arXiv:2603.05554v1 [math.AG] 5 Mar 2026

抛物群概形的约化

ARNAB KUNDU

摘要

抛物型群概形是定义在亨泽尔离散赋值域 K 上的约化群概形的某些可能非约化、光滑、仿射整模型，其剩余域是完美的。我们证明，任意此类群概形 $\mathscr{P}$ 在某个（可能是野分歧的）有限伽罗瓦扩张 L/K 之后，就某种特定意义而言变为约化的。更确切地说，我们证明存在一个约化整模型 $\mathscr{G}$，它是基变换 $\mathscr{P}_L$ 的约化整模型，并且 $\mathscr{P}$ 可以从 $\mathscr{G}$ 的韦伊限制的伽罗瓦不变量子群的光滑化中恢复出来。我们的工作将 Balaji–Seshadri 和 Pappas–Rapoport 在温和分歧且单连通半单情形下的结果推广了出去。

作为应用，在剩余特征充分良好的条件下，我们建立了 Grothendieck–Serre 猜想的一个抛物型类似命题。具体而言，我们证实，只要泛点处的约化群是单连通的，一般平凡的抛物型扭子就是平凡的。证明通过将问题约化为关于堆化离散赋值环上的堆化约化群的一个命题来进行。

目录

1 旁拉霍里克群的 Grothendieck–Serre 猜想的类比。 1

2 Kottwitz 同态与 Bruhat–Tits 建筑。 3

3 旁拉霍里克群作为约化群的光滑不变前推。 6

4 可温顺约化的抛物型群概形 。 11

1. 旁拉霍里克群的 Grothendieck–Serre 猜想的类比。

在约化群概形上的挠子理论中，Grothendieck–Serre 猜想因其表述简洁且同时具有深远影响而占据核心地位（参见 [Čes22$_{\text{Surv}}$]，以了解近期综述）。该猜想历史悠久，目前已有许多重要情形被证明成立；此外，迄今尚未发现任何反例。鉴于它取得的成功，自然会让人思考：这一猜想是否可能扩展到约化群概形之外的类别。

有鉴于此，我们从以下问题开始讨论，该问题见于 [BF17，问题 6。4]。若答案为肯定，则显然可将 Grothendieck–Serre 型结果扩展至定义 2.14 意义下的抛物型群概形，因为这些群概形是约化群概形的推广。

在陈述问题之前，我们强调，本文中所有仿抛物群概形——包括约化群概形——默认均假设为纤维连通。

问题 1.1 (Bayer-Fluckiger–First). 给定一个仿抛物群概形 $\mathscr{P}$，其定义见 2.14(c)，定义在一个半局部主理想整环 R 上，且其剩余域完美、分式域为 F，等式

$$\ker(H^1(R,\mathscr{P}) \xrightarrow{\rho} H^1(K,\mathscr{P})) = \{*\}\ ?$$

不过，我们注意到，问题 1.1 与 [BF17，问题 6.4]的表述之间有一个细微差别。在我们的表述中，我们询问限制映射 ρ 到泛点后是否具有平凡核；而 Bayer-Fluckiger 和 First 询问的是该映射 ρ 是否实际上为单射。尽管如此，通过平移 $H^1(R,\ \mathscr{P})$ (例如参见 [Kun23，注 2.02]中的论证)，只要对每个一般纤维是 问题 1.1 的约化纤维为 $\mathscr{P}'$ 的一般纤维的内形式的仿抛物型群概形 $\mathscr{P}$均有肯定回答，这个更强的单射条件便可推出。

问题 1.1的已知答案

- 当 $\mathscr{P}$ 在 R 上是约化的时，这属于关于约化群下扭子的 Grothendieck–Serre 猜想的一部分。在这种情况下，即使 R 是半局部戴德金整环，这个问题也有肯定答案，这得益于 Nisnevich 在其学位论文 [Nis82] 以及 Guo 在其硕士论文 [Guo20]中的工作。因此，只需处理非约化的 $\mathscr{P}$。

• 当 R 是完备离散赋值环时，布鲁哈和蒂茨早已在 [BTIII，引理 3.9]中确立了一个部分肯定结果。此外，当 $\mathscr{P}$ 的一般纤维是某个厄米形式的自同构群时，Bayer- Fluckiger 和 First 本人在 [BF17，§6] 中断言，问题1.1有肯定答案。

• 最近，Zidani 在 [Zid25a；Zid25b] 对以下情形给出了肯定答复：的 $\mathscr{P}$ 一般纤维是单连通半单群概形，或是准分裂且伴随的半单群概形，并且 R 甚至是半局部戴德金环。

本文旨在对以下结果给出新的证明，处理 R 是亨泽尔离散赋值环的情形。

定理 A (推论4.13)。 设亨泽尔离散赋值环 $\mathcal{O}_K$ 具有特征为 $p \neq 2$的完美剩余域，*3*、*5*，分式域为 K，对于抛物型群 $\mathcal{O}_K$概形 $\mathscr{P}$，其一般纤维 $\mathscr{P}_K$ 是单连通半单群概形，且 $p \nmid (n+1)$ 只要 $\mathscr{P}_K$ 含有一个类型为 A_n的几乎单因子，其中 $n \geqslant 2$，任意一般平凡的 $\mathscr{P}$-挠子在 $\mathcal{O}_K$ 上都是平凡的，即

$$\ker(H^1(\mathcal{O}_K, \mathscr{P}) \to H^1(K, \mathscr{P}_K)) = \{*\}.$$

我们的方法概述如下：通过将定理 A 归约到此前讨论过的 $\mathscr{P}$ 为约化的情形来证明该定理。为进行这一归约，我们证明一个适用于所有仿抛物群概形的基本结构性结果，即定理 B，其陈述将阐明我们在定理 A中的假设。粗略地说，定理 B 断言，每个仿抛物群概形 $\mathscr{P}$ 在基域 L/K的某个扩张（可能是野分歧的）之后都会成为约化的。更准确地说，它表明，任意仿抛物群在经过适当扩张 L K后都 admits a 约化化 。因此，本文下文将引入的约化化概念，是一个核心概念。

定义1.3（约化化）。∘ 若亨泽尔离散赋值环 $\mathcal{O}_K$ 上的仿抛物群概形 $\mathscr{P}$ 满足以下条件，则称其为 可约化化的：存在一个有限伽罗瓦扩张 L/K，其整数环为 $\mathcal{O}_L$、伽罗瓦群为 Γ，并且存在一个 Γ-等变约化 $\mathcal{O}_L$-模型 $\mathscr{G}$，它定义在 $\mathscr{P} \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(L)$ 上，带有由右因子上的作用所诱导的典范半线性 Γ-作用，使得存在一个 $\mathcal{O}_K$-群概形同构

$$\mathscr{P} \cong \mathfrak{R}^{\Gamma}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathscr{G})_{\mathrm{sm}}, \tag{$*$}$$

其中 $\mathfrak{R}^{\Gamma}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathscr{G})$ 表示由 Γ-不变截面参数化的闭子概形（参见 [Edi92，第 §3] 节），它是 $\mathscr{G}$沿扩张 $\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_L$ 的 $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathscr{G})$ 的 Weil 限制；而 $(-)_{\mathrm{sm}}$ 表示群光滑化函子（参见定义 3.2 ）。注意， $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathscr{G})$ 上的 Γ- 作用 —— 该概形表示 $S \mapsto \mathscr{G}(S \times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L))$ ——自然地由 $S \times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L)$ 上经由右因子诱导的 Γ-作用给出，其中 $\mathcal{O}_K$是任意概形。若存在这样的同构 $(*)$，我们称 $(L, \mathscr{G})$ 是 $\mathscr{P}$的约化化。

∘一个抛物子群 $\mathscr{G}$在 $\mathcal{O}_K$ 上称为可驯约化，如果它具有温和约化，即约化化$(L,\ \mathscr{G})$ 其中 L/K 是温和分歧的。在这种情况下，无需再复合群光滑化函子（参见 [Edi92，命题 3。4]），并且我们有一个 $\mathcal{O}_K$-群概形

$$\mathscr{P} \cong \mathfrak{R}^{\Gamma}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathscr{G}).$$

一般纤维 $\mathscr{P}_K$ 是环面的情形，已是一个典型例子，本身也值得独立研究。在这种情况下，仿抛物模型 $\mathscr{P}$ 与 有限型 *Néron* 模型 的 $\mathscr{P}_K$单位连通分支重合，其特征是 $\mathscr{P}(\mathcal{O}_{\check{K}}) \subseteq \mathscr{P}_K(\check{K})$ 是伊wahori子群（见 [BLR90]），其中 $\check{K}$ 是 K的最大非分歧扩张。特别地，环面 $\mathscr{P}_K$ 在其分裂域上可约化化（见注 3.14），该分裂域可能是野分歧的。这说明存在可约化化但不可驯约化的仿抛物群概形（见例 3.15）。

第二个基本 例子出现在 $\mathscr{P}_K \cong \mathrm{SL}_{2,K}$ 的情形，其中唯一的非约化仿抛物模型 $\mathscr{P}$ 是伊wah ri ori子群。我们考 察此情形，见例 3.16 及注 3.17。

本文下面陈述的主要结果推广了上述两种情形。

定理 B (定理 3.11 及推论 4.5)。 每个抛物型群概形 $\mathscr{P}$ 在剩余域特征为 p 的亨泽尔离散赋值环上都是可约化的。此外，若其一般纤维 $\mathscr{P}$ 是单连通或伴随的半单群概形，并且 G 满足以下条件，则它是可驯约化的： p $p \neq 2$，3，5 以及 $p \nmid (n+1)$ 当 G 包含一个类型为 A_n的几乎单因子时，其中某个 $n \geqslant 2$。

注记 1.5。 我们的证明策略关键依赖于 [KP23], 中发展的技术；该文默认假设剩余域完美（参见注记 2.13）。这一假设对我们的目的无关紧要，因为定理 B 最有趣的情形是基环为 $\mathbb{Z}_p$ 或 $\mathbb{F}_p[[t]]$的有限扩张，此时剩余域甚至是有限的。不过，由于原始文献 [BTII] 确实施加了这一假设，因此应当可以将我们的结果推广到更一般的情形。

此处讨论的约化化思想源自 Balaji 和 Seshadri 的工作 [BS15], ，他们证明了定理B 在 $p = 0$且 G定义在 $\mathbb{Z}$上的特殊情形。他们的工作在 [Dam24 中得到了推广；DH23]。然而，在温和分歧的情形下，为了证明定理B，我们沿用了 Pappas 和 Rapoport 在 [PR24], 中的方法。他们在假设 G 为单连通且几乎单的条件下，证明了有关温和约化的第二项主张（温和分歧情形下的相关结果见 [CGP14]）。

我们主要的贡献是处理野分歧情形；只要 G 是中心环面未被某个温和扩张分裂的约化群概形，或剩余特征足够小，就必须处理这种情形。在这一假设下，情况更为微妙，因为温和约化的反例已经出现；例如，在SL_2 上的伊wahori子群情形（见注3.17）。因此，在

同构（$*$）后再复合群光滑化函子至关重要（见例3.15）。此前已有研究使用群光滑化来研究抛物模型（见[CY01;Yu15]）。

我们期望定理 B 在问题 1.1 之外也有应用，例如在曲线上丛的模堆的研究中（例如参见 Balaji–Pandey [BP25], Damiolini [Dam24], Damiolini–Hong [DH23], 以及 Heinloth [Hei10]）。特别地，或许可以将这些论文中的结果推广到野分歧情形。

我们以所承诺的概述结束本引言，随后给出文章大纲。

我们对定理 A 的证明概述

采用定理 A 的记号，推论 4.5 表明 $\mathscr{P}$ 具有一个温和约化 $(L,\mathscr{G})$，即存在一个约化模型 $\mathscr{G}$，定义在温和分歧扩张 L/K 上，并带有一个同构

$$\mathscr{P} \cong \mathfrak{R}^{\Gamma}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathscr{G}).$$

根据 [PR24 的命题 3.2]（参见 [Dam24]），$\mathcal{O}_K$ 上的 $\mathscr{P}$-扭子（相应地，带有泛点平凡化者）对应于 $\mathcal{O}_L$ 上带有相容 Γ-半线性作用的 $\mathscr{G}$-扭子（相应地，带有 Γ-等变的泛点平凡化）。这些在 [BS15] 与 [PR24 §3.1]（参见 [Dam24；DH23]）中研究的 $(\Gamma,\mathscr{G})$-丛，等价于堆化离散赋值环 $[\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L)/\Gamma]$ 上、堆化约化群 $[\mathscr{G}/\Gamma]$ 下的扭子。我们的目标是利用 L/K 的温和性进行 Levi 约化。

首先，引理 4.8 给出了一个 Γ-等变抛物子群 $\mathscr{Q}\subset\mathscr{G}$ 上的 $\mathcal{O}_L$，因此任何一般平凡的 $[\mathscr{G}/\Gamma]$-挠子 $\mathscr{E}$ 都可以约化到 $[\mathscr{Q}/\Gamma]$。其次，命题 4.9 给出了一个 Γ-等变 Levi 分解 $\mathscr{Q}\cong\mathscr{M}\rtimes\mathscr{U}$。利用温和堆 $\mathbf{B}\Gamma$ 上的 Serre 消失定理（参见 [AOV08]），我们证明 $\mathscr{E}$ 还能进一步约化为一个一般平凡的 $[\mathscr{M}/\Gamma]$-挠子。

本文提纲

在 §2中，我们按照 [KP23]回顾仿抛物群概形的概念；在 §3中，我们证明定理 B的第一个断言；最后，在 §4中，我们证明定理 B的第二个断言，从而推出定理 A。

记号与约定

称一个离散赋值域为一个配备离散赋值的域 K。此类域的整数环记为 $\mathcal{O}_K$，除非另有说明。若 $\mathcal{O}_K$ 是亨泽尔的，则称 K 为亨泽尔的。K 的剩余域是指 $\mathcal{O}_K$ 的剩余域，并假设其为完美域。K 的最大非分歧扩张记为 $\breve{K}$。

2. Kottwitz 同态与 Bruhat–Tits 建筑。

本节中，按照 [KP23], ，我们的目标是定义定义2.14中的仿抛物群概形概念。正如引言中所强调的，这些是定义在亨泽尔离散赋值域上的约化群概形的某些整模型，其特征是它们的整数点群与 G 所关联的 Bruhat–Tits 建筑中各点的连通稳定子相同 G。我们在 §2.12中回顾 Bruhat–Tits 建筑的必要性质。此外，由于定理 A 涉及非单连通群概形，因此 §2.10 中回顾的 Kottwitz 同态对于定义2.14至关重要。

我们从域的以下性质开始，这是我们对 [Ser97，第 2 章 §31] 和 [KP23，§23]的改写；本文所考虑的所有基域的最大非分歧扩张都满足这一性质。

定义 2.1 （上同调维数）。 称域 F 具有上同调维数 $\leqslant 1$，记作 $\mathrm{cd}(F)\leqslant 1$，如果对任意代数扩张 L/F，下列等价条件成立。

(1) 对于任意有限伽罗瓦扩张 L'/L，相应的范数态射 $N_{L'/L}\colon\ \mathbb{G}_m(L')\to\mathbb{G}_m(L)$ 是满射。

(2) 对任意 L-环面 T，我们有 $H^1(L,T)=0$。

两个条件的等价性 (1) 定义一般地，由 Steinberg 定理推出 对于域 [KP23，cd(F)≤1。3]

(2) 注记 2.2 (1) 定义一般地，由 Steinberg 定理推出 对于域 [KP23，cd(F)≤1。3]成立的充要条件是 对任意代数扩张 L/F，每个约化 L-群 G 都满足 $H^1(L,\ G)=\{*\}$。

(2) 此外，同一定理还保证，在满足 $\mathrm{cd}(F)\leqslant 1$的域 F 上，任意约化群 G 都含有一个 Borel F-子群，换言之，任意这样的 G 都是 F-准分裂的。

(3) 构造 G 定义在亨泽尔离散赋值域上的约化群 K 在 [BT$_{\mathrm{II}}$] 所关联的 Bruhat–Tits 建筑 G 要求它在 $\breve{K}$ 的最大非分歧扩张 K上准分裂。由（2），只要$\mathrm{cd}(\breve{K})\leqslant 1$，这一条件便成立；而这由本文始终采用的假设可知，即 K 是亨泽尔的且剩余域完美（见 [KP23，推论 2.3。7]）。

我们先引入本节余下部分将用到的记号。给定域 F 上的环面 T，其可分闭包为 F_{sep}，则特征格（分别地，余特征格）记为 $\mathbb{X}^*(T):=\mathrm{Hom}_{F^{\mathrm{sep}}}(T,\mathbb{G}_m)$（分别地，$\mathbb{X}_*(T):=\mathrm{Hom}_{F^{\mathrm{sep}}}(\mathbb{G}_m,T)$）。这两类对象都自然带有绝对伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F)$ 的作用。

定义 n §2.10 与约化群相关的 Kottwitz 同态的定义相当复杂，依赖于各种 s 我们需要的概念 此前需要先介绍。我们从第一个概念开始，称为 z-扩张 (也称为 t-分解，见 [BG14]

其中包括 余拟诱导分解 这一概念，见 [Col08])，该概念由 Langlands 和 Ono 引入，并由 Kottwitz 有效地加以运用。为此，我们首先需要介绍以下概念。文献中对它的称呼各不相同，例如在拟平凡 见 [CS87]中采用的称呼。不过，我们采用 Kaletha 和 Prasad 在 [KP23第 2.5 条定义中选用的名称。1]。

定义 2.3（诱　导环面）。域 F 上的环面 T 称为诱导的，如果存在一个伽罗瓦分裂域扩张 $F'/$　　F 使得格　　$\mathbb{X}^*(T)$，等价地，格 $\mathbb{X}_*(T)$，具有一个伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(F'/F)$-稳定的 $\mathbb{Z}$-基。

注 2.4。设 T 是域 F 上的一个诱导环面。

(i) 根据定义 2.3，T可写成形如 $\mathrm{Res}_{L/F}(\mathbb{G}_m)$ 的有限乘积，其中每个 L 都是所选伽罗瓦分裂域扩张 F'/F 的某个子域，即，是一个扩张 F'/F，使得 $\mathbb{X}^*(T)$，等价地，$\mathbb{X}_*(T)$，具有一个伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(F'/F)$-等变的 $\mathbb{Z}$-基。事实上，这源于 F'- 分裂环面范畴与带有 $\mathrm{Gal}(F'/F)$- 作用 [的有限自由 $\mathbb{Z}$- 模范畴之间的等价性（SGA 3_{II}，第 X 分册，命题 1.1]）。

(ii) 特别地，（i）表明，对于任意伽罗瓦分裂域扩张 F''/F，格 $\mathbb{X}^*(T)$，等价地，格 $\mathbb{X}_*(T)$，具有一个 $\mathrm{Gal}(F''/F)$-稳定的 $\mathbb{Z}$-基。（iii）准分裂半单群概形的极大环面（该群概形或者是伴随的，或者是单连通的）是诱导的（见 [$\mathrm{BT}_{\mathrm{II}}$，命题 4.4。16]）

定义 2.5 (Z-扩张)。给定域 F 上的约化群概形 G，一个 z-扩张（相应地，一个 μ-扩张）是一个正合列

$$1 \to Z \to \tilde{G} \to G \to 1,$$

其中 Z 是一个诱导 F-环面（相应地，其中 Z是一个有限的乘性类型 F-群概形），且 $\tilde{G}$是一个约化 F-群　　p 概形，其导出　　子群是单连通的。

注 2.6。（a）给定一个 z-扩张或一个 μ-扩张 $1 \to Z \to \tilde{G} \to G \to 1$，由于 $\tilde{G}$ 是连通的，正规子群 $Z \subset \tilde{G}$ 为乘性类型，因而必然是中心的。这可以由 [Mil17，推论 12.38] 来证明，或通过注意到分裂乘法型群的自同构群是离散的（见 [SGA 3_{II}，第 X 分册，命题 1.1]）；例如，在秩为 r 的分裂环面的情形下，该群是 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$。

(b) 给定一个约化 F-群概形 G，我们回顾 z-扩张的构造，其来自 [KP23，构造 11.4.1]。First，我们知道单位连通分支 T，亦即 G 的中心的单位连通分支，是一个环面（[SGA 3_{II}，第 XII 分册，命题 4.11]）。其次，我们令 G_{sc} 为 G 的导出子群的单连通覆盖（见 [Con14，习题 1.6.13]），并令 μ 为作为满同源之核的有限乘法群（见 [Bor91，§14.2]）

$$T \times G_{\mathrm{sc}} \twoheadrightarrow G. \tag{2.6.1}$$

由此得到一个 μ-扩张 $1 \to \mu \to T \times G_{\mathrm{sc}} \to G \to 1$。
为了构造一个 z-扩张，我们现在假设 μ 嵌入环面 Z 之中，其存在性可以如 i 加以证明　　n [KP23，构造 11.4.1]。此后，我们通过取而得到 G 的一个 z-扩张

$$\tilde{G} := (Z \times T \times G_{\mathrm{sc}})/\mu.$$

以下　　内容回顾自 [KP23，§2.5(b)]，，是 Kottwitz 同态定义中的另一项要素。

2.7. 赋值同态。设环面 T定义在亨泽尔离散赋值域 $(F, |\cdot|_F)$ 上，其剩余域完美，绝对伽罗瓦群为　　$\mathfrak{G}$　　$\omega_{T,F}$　T　F $\to$　　$_{\mathbb{Z}}\mathbb{X}^*$　T　　$\mathbb{Z}$　　$t \mapsto$　$\chi \mapsto$，则有一个函子性同态 $-|\chi\ t\ |_F$　　T　F　　$_{\mathbb{Z}}\mathbb{X}^*$　T　$\mathbb{Z} \cong \mathbb{X}_*$　T $:(\,)\,\mathrm{Hom}((\,)^{\mathfrak{G}},\ )$ 由 $(())$给出。当 是 -分裂时，利用同构 $\mathrm{Hom}(())\,(),$ 可得以下满态射（[KP23，引理 2.5。7]），称为赋值同态

$$v_{T,F} \colon T(F) \to \mathbb{X}_*(T).$$

在 §2.10中引入 Kottwitz 同态之前，先介绍最后一个必要概念（文献中也称为代数基本群），内容回顾自 [KP23，§11。3]。

2.8. 博罗沃伊基本群。设 F是一个具有可分闭包 F^{sep} 的域，且 G是一个约化 F-群概形。假设 $T \subseteq G$是一个极大 F-环面，G_{sc}是 G的导出子群的单连通覆盖。设 $T_{\mathrm{sc}} \subseteq G_{\mathrm{sc}}$是一个包含于 T之原像中的极大 F-环面。于是，T_{sc}的余特征格可识别为子格 $\mathbb{X}_*(T_{\mathrm{sc}}) \subseteq \mathbb{X}_*(T)$，它由分裂约化 F^{sep}-群 $(G_{F^{\mathrm{sep}}}, T_{F^{\mathrm{sep}}})$ 的余根生成（参见 [Čes22$_{\mathrm{Surv}}$，命题 A.3.4]）。那么，G的博罗沃伊基本群定义为下述带有自然伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F)$-作用的有限生成阿贝尔群

$$\pi_1^B(G) := \mathbb{X}_*(T)/\mathbb{X}_*(T_{\mathrm{sc}}).$$

此构造不依赖于极大环面 $T \subset G$ (参见 [BG14，§2] 或 [Col08，命题 A.2])；此外，赋值 $G \mapsto \pi_1^B(G)$ 在 G中是函子性的（参见 [KP23，引理 11.3。6]）。

我们注意到，由构造可知，若 $G = T$ 是一个环面，则存在等式 $\pi_1^B(T) = \mathbb{X}_*(T)$。更一般地，设 $G_{\mathrm{der}} \subseteq G$ 为导出子群，且 $G_{\mathrm{ab}} := G/G_{\mathrm{der}}$ 为 G的极大阿贝尔商。在 G_{der} 单连通的情形下，利用特征格与余特征格之间的同构，我们有一个典范等式

$$\pi_1^B(G) = \pi_1^B(G_{\mathrm{ab}}). \tag{2.8.1}$$

在本节的其余部分，我们将使用以下记号。

2.9. 设置。

◇ 设 K 是一个剩余域完美的亨泽尔离散赋值域。

⌓◇ 设 K 是 K 的最大非分歧扩张，且包含于 K的可分闭包 K^{sep} 中

◇ 设 $I:=\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/\breve{K})$ 是绝对伽罗瓦群 $\Gamma:=\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ 的惯性子群，其余核为 $\Xi:=\Gamma/I\cong\mathrm{Gal}(\breve{K}/K)$。

2.10. Kottwitz 同态。 使用 § 中引入的记号2.9，给定一个约化 K-群概形，我们回顾 *Kottwitz* 同态 的定义

$$\kappa_G\colon G(\breve{K})\to\pi_1^B(G)_I,$$

来自 [KP23，第 11 节。5]。下面给出的构造表明，该态射是满射且与 Ξ等变，同时地，按函子性，与基域扩张以及约化群概形之间的态射相容。

(i) 设 T 是一个 K-环面，并且对每个有限伽罗瓦扩张 $L/\breve{K}$，令 $N_{L/\breve{K}}\colon T(L)\to T(\breve{K})$ 为与 $\breve{K}\to L$ 相关联的范数态射（例如参见 [Kun23, §5.5]）。注意，由于我们假设 $\mathrm{cd}(\breve{K})\leqslant 1$（见注 2.2(1)），该态射是满射。因此，对 T 的 Kottwitz 同态定义为唯一一个使得对任意分裂 T 的有限伽罗瓦扩张 $L/\breve{K}$，下图交换的态射

$$\begin{array}{ccc} T(L) & \xrightarrow[(2.7)]{v_{T,L}} & \mathbb{X}_*(T) \\ {\scriptstyle N_{L/\breve{K}}}\downarrow & & \downarrow \\ T(\breve{K}) & \xrightarrow{\kappa_T} & \mathbb{X}_*(T)_I, \end{array}$$

其中我们作了恒等识别 $\mathbb{X}_*(T)=\pi_1^B(T)$，右侧竖直箭头是典范商态射。由唯一性以及 $v_{T\text{ 的}L}$ 的 Ξ-等变性，κ_T 的 Ξ-等变性自动成立。

(ii) 当导出子群 G_{der} of G 是单连通时，Kottwitz 同态的定义使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} G(\breve{K}) & \xrightarrow{\kappa_G} & \pi_1^B(G)_I \\ \downarrow & & \| \\ G_{\mathrm{ab}}(\breve{K}) & \xrightarrow[\kappa_{G_{\mathrm{ab}}}]{\text{(i)}} & \pi_1^B(G_{\mathrm{ab}})_I, \end{array}$$

其中 $G_{\mathrm{ab}}:=G/G_{\mathrm{der}}$ 是一个环面（参见 [Con14，定理 5.3。1]），左侧等式为（2.8.1）。于是，Ξ-等变性是 Ξ-等变性的直接结果，而 $\kappa_{G_{\mathrm{ab}}}$ 的左侧垂直箭头也具有同样的性质。

(iii) 一般而言，我们选取一个 z-扩张（例如，z-扩张是在注记2.6（b）中构造的）

$$1\to Z\to\widetilde{G}\to G\to 1$$

并定义 Kottwitz 同态，使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{G}(\breve{K}) & \xrightarrow[\text{(ii)}]{\kappa_{\widetilde{G}}} & \pi_1^B(\widetilde{G})_I \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(\breve{K}) & \xrightarrow[\kappa_G]{} & \pi_1^B(G)_I, \end{array}$$

其中左侧垂直箭头是满射（因为 $\mathrm{cd}(\breve{K})\leqslant 1$ 由注记 2.2（3）可知），因此右侧垂直态射也是满射（参见 [BG14，§ 2], 参见 [Col08，命题 6。2]）。Ξ-等变性是 κ_G 的类似性质以及右侧垂直箭头的直接结果。此外，构造与所选 z-扩张无关（参见 [KP23，引理 11.5。1]），从而保证所得定义是良定义的。

取 Ξ 不变量后，κ_G 便归结为以下同态。滥用术语时，也称其为 Kottwitz 同态，

$$\kappa_G|_{G(K)}\colon G(K)\to(\pi_1^B(G)_I)^{\Xi}.$$

作为上述讨论的结果，我们定义以下特征子群，它们对于刻画与非单连通群相关联的仿抛物群概形至关重要。令

$$G(\breve{K})^0:=\ker(\kappa_G)\quad\text{and}\quad G(K)^0:=\ker(\kappa_G|_{G(K)}).\tag{2.10.1}$$

注意到 [KP23，命题 11.54] 表明等式成立：$G(K)^0=G(\breve{K})^0\cap G(K)$。

注 2.11（基扩张下的 Kottwitz 同态）。 根据构造，对于任意离散赋值域的有限扩张L/K，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} G(\breve{K}) & \xrightarrow{\kappa_G} & \pi_1^B(G)_I \\ \downarrow & & \uparrow \\ G(\breve{L}) & \xrightarrow[\kappa_{G_L}]{} & \pi_1^B(G_L)_{I_L}, \end{array}$$

其中， $\breve{L}$ 是 L 的最大非分歧扩张，而 I_L 是 L的惯性子群。特别地，这表明我们有一个包含关系

$$G(\breve{L})^0 \cap G(\breve{K}) \subseteq G(\breve{K})^0.$$

2.12. Bruhat–Tits 建筑。 采用 §2.9中的记号，给定一个约化 K-群概形 G，存在两个（受限）抽象建筑，其意义见 [KP23，定义 1.5。5]，也就是说，两个满足 loc. cit. 中列出的一系列性质的多重单纯复形。具体而言，

- 由 *Bruhat–Tits* 建筑 $\mathscr{B}(G,\ \breve{K})$，即 G上由 $\breve{K}$ 定义的 [KP23，定义 7.6。1]，以及
- 由 *Bruhat–Tits* 建筑 $\mathscr{B}(G,\ K) := \mathscr{B}(G,\ \breve{K})^{\Xi}$，即 G 上由 K 定义的 [KP23，定义 9.2 .8].

建筑 $\mathscr{B}(G, \breve{K})$ 自带一个 $G(\breve{K}) \rtimes \Gamma$ 的作用；因此， $\mathscr{B}(G, K)$ 自带一个 $G(K)$ 的作用。此外，该构造与基域的有限扩张相容。事实上，给定离散赋值域 L/K 的有限扩张，根据 [KP23, §7.9.2],，存在一个自然的单射，它关于 $G(\breve{K}) \subseteq G(\breve{L})$ 是等变的，

$$\mathscr{B}(G, \breve{K}) \hookrightarrow \mathscr{B}(G, \breve{L}). \tag{2.12.1}$$

若扩张 L/K 是伽罗瓦扩张（分别地，是伽罗瓦且温和分歧的），则上面所示单射的像包含于（分别地，等于）目标的 $\mathrm{Gal}(L/K)$-不变子集（见 [KP23，注 7.9。3]）。此外，根据 [KP23，命题 14.1，1], 给定一个约化 $G \twoheadrightarrow H$ -群之间的满态射，存在一个满态射 K，

$$\mathscr{B}(G, \breve{K}) \twoheadrightarrow \mathscr{B}(H, \breve{K}) \tag{2.12.2}$$

它关于 $G(\breve{K}) \twoheadrightarrow H(\breve{K})$是等变的。

注 2.13。§ K 2.9 中剩余域的完美性 这一假设仅为确保 $G_{\breve{K}}$ 准分裂而作（见注 2.2(2)），这是 [KP23 第 9] 章的构造所要求的。因此，如果直接假设 G 在 $\breve{K}$ 上准分裂，则此假设并非必要。

最后，我们转而定义抛物型群概形。

定义 2.14（抛物子群）。 我们采用§2.9中的记号。

(a) 给定一个约化 $\breve{K}$-群 G，若存在一点 $x \in \mathscr{B}(G, \breve{K})$，使得 $\mathcal{P} = G(\breve{K})^0 \cap \mathrm{Stab}^{G(\breve{K})}(x)$（见 (2.10.1)），则称子群 $\mathcal{P} \subseteq G(\breve{K})$ 为抛物型。(b) 一个仿射、光滑且纤维连通的 $\mathcal{O}$-群概形 $\mathscr{P}$ 称为抛物型，如果其一般纤维 $\mathscr{P}_K$ 是一个约化 K-群概形，并且 $\mathscr{P}(\mathcal{O}_{\breve{K}}) \subseteq \mathscr{P}_K(\breve{K})$ 是 (a) 意义下的旁拉霍里克子群。若此成立，则称此 $\mathscr{P}$ 为 $\mathscr{P}_K$ 的仿抛物模型。(c) 更一般地，一个定义在具有完美剩余域的 Dedekind 环 R 上的仿射、光滑且纤维连通的群概形 $\mathcal{G}$ 称为抛物型，如果对每个极大理想 $\mathfrak{m} \subset R$， $\mathcal{G}$ 到 R 在 $\mathfrak{m}$ 处的 Hensel 化的基变换是 (b) 意义下的抛物子群。

3. Par仿抛物群作为约化群的光滑不变推前 s.

本节旨在证明定理 3.11，该定理确立了每个仿抛物群概形都存在一个（可能是野的）约化化，从而证明了定理 B中的第一项断言。为此，我们采用 Pappas 和 Rapoport [PR24] 的技巧（其思路与 Balaji 和 Seshadri 在 [BS15]中的方法类似）。证明该定理的一个重要步骤是命题 3.10，它本质上就是 [PR24，命题 2。7]。我们采用上述文献中的技巧，将其推导为命题3.9的推论；这一结果曾见于 Larsen [Lar95] 和 Gille [Gil02] 的工作（参见 Cotner [Cot24]）。

如引言所述，本文的主要创新在于处理仿抛物群概形具有野约化化的情形（见定理 3.11）。在这种情况下，群概形的不变推前并非自动光滑，正如例3.15所示。事实上，我们需要单独实施群光滑化，而所得对象称为光滑不变推前。此前，利用群光滑化构造仿抛物模型的想法已见于 [CY01；Yu15]。群光滑化的概念引自 [BLR90，§7。1] 定义 3.4中回顾了这一概念。

我们从以下概念开始，该概念来自 [BLR90，§3。2], 它是研究注记3.5中群光滑化性质所必需的。

3.1. 膨胀。

给定离散赋值环 $\mathcal{O}$ 上的概形 X，设

$$X_{\mathrm{fl}} \hookrightarrow X$$

是最大的平坦 $\mathcal{O}$-子概形，其由 π^∞-挠元生成的拟凝聚理想层的消失所确定。该子概形满足以下万有性质：任何从 $\mathcal{O}$-平坦（等价地，无 $\mathcal{O}$-挠）$\mathcal{O}$-概形出发的 $\mathcal{O}$-态射 $Y \to X$ 都唯一地通过 $X_{\mathrm{fl}} \hookrightarrow X$ 因子分解。

定义 3.2（膨胀）。给定一个 X 上的概形，其中 X 为离散赋值环 $\mathcal{O}$，沿着 X 的 $\mathcal{O}$-特殊纤维的闭子概形 Z 作出的膨胀（亦称仿射胀开）是终对象

$$\mathrm{Bl}_Z^{\mathrm{aff}}(X) \to X$$

在 $\mathcal{O}$-态射 $Y \to X$ 的范畴中，这些态射在限制到 $\mathcal{O}$-特殊纤维后可通过 Z 因子分解，且其源 Y 是平坦的 $\mathcal{O}$-概形。

我们在以下注记中概述 [BLR90，§3.2，命题 1–3]的内容。

注记 3.3。设 $\mathcal{O}$ 是一个离散赋值环，其一致化子为 $\pi \in \mathcal{O}$。设 X 是一个 $\mathcal{O}$-概形，且 Z 是 X 的 $\mathcal{O}$-特殊纤维 $X/(\pi)$ 的一个闭子概形。

(a) 膨胀 $\mathrm{Bl}_Z^{\mathrm{aff}}(X) \to X$ 存在，并且唯一地经由最大的平坦 $\mathcal{O}$-子概形 $X_{\mathrm{fl}} \hookrightarrow X$ 分解。构造此膨胀时，由唯一性，只需假设 X，从而 Z 是仿射的。设 $X = \mathrm{Spec}(A)$，且 $Z = V(I)$，其中 $I \subset A$ 是一个理想。由于 A 是诺特的，我们有 $I = (\pi, g_1, \ldots, g_n)$，其中某些元素为 $g_i \in A$。于是 $\mathrm{Bl}_Z^{\mathrm{aff}}(X) \subsetneq \mathrm{Bl}_Z(X)$ 对应于该 I π $\mathrm{Bl}_Z^{\mathrm{aff}}$ X $=$ A' $_{\mathrm{fl}}$ A' $=$ 由生成的开轨迹。接着我们验证 $A[g_1/\pi, \ldots, g_n/\pi]$ Bl ( ) (Spec( ))，其中 。

(b) 给定一个 $\mathcal{O}$-态射 $f\colon X \to X'$ 以及一个包含 $f(Z)$ 的闭子概形 $Z' \subseteq X'/(\pi)$，存在一个典范态射 $\mathrm{Bl}_Z^{\mathrm{aff}}(X) \to \mathrm{Bl}_{Z'}^{\mathrm{aff}}(X')$。

定义 3.4（光滑化）。对于离散赋值环 $\mathcal{O}$ 上的一般光滑有限型群概形 $\mathscr{G}$，其光滑化 是以下范畴中的终对象

$$\mathscr{G}_{\mathrm{sm}} \to \mathscr{G}$$

该范畴由源为有限型光滑 $\mathcal{O}$-概形 $\mathscr{X}$ 的 $\mathcal{O}$-态射 $\mathscr{X} \to \mathscr{G}$ 构成。

备注 3.5。设 $\mathscr{G}$ 是离散赋值环 $\mathcal{O}$ 上的一般光滑群概形。

(a) 根据定义，如果光滑化 $\mathscr{G}_{\mathrm{sm}} \to \mathscr{G}$ 存在，则它是唯一的。此外，光滑化诱导出一个同构

$$\mathscr{G}_{\mathrm{sm},K} \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}_K \tag{3.5.1}$$

分式域 K 上的纤维之间的同构。

(b) 假设 $\mathscr{G}_{\mathrm{sm}}$ 存在，则 $\mathcal{O}$-概形 $\mathscr{G}_{\mathrm{sm}} \times \mathscr{G}_{\mathrm{sm}}$ 也具有 $\mathcal{O}$-光滑的有限型。因此，唯一性保证该 $\mathscr{G}_{\mathrm{sm}}$ 获得 $\mathcal{O}$-群概形的结构，且典范态射 $\mathscr{G}_{\mathrm{sm}} \to \mathscr{G}$ 保持这一结构。在此情形下，泛性质进一步保证一般纤维上的同构（3.5.1）与它们的群结构相容。

(c) 根据定义 3.4，只要光滑化存在，它就是函子性的；也就是说，给定一个一般光滑有限型 $\mathcal{O}$-群概形 $\mathscr{G}' \to \mathscr{G}$ 之间的态射，就存在一个由有限型 $\mathcal{O}$-群概形组成的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G}'_{\mathrm{sm}} & \longrightarrow & \mathscr{G}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{G}_{\mathrm{sm}} & \longrightarrow & \mathscr{G}. \end{array}$$

(d) 该 $\mathscr{G}_{\mathrm{sm}}$ 可以通过对 $\mathscr{G}$ 进行有限次膨胀来构造，膨胀中心是 $\mathcal{O}$ 的 $\mathscr{G}$-特殊纤维中的正余维闭子群概形。事实上，根据 [BLR90，§7.1，引理 4]，，每次这样的膨胀都会降低 用于衡量光滑性缺陷的 *Néron* 度量；该度量是一个非负整数，定义见 [BLR90，§3。3]。

（e）特别是，上述内容和注释 3.3（a）保证，若 $\mathscr{G}$ 是仿射 $\mathcal{O}$-概形，则 $\mathscr{G}^{\mathrm{sm}}$也如此。

以下内容实质上已包含于 [BLR90，§7.1，定理 5]中。

命题 3.6. 设 $\mathscr{G}$ 是离散赋值环 $\mathcal{O}$ 上一般光滑、有限型的群概形，则以光滑的有限型 $\mathcal{O}$-群概形 $\mathscr{H}$ 为源对象的 $\mathcal{O}$-群同态 $\mathscr{H} \to \mathscr{G}$ 所成的范畴有一个终对象 $\mathscr{G}_{\mathrm{sm}} \to \mathscr{G}$。此外，在 $\mathcal{O}$ 的严格化 $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}$ 上，该终对象满足以下双射

$$*_0\colon \mathscr{G}_{\mathrm{sm}}(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}(\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}) \qquad \textit{and} \qquad *_1\colon H^1_{\text{ét}}(\mathcal{O}, \mathscr{G}_{\mathrm{sm}}) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(\mathcal{O}, \mathscr{G}).$$

本文余下部分 中，给定概形 S 上的群概形 G，将 étal e-局部于 S 平凡化的 记作 $\mathbf{B}G(S)$。

证明。 首先，假设 $*_0$ 诱导一个双射，我们证明存在一个等价

$$\mathbf{B}\mathscr{G}_{\mathrm{sm}}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}\mathscr{G}(\mathcal{O}), \tag{3.6.1}$$

这保证了：取对象的同构类后， $*_1$ 是一个双射。由双射 $*_0$可知，要证明（3.6.1），只需注意到 $\mathscr{G}_{\mathrm{sm}} \to \mathscr{G}$在 $\mathcal{O}$上的小 étale 位点上诱导出一个层的同构。 □

注记 3.7. 当 $\mathscr{G}$不是 $\mathcal{O}$-光滑时，图式（3.6.1）恰好确立了如下等价：在 $\mathcal{O}$ 上的扭子，且在 $\mathcal{O}$上 étale 局部平凡化。

对于 p-进域上的每个单半单约化群，都有一个与之关联的坏素数集合，记作 $S(G)$，Serre 在 [Ser95§2 中使用了这一记法。2]受此及 Pappas 和 Rapoport 在 [PR24], 中的工作的启发，我们引入以下概念，以便陈述下文的命题3.10 。

定义 3.8 (坏单因子)。 设 K 是一个亨泽尔离散赋值域，其剩余域为特征 p，且 H是一个半单 K-群概形，并分解为绝对单 $\check{K}$-群概形 $H \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(\check{K}) = \prod_i H_i$，如 [SGA 3_{III}第 XXVI 分册，推论 6 所述。12]。对每个 i，若 H_i满足以下条件，则称其为 坏单因子：H如果

$$\begin{cases} p \mid 2(n+1) & \text{and } H_i \text{ is of type } A_n, \text{ for some } n \geqslant 2; \\ p = 2 & \text{and } H_i \text{ is of type } B_n, C_n, D_n \text{ (for } n \neq 4), \text{ or } G_2; \\ p = 2, 3 & \text{and } H_i \text{ is of type } D_4, F_4, E_6 \text{ or } E_7 \\ p = 2, 3, 5 & \text{and } H_i \text{ if of type } E_8; \end{cases}$$

若不存在这样的因子，则称 H 没有坏单因子。

以下结果是命题 3.10 的关键要素，已见于 [Lar95，引理 2。4], [Gil02，§2。2], 以及 [Cot24，定理 4。3]）。

命题 3.9。 设 K 是一个具有完美剩余域的亨泽尔离散赋值域，且 H 是一个约化 K-群概形。给定面 $x \in \mathscr{B}(H, \check{K})$的一个重心，存在一个有限伽罗瓦扩张 L/K （离散赋值域之间的扩张），使其分裂 H，并且 x经由 (2.12.1) 映至 $\mathscr{B}(H, \check{L})$ 中的一个超特殊点。此外，若 H 是半单的，且按定义 3.8 的意义下没有坏单因子，则可以将扩张 L/K 选为温和分歧扩张。

证明。 这基本上可由 [Lar95，引理 24]（参见 [Cot24，定理 43]）中的论证推出。注意，尽管 [Lar95，引理 24] 要求 H 在某个非分歧扩张上分裂，但可以去掉这一假设。我们简要说明如何修改该处的论证，使其不依赖这一假设。

令F)F/K在为分裂H的有限伽罗瓦扩张，并特别考虑 H为其约化半单因子都没有坏单因子的情况下，我们可以选择 F/K 为温和分歧的。事实上，在此情形下，该假设保证绝对仿射邓金图（等价地，绝对扩展邓金图）的有限自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathscr{R})$ 的阶 $\mathscr{R}$ 与 p互素。因此，由于基底 $H_{\check{K}}$ 是准分裂的（见注 2.2（3）），

$$\text{the associated absolute Galois representation } \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/\check{K}) \to \mathrm{Aut}(\mathscr{R}) \text{ is tamely ramified.}$$

根据 [SGA 3_{III}，第 XXVI 分册，推论 6。12], 该 $H_{\check{K}}$ 分解为绝对单 $\check{K}$-群概形的乘积，从而归结为 $H_{\check{K}}$ 为绝对单 $\check{K}$-群概形的情形。因此，根据 $\check{K}$在 [KP23§10 中对绝对单 7], -群概形的分类， $H_{\check{K}}$ 可知其在 $\check{K}$的某个温和分歧扩张上分裂。最后，通过极限论证可知， H 自身在 F/K的某个温和分歧扩张上分裂。

随后，如同 [Cot24 定理 4.3], 的脚注所述，我们可以（必要时通过再取一个有限伽罗瓦扩张来替换 F）假设 $x \in \mathscr{B}(H, \check{F})$ 是一个顶点。由于 $H_{\check{F}}$ 是分裂的，根据 [KP23 定义 7.11.1 和注 7.11.2],，对于任意扩张 L/F， $\mathscr{B}(H, \check{L})$ 中特殊点与超特殊点的概念一致。因此，根据分裂情形下的特殊点判据 [KP23 引理 6.4.2],，只需证明存在一个有限伽罗瓦扩张 L/F，使得对于相对于某个固定极大环面的每个根 α，都存在一个导数为 α、且在顶点 $x \in \mathscr{B}(H, \check{L})$ 处取值为零的仿射泛函。这可以仿照 [Lar95 引理 2.4], 中的论证来完成；该文指出，可以选取任意全分歧有限伽罗瓦扩张 L/F，使得 $[L : F]$ 可被 x 表示为余根的 $\mathbb{Q}$-线性组合时所出现的分母整除（等价地说，这些分母整除某个公倍数）。特别地，当 H 是不含坏单因子的半单群时，扩张 L/K 可以选为温和分歧扩张。 □

以下内容已在 [PR24的命题 2 中得到证明。7] 在单连通半单情形下。我们的证明本质上与 loc. cit. 中的证明相同。

命题 3.10. 设 K 是一个具有完美剩余域的亨泽尔离散赋值域。给定一个约化 K-群概形 H 以及一个 伽罗瓦群($\check{K}/K$)-不变抛物子群 $\mathcal{P} \subseteq H(\check{K})$ （在定义 2.14(a)的意义下），存在

- 一个使 H 分裂的离散赋值域有限伽罗瓦扩张 L/K，以及
- $H \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(L)$的一个约化 $\mathcal{O}_L$-模型 $\mathscr{H}$

从而我们有

$$\mathcal{P} = \mathscr{H}(\mathcal{O}_{\check{L}}) \cap H(\check{K}).$$

此外，若 H 是半单的，且按照定义 3.8 不含坏单因子，则存在一个温和分歧扩张 L/K 满足该断言。此外，任何这样的 $\mathcal{O}_L$-群概形 $\mathscr{H}$都配备有一个 伽罗瓦群(L/K)-作用，该作用与其一般纤维上的自然半线性伽罗瓦群(L/K)-作用相容。

证明。 我们首先证明前两个断言。根据定义，取一点 $x \in \mathscr{B}(H,\ \check{K})$，使得

$$\mathcal{P} = \mathrm{Stab}_{H(\check{K})}(x) \cap H(\check{K})^0. \tag{3.10.1}$$

由命题 3.9，存在一个有限伽罗瓦扩张 L/K 使 x 分裂，使得 x 映到 $\mathscr{B}(H,\ \check{L})$ 中的一个超特殊点。此外，当 H 为半单且没有坏单因子时，该扩张 L/K 可选取为温和分歧的。

因此，我们注意到，由 x 与 [的超特殊性以及 KP23 命题 8.4.14], , 存在一个约化 $\mathcal{O}_L$-模型 $\mathscr{H}$，作为$H \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(L)$的模型，使得

$$\mathscr{H}(\mathcal{O}_{\check{L}}) = \mathrm{Stab}_{H(\check{L})}(x) \cap H(\check{L})^0. \tag{3.10.2}$$

我们注意到，由于 H 在 L 上分裂，前引文献保证约化 $\mathcal{O}_L$-群概形 $\mathscr{H}$是纤维连通的。因此，尚需验证第一个断言中所展示的等式。由注2.11，由于我们有

$$H(\check{K})^0 = H(\check{K}) \cap H(\check{L})^0,$$

只需将等式（3.10.1）与（3.10.2）同（2.12.1）结合起来即可。事实上，

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(\mathcal{O}_{\check{L}}) \cap H(\check{K}) &= (\mathrm{Stab}_{H(\check{L})}(x) \cap H(\check{L})^0) \cap H(\check{K}) \\ &= (\mathrm{Stab}_{H(\check{K})}(x) \cap H(\check{K})) \cap H(\check{K})^0.\end{aligned}$$

此外，由于 $x \in \mathscr{B}(H,\ \check{L})$ 是一个 伽罗瓦群(L/K)-不变点，根据 (3.10.2)，可知 $\mathscr{H}(\mathcal{O}_{\check{L}})$ 是 伽罗瓦群(L/K)-不变的。因此，最后一项断言由 [KP23，推论 2.10 得出。10]。 □

下述定理建立在文献中已有的若干情形之上（见备注 4.6）。如引言中所述，其新颖之处在于允许基域扩张可能是野分歧的。

定理 3.11。 给定一个定义在具有完美剩余域的亨泽尔离散赋值域 K 上的仿抛物群概形 $\mathscr{P}$，存在

- 一个有限伽罗瓦扩张 L/K，其伽罗瓦群为 Γ，以及
- 一个约化的 $\mathcal{O}_L$-模型 $\mathscr{G}$，它是 $\mathscr{P} \times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)} \mathrm{Spec}(L)$，并且与一般纤维上的自然半线性 Γ-作用相容，

使得存在一个 $\mathcal{O}_K$-群概形的同构

$$\mathscr{P} \cong \mathfrak{R}^{\Gamma}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathscr{G})_{\mathrm{sm}}.$$

证明。 由命题 3.10，存在一个有限伽罗瓦扩张 L 上的 K，其伽罗瓦群为 Γ，以及一个 Γ-等变的约化$\mathcal{O}_L$-模型 $\mathscr{G}$，其 $\mathscr{P} \times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O})} \mathrm{Spec}(L)$满足

$$\mathscr{P}(\mathcal{O}_{\check{K}}) = \mathscr{G}(\mathcal{O}_{\check{L}}) \cap \mathscr{P}(\check{K}). \tag{3.11.1}$$

然而，根据 [CGP15，命题 A.5.2], , 韦伊限制 $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathscr{G})$ 是光滑、仿射的，且与基变换相容。因此，令 $\mathscr{G}' := \mathfrak{R}^{\Gamma}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathscr{G})$，只需证明 $\mathscr{P} \cong \mathscr{G}'$光滑。根据 [KP23，推论 2.10.11], , 要证明这一断言，只需证明 $\mathscr{P}(\mathcal{O}_{\check{K}}) \cong \mathscr{G}'$光滑$(\mathcal{O}_{\check{K}})$。然而，由于命题 3.6 保证 $\mathscr{G}'$光滑$(\mathcal{O}_{\check{K}}) \cong \mathscr{G}'(\mathcal{O}_{\check{K}})$，问题归结为证明以下等式

$$\mathscr{P}(\mathcal{O}_{\check{K}}) \cong \mathscr{G}'(\mathcal{O}_{\check{K}}). \tag{3.11.2}$$

然而，根据定义，我们有 $\mathscr{G}'(\mathcal{O}_{\check{K}}) = (\mathscr{G}(\mathcal{O}_{\check{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L))^{\Gamma}$。令 $K \subseteq K^u \subseteq L$ 为最大非分歧子扩张，并令 $I = \mathrm{Gal}(L/K^u)$ 和 $\Xi = \mathrm{Gal}(K^u/K)$。于是，存在一个伽罗瓦群的正合列

$$1 \longrightarrow I \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Xi \longrightarrow 1. \tag{3.11.3}$$

然而，假设 $\pi \in L$ 是一致化子，由于 L/K^u 是全分歧的，我们可以写成 $\mathcal{O}_{K^u}[\pi] = \mathcal{O}_L$，由此可得等式

$$\mathcal{O}_{\check{K}}[\pi] = \mathcal{O}_{\check{L}}. \tag{3.11.4}$$

特别地，根据定义，我们有 $\mathcal{O}_{\check{K}} = (\mathcal{O}_{\check{L}})^I$。因此，存在一个 Γ-等变同构

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\check{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L &\cong \left(\prod_{\Xi} \mathcal{O}_{\check{K}}\right) \otimes_{\mathcal{O}_{K^u}} \mathcal{O}_L \\ &\cong \left(\prod_{\Xi} \mathcal{O}_{\check{K}}\right)[\pi] \\ &\cong \left(\prod_{\Xi} (\mathcal{O}_{\check{K}}[\pi])\right),\end{aligned}$$

其中该乘积赋予对角 Ξ-作用。我们注意到，由（3.11.3）诱导的 I-作用不会交换上述乘积的各因子。特别地，取 I-不变部分，我们得到一个 Ξ-等变同构

$$(\mathscr{G}(\mathcal{O}_{\check{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L))^I \cong \prod_{\Xi} \mathscr{G}(\mathcal{O}_{\check{K}}[\pi])^I \underset{(3.11.4)}{\cong} \prod_{\Xi} \mathscr{G}(\mathcal{O}_{\check{K}}).$$

对上述所示同构取 Ξ-不变量，我们得到

$$(\mathscr{G}(\mathcal{O}_{\check{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L))^\Gamma \cong \left(\prod_{\Xi} \mathscr{G}(\mathcal{O}_{\check{K}})\right)^\Xi \cong \mathscr{G}(\mathcal{O}_{\check{K}}).$$

这就完成了证明。 □

备注 3.12（纤维 连通的)。 根据 [KP23 的推论 2.10 中证明的整模型唯一性，11], 我们注意到 th e 光滑不变量推前 p 推前 $\mathfrak{R}^{\Gamma}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathscr{G})_{\mathrm{sm}}$ 自动是纤维连通的。

注 3.13（完美 剩余域）。正如注 2.13所述，Kaletha–Prasad 的方法使我们能够去除完美 ct 剩余域条件 ，前提是 G在 $\check{K}$ 上准分裂（见 [KP23，引言，第 14]页）。

我们以若干例子和注记结束本节。对于环面，约化化与其 Néron 模型密切相关。注 3.14讨论了这一情形，并表明在野分歧情形下，群光滑化至关重要（见例 3.15）。最后，例 3.16 考察了 SL_2 的 Iwahori 子群的约化化；而注 3.17 表明，基变换不保持抛物型的性质。

注记 3.14（环面情形）. 当 $G = T$为 K-环面时，定理3.11 的陈述可以表述得更为明确。事实上，此时存在唯一的抛物型 $\mathcal{O}_K$-模型，即 T的由单位连通分支（T^{ft}）°给出者，它是*ft*Néron模型 T_{ft}关于 T的（见[KP23，§B.4、§B.7 以及 §B.8] 或 [CY01，§3]）。设 L/K 为 T 的分裂域，则此 T_{ft}可写为 $T \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}_{m,\ \mathcal{O}_L})$ 的概形闭包的群光滑化。我们断言，典范态射

$$(T^{\mathrm{ft}})^\circ \cong \mathfrak{R}^{\Gamma}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L})_{\mathrm{sm}}$$

诱导出一个同构，即光滑 $\mathcal{O}_K$-群概形之间的同构，其一般纤维为 T（K）。由定义，由于源在$\mathcal{O}_K$上光滑，借助 [KP23，推论 2.10。11], 该同构可通过考察 $\mathcal{O}_K$-截面而得到。

例 3.15（Edixhoven 的例子）。在这个例子中，我们令 $K = \mathbb{Q}_2[i]$ 为 $\mathbb{Q}_2$ 上 t^2+1 的分裂域。令 T 为 $\mathbb{G}_m$ 的扭形式，$_{\mathbb{Q}_2}$ =Spec($\mathbb{Q}_2[X^{\pm 1}]$)，其定义为 $\mathfrak{R}^{\Gamma}_{K/\mathbb{Q}_2}(\mathbb{G}_{m,K})$，其中 2 阶循环群 $\Gamma = \langle\sigma\rangle$ 的作用由 $\sigma\colon i \mapsto -i$ 和 $\sigma\colon X \mapsto X^{-1}$ 给出。根据备注 3.14， T 的仿抛物模型 $\mathscr{T}$ 由 $\mathfrak{R}^{\Gamma}_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}_2}(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K})_{\mathrm{sm}}$ 给出。然而，正如 [Edi92, Example 4.3], 中所指出的，群光滑化是必要的，因为

$$\mathfrak{R}^{\Gamma}_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}_2}(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}) = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}_2[X,Y]/(X^2+Y^2-1)\right) \qquad \text{whose special fibre is isomorpic to} \quad \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_2}[z]/(z^2).$$

例 3.16 （伊wahori子群）。 令 p 为任意素数，并令 Γ 为二次扩张 $K := \mathbb{Q}_p(\sqrt{p})/\mathbb{Q}_p$ 的伽罗瓦群，其整数环为 $\mathcal{O} \subset K$。伊wahori子群 $\mathcal{I} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 由以下矩阵构成

$$\mathcal{I} := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ p* & * \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$$

其模 p约化后是由上三角矩阵给出的 Borel 子群。接着可以验证$\mathcal{I} = \mathfrak{R}^{\Gamma}_{\mathcal{O}/\mathbb{Z}_p}(\mathscr{H})(\mathbb{Z}_p)$，其中 $\mathscr{H}$是 $SL_{2,K}$的约化 $\mathcal{O}$-模型，与 $SL_{2,\mathcal{O}}$ 共轭（因为每个点都是超特殊），其整数点由下式给出

$$\mathscr{H}(\mathcal{O}) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \frac{1}{\sqrt{p}}\mathcal{O} \\ \sqrt{p}\mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{SL}_2(K)$$

因此，$(K, \mathscr{H})$ 是一个约化化；由于 $K/\mathbb{Q}_p$ 是二次扩张，它甚至是 $\mathcal{I}$的极小约化化。

当 $p = 2$时，扩张 $K/\mathbb{Q}_2$ 是野分歧的。在这种情况下，自然会产生以下问题，而作者尚不清楚答案。群概形 $\mathfrak{R}^{\Gamma}_{\mathcal{O}/\mathbb{Z}_2}(\mathscr{H})$ 是否自动是光滑的？ $\mathcal{I}$ 是否存在温和约化化？

备注 3.17（仿抛物子群的基变换）。 设 L/K 是离散赋值域的有限扩张，且 $\mathscr{P}$ 是 $\mathcal{O}_L$上的仿抛物群概形。当 L/K 是非分歧的时，$\mathscr{P} \times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)} \mathcal{O}_L$ 仍然是一个仿抛物子群。然而，众所周知，即使 L/K 是温和分歧的，这一结论也不再成立。例如，取 $K = \mathbb{Z}_p$ 以及一个具有一致化子的有限扩张 L。那么，正如例 3.16 中所述，伊wahori子群是非约化抛物模型 $\mathscr{I}_L \subset \mathrm{SL}_{2,\mathcal{O}_L}$，其整数点集合由以下矩阵集合给出

$$\mathscr{I}_L(\mathcal{O}_L) := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ \varpi* & * \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_L).$$

至于ng as $\varpi \neq p$，等价地，只要扩张 L/K 是分歧的，[1] 上述集合显然不同于

$$(\mathscr{I}_K \times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L))(\mathcal{O}_L) = \mathscr{I}_K(\mathcal{O}_L).$$

[1]作者感谢 Paul Broussous 在 MathOverflow 帖子中指出这一例子 #459156。

4. 可驯约化抛物型群概形。

本节的目标是证明推论 4.13，该推论针对一般单连通且剩余特征良好的仿抛物群概形确立了 Grothendieck–Serre 猜想。这一结果由两个命题推出。首先，在定理 4.11中，我们证明了任何可驯约化仿抛物群概形下的一般平凡挠子都是平凡的。我们的策略遵循 [Guo20] 中约化情形证明的步骤。其次，在推论 4.5中，我们证明了剩余特征良好时仿抛物群概形是可驯约化的，从而确立了定理 B 的第二个断言。这推广了文献中的若干结果（见注 4.6）。推论 4.5 是由定理 3.11 和命题 4.4得出的。我们.....

g其中包含以下 g 定义和引理 , 这些是 q陈述命题所需的 p位置 4.4.

定义 4.1（中心驯）。环面 T 在离散赋值域 K 上称为驯，如果它在 K 的一个温和分歧扩张上分裂；约化 K-群概形 G 称为中心驯，如果其极大中心环面是驯的。

注 4.2。驯环面是可驯约化的。事实上，这由注3.14得出。

引理 4.3. 设 K 为亨泽尔离散赋值域，并设 $\mathscr{P}$ 为可驯约化的抛物型 $\mathcal{O}_K$-群概形。则任一温和约化的基变换 $(F, \mathscr{G}_{\mathcal{O}_F})$，即温和约化 $(L, \mathscr{G})$（属于 $\mathscr{P}$）沿温和分歧扩张 F/L 的基变换，仍是 $\mathscr{P}$的温和约化。特别地，给定另一个可驯约化的抛物型 $\mathcal{O}_K$-群概形 $\mathscr{P}'$，积 $\mathscr{P} \times \mathscr{P}'$ 是可驯约化的。

证明. 我们从第一个断言的证明开始。由 [KP23，推论 2.10.11], 可知，典范态射 $\mathscr{G} \to \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_F/\mathcal{O}_L}^{\mathrm{Gal}(F/L)}(\mathscr{G}_{\mathcal{O}_F})$ 是一个同构。因此，只要我们证明典范态射

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_F/\mathcal{O}_K}^{\mathrm{Gal}(F/K)}(\mathscr{G}_{\mathcal{O}_F}) \cong \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^{\mathrm{Gal}(L/K)}(\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_F/\mathcal{O}_L}^{\mathrm{Gal}(F/L)}(\mathscr{G}_{\mathcal{O}_F}))$$

是一个同构。与上述情形类似，这是 loc. cit. 的一个推论。

由第一个断言可知，要证明第二个断言，不失一般性，只需假设 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{P}'$ 在 L上均可驯约化。因此，只需注意到函子 $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^{\mathrm{Gal}(L/K)}(-)$ 与乘积相容（参见 [CGP15，命题 A.5.2(3)] 以及 [Edi92，命题 3.1]），即可证明此断言。 □

命题 4.4。设 K 是一个亨泽尔离散赋值域，且 $\mathscr{P}$ 是一个一般纤维为 $\mathscr{P}_K$的抛物型 $\mathcal{O}_K$-群概形。设$x \in \mathscr{B}(\mathscr{P}_K, \check{K})$ 是与 $\mathscr{P}$ 相关联的点（见定义 2.14）。考虑以下命题。

(i) 群 $\mathscr{P}_K$ 是中心驯的，且其导出子群的单连通覆盖没有定义3.8意义下的坏单因子。*(ii)* 存在一个 μ-扩张 $1 \to \mu \to \tilde{G} \to \mathscr{P}_K \to 1$，它定义在 K上，且符合定义2.5，使得 $\tilde{G}$ 具有一个可驯约化的抛物型 $\mathcal{O}_K$-模型 $\tilde{\mathscr{G}}$，该模型与 x 在(2.12.2)下的原像中的点相关联。

(iii) 该 $\mathscr{P}$ 是可驯约化的。

于是(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii)。

证明。(i) $\Longrightarrow$ (ii)：设 G_{sc} 为 $\mathscr{P}_K$ 的导出子群的单连通覆盖。利用同一同一化 $\mathscr{B}(G_{\mathrm{sc}}, \check{K})$ $\mathscr{B}$ $\mathscr{P}_K$ $\check{K}$ [23, 7 6 2 1], $\mathscr{G}$ G_{sc} $\mathscr{P}$ = (,)，该同一化已在 KP(. . .) 中证明。令 表示与 对应的仿抛物模型。根据假设，半单群 G_{sc} 没有坏单因子；特别地，该 $\mathscr{G}$是可驯约化的。令

$$1 \to \mu \to \tilde{G} \to \mathscr{P}_K \to 1$$

为在 (2.6.1) 中构造的 μ扩张，即 $\tilde{G} = G_{\mathrm{sc}} \times T$，其中 T是 $\mathscr{P}_K$的极大中心环面。由于 T在 K的一个温和分歧扩张上分裂，T 的仿抛物模型 $\mathscr{T}$是可驯约化的（见注 4.2）。因此，根据引理 4.3，仿抛物群概形 $\tilde{\mathscr{G}} := \mathscr{G} \times \mathscr{T}$是可驯约化的。最后，为证明 $\tilde{\mathscr{G}}$ 与 x的原像中该点相关联，我们使用等式 $\mathscr{B}(\tilde{G}, \check{K}) = \mathscr{B}(\mathscr{P}_K, \check{K})$；该等式的存在性由 (2.12.2) 和 [KP23, (7.6.2.1)] 得出。

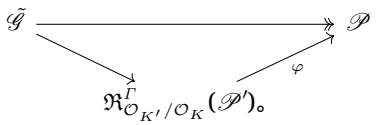
(ii) $\Longrightarrow$ (iii)：设 $\tilde{\mathscr{G}}$是与 $\mathcal{O}_K$ 相关联、对应于其原像中某点的 $\tilde{G}$ 的可驯约化抛物型 x-模型，设 $(K', \tilde{\mathscr{G}}')$ 是 $\tilde{\mathscr{G}}$ 的温和约化，并设 $\Gamma := $ 伽罗瓦群(K'/K)。根据备注 2.6(a)，注意到

$$\text{the Zariski-closure } \tilde{\mu}' \text{ of } \mu \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(K') \text{ inside } \tilde{\mathscr{G}}'$$

包含于约化 $Z(\tilde{\mathscr{G}}')$-群概形 $\mathcal{O}_{K'}$的中心 $\tilde{\mathscr{G}}'$。事实上，这是由 $Z(\tilde{\mathscr{G}}')$ 在 $\mathcal{O}_{K'}$上的平坦性得出的。我们赋予 $\tilde{\mu}'$ 规范的 Γ-半线性作用。根据 [Con14，定理 3.3，4], 此 $Z(\tilde{\mathscr{G}}')$ 为乘性类型；因此，根据 [Con14，推论 B.3，3], 同样的结论也适用于 $\tilde{\mu}'$。因此，商

$$\mathscr{P}' := \tilde{\mathscr{G}}'/\tilde{\mu}'$$

是一个约化 $\mathcal{O}_K$-群概形（例如，参见 [SGA 3_{II}，exposé IX，命题 2。3]），它继承了一个典范的 Γ-等变结构。取不变推前后，我们得到一个光滑 $\mathcal{O}_K$-群概形之间的自然态射三角形（例如，考察 $\mathcal{O}_{\check{K}'}$-截面并参见 [KP23，引理 2.10。13]）



为证明我们的断言，只需证明 φ 是一个同构。根据 [KP23，推论 2.10，11] 再结合两个群概形的光滑性，这可由 $\mathcal{O}_{\check{K}}$-点层面的双射推出。 □

推论 4.5。 给定亨泽尔离散赋值域 K 以及一个抛物型 $\mathcal{O}_K$-群概形 $\mathscr{P}$

（a）其一般纤维 $\mathscr{P}_K$ 要么是一个不含坏单因子的伴随半单 K-群概形，要么（b）满足 $\mathscr{P}_K$ 为中心驯，且其导出子群的单连通覆盖不含坏单因子 ，

存在

- 一个驯分歧有限伽罗瓦扩张 L/K，其伽罗瓦群为 Γ，以及
- 一个约化 $\mathcal{O}_L$-模型 $\mathscr{G}$，其定义在 $\mathscr{P}\times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)}\mathrm{Spec}(L)$ 上，并且在其一般纤维上保持自然的半线性 Γ-作用，

使得我们有一个 $\mathcal{O}_K$-群概形的同构

$$\mathscr{P}\cong\mathfrak{R}^{\Gamma}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathscr{G}).$$

证明。 情形（a）由定理 3.11 以及结果 [Edi92，命题 3.4], 得出，该结果指出，当 L/K 为驯顺可约化时， $\mathcal{O}_K$-概形 $\mathfrak{R}^{\Gamma}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathscr{G})$ 已经是光滑的。情形（b）由（a）及命题 4.4得出。 □

注 4.6. 推论 4.5 建立在文献中已有的结果之上。Balaji 与 Seshadri 在剩余特征 0 的情形下于 [BS15，定理 5.2.7], 中证明了该陈述，其假设条件为一般纤维 $G_K:=\mathscr{P}\times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)}\mathrm{Spec}(K)$ 是定义在 $\mathbb{Z}$上的约化群的基变换。该结果的推广见 [Dam24; DH23]。在正特征与混合特征下，Pappas 与 Rapoport 建立了结果 [PR24，命题 2.8]，针对 G_K 为单连通、绝对单的半单群概形的情形（相关结果见 [CGP14]）。

现在转而证明定理 4.11，它是以下命题 4.7、引理 4.8 和命题 4.9 的推论。

命题4.7。 设 K 是一个亨泽尔离散赋值域，具有完美剩余域，且 $\mathcal{O}_K$-群概形 $\mathscr{P}$ 是抛物型的，其一般纤维 $\mathscr{P}_K$ 是各向异性的单连通半单群。则 $\mathcal{O}_K$ 上的任意一般平凡 $\mathscr{P}$-挠子都是平凡的。

证明。 我们基本沿用 [Guo20，定理5中的证明。1]。令 $\check{K}$ 为包含在可分闭包 K^{sep} 中的最大非分歧扩张 K。假设 $\Gamma:=$ 伽罗瓦群(K^{sep}/K) 以及 $\Xi:=$ 伽罗瓦群$(\check{K}/K)$。为了证明该结论，只需证明限制态射

$$H^1(\mathcal{O}_K,\mathscr{P})\to H^1(K,\mathscr{P}_K)$$

具有平凡核。由于 K 是一个域，目标上同调群同构于 $H^1(\Gamma,\ \mathscr{P}(K^{\mathrm{sep}}))$。此外，由于 $\mathcal{O}_K$ 是亨泽尔的，我们有 $H^1(\mathcal{O}_K,\ \mathscr{P})\cong H^1(\Xi,\ \mathscr{P}(\mathcal{O}_{\check{K}}))$。因此，只需证明等式

$$\ker(H^1(\Xi,\mathscr{P}(\mathcal{O}_{\check{K}}))\to H^1(\Gamma,\mathscr{P}(K^{\mathrm{sep}})))=\{*\}.$$

根据膨胀-限制正合序列 [Ser97，第一章，第 5.8 节 a）], 典范态射 $H^1(\Xi,\ \mathscr{P}(\check{K}))\to H^1(\Gamma,\ \mathscr{P}(K^{\mathrm{sep}}))$ 的核是平凡的。因此，只需证明以下等式

$$\ker(H^1(\Xi,\mathscr{P}(\mathcal{O}_{\check{K}}))\to H^1(\Xi,\mathscr{P}(\check{K})))=\{*\}.$$

设 $c\in H^1(\Xi,\ \mathscr{P}(\mathcal{O}_{\check{K}}))$ 是任意一个 1-余循环，其在 $H^1(\Xi,\ \mathscr{P}(\check{K}))$ 中的像是一个余边界，也就是说，存在元素$g\in\mathscr{P}(\check{K})$，使得对所有 $\gamma\in\Xi$，$c(\gamma)=g^{-1}(\gamma\cdot g)$。只需证明 c 本身是一个余边界；特别地，只需证明 $g\in\mathscr{P}(\mathcal{O}_{\check{K}})$，下文将予以证明。

注意到，$\mathscr{P}_K$ 的单连通性意味着 $\mathscr{P}(\check{K})^0=\mathscr{P}(\check{K})$（见 (2.10.1)）。因此，根据定义 2.14(b)，存在一点 $x\in\mathscr{B}(\mathscr{P}_K,\check{K})$，使得 $\mathscr{P}(\mathcal{O}_{\check{K}})$ 是 $\mathscr{P}(\check{K})$ 对 $\mathscr{B}(\mathscr{P}_K,\check{K})$ 的作用下 x 的稳定子。于是，由于 $\mathscr{P}$ 定义在 $\mathcal{O}_K$ 上，这个 x 在 Ξ 作用下不变。考虑点 $g\cdot x\in\mathscr{B}(\mathscr{P}_K,\check{K})$，其稳定子为 $g\mathscr{P}(\mathcal{O}_{\check{K}})g^{-1}$。根据 g 的定义，计算可知 $g\cdot x$ 也在 Ξ 作用下不变。然而，由于 $\mathscr{P}$ 是各向异性的，根据 [KP23，命题 9.3，$\mathscr{B}(\mathscr{P}_K,\check{K})$ 中存在唯一一个 Γ-不变点，从而证明了 $x=g\cdot x$。特别地，我们有

$$\mathscr{P}(\mathcal{O}_{\check{K}})=g\mathscr{P}(\mathcal{O}_{\check{K}})g^{-1}.$$

等价地，上述所展示的等式表明 g 正规化 $\mathscr{P}(\mathcal{O}_{\check{K}})$。然而，由于 $\mathscr{P}_K$ 是单连通的，由 [KP23，§9.3.26], 我们知道 $\mathscr{P}(\mathcal{O}_{\check{K}})$ 是其在 $\mathscr{P}(\check{K})$ 中的自身正规化子。因此，我们得到 $g\in\mathscr{P}(\mathcal{O}_{\check{K}})$，证明完毕。 □

引理 4.8. 设 L 为亨泽尔离散赋值域，Γ 为投射有限群，且是 $\mathcal{O}_L$ 的自同构群中有限子群的余滤极限；又设 $\mathscr{G}$ 为一个约化 $\mathcal{O}_L$-群概形，带有半线性的 Γ 作用。一般纤维上的每个 Γ-等变抛物子群 $\mathscr{Q}_L\subset\mathscr{G}_L$，都可提升为一个 Γ-等变抛物子群 $\mathscr{Q}\subset\mathscr{G}$，并与一般纤维上的 Γ 作用相容。此外，任何此类提升都会在 $\mathscr{Q}$ 下的一般平凡 Γ-等变扭子范畴与 $\mathscr{G}$ 下的一般平凡等变扭子范畴之间诱导出等价。

证明。将适当性的赋值判别准则应用于参数化 $\mathscr{G}$ 的真抛物子群的概形，可知任何此类抛物子群 $\mathscr{Q}_L \subsetneq \mathscr{G}_L$ 都唯一提升为抛物子群 $\mathscr{Q} \subsetneq \mathscr{G}$。此外，甚至有点的等式 $(\mathscr{G}/\mathscr{Q})(\mathcal{O}_L) = (\mathscr{G}/\mathscr{Q})(L)$，进而可得等式 $\mathscr{Q}(\mathcal{O}_L) = \mathscr{Q}(L) \cap \mathscr{G}(\mathcal{O}_L)$。因此，根据 [KP23，推论 2.10.10],，可在该 $\mathscr{Q}$ 上赋予唯一的 Γ 作用，使之与 $\mathscr{Q}_L$ 和 $\mathscr{G}$ 上的作用相容。最后一个结论则可仿照 [Kun23，命题 7.1.1] 的证明得出。 □

下一个结果可视为 Mostow 定理的等变类比 [Mos56]（该定理后来在以下文献中得到推广[McN13；；15]）。在陈述该结果之前，我们先回顾一些必要的术语（参见 [SGA 3_{III}，讲义 XXVI，命题 1。6]）。设 $\mathscr{Q}$ 是概形 S 上的一个纤维连通、光滑仿射群概形，且 $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{Q}$ 表示其幺幂根基。的 Levi 分解是指以下数据： $\mathscr{Q}$ 一个 S-子群概形 $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{Q}$，以及一条 S-群概形的分裂正合列

$$1 \longrightarrow \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{Q} \underset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \mathscr{M} \longrightarrow 1.$$

子群 $\mathscr{M}$称为 $\mathscr{Q}$的 *Levi* 子群。令 $\mathcal{E}$为 S上的预层，它将一个 S-概形 T映到 $\mathscr{Q}$在 T上的 Levi 分解集合 $\mathcal{E}(T)$。对于 S 上的 Γ-作用，我们用 $H^p_\Gamma(S, \mathscr{U})$表示 S以 $\mathscr{U}$为系数的第 p个 Γ-等变 étale 上同调群。

命题 4.9。设 L 是剩余特征为 p 的亨泽尔离散赋值域，Γ 是 $\mathcal{O}_L$ 的自同构群中阶与 p 互素的有限子群，并设 $\mathscr{Q}$ 是纤维连通、光滑、仿射的 $\mathcal{O}_L$-群概形 $\mathscr{Q}$，且配备了一个半线性的 Γ-作用。假设

(i) 幺幂根基 $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{Q}$ 存在一个由子群构成的 Γ-等变滤过

$$1 = \mathscr{U}_0 \subsetneq \mathscr{U}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathscr{U}_m = \mathscr{U}$$

其逐次商 $\mathscr{U}_n/\mathscr{U}_{n-1}$ 是向量群 $\mathbb{V}(\mathscr{F}_n)$，且 Γ 在其上半线性作用，并且

(ii) 参数化 $\mathscr{Q}$ 的 *Levi* 分解的预层 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{O}_L$ 上的一个 $\mathscr{U}$-挠子。

那么，存在一个 Γ-等变的 *Levi* 分解

$$1 \longrightarrow \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{Q} \underset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \mathscr{M} \longrightarrow 1. \tag{4.9.1}$$

任何如上所述的正合列都会在 Γ-等变的 $\mathscr{Q}$ 扭子范畴与 $\mathscr{M}$ 扭子范畴之间诱导出一个等价（分别地，也适用于一般平凡的扭子）。

证明。 我们首先证明

$$H^1_\Gamma(\mathcal{O}_L, \mathscr{U}) = 0. \tag{4.9.2}$$

考虑局部到整体谱序列 [SGA 4_{II}，exposé V，命题 6。4] $H^p(\mathcal{O}_L, \mathscr{H}^q_\Gamma(\mathcal{O}_L, \mathscr{U})) \Rightarrow H^{p+q}_\Gamma(\mathcal{O}_L, \mathscr{U})$，其中 $\mathscr{H}^q_\Gamma(\mathcal{O}_L, \mathscr{U})$ 表示将一个 $\mathcal{O}_L$-概形 T映射到 $H^q_\Gamma(T, \mathscr{U})$ 的预层进行 étale 层化所得的层。因此，只需证明

$$\mathscr{H}^1_\Gamma(\mathcal{O}_L, \mathscr{U}) = 0 \quad \text{and} \quad H^1(\mathcal{O}_L, \mathscr{U}^\Gamma) = 0. \tag{4.9.3}$$

取 $\mathscr{H}^1_\Gamma(\mathcal{O}_L, \mathscr{U})$ 在闭点处的茎，首个消失归结为证明

$$H^1_\Gamma(\mathcal{O}_{\check{L}}, \mathscr{U}) = 0, \tag{4.9.4}$$

这将在下文证明。

由于 $\mathcal{O}_L$ 的剩余特征与 Γ的阶互素，与 Γ 相关联的常值群概形是线性约化的。因此，分类栈 $\mathbf{B}\Gamma$（Γ-扭子在 $\mathcal{O}_{\check{L}}$ 上的）在 [AOV08] 的意义下是一个驯 Deligne–Mumford 栈（例如参见上述文献定理 3.2 之前的段落），因此根据 Serre 消失定理，$\mathbf{B}\Gamma$ 的高阶相干上同调群消失。由此可得

$$H^q(\mathbf{B}\Gamma, \mathbb{G}_a) \cong H^q_{\text{coh}}(\mathbf{B}\Gamma, \mathcal{O}_{\mathbf{B}\Gamma}) = 0, \text{for all } q > 0. \tag{4.9.5}$$

事实上，由于 $\mathbf{B}\Gamma$ 有一个由仿射概形构成的 étale 覆盖，第一个同构可由类似于 [Sta26、Tag 03P2]中的论证得出。因此，根据（4.9.5）以及 Γ 在每个 $\mathbb{V}(\mathscr{F}_n)$ 上半线性作用这一事实，我们有 $H^q(\mathbf{B}\Gamma, \mathbb{V}(\mathscr{F}_n)) = 0$ 对每个 $q > 0$都成立。因此，写出相应的上同调群长正合列后，由归纳法可得

$$H^q(\mathbf{B}\Gamma, \mathscr{U}) = 0, \text{for all } q > 0. \tag{4.9.6}$$

然而，由于 $\mathcal{O}_{\check{L}}$ 是严格亨泽尔的，Γ-等变小 étale 拓扑 $\mathcal{O}_{\check{L}}$ 等价于 $\mathbf{B}\Gamma$的小 étale 拓扑。特别地，存在一个同构，$H^1(\mathbf{B}\Gamma, \mathscr{U}) \cong H^1_\Gamma(\mathcal{O}_{\check{L}}, \mathscr{U})$，从而得到所需的消失（4.9.4）。

现在我们来证明（4.9.3）中的第二个消失结论。每个 $\mathbb{V}(\mathscr{F}_n)$ 在 étale site 上由一个相干 $\mathcal{O}_L$-模表示，因此 $\mathscr{U}_n$也同样如此。取 Γ-不变量会保持相干性，因为 Γ 是有限的。因此，$\mathscr{U}^\Gamma$ 具有一个有限滤过，其连续商均为相干的。于是，根据 Serre 消失定理，我们得到 $H^1(\mathcal{O}_L, \mathscr{U}^\Gamma) = 0$，如所需。这就证明了（4.9.2）。在证明的其余部分，我们将说明（4.9.2）蕴含所需的结论。

由于按假设，预层 $\mathcal{E}$ 是 $\mathscr{U}$ 上的一个 $\mathcal{O}_L$-挠子，因此，参数化 $\mathcal{E}'$-等变 Levi 分解的预层 Γ是 $\mathscr{Q}$ 上的一个 $(\Gamma,\mathscr{U})$-丛，含义见 [Dam24，定义 3]。然而，由（4.9.2），这个 $\mathcal{E}'$ 在 $\mathcal{O}_L$上有一个截面，这表明（4.9.1）成立。最后，假设给定了这样一个 Levi 分解。由于正合列（4.9.1）是分裂的， Γ-等变上同调群的长正合列给出一个短正合列

$$1 \to H^1_\Gamma(\mathcal{O}_L,\mathscr{U}) \to H^1_\Gamma(\mathcal{O}_L,\mathscr{Q}) \to H^1_\Gamma(\mathcal{O}_L,\mathscr{M}) \to 1.$$

最后的断言由（4.9.2）得出，证明至此完成。 □

作为定理4.11的一个准备，我们需要知道，等变抛物子群 $\mathscr{Q}$ 满足命题 $\mathcal{O}_L$的假设，其中4.9将在下文证明。

引理 4.10。 设 L 是一个亨泽尔离散赋值域，设 Γ 是 $\mathcal{O}_L$ 的自同构群的有限子群，并设 $\mathscr{Q}$ 是 Γ-等变抛物子群，属于一个赋有半线性 $\mathscr{Q}$ 作用的约化 $\mathcal{O}_L$-群概形。则幺幂根基 Γ满足命题 $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{Q}$ *4.9* 中的条件 (i)和 (ii)。

证明。 由于 $\mathscr{U}$在 $\mathscr{Q}$的自同构下保持不变，它自然继承一个相容的半线性 Γ作用。此外， $\mathscr{U}$上的典范滤过（见 [SGA 3_{III}，第 XXVI 分册，命题 2。1]）也继承了一个相容的半线性 Γ作用。因此，该 Γ 在每个分次块 $\mathbb{V}(\mathscr{F})$上半线性作用 $\mathscr{U}$，这说明它满足（i）。为证明它满足（ii），只需使用[SGA 3_{III}，第 XXVI 分册，推论 1。9]。 □

定理 4.11。设有一个亨泽尔离散赋值环 $\mathcal{O}_K$，其剩余域完美，分式域为 K，并设有一个抛物型$\mathcal{O}_K$-群概形 $\mathscr{P}$，按照定义 *1.3* 的意义是可驯约化的，且其一般纤维 $\mathscr{P}_K$ 为半单，则有等式

$$\ker(H^1(\mathcal{O}_K,\mathscr{P}) \to H^1(K,\mathscr{P}_K)) = \{*\}.$$

证明。设 $(L,\mathscr{G})$ 是 $\mathscr{P}$ 的一个温和约化化，伽罗瓦群为 $\Gamma := \mathrm{Gal}(L/K)$。在本证明中，对于每个 $R \in \{\mathcal{O}_L, L\}$，给定一个 Γ-等变的 R-群概形 $\mathscr{H}$，记号 $H^1_\Gamma(R,\mathscr{H})$ 表示 $\mathrm{Spec}(R)$ 上 Γ-等变 $\mathscr{H}$-挠子的 Γ-等变等价类所成的带基点集合。由于 L/K 是温和的，根据 PR24，命题 3.2]，，要证明我们的结论，只需证明等式

$$\ker(H^1_\Gamma(\mathcal{O}_L,\mathscr{G}) \to H^1_\Gamma(L,\mathscr{G}_L)) = \{*\},$$

其中 $\mathscr{G}_L$ 表示 $\mathscr{G}$ 的一般纤维。我们对 $\mathscr{G}_L$ 的秩作归纳。

根据命题4.7，我们可以假设 $\mathscr{P}_K$ 是各向同性的，这保证了 $\mathscr{P}_K$ 有一个真抛物子群（见[Čes22$_{\text{Surv}}$，§1.3。6]）。将 $\mathscr{P}_K$ 的一个极小抛物子群拉回，便得到一个 Γ-等变抛物子群 $\mathscr{Q}_L$，它是 $\mathscr{G}_L$的子群。根据引理4.8，该子群可延拓为一个 Γ-等变抛物型 $\mathcal{O}_L$-子群 $\mathscr{Q}$，它是$\mathscr{G}$的子群。此外，同一引理还给出了典范同构

$$\ker(H^1_\Gamma(\mathcal{O}_L,\mathscr{Q}) \to H^1_\Gamma(L,\mathscr{Q}_L)) \cong \ker(H^1_\Gamma(\mathcal{O}_L,\mathscr{G}) \to H^1_\Gamma(L,\mathscr{G}_L)).$$

因此，要完成归纳步骤，只需证明左侧的核是平凡的。

根据命题 4.9 和引理 4.10，存在一个 Γ-等变 Levi 分解 $\mathscr{G} \cong \mathscr{M} \rtimes \mathscr{U}$。此外，同一引理还确立了如下典范同构：

$$\ker(H^1_\Gamma(\mathcal{O}_L,\mathscr{Q}) \to H^1_\Gamma(L,\mathscr{Q}_L)) \cong \ker(H^1_\Gamma(\mathcal{O}_L,\mathscr{M}) \to H^1_\Gamma(L,\mathscr{M}_L)).$$

然而，抛物子群 $\mathscr{Q}_L$ 的极小性保证，约化 L-群 $\mathscr{M}_L$ 的秩严格小于 $\mathscr{G}_L$的秩。因此，根据归纳法，右侧的核是平凡的。至此，归纳步骤完成，证明也随之完成。 □

给定亨泽尔离散赋值域 K 上的中心单代数 D，其剩余域为 κ，我们将约化范数为一的元素群记为 $\mathrm{SL}_1(D)$，将其伴随商记为 $\mathrm{PGL}_1(D)$。对于适当的整数 $m \geqslant 2$，这些群分别是 SL_m 和 PGL_m 的非准分裂内 K-形式。特别是，当 $p \mid m$时，这些群是坏单因子。事实上，若 $\mathrm{cd}(\kappa) \leqslant 1$ 且 $p \neq 2$，3，5，我们知道任何坏单因子都同构于这种类型的群（见注记4.14）。因此，下面的结果对于这些群而言具有独立的意义，因为它回答了问题 1.1。

命题4.12。 设 K 是一个剩余域 κ 为完美且特征为 $p \neq 2$的亨泽尔离散赋值域，设 D 是一个中心单纯 K-代数，并设 $\mathscr{P}$ 是一个抛物型 $\mathcal{O}_K$-群概形，其一般纤维同构于 $\mathrm{SL}_1(D)$ 或 $\mathrm{PGL}_1(D)$。那么，存在一个约化的 $\mathcal{O}_K$-子群概形 $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{P}$，其特殊纤维 $\mathscr{R}_\kappa$ 典范地映射同构到 $\mathcal{O}_K$的特殊纤维 $\mathscr{P}_\kappa$ 的极大约化商 $\mathscr{P}_{\mathrm{red},\,\kappa}$。此外，我们有等式

$$\ker(H^1(K,\mathscr{R}) \to H^1(K,\mathscr{P})) = \{*\}, \tag{4.12.1}$$

特别地， $\mathscr{P}$上的任意一般平凡 $\mathcal{O}_K$ 挠子都是平凡的。

证明。由于 κ 是完美的，包含于 D 中的最大 K子域 F 在 K 上是非分歧的（见 [Ser79，第 XII 章，§2，命题 2]）。事实上，这个 D 在 F上是分裂的，因此 $\mathscr{P}$的一般纤维 $\mathscr{P}_K$ 也是如此。因此，这样一个$\mathscr{R}$ 的存在性正是 [McN20，定理 1]的内容。根据 [McN20，在 $\mathscr{P}_K = \mathrm{SL}_1(D)$的情形下，§5.1]，，一般纤维 $\mathscr{R}_K$ 适合于一个正合列

$$1 \to \mathscr{R}_K \to \mathfrak{R}_{F/K}(\mathbb{G}_{m,F}) \to \mathbb{G}_{m,K} \to 1.$$

由希尔伯特第90定理，计算可得 $H^1(K, \mathscr{R}_K) = \{*\}$，由此可得等式（4.12.1）。或者，当 $\mathscr{P} = \mathrm{PGL}_1(D)$ 时，按定义存在一个态射 $H^1(K, \mathscr{P}_K) \to \mathrm{Br}(K)$（具有平凡核）。然而，通过调整上述文献中的论证，我们证明存在一个正合列

$$1 \to \mathbb{G}_{m,K} \to \mathfrak{R}_{F/K}(\mathbb{G}_{m,F}) \to \mathscr{R}_K \to 1,$$

这表明存在一个注入 $H^1(K, \mathscr{R}_K) \hookrightarrow \mathrm{Br}(K)$，从而得到等式（4.12.1）。因此，只需证明最后的断言。

例如，根据 [BČ20，定理2.1，6]，我们得到一个同构 $H^1(\mathcal{O}_K, \mathscr{P}) \cong H^1(\kappa, \mathscr{P}_\kappa)$。由于 κ 是完美的，$\mathscr{P}_\kappa$ 的幺幂根基是分裂的，这表明 $H^1(\kappa, \mathscr{P}_\kappa) \cong H^1(\kappa, \mathscr{P}_{\mathrm{red},\,\kappa})$。根据 $\mathscr{R}$ 的定义，再结合上述文献，我们因此得到

$$H^1(\mathcal{O}_K, \mathscr{R}) \cong H^1(\mathcal{O}_K, \mathscr{P}).$$

最终断言于是是（4.12.1）以及在 $\mathcal{O}_K$ 上、约化 $\mathcal{O}_K$-群概形 $\mathscr{R}$下的一般平凡扭子之平凡性的推论。

□

推论4.13. 设 K 是一个亨泽尔离散赋值域，具有特征为 $p \neq 2$、3、5 的完美剩余域，并设 $\mathscr{P}$ 是一个抛物型 $\mathcal{O}_K$-群概形，其一般纤维 $\mathscr{P}_K$ 是一个单连通半单 K-群概形，使得 $p \nmid (n+1)$，每当 $\mathscr{P}_K$ 含有某个 $n \geqslant 2$ 的型 A_n 的几乎单因子时。则 $\mathcal{O}$ 上任意一般平凡 $\mathscr{P}$-挠子都是平凡的。

证明。 我们注意到函子 $\mathscr{B}(-, \check{K})$ 保持 K-群概形的乘积。特别地，K-群概形之积的任意仿抛物模型均可表示为各因子的某些抛物模型之积。然而，由 [Con14、命题6.4.4及注记6.4.5]，，一般纤维 $\mathscr{P}_K$ 是几乎单半单 K-群概形之积。因此，不失一般性，我们可以假设 $\mathscr{P}_K$ 本身是几乎单的。

由于 $\mathscr{P}_K$ 没有坏单因子，因此该结论由定理4.11 和推论4.5得出。 □

注记4.14. 对类型为 A_n、定义在满足条件 $\mathrm{cd}(\kappa) \leqslant 1$ 的亨泽尔离散赋值域 K 上的殆单群概形进行逐一分析后可知（见 [KP23, §10.7]，另见 [Tit79] 和 [Gro12, 命题 5.1 及 §7]），这样的群 G 是定义 3.8 意义下的坏单因子，当且仅当它是某个中心单 K-代数 D 上的 $G \cong \mathrm{SL}_1(D)$ 或 $\mathrm{PGL}_1(D)$。若不满足条件 $\mathrm{cd}(\kappa) \leqslant 1$，则对于一般的完美剩余域，这种分类尚不可知。若能得到这样的分类，那么命题4.12 将把推论4.13 推广到 $p \mid (n+1)$ 的情形，其中 $p \neq 2$ 为 3、5，即使 G 含有某个类型为 A_n 的殆单因子（对某个 $n \geqslant 2$），亦然。

注记 4.15。 我们对推论 4.13 的证明不同于 Zidani 的证明 [Zid25a；Zid25b]。特别是，即使在 Zidani 处理的情形中——即当 $\mathscr{P}_K$ 为单连通，或为准分裂且伴随时——我们的论证也在更严格的假设下提供了一种替代证明。

致谢

本项目始于作者在多伦多大学做博士后期间，于多伦多菲尔兹研究所与 Vikraman Balaji 和 Elden Elmanto 的一次交谈。作者衷心感谢 Elden Elmanto 和 Kęstutis Česnavičius 一直以来的支持与指导。此外，作者深受 Vikraman Balaji、Kęstutis Česnavičius、Elden Elmanto 以及 Alex Youcis 的启发；他们的想法、见解和建议对本工作的开展至关重要。本文中的许多证明都源于与他们的讨论。作者特别感谢 Philippe Gille 提请他关注 Anis Zidani 的工作 [Zid25a]，，并感谢他、Ofer Gabber、Gopal Prasad、Timo Richarz 和 Anis Zidani 进行了许多有益的讨论。作者还感谢 Philippe Gille 和 Anis Zidani 仔细阅读早期草稿并提出详尽意见。

本项目部分经费来自 PNRR 项目 CF 44/14.11.2022“光滑曲面的上同调霍尔代数及其应用”以及加拿大自然科学与工程研究理事会探索资助项目 RGPIN-2025-07114“动机上同调：理论与应用”，并承蒙金奈数学研究所和洛达数学科学研究所提供接待。

参考文献

[AOV08] Dan Abramovich、Martin Olsson 和 Angelo Vistoli. “正特征下的驯性叠”. In: Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 58.4 (2008), pp. 1057–1091. issn: 0373-0956,1777-5310. doi: 10.5802/aif.2378. url: https://doi.org/10.5802/aif.2378.[BP25] V. Balaji 和 Y. Pandey. 共形块、抛物型扭子与 Borel-Weil-Bott. 2025 2506.17573 [math.AG] https://arxiv.org/abs/2506.17573 arXiv: . url: .[BS15] V. Balaji 和 C. S. Seshadri. “ 紧黎曼曲面上的抛物型 $\mathscr{G}$- 扭子模空间 ”. In: J. Algebraic Geom. 24.1 (2015), pp. 1–49 1056 3911,1534 7486 10.1090/S1056-3911-2014-00626-3 https://doi.org/10.1090/S1056-3911-2014-00626-3 . issn: - -. doi: . url: .

[BF17] Eva Bayer-Fluckiger 和 Uriya A. First. “有理同构的厄米形式与某些非约化群的扭子”. In: Adv. Math. 312 2017 150 184 0001 8708,1090 2082 10.1016/j.aim.2017.03.012 https://doi.org/10.101 ( ), pp. – . issn: - - . 6/j.aim.2017.03.012 doi: . url: .[Bor91] Armand Borel. 线性代数群. 第二版. Vol. 126. 数学研究生教材. 施普林格出版社, 纽约, 1991, pp. xii+288. isbn: 0-387-97370-2. doi: 10.1007/978-1-4612-0941-6.[BG14] Mikhail Borovoi 和 Cristian D. González-Avilés. “任意基概形上约化群概形的代数基本群”. In: Cent. Eur. J. Math. 12.4 (2014), pp. 545–558. issn: 1895-1074,1644-3616. doi: 10.2478/s11533-013-0363-0. url: https://doi.org/10.2478/s11533-013-0363-0.[BLR90] Siegfried Bosch、Werner Lütkebohmert 和 Michel Raynaud. Néron 模型. Vol. 21. 数学成果丛书及其边界领域 (3 [3] 1990, +325 3 540 50587 3 10.1007) 数学及相关领域成 /978-3-642-51438-8 果丛书 ( ) . 施普林格出版社, 柏林, pp. x . isbn: - - - . doi: .[BČ20] Alexis Bouthier 和 Kęstutis Česnavičius. 环群上的扭子与 Hitchin纤维化. 版本 v 3 2020 1908 . 07480. . arXiv: .[BT$_{\text{III}}$] [math.AG] F. Bruhat 和 J. Tits. “局部域上的代数群. 第三章. 补充内容及其在伽罗瓦上同调中的应用”. In: J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 34.3 (1987), pp. 671–698. issn: 0040-8980.[BT$_{\text{II}}$] F. Bruhat 和 J. Tits. “群概形与局部域上经典群的建筑. II. 酉群”. In: Bull. Soc. Math. France 115.2 (1987), pp. 141–195. issn: 0037-9484. url: http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1987__115__141_0.[Čes22$_{\text{Surv}}$] Kęstutis Česnavičius. “正则环上扭子的相关问题”. In: Acta Math. Vietnam. 47.1 (2022), pp. 39–107. issn: 0251-4184. doi: 10.1007/s40306-022-00477-y.[CY01] Ching-Li Chai 和 Jiu-Kang Yu. “环面的 Néron 模型与 Artin导子的同余关系”. In: Ann. of Math. (2) 154.2 (2001). 附录由 Ehud de Shalit 撰写, pp. 347 382 0003 486 1939 8980 10.2307/3062100 https://doi.org/1 – . issn: - X, - . doi: . 0.2307/3062100 url: .[CGP14] V. Chernousov 、 P. Gille 和 A. Pianzola. “ 环约化群概形与李代数的共轭定理 ”. In: Bull. Math. Sci. 4 2 2014 281 324 1664 3607,1664 3615 10.1007/s13373-014-0052-8 https://doi.org/10.1007 . ( ), pp. – . issn: - - . /s13373-014-0052-8 doi: . url: .[Col08] Jean-Louis Colliot-Thélène. “ 连通线性群的拟挠消解 ”. In: J. Reine Angew. Math. 618 (2008), pp. 77–133. issn: 0075-4102,1435-5345. doi: 10.1515/CRELLE.2008.034. url: https://doi.org/10.1515/CRELLE.2008.034.[CS87] Jean-Louis Colliot-Thélène 和 Jean-Jacques Sansuc. “拟挠环面上的主齐性空间：应用”. In: J. Algebra 106.1 (1987), pp. 148–205. issn: 0021-8693. doi: 10.1016/0021-8693(87)90026-3.[Con14] Brian Conrad. “约化群概形”. In: 群概形专题. Vol. I. Vol. 42/43. 综合论述. 法国数学会, 巴黎, 2014, pp. 93–444.[CGP15] Brian Conrad、Ofer Gabber 和 Gopal Prasad. 伪约化群. 第二版. Vol. 26. 新数学专著. 剑桥大学出版社, 剑桥, 2015, pp. xxiv+665. isbn: 978-1-107-08723-1. doi: 10.1017/CBO9781316092439.[Cot24] Sean Cotner. “特征簇的态射”. In: Int. Math. Res. Not. IMRN 16 (2024), pp. 11540–11548. issn: 1073-7928,1687-0247. doi: 10.1093/imrn/rnae124. url: https://doi.org/10.1093/imrn/rnae124.[Dam24] Chiara Damiolini. “关于等变丛及其模空间”. In: C. R. Math. Acad. Sci. Paris 362 (2024), pp. 55–62. issn: 1631-073X,1778-3569. doi: 10.5802/crmath.524. url: https://doi.org/10.5802/crmath.524.[DH23] Chiara Damiolini 和 Jiuzu Hong. “(Γ, G)-丛的局部类型与抛物型群概形”. In: Proc. Lond. Math. Soc. (3) 127.2 (2023), pp. 261–294. issn: 0024-6115,1460-244X. doi: 10.1112/plms.12544. url: https://doi.org/10.1112/plms.12544.[Dem15] Cyril Demarche. “非阿贝尔 Hochschild 上同调与群层扩张”. In: 群概形专题. Vol. II. Vol. 46. 综合论述. 法国数学会, 巴黎, 2015, pp. 255–292. isbn: 978-2-85629-819-0.[Edi92] Bas Edixhoven. “Néron 模型与温和分歧”. In: Compositio Math. 81.3 (1992), pp. 291–306. issn: 0010-437X,1570-5846. url: http://www.numdam.org/item?id=CM_1992__81_3_291_0.[Gil02] P. Gille. “仿射直线上的扭子”. In: Transform. Groups 7 3 2002 231 245 1083 4362 10.1007/s00031-002- . ( ), pp. – . issn: - . 0012-3 doi: .[Gro12] Benedict Gross. “抛物型子群”. 2012. url: https://people.math.harvard.edu/~gross/preprints/parahorics.pdf.[Guo 20] Ning Guo. 半局部 Dedekind 环上的 Grothendieck–Serre 猜想. 2020 https://doi.org/10.1007/s00031-02 . doi: .[Hei10] 0-09619-8 Jochen Heinloth. “ $\mathscr{G}$ 347 3 2010 499 528 0025 5831,1432 1807 10.1007 - /s00208-009-0443-4 https://doi.org/10.1007/s00208-009-0443-4 丛的统一化”. In: Math. Ann. . ( ), pp. – . issn: - - . doi: . url: .[KP23] Tasho Kaletha 和 Gopal Prasad. Bruhat-Tits理论——一种新方法. Vol. 44. 新数学专著. 剑桥大学出版社, 剑桥, 2023, pp. xxx+718. isbn: 978-1-108-83196-3.[Kun23] Arnab Kundu. “赋值环上的光滑代数上的扭子”. 博士学位论文. 2023 https://cnrs.hal.science/tel-0 . 4129990/ url: .[Lar95] M. Larsen. “相容系统中伽罗瓦作用的极大性”. In: Duke Math. J. 80.3 (1995), pp. 601–630. issn: 0012-7094,1547-7398. doi: 10.1215/S0012-7094-95-08021-1. url: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-95-08021-1.[McN13] George McNinch. “Levi因子的下降”. In: Arch. Math. (Basel) 100.1 (2013), pp. 7–24. issn: 0003-889X,1420-8938. doi: 10.1007/s00013-012-0467-y. url: https://doi.org/10.1007/s00013-012-0467-y.[McN20] George McNinch. “仿抛物群概形的约化子群概形”. In: Transform. Groups 25.1 (2020), pp. 217–249. issn: 1083-4362,1531-586X. doi: 10.1007/s00031-018-9508-3. url: https://doi.org/10.1007/s00031-018-9508-3.[McN25] George J. McNinch. “线性代数群的 Levi分解与非阿贝尔上同调”. In: Pacific J. Math. 336.1-2 (2025), pp. 379 397 0030 8730,1945 5844 10.2140/pjm.2025.336.379 https://doi.org/10.2140/pjm.2025.336 – . issn: - - . doi: . .379 url: .

[Mil17] J. S. Milne. 代数群。第 170 卷。剑桥高等数学研究。域上有限型群概形理论。剑桥大学出版社，剑桥，2017 年，第 xvi+644 页。ISBN：978-1-107-16748-3。DOI： 10.1017/9781316711736。URL：https://doi.org/10.1017/9781316711736。[Mos56] G. D. Mostow。“代数群的完全可约子群”。载于：《美国数学杂志》78（1956 年），第 200–221 页。ISSN：0002-9327,1080-6377。DOI： 10.2307/2372490。URL： https://doi.org/10.2307/2372490。[Nis82] Yevsey A. Nisnevich。《半单群的 étale 上同调与算术》。博士学位论文——哈佛大学。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，1982 年，第 107 页。[PR24] Georgios Pappas 和 Michael Rapoport。“曲线上的温和分歧 $\mathcal{G}$丛”。载于：《代数几何》11.6（2024 年）。附录由 Brian Conrad 撰写，第 796–829 页。ISSN：2313-1691,2214-2584。[SGA 3_{II}]《群概形。II：乘法型群及一般群概形的结构》。数学讲义，第 152 卷。布瓦玛丽代数几何研讨班 1962/64（SGA 3），由 M. Demazure 和 A. Grothendieck 主编。施普林格出版社，柏林—纽约，1970 年，第 ix+654 页。[SGA 3_{III}]《群概形。III：约化群概形的结构》。数学讲义，第 153 卷。布瓦玛丽代数几何研讨班 1962/64（SGA 3），由 M. Demazure 和 A. Grothendieck 主编。施普林格出版社，柏林—纽约，1970 年，第 viii+529 页。[Ser79] Jean-Pierre Serre。《局部域》。第 67 卷。数学研究生教材。由 Marvin Jay Greenberg 从法文译出。施普林格出版社，纽约—柏林，1979 年，第 viii+241 页。ISBN：0-387-90424-7。[Ser95] Jean-Pierre Serre。“伽罗瓦上同调：进展与问题”。载于：227 783, 4, 229 1993 94 1995, 257。《布尔巴基研讨班》，第 / 卷，报告第 – 号。[Ser97] Jean-Pierre Serre。《伽罗瓦上同调》。由 Patrick Ion 从法文译出，并由作者修订。施普林格出版社，柏林，
1997， +210 3 540 61990 9 10.1007/978-3-642-59141-9 https://doi.org/10.1007/978-3-642-591 第 x 页。41-9
ISBN：---。DOI：。URL：。[Sta26] Stacks项目作者。Stacks项目。 https://stacks.math.columbia.edu。2026 年。[SGA 4_{II}]《托扑理论与概形的 étale 上同调》。第 2 卷。数学讲义，第 270 卷。布瓦玛丽代数几何研讨班 1963–1964（SGA 4），由 M. Artin、A. Grothendieck 和 J. L. Verdier 主编。N. Bourbaki、P. Deligne 和 B. Saint-Donat 协助编写。施普林格出版社，柏林—纽约，1972 年，第 iv+418 页。[Tit79] J. Tits。“局部域上的约化群”。载于：《自守形式、表示与 L函数》（俄勒冈州立大学科瓦利斯分校，1977 年，纯数学专题讨论会论文集），第 1 部分。第 XXXIII 卷。纯数学专题讨论会论文集。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1979 年，第 29–69 页。ISBN：0-8218-1435-4。[Yu15] Jiu-Kang Yu。“Bruhat-Tits理论中与凹函数相关的光滑模型”。载于：《群概形专题》第 III 卷。第 47 卷。全景与综合。法国数学会，巴黎，2015 年，第 227–258 页。ISBN：978-2-85629-820-6。[Zid25a] Anis Zidani。《半局部戴德金环上布吕阿-蒂茨群概形的算术》。
2025 2501.13300。arXiv：。[math.AG] https://arxiv.org/abs/2501.13300
URL：。[Zid25b] Anis Zidani。《亨泽尔离散赋值环上布吕阿-蒂茨子群的算术》。
2025 2509.17929。arXiv：。[math.GR] https://arxiv.org/abs/2509.17929
URL：。

罗马尼亚科学院西米翁·斯托伊洛数学研究所（IMAR），布加勒斯特，罗马尼亚 电子邮箱：akundu.math@gmail.com。2025年3月