂之和，数学函数与逼近评论 71 (1) (2024) 21–67。doi:10.7169/facm/2165。[4] J. Li，M. Zhang，关于一个平方数与五个立方数的华林-哥德巴赫问题，国际数论杂志 14 (9) (2018) 2425–2440。doi:10.1142/S1793042118501476。[5]X. L¨u，Y. Cai，华林-哥德巴赫问题：一个平方数与九个双二次幂，中国数学年刊，B辑 40 (2) (2019) 273–284。doi:10.1007/s11401-019-0132-x。[6]M. Zhang，J. Li，F. Xue，关于一个平方数与十七个素数的五次方的华林-哥德巴赫问题，arXiv 预印本 (2024) arXiv:2402.03076arXiv:2402.03076，doi:10.48550/arXiv.2402.03076。[7] J. Br¨udern，K. Kawada，华林问题中一个平方数与十七个五次幂的渐近公式，《数学月刊》162 (4) (2011) 385–407。doi:10.1007/s00605-009-0171-6。[8] C. Hooley，关于解决各类华林型问题的新方法，《解析数论新进展》1 (1981) 127–191，达勒姆，1979。[9] J. Br¨udern，平方数与高次幂之和 I、II，伦敦数学会杂志 (2) 35 (2) (1987) 233–250。doi:10.1112/jlms/s2-35.2.233。

[10] K. Thanigasalam，关于正整数幂之和及（6）的简洁证明， G（6） $\leq$ 31,《加尔各答数学学会通报》81 (1989) 279–294。[11] K. Thanigasalam，关于 k 次幂的可容许指数，《加尔各答数学学会通报》86 (1994) 175–178。[12] K. Kawada，T. D. Wooley，关于四次幂和五次幂的华林-哥德巴赫问题，《伦敦数学学会会刊》83 (1) (2001) 1–50。doi:10.1112/plms/83.1.1。[13]A. V. Kumchev，T. D. Wooley，关于七次及更高次幂的华林-哥德巴赫问题，《数学月刊》183 (2) (2017) 303–310。doi:10.1007/s00605-016-0936-7。[14] A. V. Kumchev，关于素数与几乎素数上的韦尔和，《密歇根数学杂志》54 (2) (2006) 243–268。doi:10.1307/mmj/1156345592。[15] L. Hua，关于加性素数论的一些结果，《牛津数学季刊》 (2) 9 (1) (1938) 68–80。doi:10.1093/qmath/os-9.1.68。[16]R. C. Vaughan，《哈代–李特尔伍德方法》，第2版，《剑桥数学丛书》第125卷，剑桥大学出版社，剑桥，1997。doi:10.1017/CBO9780511470929。